TADEUSZ KLUSS

526.46 : 518.2

Pomocnicze tablice liczbowe do przenoszenia współrzędnych geograficznych metodą prof. Milberta

Dotychczasowe znane w literaturze metody przenoszenia współrzędnych geograficznych opierają się na wzorach wyprowadzonych analitycznie. Żmudne obliczenia współczynników tych wzorów są powodem dużej pracochłonności obliczeń.

W pracy „Numeryczna metoda obliczania współczynników szeregów potęgowych głównego zadania geodezyjnego" — prof. Milbert podaje bezpośredni sposób obliczania współczynników, tj. bez wyprowadzenia wzorów analitycznych, oraz wartości liczbowe samych współczynników dla długości linii geodezyjnej do 100 km z dokładnością do 0″,000 001 na elipsoidzie Hayforda i Bessela.*

Praca wymieniona może być w pełni wykorzystana dopiero po sporządzeniu pomocniczych tablic liczbowych ułożonych np. co 1′ dla argumentu φ.

Poniżej podaje się zasady metody prof. Milberta, fragment pomocniczych tablic oraz przykład.

Szereg potęgowy głównego zadania geodezyjnego rozwinięty według potęg s przedstawia się w formie:

$$
\begin{aligned}
\varphi' - \varphi &= \frac{d\varphi}{ds} s + \frac{d^2\varphi}{ds^2} \cdot \frac{s^2}{2!} + \frac{d^3\varphi}{ds^3} \frac{s^3}{3!} + \ldots \\
\lambda' - \lambda &= \frac{dl}{ds} s + \frac{d^2 l}{ds^2} \frac{s^2}{2!} + \frac{d^3 l}{ds^3} \frac{s^3}{3!} + \ldots \qquad \ldots (1) \\
\alpha' - \alpha &= \frac{d\alpha}{ds} s + \frac{d^2\alpha}{ds^2} \frac{s^2}{2!} + \frac{d^3\alpha}{ds^3} \frac{s^3}{3!} + \ldots
\end{aligned}
$$

gdzie pierwsze pochodne oznaczają:

$$
\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cos\alpha, \quad \frac{dl}{ds} = \frac{V}{c} \sec\varphi \, \sin\alpha, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{V}{c} \operatorname{tg}\varphi \, \sin\alpha \qquad (2)
$$

* Geodezja i Kartografia: Kwartalnik Naukowy 1952 r. — t. 1, zeszyt 4.

Dalsze pochodne wzorów (1) obliczane są algebraicznie przez kolejne różniczkowanie wzorów (2). Tak np. w podręczniku Jordana obliczono współczynniki do 5-go rzędu. Rachunek tymi wzorami jest tak pracochłonny, że tylko w wyjątkowych wypadkach bywa używany dla większych odległości.

Prof. Milbert przedstawia szereg (1) w formie krakowianowej w postaci:

$$\varphi' - \varphi = \left\{\begin{matrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 0 & F_{20} & F_{40}\cdots \\ F_{01} & F_{21} & F_{41}\cdots \\ F_{02} & F_{22} & F_{42}\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 1 \\ v^2 \\ v^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\}$$

$$\lambda' - \lambda = \left\{\begin{matrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} L_{10} & L_{30} & L_{50}\cdots \\ L_{11} & L_{31} & L_{51}\cdots \\ L_{12} & L_{32} & L_{52}\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} v \\ v^3 \\ v^5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\alpha' - \alpha = \left\{\begin{matrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} A_{10} & A_{30} & A_{50}\cdots \\ A_{11} & A_{31} & A_{51}\cdots \\ A_{12} & A_{32} & A_{52}\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} v \\ v^3 \\ v^5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\}$$

Gdzie u i v oznaczają:

$$u = s \cos\alpha, \qquad v = s \sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Elementy krakowianu (3), tj. F_{01}, F_{02},.... F_{20}, F_{21}.... F_{40}, F_{41}.... (podobnie L i A) podaje prof. Milbert w formie szeregowej jako funkcję f następująco:

$$F_{ij} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} a_{ij} \\ b_{ij} \\ c_{ij} \\ d_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\}, \qquad L_{ij} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} a'_{ij} \\ b'_{ij} \\ c'_{ij} \\ d'_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\}, \qquad A_{ij} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} a''_{ij} \\ b''_{ij} \\ c''_{ij} \\ d''_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \quad (5)$$

gdzie f jest funkcją szerokości geograficznej:

$$f = \frac{\varphi^0 - 52^0}{3^0} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

natomiast elementy a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} są stałymi wartościami liczbowymi obliczonymi dla każdego F_{ij}. Tak np. dla $\varphi = 49^0 30'$ będzie:

$$F_{01} = \begin{Bmatrix} 1.000\,000\,00 \\ -0.833\,333\,33 \\ 0.694\,490\,00 \\ -0.578\,700\,00 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3235.8211 \\ -\quad 1.6527 \\ 217 \\ 30 \end{Bmatrix} = 3237.2117 \quad . \; . \; . \quad \text{(5a)}$$

gdzie f obliczamy według wzoru (6) : $f = \dfrac{49^0 30' - 52^0}{3^0} = -0.83333333$,

natomiast elementy: $a_{01} = 3235.8211$, $b_{01} = 1.6527$, $c_{01} = 0.0217$, $d_{01} = 0{,}0030$ podane w tablicy [1] są stałe. Podobnie obliczamy elementy krakowianu (3), tj. F_{02}, F_{03},... F_{40}, F_{41}, F_{42}, oraz elementy L i A.

Obliczone wartości F, L, A oraz u i v podstawione do wzorów (3) pozwalają w prosty sposób wyliczyć szukane $\varphi' - \varphi$, $\lambda' - \lambda$, $\alpha' - \alpha$.

Najwięcej pracochłonną czynnością w metodzie tej jest obliczanie wartości F, L, A według wzorów (5). Łatwo się bowiem przekonać — mając przed sobą tablicę [1] — że do otrzymania wartości liczbowych F, L, A dla danej szerokości geograficznej φ, należy wykonać około sto kilkadziesiąt sumomnożeń. Zrozumiałym jest więc, że ułożenie tablic o argumencie φ podających np. co 1′ wartości F, L, A ułatwi poważnie rachunek: odpadnie bowiem żmudne obliczanie tych elementów według wzorów (5), pozostanie natomiast mało pracochłonna interpolacja liniowa tych wielkości dla argumentu φ.

Poniżej podaje się, według wymienionej pracy prof. Milberta, w tablicy [1] elementy szeregu krakowianowego F, L, A dla elipsoidy Bessela. W tablicy tej ogranicza się ilość miejsc dziesiętnych do 5 znaków, odrzucono również część elementów dalszych rzędów. Uczyniono to mając na uwadze praktyczne korzyści: w pracach triangulacyjnych używa się boki sieci rzędu I od 20 do 50 km, oraz inne sieci o długościach boków od 8 do 20 km, końcowa dokładność rachunkowa dla φ i λ winna być ustalona do 3-go miejsca dziesiętnego (0″.001).

Na podstawie tablicy [1] obliczono elementy krakowianu F, L, A dla argumentu φ co 1′, obliczenia wykonano według wzoru (5), wyniki zestawiono w tablicy [2] od 50° do 50° 10′. Różnice Δ podane są dla 1″ na 5-tym miejscu dziesiętnym (0″,00001). Dla obszaru Polski tablice takie należy ułożyć dla φ od 49° do 55°. Obliczenia wykonane tymi tablicami zmniejszają pracochłonność od 70 do 80%.

Przykład:

Dane współrzędne $\varphi = 50^0\ 08'\ 54''.4805$
$\lambda = 20^0\ 29'\ 28''.4779$
$\alpha = 33^0\ 11'\ 59''.079$
$s = 41694.845$,

Obliczyć współrzędne punktu 2.

W kolumnie 1-szej schematu wypisuje się potęgi

$$u = a \cos \alpha \cdot 10^{-5}$$

W kolumnie 6-ej $\quad v = a \sin \alpha \cdot 10^{-5}$

Kolumny 2, 3, 4 podają wartości F_{ij}, L_{ij}, A_{ij}. Wartości te wypisuje się (częściowo interpolując) z tablicy [2] dla argumentu φ.

Sumomnożenie kolumn 1×2, 1×3, 1×4 daje w wyniku kolumnę 5-tą.

Sumomnożenie kolumn 5×6 daje w wyniku szukane

$$d\varphi = \varphi' - \varphi, \qquad d\lambda = \lambda' - \lambda, \qquad d\alpha = \alpha' - \alpha$$

Część tablic, którą dotychczas opracowano na podstawie omawianej metody, została praktycznie wykorzystana w P.P.G. Metodą tą obliczono kilkadziesiąt punktów.

ELEMENTY (SZEREGI) KRAKOWIANÓW DLA ELIPSOIDY BESSELA $\varphi = 52$ [1]

F_{01}	F_{02}	F_{03}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{40}	F_{41}	F_{42}
+3235,82110	− 0,24758	+ 0,00066	− 32,40406	− 0,77643	− 0,01820	− 0,00043	+ 0,00389	+ 0,00028	+0,00001
− 1,65270	+ 663	+ 27	− 3,47516	− 13898	− 475	− 15	+ 112	+ 18	+ 1
+ 2172	+ 135	− 4	− 0,23229	− 1684	− 77	− 3	+ 19	+ 2	
+ 302	− 1		− 1882	− 176	− 10	− 1	+ 3		
− 2			− 147	− 17	− 1				
				− 2					

L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{30}	L_{31}	L_{32}	L_{33}	L_{50}	L_{51}
5242,49287	104,99841	2,53192	0,05928	0,00140	− 0,70098	− 0,05071	− 0,00240	− 0,00009	0,00020	0,00002
350,44669	18,33300	62217	1942	57	− 19793	− 1793	− 104	− 5	9	1
30,68396	2,12862	9987	388	14	− 3246	− 371	− 26	− 1	2	
2,37785	0,22568	1318	62	3	− 433	− 60	− 5			
18904	2224	157	9		− 52	− 8	− 1			
1490	211	17	1		− 6	− 1				
118	19	2			− 1					
9	2									
1										

A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{50}	A_{51}
4131,14076	108,05670	2,50051	0,05943	0,00140	− 0,72140	− 0,05061	− 0,00240	− 0,00009	0,00020	0,00002
445,15255	17,81409	62623	1939	57	− 19666	− 1794	− 104	− 5	9	1
29,81340	2,15516	9966	388	14	− 3241	− 371	− 26	− 1	2	
2,40713	22514	1319	62	3	− 433	− 60	− 5			
18860	2225	157	9		52	− 8	− 1			
1491	211	17	1		− 6	− 1				
118	19	2			− 1					
9	2									

Przykład [3]

		1			2			3			4			5			6
u^0	+	1,000 000 00	F_{00}		—	F_{20}	—	30,343 53	F_{40}	+	0,003 27	F_1	+	1129,269 05	v^0	+	1,000 000 00
u^1	+	0,348 888 60	F_{01}	+	3236,848 66	F_{21}	—	696 64				F_2	—	30,588 48	v^2	+	0,052 122 77
u^2	+	0,121 723 26	F_{02}	—	251 16	F_{22}	—	15 53				F_3	+	3 35	v^4	+	0,002 716 78
u^3	+	0,042 467 86	F_{03}	+	49	F_{23}	—	35									
															$d\varphi$	=	1127″,6747

u^0	+	1,000 000 00	L_{10}	+	5037,359 98	L_{20}	—	0,590 23	L_{50}	+	0,000 15	L_1	+	5070,578 22	v	+	0,228 304 11
u^1	+	0,348 888 60	L_{11}	+	94,444 50	L_{31}	—	40 91				L_2	—	604 72	v^3	+	0,011 899 84
u^2	+	0,121 723 26	L_{12}	+	2,183 09	L_{32}	—	1 85							v^5	+	0,000 620 25
u^3	+	0,042 467 86	L_{13}	+	48 64	L_{33}	—	16									
u^4	+	0,014 816 55	L_{14}	+	1 10										$d\lambda$	=	1157″,6266

u^0	+	1,000 000 00	A_{10}	+	3867,218 96	A_{30}	—	0,611 43	A_{50}	+	0,000 15	A_1	+	3901,615 56	v	+	0,228 304 11
u^1	+	0,348 888 60	A_{11}	+	97,833 29	A_{31}	—	40 81				A_2	—	625 89	v^3	+	0,011 899 84
u^2	+	0,121 723 26	A_{12}	+	2,149 28	A_{32}	—	1 86							v^5	+	0,000 620 25
u^3	+	0,042 467 86	A_{13}	+	48 79	A_{33}	—	6									
u^4	+	0,014 816 55	A_{14}	+	1 10										$d\alpha$	=	890″,747

Dane

$\varphi_1 = 50^0 08'54'',4805$	$s = 41\,694{,}845$	$\sin\alpha = 0{,}547\,559\,86$	$v = s \ \sin\alpha = 0{,}228\,304\,11$
$\lambda_1 = 20^0 29'28'',4779$	$\alpha = 33^0 11'59'',079$	$\cos\alpha = 0{,}836\,166\,75$	$u = s \ \cos\alpha = 0{,}348\,888\,60$

Współrzędne punktu 2:

$$\varphi_1 + d\varphi = 50^0 27'42'',1552$$
$$\lambda_1 + d\lambda = 20^0 48'46'',1045$$
$$\alpha_{2-1} = 213^0 26'49'',826$$

ТАДЕУШ КЛЮСС

ВСПОМАГАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПО МЕТОДУ ПРОФ. МИЛЬБЕРТА

Резюме

Решение прямой геодезической задачи при помощи степенных рядов заступает проф. Мильберт краковяновыми формулами (3), данными в „Геодезии и Картографии“ (научный квартальик т. 1, сб. 4). Этот ясный метод, основанный на числовых коэффициентах, требует однакс значительной затраты времени на вычисления, а именно вычисления (по формулам (5)) краковяновых элементов F_{01}, F_{02}, ... F_{20}, F_{21}..., F_{40}, F_{41} ... (а также L и A) для каждого конкретного случая, т. е. для каждого значения φ. Вспомагательные числовые таблицы, фрагмент которых дан в таблице [2], дают элементы краковянов F, L, A для аргумента φ через каждую $1'$; таким образом трудоемкие вычисления этих элементов будут сведены к простой интерполяции.

Метод проф. Мильберта, опирающийся на таблицы [2] (см. „Геодезия и Картография“), сокращает время, нужное для вычислении — в сравнении с класическими методами — приблизительно на 70%.

Исходные элементы краковяна (табл. [1]) даны проф. Мильбертом для $\varphi = 52^0$ (ср. φ для Польши).

Для других территории коэффициенты эти можно вычислить, опираясь на труде проф. Мильберта. Таким образом, метод этот можно признать универсальным.

TADEUSZ KLUSS

SUBSIDIARY NUMERICAL TABLES FOR TRANSFERRING GEOGRAPHICAL CO-ORDINATES ACCORDING TO PROF. MILBERT'S METHOD

Summary

The transferring of geographical co-ordinates by power series (1) is replaced by prof. Milbert by cracovian formulae (3) as presented in the scientific quarterly „Geodezja i Kartografia", Volume 1, Book 4.

This clear method, based on number coefficients, requires however relatively many numerical operations, viz., the calculation by the formulae (5) of the cracovian elements F_{01}, F_{02}..., F_{20}, F_{21}..., F_{40}, F_{41}..., (likewise the elements L and A) for each particular example, i. e., for each φ. The subsidiary numerical tables, of which a fragment is shown in Table [2] give the cracovian elements F, L, A for the argument φ co 1'. Thus the laborius calculation of these elements is reduced to ordinary interpolation. Campared to the classical methods prof. Milbert's, based on the subsidiary Table [2], saves time im some 70%.

Prof. Milbert gives the basic cracovian coefficients (Table [1]) for $\varphi = 52^0$ (the territory of Poland). As prof. Milbert claims in his work these coefficients may be calculated for other territories. Thus the method may be applied very widely indeed.

SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENS