

Zagadnienie ekonomii pracy przy wyrównaniu sieci geodezyjnych metodą spostrzeżeń pośredniczących

Wyrównanie sieci geodezyjnej polega na nadaniu współrzędnym przybliżonym punktów takich poprawek wyrównawczych, przy których wystąpieniu poprawki obserwacji spełnią warunek:

$$\left| \frac{vv}{mm} \right| = \min.$$

Poprawki te uzyskuje się na drodze rozwiązania zespołu równań błędów obserwacji występujących w sieci: równań błędów kątów, długości oraz współrzędnych punktów dowiązania sieci.

Zespół równań błędów sprowadzamy do równoważności dokładnościowej przez podzielenie każdego równania przez przyjęty błąd średni obserwacji. Taki zespół równań błędów po podniesieniu do kwadratu daje zespół równań normalnych, który można rozwiązać w sposób jednoznaczny i spełniający warunek minimum, wymieniony wyżej. Rozwiązanie równań normalnych polega na obliczeniu elementów tabeli wtórnej — pierwiastka krakowianowego tabeli tych równań.

Powyższego krótkiego streszczenia opisu postępowania wyrównawczego nie popieram zamieszczeniem używanych wzorów, ponieważ nie jest to istotne dla niniejszego opracowania. Ze szczegółami dotyczącymi metody pośredniczącej wyrównania może się czytelnik spotkać w książce Prof. Hausbrandta „Rachunki Geodezyjne”.

Następujące cechy rachunku są istotne dla zagadnienia ekonomii obliczeń:

1. W tabeli równań normalnych ilość współczynników niezerowych (nierównych zero) przy niewiadomych jest dla danego zespołu zaw-

sze ta sama i niezależna od kolejności niewiadomych, natomiast zależny od kolejności niewiadomych jest sposób rozmieszczenia tych współczynników.

2. W tabeli wtórnej ilość i rozmieszczenie współczynników niezerowych jest zależna od ilości i rozmieszczenia współczynników niezerowych w tabeli równań normalnych.

Wynika stąd, że dla danego zespołu obserwacyjnego ilość i rozmieszczenie współczynników niezerowych w tabeli wtórnej zależy *tylko od rozmieszczenia* współczynników niezerowych w tabeli równań normalnych — *przyjętej w rachunku kolejności niewiadomych*.

Właściwe projektowanie kolejności niewiadomych w równaniach normalnych (równaniach błędów) pozwala na ograniczenie do minimum ilości współczynników niezerowych w tabeli wtórnej oraz na takie ich rozmieszczenie, aby ilość koniecznych do wykonania przy obliczeniu tabeli wtórnej działań rachunkowych osiągała minimum.

W dalszej części pracy za podstawę sądu o ekonomii rozwiązania równań normalnych przyjmujemy niezbędną do wykonania przy obliczaniu tabeli wtórnej ilość równoważnych sobie działań rachunkowych *J*. Za działania równoważne pod względem ekonomicznym uważać będziemy: mnożenie, dzielenie, pierwiastkowanie i podnoszenie do kwadratu. W rzeczywistości pierwiastkowanie jest bardziej pracochłonne od mnożenia i dzielenia, ale podczas obliczania tabeli wtórnej występuje łącznie z podnoszeniem do kwadratu — mniej pracochłonnym. Inne czynności rachunkowe zaniedbujemy ze względu na ich małą pracochłonność.

Najbardziej ekonomiczne rozwiązanie tabeli wtórnej wynikające ze sposobu zestawienia równań normalnych, uzyskujemy przy spełnieniu dwu warunków:

1. Ilość współczynników niezerowych w tabeli wtórnej winna być jak najmniejsza.
2. Współczynniki niezerowe winny być możliwie równomiernie rozmieszczone wzdłuż głównej przekątnej i możliwie w pobliżu niej — kolumny współczynnikowe winny być możliwie najniższe.

Oba powyższe warunki są bardzo ważne i najwłaściwsze rozwiązanie można uzyskać jedynie na drodze rozsądnego ustalenia ich wzajemnego oraz łącznego wpływu na tabelę. Ułatwieniem w projektowaniu kolejności niewiadomych jest fakt, że w większości wypadków wymienione warunki nie są ze sobą sprzeczne i że dążenie do spełnienia jednego z nich, na ogół zbliża nas do spełnienia również drugiego.

Dalsza część opracowania ma za zadanie podać sposób projektowania kolejności niewiadomych i środki za pomocą których możemy spełnić postawione warunki. W celu uniknięcia nieporozumień podkreślam, że nie będą to gotowe recepty dla każdego wypadku, a jedynie pewne zasady po-

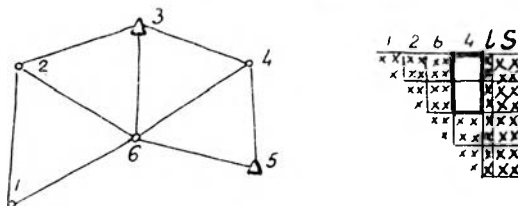
stępowania, które we właściwy sposób może wykorzystać rachmistrz o dużym doświadczeniu w zestawianiu zespołów równań.

Dla sieci o kształcie regularnym kolejność niewiadomych, odpowiadająca spełnieniu postawionych warunków jest stosunkowo łatwa do wyznaczenia, natomiast w wypadku wyrównania sieci nieregularnej (np. sieci triangulacji wypełniającej) zadanie komplikuje się i daje się rozwiązać w praktyce jedynie w przybliżeniu, drogą kolejnych prób. Nie uzyskujemy więc na ogół rozwiązania najbardziej ekonomicznego a jedynie spośród kilku wariantów kolejności niewiadomych, możemy wybrać najlepszy. Aby jednak właściwie zaprojektować warianty kolejności niewiadomych w tabeli, należy opierać się na znajomości cech charakterystycznych, dotyczących związków między stroną geometryczną sieci a tabelą równań normalnych i świadomie te związki wykorzystywać.

Zastępując symbolem X współczynnik niezerowy tabeli równań normalnych, układamy dla poszczególnych wariantów kolejności niewiadomych równania normalne. Każdy X powstaje jako wynik mnożenia kolumn współczynnikowych tabeli równań błędów obserwacji odpowiadających niewiadomym — poprawkom współrzędnych *punktów bezpośrednio powiązanych obserwacjami*. Kolumny tabeli równań błędów odpowiadające punktom niepowiązanym ze sobą bezpośrednio obserwacjami w wyniku mnożenia dają 0.

W myśl powyższej symboliki równania normalne dla siatki Nr 1 wyglądają następująco:

SIEĆ NR 1



Na rysunku punkty stałe oznaczono trójkątami, natomiast punkty wyznaczane — kółkami. W tabeli równań normalnych obwiedzione linią grubą są współczynniki odpowiadające co do położenia współczynnikom zerowym tabeli wtórnej.

Jak już nadmieniałem wyżej, ocena pracochłonności obliczenia pierwiastka krakowianowego najlepiej może być oddana przez wyrażenie jej w liczbie działań J niezbędnych do wykonania. W związku z tym celowe jest podanie metody szybkiego określenia dla danego układu obserwacyjnego i danego zestawienia kolejności niewiadomych wielkości J .

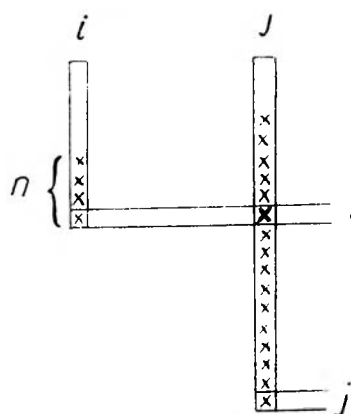
Ilość działań koniecznych do wykonania przy obliczaniu współczynnika znajdującego się na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny jest równa

ilości współczynników niezerowych n znajdujących się powyżej i -tego wiersza (włącznie z nim) w niższej z kolumn i -tej względnie j -tej.

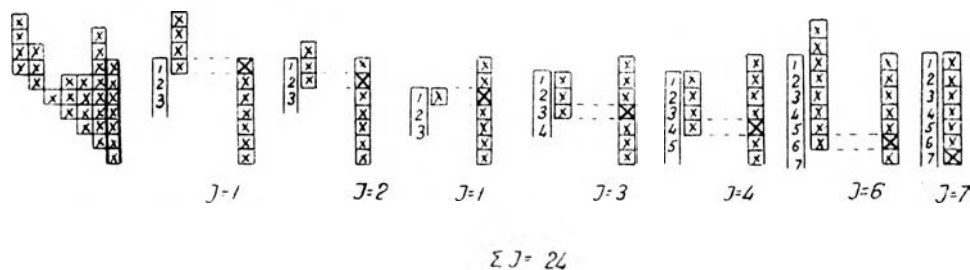
Dla określenia ilości działań koniecznych do obliczenia wszystkich współczynników niezerowych danej kolumny j można wypisać na pasku papieru w kolumnie szereg liczb naturalnych od 1 do n (n większe od największej ilości współczynników w kolumnie pierwiastka). Pasek ten przykładamy do wszystkich kolumn poprzedzających j -tą nie wyższych od niej (których najwyższe współczynniki niezerowe leżą nie wyżej niż najwyższy współczynnik niezerowy j -tej kolumny) w sposób zilustrowany na rysunku 69 i odczytujemy poszczególne wielkości J na pasku obok współczynnika leżącego na przekątnej głównej a następnie sumujemy je. Po określeniu ilości działań koniecznych do obliczenia j -tej kolumny postępowanie to przeprowadzamy dla każdej następnej sumując na maszynie w dalszym ciągu poszczególne wielkości J .

Aby przyspieszyć obliczanie ilości działań wypisujemy na pasku papieru w podwójnych odstępach w kolumnie szereg liczb odpowiadających wielkości J koniecznych do obliczenia czwórek współczynników leżących na przecięciu par wierszy i kolumn odpowiadających odpowiednio parom poprawek współrzędnych jednego punktu. Jeśli za n przyjmiemy ilość współczynników w kolumnie j -tej względnie l -tej, to dla obliczenia współczynników leżących na przecięciu wierszy ij z kolumnami kl wykorzystamy dla określenia ilości koniecznych do wykonania działań, wzór:

$$J = 2(n - 1) + 2n = 4n - 2$$



Rys. 68



Rys. 69

Na pasku papieru wypiszemy szereg liczb spełniających powyższą zależność dla kolejnych parzystych wielkości n . Powyższy szereg liczb wykorzystujemy w sposób podobny do zilustrowanego uprzednio, ale odnoszący się od razu do czwórek współczynników.

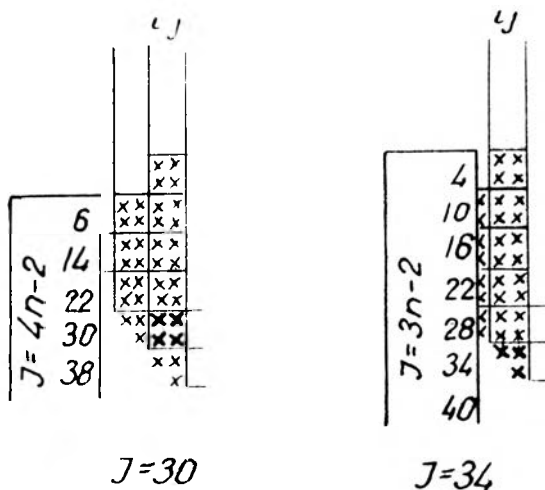
Dla określenia ilości działań koniecznych do wykonania przy obliczeniu współczynników na przekątnej głównej i bezpośrednio z nimi sąsiadujących a_{ii} a_{ij} wykorzystujemy wzór:

$$a_{ij}$$

$$J = 2(n - 1) + n = 3n - 2$$

gdzie n odpowiada ilości współczynników w j -tej kolumnie.

Szereg liczb spełniających ostatnią zależność dla kolejnych parzystych n zestawiamy również w kolumnie na skrawku papieru i wykorzystujemy przez przykładanie bezpośrednio do kolumny j -tej i odczytanie wielkości J obok współczynników kolumny i oraz j leżących na przekątnej głównej.



Rys. 70

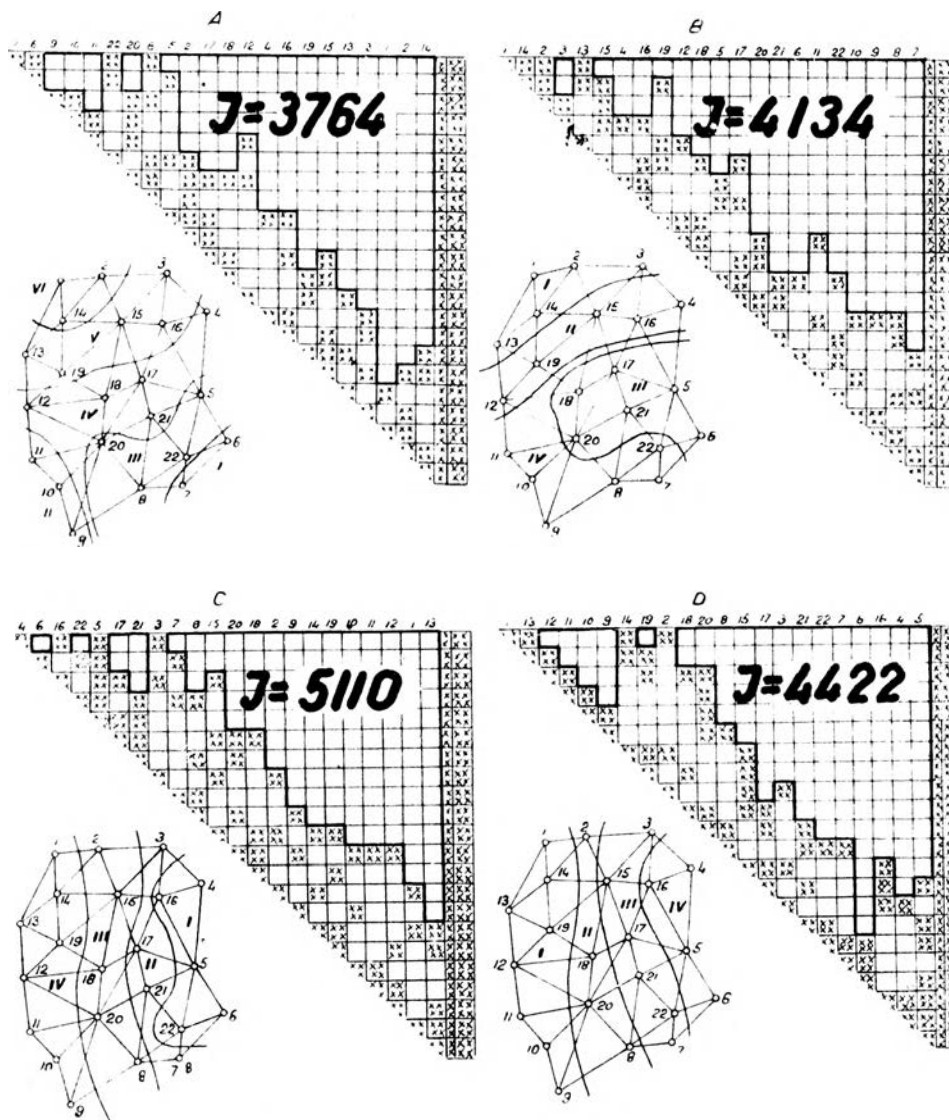
Przystępuję obecnie do wyjaśnienia zasad postępowania przy projektowaniu.

Wskazówka Nr 1

Punkty powiązane bezpośrednio obserwacjami winny następować po sobie w tabeli w minimalnych odstępach.

Na przykładzie siatki Nr 2 może się czytelnik zorientować w sposobie projektowania kolejności niewiadomych. Dla ułatwienia śledzenia związku między kształtem sieci a kolejnością niewiadomych w tabeli, podzieliłem sieć dla każdego wariantu na zespoły punktów. Punkty poszczególnych zespołów występują w tabeli w kolejności zgodnej z numeracją zespołów (cyfry rzymskie). Analiza uzyskanych wyników pozwala wnioskować, że warianty A i B są dużo lepsze od wariantów C i D, pomimo wykorzystania we wszystkich czterech wskazówki Nr 1. To dowodzi że nie jest obojętne, w jaki sposób podzielimy sieć na zespoły punktów i konieczne jest stosowanie się do dalszej wskazówki.

SIEĆ NR 2



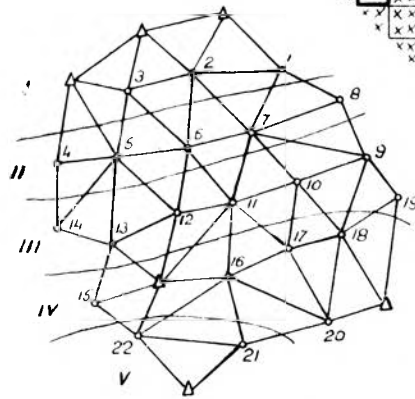
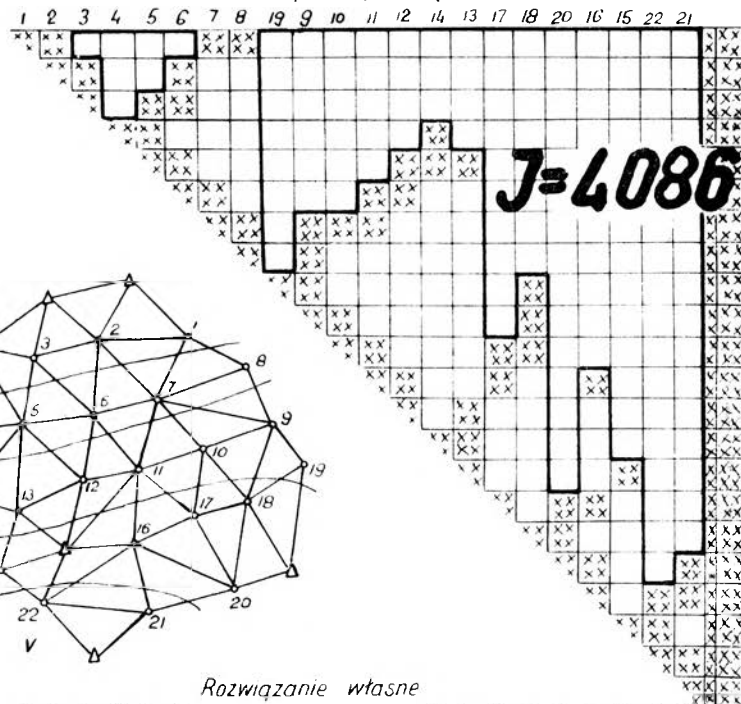
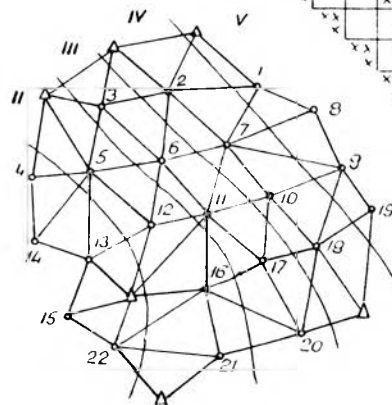
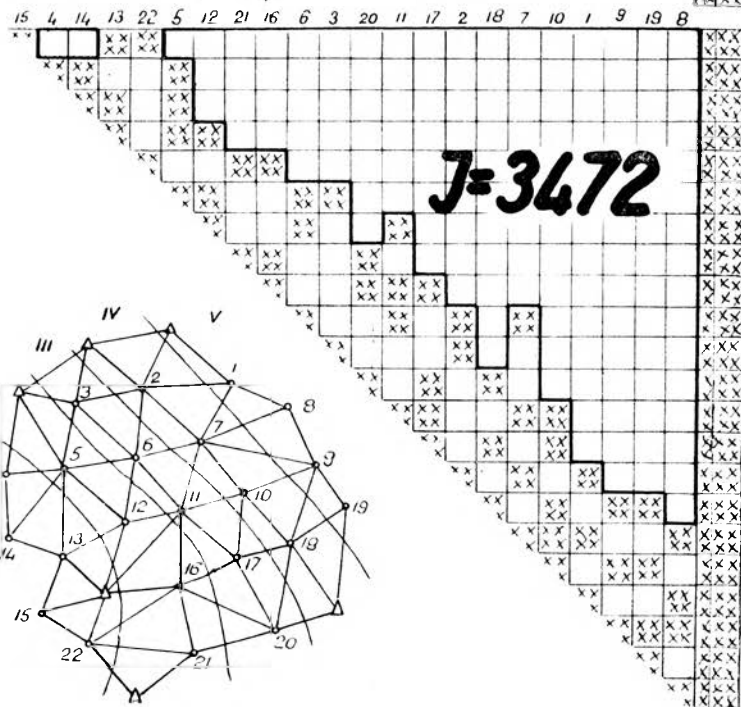
Wskazówka Nr 2

Zespoły punktów winny następować po sobie w kierunku w którym sieć jest „dłuższa”.

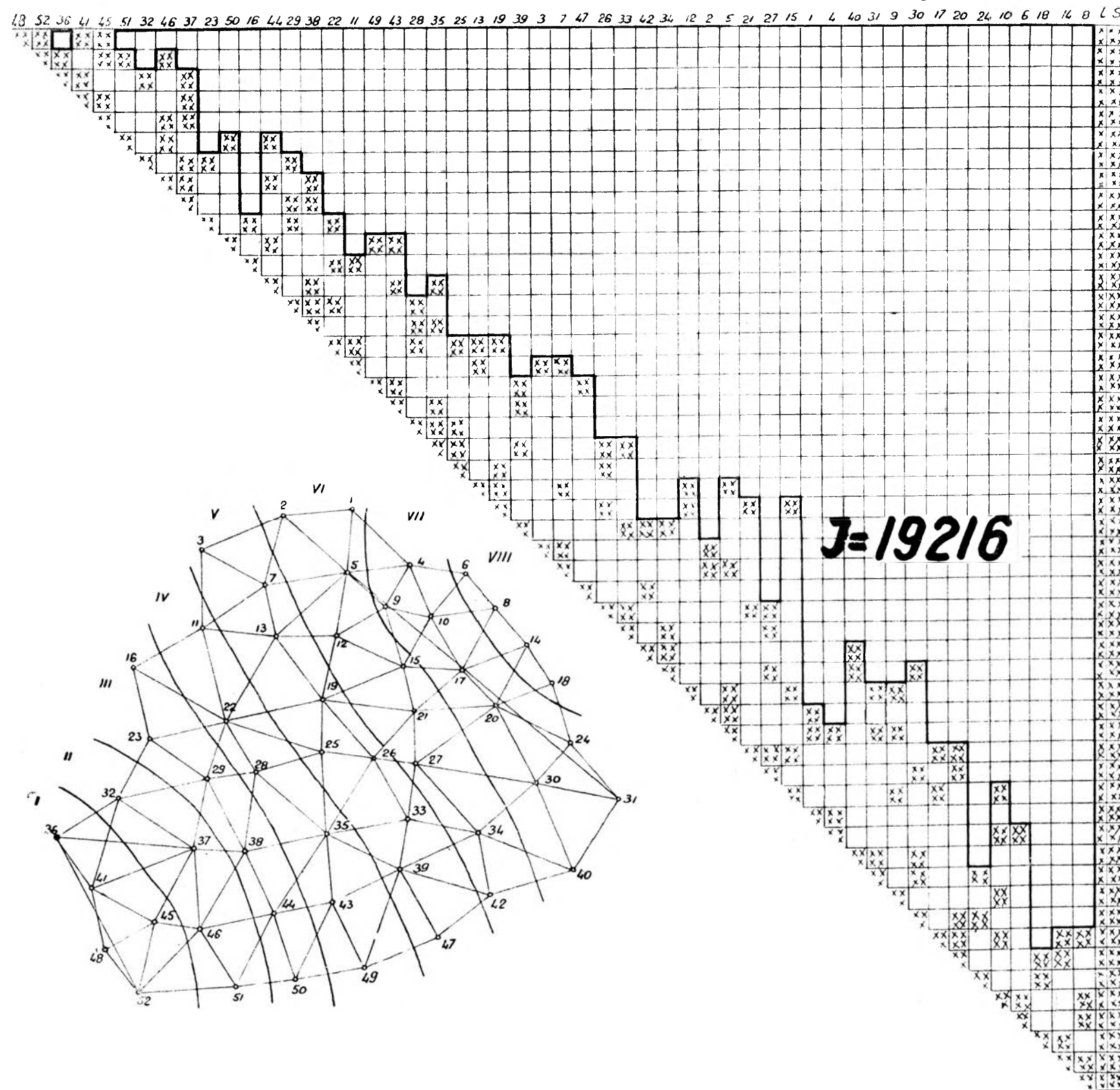
Przez określenie „dłuższa” rozumiem tu większą ilość punktów występujących w sieci na danym kierunku niż na jakimkolwiek innym, przy w przybliżeniu jednakowym powiązaniu celowymi wszystkich punktów w sieci.

W wypadku gdy w sieci triangulacyjnej występują długie celowe, przechodzące przez kilka trójkątów, należy szczególną uwagę zwrócić na umie-

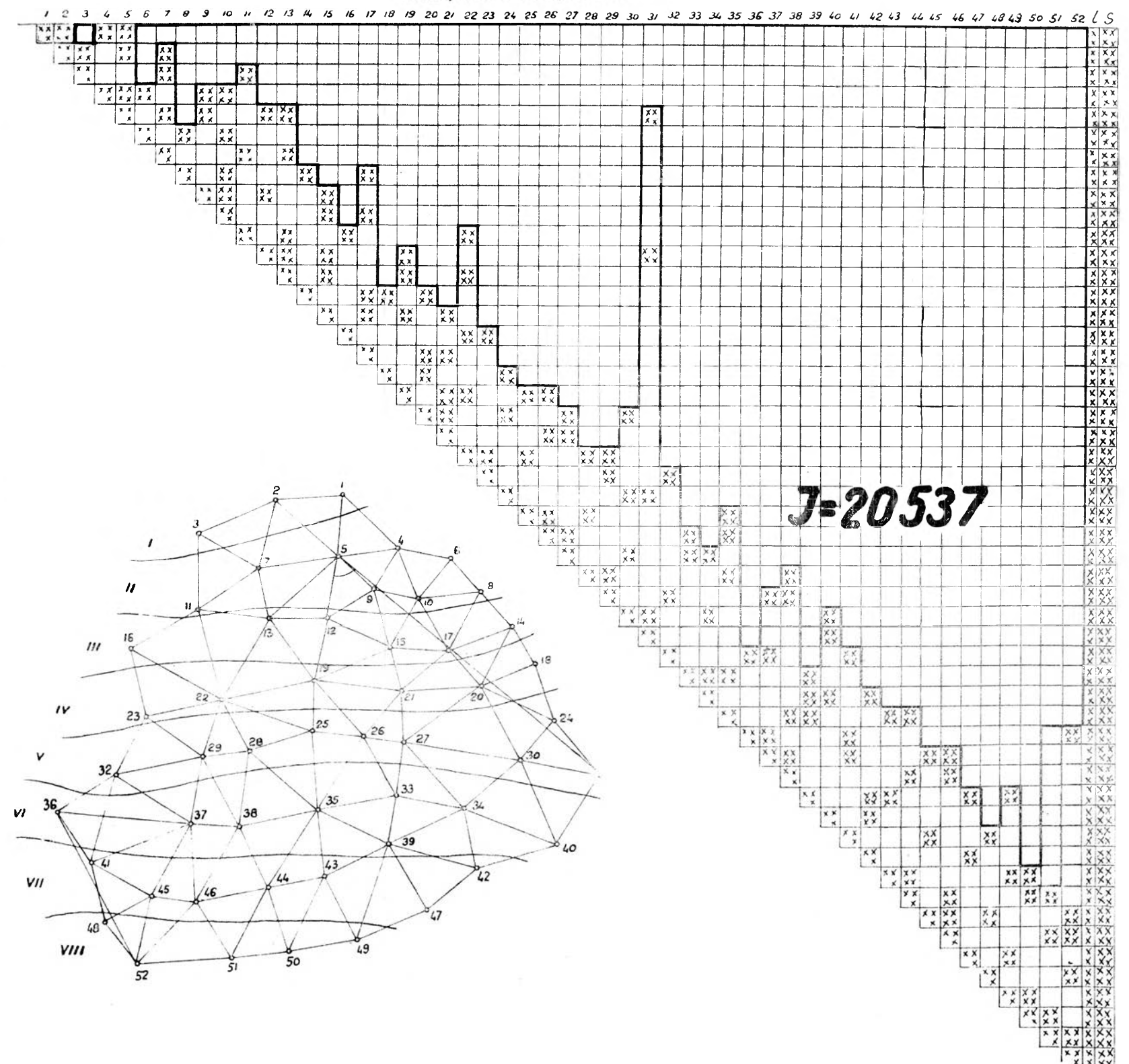
SIEĆ Nr 4

Rozwiązanie przedsiębiorstwa*Rozwiązanie własne*

Rozwiązanie własne (oparte o wskazówki 1:2 z uwzględnieniem celowej 5-31)

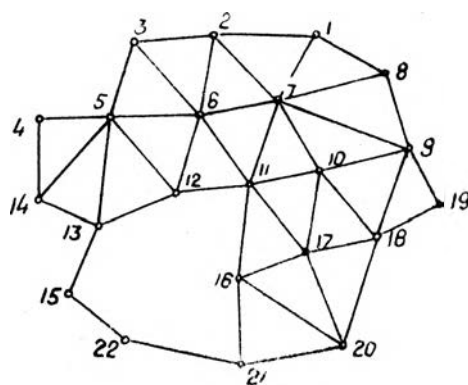


Rozwiązanie Przedsiębiorstwa



szczenie punktów związanych tymi celowymi możliwie w pobliżu siebie w tabeli, co może spowodować inny, niż by mógł wynikać ze wskazówki Nr 2, podział na zespoły. Ponieważ powyższe wywody mają charakter wskazówek praktycznych niepopartych rozważaniami natury teoretycznej, słusznym wydało mi się porównanie wyników uzyskanych przy wykorzystaniu podanych wskazówek z wynikami uzyskanymi przez jedno z przedsiębiorstw. W tym celu porównałem pracochłonność rozwiązania sieci obliczonych przez to przedsiębiorstwo (sieci Nr 3, 4) z pracochłonnością własnego rozwiązania. Niewątpliwie rachmistrze przedsiębiorstwa posługiwali się jakimiś określonymi zasadami przy układaniu równań, mając na względzie efekt ekonomiczny, jednak zasady te nie zostały nigdzie opublikowane i wobec tego ich treść nie była mi znana. Z analizy rozwiązań przedsiębiorstwa wynikało, że stosowana była zasada pokrywająca się z podaną wyżej wskazówką Nr 1, natomiast brak w rozwiązaniu jakiejkolwiek zasady zbliżonej w treści do wskazówki Nr 2. Również w rozwiązaniu przedsiębiorstwa nie zwrócono uwagi na ujemny wpływ niewłaściwego umieszczenia w tabeli punktów połączonych długą celową (punkty Nr 5, 31, 12). W rezultacie rozwiązanie przedsiębiorstwa dla sieci Nr 3 jest o ok. 70% bardziej pracochłonne od rozwiązania opartego o wyżej wymienione wskazówki (około 1 300 działań rachunkowych więcej).

Porównanie wyników rozwiązania sieci Nr 4 wskazuje na niewyzyskanie przez pracowników przedsiębiorstwa korzystnego rozmieszczenia punktów



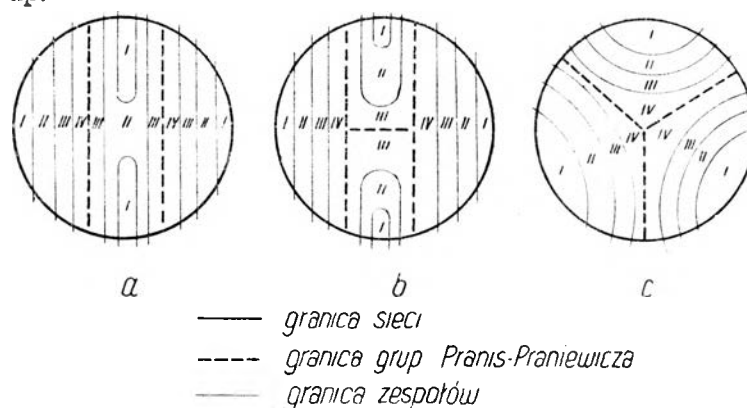
Rys. 71

stałych — niezmiennych¹⁾). Przy występowaniu w sieci punktów stałych niezmiennych można dla ułatwienia w projektowaniu kolejności niewiadomych wykonać szkic sieci z umieszczeniem tylko punktów wyznaczanych i obserwacji łączących te punkty z pominięciem punktów stałych i obserwacji opartych o nie. Na szkicu takim sieć Nr 4 przyjmie po-

¹⁾ Przyjętych za bezbłędne.

stać jak na rysunku 71, co stawia w innym świetle sposób podejścia do zaprojektowania kolejności niewiadomych.

Przy wyrównaniu sieci z podziałem na grupy wg metody Pranis-Pranie-wicza bardzo utrudnione a częstokroć niemożliwe jest przyjęcie kolejności niewiadomych odpowiadającej ekonomicznemu rozwiązaniu. Dzieje się to wskutek narzuconego zgóry warunku, aby punkty wiążące znajdowały się na końcu tabeli. Wynika stąd, że zaprojektowanie podziału na grupy przy wyrównaniu metodą Pranis-Pranie-wicza powinno być przeprowadzone z uwzględnieniem ekonomii rozwiązania układów równań poszczególnych grup.



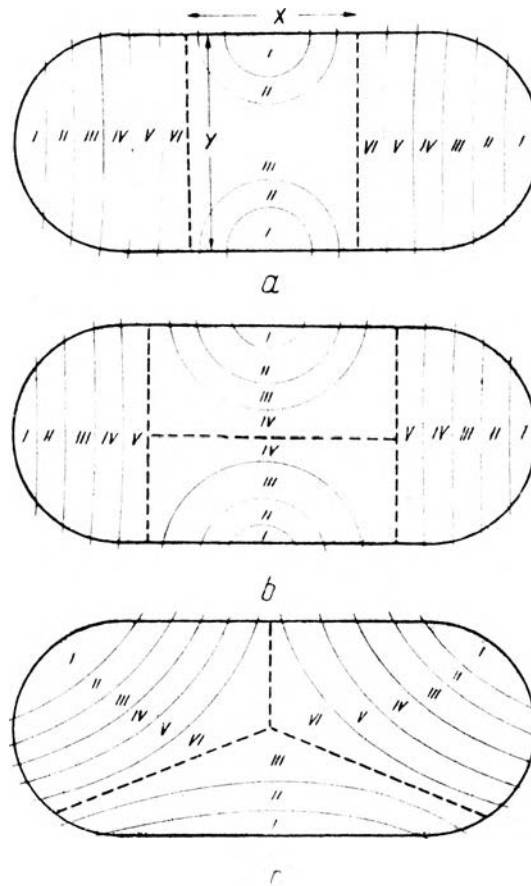
Rys. 72

Zastosowanie podziału na grupy wg wariantu a (rys. 72) nie wydaje się słuszne ze względu na dużą trudność w ekonomicznym zestawieniu kolejności niewiadomych w grupie środkowej. Drogą do poprawienia podziału wskazuje wariant b, który jednak powoduje zmniejszenie się grup przy jednoczesnym zwiększeniu ilości punktów wiążących. Najwłaściwszym rozwiązaniem jest wariant c, który pozwala zaprojektować kolejność niewiadomych stosunkowo ekonomicznie.

Dla sieci wydłużonych sposób podziału na grupy jest zależny od wymaganej ilości punktów w grupie oraz od szerokości sieci (w sensie ilości punktów występujących na kierunku poprzecznym). Podział na grupy zamieszczony na rysunku 73a — można uważać za słuszny w wypadku, gdy $\frac{y}{x}$ nie jest większe od 0,7 (przy jednakowo gęstym rozmieszczeniu punktów w sieci oraz jednakowym w przybliżeniu powiązaniu obserwacjami). W wypadku przeciwnym należy zastosować powiększenie środkowej grupy względnie zastosować podział wskazany na rysunku 73bc.

Ogólnie wydaje się, że bardziej celowe z punktu widzenia ekonomii rozwiązania jest dzielenie sieci na grupy promieniście ze zbiegiem linii podziału w jednym punkcie w pobliżu środka sieci, względnie na linii przebiegającej wzdłuż osi sieci, aniżeli na pasy krojące sieć. Należy przy tym zwracać uwagę na to, by nie stosować zbyt wąskich wycinków (aby odle-

głość od punktu wybranego na granicy sieci do każdego z punktów wiążących danej grupy była w przybliżeniu równa). Podział na pasy można z powodzeniem stosować jedynie w sieciach wydłużonych o średnicy małej w stosunku do wymaganej wielkości grup.



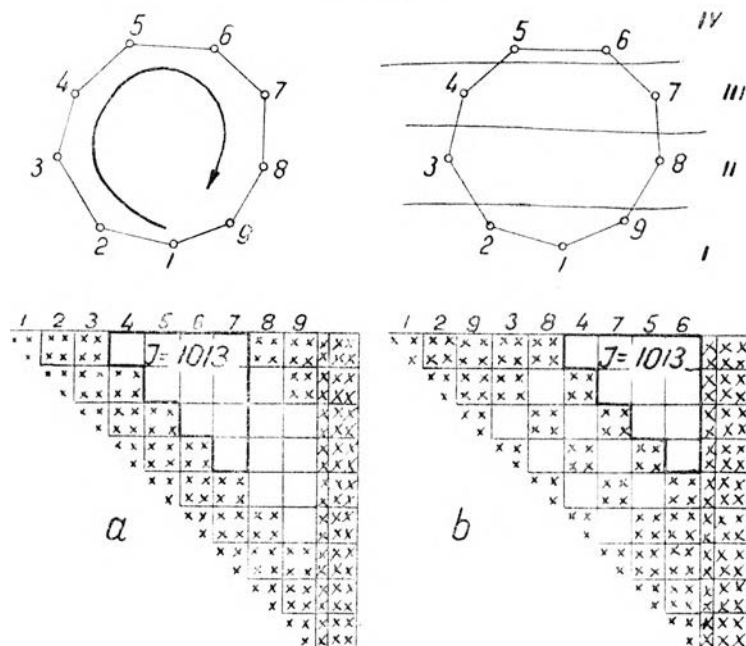
Rys. 73

Znacznie łatwiejsze do rozwiązania niż dla sieci triangulacji wypełniającej jest zagadnienie ekonomii wyrównania sieci poligonizacji precyzyjnej. Rozpatrzę je na kilku typowych przykładach sieci.

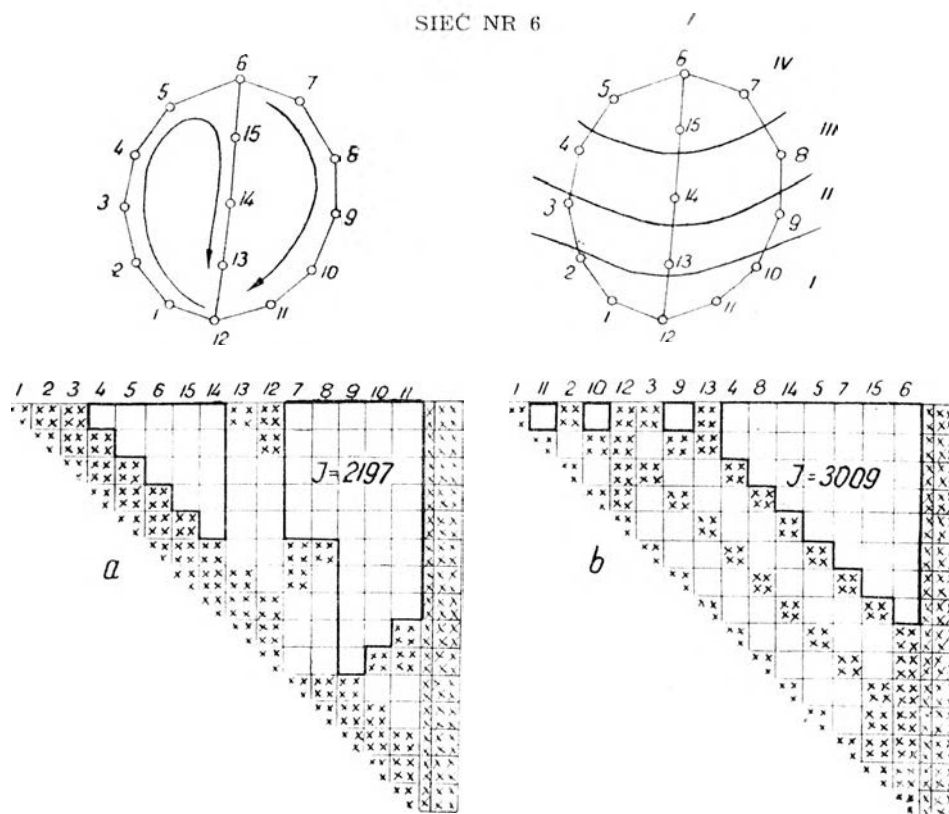
Analizując rozwiązania dla ciągu zamkniętego dochodzimy do wniosku, że obydwa warianty a i b są jednakowo korzystne pod względem ilości działań natomiast ze względu na zestawianie równań błędów wygodniejsze jest stosowanie wariantu a.

Wyniki analizy sieci o dwu oczkach przekonują nas o zdecydowanej wyższości wariantu a nad wariantem b. Podobny wniosek możemy wyciągnąć z analizy sieci o czterech oczkach z punktem centralnym (sieć Nr 7) oraz sieci o trzech oczkach (sieć Nr 8).

SIEĆ NR 5



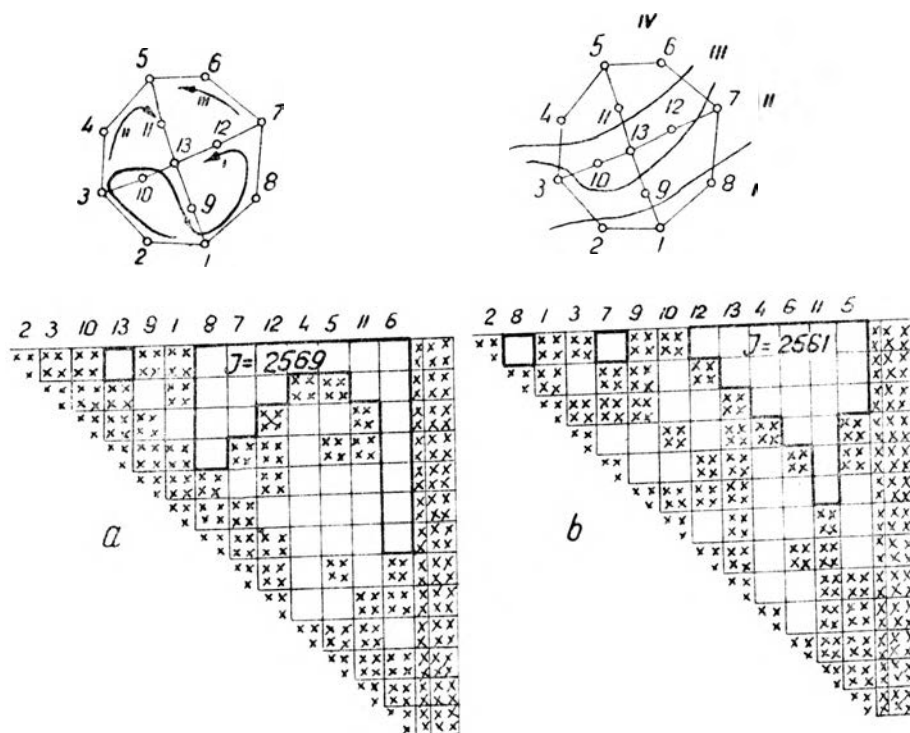
SIEĆ NR 6



Ogólnie można wyciągnąć wniosek, że dotychczas na ogół stosowana przy wyrównaniu sieci poligonowych numeracja niewiadomych dla zamieszczonych typów była słuszną (warianty a). Należy jednak zwrócić uwagę na celowość przeprowadzenia analizy pracochłonności w wypadku wyrównywania sieci poligonowych o innym — bardziej skomplikowanym układzie oczek.

Przedstawiona w niniejszym opracowaniu metoda projektowania kolejności niewiadomych w tabeli równań normalnych, jak wykazała praktyka autora w posługiwaniu się nią, daje duże oszczędności w czasie obliczania tabeli wtórnej. Zestawienie jednego wariantu dla zespołu 100 równań nie

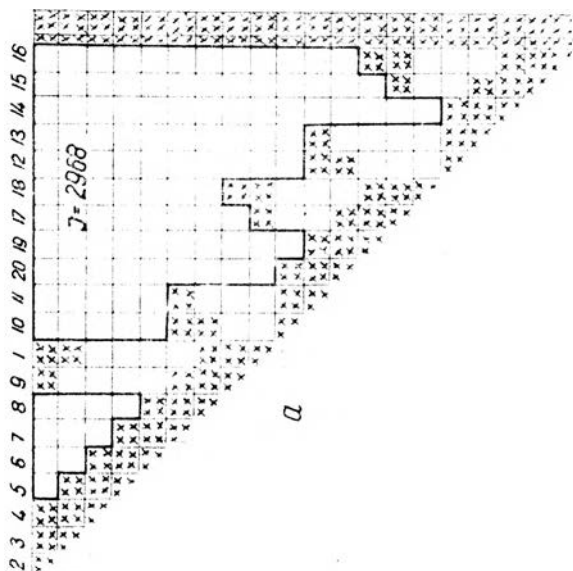
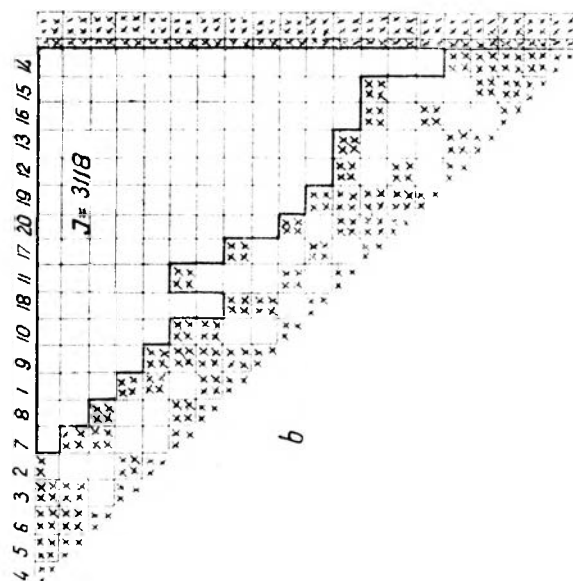
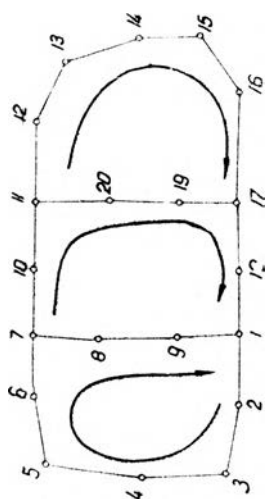
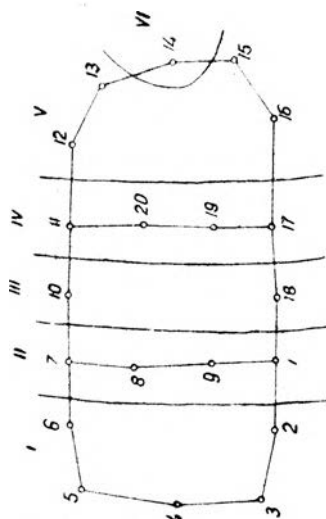
SIEC NR 7



zajmuje łącznie z obliczeniem pracochłonności wariantu więcej niż 1 godz. czasu. Dla wykwalifikowanego rachmistrza o dużej praktyce w zestawianiu równań wystarczy ułożenie 2 — 3 wariantów aby najlepszy z nich można było uważać za dostatecznie dobry pod względem ekonomicznym.

Oczywiście każdy następny wariant należy układać nie w oderwaniu od poprzednich a po uprzednim przeanalizowaniu popełnionych w ich projektowaniu błędów, powodujących zwiększenie pracochłonności rozwiązania.

SIEĆ NR 8



ВОЙЦИХ ЯНУШ

ПРОБЛЕМА ЭКОНОМИИ ТРУДА ПРИ УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ ПОСРЕДСТВЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Резюме

При уравнивании геодезических сетей по методу посредственных наблюдений количество труда при вычислении кракового корня таблицы нормальных уравнений зависит от ранее принятой очередности неизвестных в таблице уравнений ошибок наблюдений.

Проектирование надлежащей очередности неизвестных лучше всего вести основываясь на знакомстве экономических критериев и связи между ними и геометрической формой сети. Вышеупомянутые критерии позволяют вычислить краковый корень при минимальном числе вычислительных действий.

1. Число ненулевых (не равных нулю) коэффициентов при неизвестных в таблице кракового корня должно быть наименьшим.
2. Ненулевые коэффициенты должны быть, по мере возможности, равномерно размещены вдоль главной диагонали и, по возможности, вблизи нея. Чтобы указанные критерии исполнились, следует неизвестные, непосредственно связанные между собой наблюдениями, размещать возможно ближе себя в таблице уравнений ошибок.

Публикация дает практические указания относительно проектирования очередности неизвестных и иллюстрирует на примерах их использование и эффект, выражающийся числом вычислительных действий.

WOJCIECH JANUSZ

THE PROBLEM OF LABOUR ECONOMY IN THE ADJUSTMENT OF
GEODETICAL NETWORKS BY THE METHOD OF INTERMEDIATE
OBSERVATIONS

S u m m a r y

When geodetical networks are adjusted by the intermediate method the amount of labour to be performed while computing the cracovian root of the table of normal equations depends on the previously accepted order of unknowns in the table of equations of errors of observations. We may project the order of unknowns most easily when we know the criteria of an economical solution and the relation between these and the geometrical side of the network. These criteria allow the cracovian root to be computed with a minimum number of computative operations.

1. The number of non-zero coefficients (not equal to zero) by the unknowns in the table of the cracovian root should be as little as possible.
2. Non-zero coefficients should preferably be evenly distributed along the main diagonal and possibly close to it.

To meet these criteria the unknowns directly connected by observations should be possibly close to each other in the table of equations of errors. The present elaboration gives some practical guidance on the projection of the order of unknowns and illustrates their application and the effect as expressed in the number of computative operations.