STEFAN HAUSBRANDT

526.5:512.52.

Pewien sposób interpolacyjnego obliczania funkcji dwóch zmiennych (Interpolacja czteropunktowa z poprawkami)

WSTĘP

W wielu rachunkach geodezyjnych, w których zachodzi potrzeba częstokrotnego obliczania wartości funkcji dwóch zmiennych $F(uv)$, celowe jest korzystanie z gotowej tabeli liczbowej wartości jakie przybiera ta funkcja dla określonych równoodległych wartości argumentów uv i obliczanie wartości funkcji na drodze interpolacyjnej. Takie postępowanie ma zaletę zupełnej ogólności: rachmistrz bowiem rozwiązujący przy pomocy interpolacji zadania liczbowe o bardzo różnorodnej treści matematycznej, wynikającej z różnorodności postaci funkcji $F(uv)$, zostaje tu zwolniony od potrzeby wnikania w postać związków funkcyjnych i od potrzeby studjowania coraz to innych szczegółów techniki rachunkowej.

Zachodzi tu oczywiście zupełna analogia do przypadku korzystania z najprostszej formy interpolacji: interpolacji liniowej przy posługiwaniu się tablicami logarytmów czy tablicami wartości funkcyj trygonometrycznych.

Użytkownik tych tablic częstokroć nie zdaje sobie sprawy z tego, jakie rachunki potrzebne były do zestawienia używanego przezeń zbioru tabelarycznego, pomimo tego jednak zupełnie prawidłowo i szybko rozwiązuje on zadania obliczenia poszukiwanej wartości logarytmu czy funkcji trygonometrycznej dla zadanej wartości argumentu, opierając się wyłącznie na pojęciu interpolacji. O ile jednak w dziedzinie funkcji jednej zmiennej, jak np log x, czy sin x, potrzeba abstrachowania w rachunku praktycznym od matematycznej treści zadania i posługiwanie się interpolacją zostały już oddawna uznane za słuszne, o tyle w dziedzinie funkcji dwóch (czy więcej) zmiennych stosunkowo rzadko rachunek liczbowy idzie po linji najekonomiczniejszej: wykorzystania gotowego zbioru liczbowego wartości funkcji i znajdowania wartości tej funkcji, odpowiadającej założonym wartościom argumentów, przez postępowanie interpolacyjne. Jako typowe przykłady komplikowania rachunku liczbowego przez wyrzeczenie się rachunku interpolacyjnego służyć mogą wszystkie niemal rachunki z dziedziny geodezji wyższej i kartografii matematycznej ujęte klasycznie, które zmuszają rachmistrza do posługiwania się schematami narzucającymi skomplikowany tok obliczeń i nie pozwalającymi nawet na zorientowanie się w myśli przewodniej prowadzonego rachunku.

Zdaje mi się że jednym z głównych powodów małego rozpowszechnienia interpolacyjnego obliczania wartości funkcji dwóch (i więcej) zmiennych jest nieustalenie *typowej postaci* takiego rachunku, ułatwiającej jego proste i skontrolowane przeprowadzenie, w odróżnieniu od interpolacji funkcji jednego argumentu gdzie taka *typowość* znalazła pełny wyraz w zasadzie zagęszczania tabeli funkcyjnej do liniowości i tradycyjnego podawania tabelek „partes proportionales". Drugim powodem niepopularności rachunku interpolacyjnego w dziedzinie funkcji dwóch argumentów jest niewątpliwie ta okoliczność, że prace pionierskie w tej dziedzinie oparte były na wzorach interpolacji różnicowej — bardzo niefortunnych pod względem przejrzystości i mało ekonomicznych w rachunku liczbowym.

W niniejszej pracy opisane będzie postępowanie interpolacyjne dla obliczania wartości funkcji dwóch argumentów, które nazywamy dalej „interpolacją czteropunktową z poprawką" i które, jak się zdaje, mogło by z korzyścią być przyjęte jako typowa postać interpolacji funkcji dwóch argumentów z regularnej tablicy funkcyjnej. Rozumiemy przez to że uważalibyśmy za korzystne przyjąć zasadę, iż zbiory tabelaryczne tabelaryzujące wartości funkcyj dwóch argumentów dla celów rachunku praktycznego, winny być opracowane tak, aby były przygotowane do opisanej dalej interpolacji czteropunktowej z poprawką.

Jak widać z tego, co były dotychczas powiedziane, zagadnienie które chcemy dalej omawiać jest zarówno zagadnieniem techniki rachunkowej jak i zagadnieniem matematyki stosowanej. Z jednej bowiem strony musimy tu opisać układ tabel i technikę rachunku w projektowanym postępowaniu interpolacyjnym, z drugiej strony musimy przeprowadzić analizę dotyczącą podstaw teoretycznych postępowania i osiągalnej dokładności wyników.

Jakkolwiek pojęciowo analiza teoretyczna jest oczywiście ważniejsza od techniki rachunkowej; jednak w pracy podamy najpierw opis projektowanego postępowania interpolacyjnego i przykłady liczbowe, zaś rozważania teoretyczne przeniesiemy do drugiej części pracy. Taki układ materiału z jednej strony pozwoli lepiej ocenić prostotę interpolacji czteropunktowej, z drugiej strony ułatwi korzystanie z pracy temu czytelnikowi którego wywody matematyczne nie interesują a który chciał by wyłącznie poznać stronę techniczno-rachunkową. Czytelnik natomiast, pragnący zapoznać się tylko ze stroną pojęciową, zechce przeczytać i pierwszą część pracy, gdyż podane w niej będą oznaczenia i opis przebiegu postępowania interpolacyjnego.

CZĘŚĆ I (PRAKTYCZNA)

Opis czynności związanych z interpolacją czteropunktową i przykłady liczbowe

Przyjmiemy następujące oznaczenia i nazwy:

u zmienna kolumnowa, tzn. ta zmienna niezależna („argument") której kolejne wartości wypisane są w kolumnie nagłówkowej tabeli funkcyjnej,

v zmienna wierszowa, tzn. ta zmienna niezależna („argument") której wartości wypisane są w wierszu nagłówkowym tabeli funkcyjnej,

F funkcja zmiennych u i v, której wartości wypisane są w tabeli, przyczym wartość jaką przybiera funkcja dla wartości zmiennych wymienionych w i-tej kolumnie i j-tym wierszu napisana jest na przecieciu i-tej kolumny i j-tego wiersza. Oznaczenie to ilustruje schemat:

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
U \diagdown V & \ldots\ldots & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \ldots\ldots \\
\hline
\cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
u_0 & \ldots\ldots & F_{00} & F_{10} & F_{20} & F_{30} & F_{40} & \ldots\ldots \\
u_1 & \ldots\ldots & F_{01} & F_{11} & F_{21} & F_{31} & F_{41} & \ldots\ldots \\
u_2 & \ldots\ldots & F_{02} & F_{12} & F_{22} & F_{32} & F_{42} & \ldots\ldots \\
u_3 & \ldots\ldots & F_{03} & F_{13} & F_{23} & F_{33} & F_{43} & \ldots\ldots \\
\cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}
\qquad \ldots\ldots (1)
$$

W szczególności naprzykład podana na następnej stronie tablica, jest tablicą funkcyjną funkcji dwóch zmiennych, przy czym wartość tej funkcji dla wartości zmiennej kolumnowej 20 i wartości zmiennej wierszowej 30 wynosi 779.

$$
\begin{array}{r|cccccc}
 & \ldots\ldots & 20 & 30 & 40 & 50 & \ldots\ldots \\
\hline
 & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
10 & \ldots\ldots & 287 & 552 & 917 & 1382 & \ldots\ldots \\
20 & \ldots\ldots & 489 & 779 & 1169 & 1659 & \ldots\ldots \\
30 & \ldots\ldots & 791 & 1106 & 1521 & 2036 & \ldots\ldots \\
40 & \ldots\ldots & 1193 & 1533 & 1973 & 2513 & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}
\tag{2}
$$

Przyjmujemy dalej następujące oznaczenia i nazwy:

k *ułamek interpolacji w kolumnach*, to znaczy stosunek różnicy między tą wartością zmiennej kolumnowej, dla której przeprowadzamy interpolację i najbliższą do niej mniejszą wartością zmiennej kolumnowej wypisaną w kolumnie nagłówkowej tablicy do stałej różnicy tablicowej dla zmiennej kolumnowej (z reguły ta ostatnia różnica wynosi wielokrotność 10, a w naszym przykładzie 10).

w *ułamek interpolacji w wierszach*, to znaczy stosunek różnicy między tą wartością zmiennej wierszowej, dla której przeprowadzamy interpolację i najbliższą do niej mniejszą wartością zmiennej wierszowej wypisaną w wierszu nagłówkowym tablicy do stałej różnicy tablicowej dla zmiennej wierszowej.

I *tabliczka interpolacyjna*, to znaczy czteroelementowa kwadratowa liczba zespołowa, zawierająca w pierwszym wierszu iloczyn spełnienia ułamka interpolacji kolumnowej do jedności przez spełnienie ułamka interpolacji wierszowej do jedności, oraz iloczyn spełnienia ułamka interpolacji kolumnowej do jedności przez ułamek interpolacji wierszowej, zaś w drugim wierszu iloczyn ułamka interpolacji kolumnowej przez spełnienie ułamka interpolacji wierszowej do jedności, oraz iloczyn ułamka interpolacji kolumnowej przez ułamek interpolacji wierszowej. Tabliczka interpolacyjna, którą oznaczać będziemy literą I, ma więc postać:

$$
\left|\begin{array}{cc} (1-k)(1-w) & (1-k)\,w \\ k(1-w) & kw \end{array}\right| = I \tag{3}
$$

Zestawić ją do rachunku najwygodniej *pisząc pod postacią kolumny nagłówkowej spełnienie ułamka interpolacyjnego w kolumnach do jedności oraz ułamek interpolacji w kolumnach*, oraz *pod postacią wiersza nagłówkowego spełnienie ułamka interpolacyjnego w wierszach do jedności oraz ułamek interpolacji w wierszach*, i wypełniając pola takiego schematu osiowego:

$$
\begin{array}{r|cc|}
 & 1-w & w \\
\hline
1-k & \cdot & \cdot \\
k & \cdot & \cdot \\
\hline
\end{array} = I \tag{4}
$$

iloczynami liczb kolumny nagłówkowej i wiersza nagłówkowego wyznaczających dane pole. Konkretnie np. w wypadku przeprowadzania interpolacji dla $\frac{3}{10}$ przedziału zmienności zmiennej kolumnowej i $\frac{4}{10}$ przedziału zmienności zmiennej wierszowej, to jest dla wypadku $k = 0{,}3$ oraz $w = 0{,}4$ zestawimy tabliczkę interpolacyjną jak następuje:

$$\begin{array}{c|cc|} & 0{,}6 & 0{,}4 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}42 & 0{,}28 \\ 0{,}3 & 0{,}18 & 0{,}12 \\ \hline \end{array} = \mathrm{I} \qquad \ldots (5)$$

Suma elementów tabliczki interpolacyjnej musi być ściśle równa jedności. Jeżeli to nie zachodzi — co może się zdarzyć w wypadku zaokrąglania wyników przy obliczaniu elementów tabliczki — należy obowiązkowo uzgodnić w drodze zaokrąglenia wyniki tak, aby suma elementów tabliczki była jednością.

Zaniedbanie tej czynności może spowodować duże błędy w wyniku interpolacji.

Ilośc cyfr za przecinkiem w elementach tabliczki interpolacyjnej brać wystarczy o jedność większą od ilości cyfr zmiennych w wartościach interpolowanej funkcji.

Nazwijmy dalej *tabliczką funkcyjną* i oznaczmy przez T tę część tablicy funkcyjnej ktôra użyta zostanie do interpolacji czteropunktowej, to znaczy czteroelementową liczbę zespołową zawierającą wartość funkcji F odpowiadającą wyjściowym w danej interpolacji wartościom zmiennych niezależnych i sąsiadujące z nią w tablicy wartości funkcji odpowiadające sąsiadującym z wyjściowymi dalszym wartościom zmiennych niezależnych. Jeżeli więc oznaczymy przez u_0 i u_1 oraz przez v_0 i v_1 wartości zmiennych niezależnych między którymi przeprowadzamy interpolację, wówczas będzie (porów: schemat (1)):

$$T = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{vmatrix} \qquad \ldots (6)$$

Tabliczkę funkcyjną dobrze jest przy przeprowadzeniu interpolacji uwidocznić — czy to oprowadzając jej kontur ołówkiem, czy też kładąc na tablicy funkcyjnej odpowiedni szablonik.

Iloczyn zupełny tabliczki funkcyjnej przez tabliczkę interpolacyjną, czyli sumę iloczynów elementów tych tabliczek odpwiadających sobie położeniem, będziemy nazywać *surowym wynikiem interpolacji* i oznaczać przez F_0.

$$F_0 = T \cdot \mathrm{I} \qquad \ldots (7)$$

Jeżeli stabelaryzowana funkcja jest wielomianem zmiennych u v niezawierającym wyższych potęg ponad uv, tzn jeżeli jest to wielomian:

$$F = a_0 + a_u u + a_v v + a_{uv} uv \qquad \ldots (8)$$

wówczas wynik surowy interpolacji czteropunktowej jest jednocześnie jej ścisłym wynikiem, to znaczy obliczona wzorem $F_0 = T \cdot \mathrm{I}$ wartość jest wartością jaką stabelaryzowany w danej tablicy wielomian przyjmie dla wartości argumentów scharakteryzowanych przez ułamki interpolacyjne użyte w rachunku.

Jeżeli stabelaryzowana funkcja jest wielomianem zmiennych u v zawierającym nietylko iloczyn uv ale i drugie potęgi zmiennych, to znaczy jeżeli jest to pełny wielomian drugiego stopnia:

$$F = a_0 + a_u u + a_v v + a_{uv} uv + a_{u^2} u^2 + a_{v^2} v^2 \tag{9}$$

wówczas wynik surowy interpolacji czteropunktowej nie będzie równy wartości jaką przybiera stabelaryzowany wielomian dla wartości zmiennych niezależnych scharakteryzowanych przez ułamki interpolacyjne użyte do realizacji wzoru $F = T \,.\, I$.

Dla znalezienia wartości jaką stabelaryzowany wielomian przybiera dla wartości zmiennych niezależnych scharakteryzowanych przez ułamki interpolacyjne k w *należy wówczas wynik surowy interpolacji poprawić dodając doń „poprawkę interpolacji kolumnowej p_k" oraz „poprawkę interpolacji wierszowej p_w".*

Ostatecznie więc będzie wówczas:

$$F = F_0 + p_k + p_w \tag{10}$$

Wartości poprawek interpolacji kolumnowej i wierszowej winny być przez rachującego odszukiwane w tabelkach poprawek, analogicznych do partes proportionales interpolacji liniowej, według argumentów: ułamek interpolacji kolumnowej k (poprawka interpolacji kolumnowej), oraz: ułamek interpolacji wierszowej w (poprawka interpolacji wierszowej). W przypadku małego zakresu zmienności tych poprawek można zresztą odszukiwać odrazu poprawkę łączną tj sumę $p = p_k + p_w$ w tabeli prostokątnej o dwóch wejściach, względnie z nomogramu siatkowego.

Takie różnego rodzaju pomoce rachunkowe służące do obliczenia poprawki interpolacji surowej podajemy w dalszym ciągu jako ilustrację liczbową zagadnienia.

Koncepcja ogólna projektowanego układu tablic funkcyjnych dla interpolacyjnego obliczania funkcji dwóch argumentów sprowadza się w rezultacie do następujących punktów:

a) zbiory tabelaryczne zostają przy opracowaniu tak zagęszczane, aby wartość funkcji z błędem $\pm$ jednostki ostatniego miejsca mogła być znaleziona na drodze interpolacji przy pomocy wielomianu drugiego stopnia.

b) Interpolację tę przeprowadza się w drodze zestawienia tabelki interpolacyjnej, zupełnego przemnożenia jej przez tabelkę funkcyjną i poprawienie tego wyniku interpolacji surowej przez dodanie poprawek interpolacji w kolumnach i interpolacji w wierszach, odszukiwanych w załączonych do tablicy funkcyjnej tabelkach poprawkowych (ewentualnie w nomogramach).

c) Jeżeli do tablicy funkcyjnej nie dołączone są pomoce rachukowe pozwalające wyznaczać wielkość poprawek wyniku interpolacji surowej oznacza to że przeprowadzając z danych tablic interpolację czteropunktową bez poprawki otrzymywać będziemy błędy nieprzekraczające $\pm$ jednostki ostatniego miejsca.

Jeżeli to nie zachodzi — przy tablicy funkcyjnej winna być podana odpowiednia uwaga.

Przechodzimy do ilustrujących przykładów liczbowych.

P r z y k ł a d 1

Posiłkując się poniższą tablicą funkcyjną znajdziemy interpolacyjnie wartość funkcji dla wartości zmiennych $u = 23{,}6$ $v = 34{,}7$.

u \ v	10	20	30	40	50
10	740	1490	2240	2990	3740
20	1410	2860	4310	5760	7210
30	2080	4230	6380	8530	10680
40	2750	5600	8450	11300	14150
50	3420	6970	10520	14070	17620

$$T = \begin{bmatrix} 4310 & 5760 \\ 6380 & 8530 \end{bmatrix}$$

Ponieważ wartościami ułamków interpolacji w kolumnach i we wierszach są $k = 0{,}36$ $w = 0{,}47$, przeto tabliczka interpolacyjna mieć będzie postać:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0{,}53 & 0{,}47 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0{,}64 \\ 0{,}36 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}3392 & 0{,}3008 \\ 0{,}1908 & 0{,}1692 \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{I}$$

Mnożąc tabliczkę funkcyjną, którą uwidoczniliśmy na tablicy funkcyjnej przez zakreślenie, przez tabliczkę interpolacyjną w sposób zupełny otrzymamy rezultat interpolacji surowej:

$$\underline{F_0 = T \cdot \mathrm{I} = 5855{,}14}$$

który stanowi ostateczną odpowiedź. Ponieważ bowiem do tablicy funkcyjnej nie załączono pomocy rachunkowych służących do obliczenia poprawek interpolacji kolumnowej i poprawek interpolacji wierszowej, wnioskujemy — zgodnie z umową — że z danej tablicy funkcyjnej można interpolować czteropunktowo bez wprowadzania poprawek p_k p_w.

U w a g a: Stabelaryzowana funkcja jest to wielomian:

$$F = 20 + 3u + 5v + 7uv$$

Rezultat interpolacji czteropunktowej bez poprawki jest tu rezultatem „ścisłym", to znaczy otrzymujemy ściśle tę wartość jaką przybiera dany wielomian gdy zmienne przybierają wartości scharakteryzowane przez użyte do rachunku ułamki interpolacyjne. W przypadkach takich było

Przykład 2

X klm \ Y	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
		Wartość bezwzględna rzędnej Y_{GK} Gaussa-Krügera wyrażona w kilometrach													
			Wartość bezwzględna zbieżności Gaussa wyrażona w *cc*												
5400	0	1136 $\boxed{1}$	2271 $\boxed{3}$	3407 $\boxed{4}$	4543 $\boxed{5}$	5678 $\boxed{7}$	6814 $\boxed{8}$	7949 $\boxed{10}$	9084 $\boxed{11}$	10219 $\boxed{12}$	11355 $\boxed{14}$	12490 $\boxed{15}$	13624 $\boxed{16}$	14759 $\boxed{18}$	15894
5500	0	1172 $\boxed{1}$	2344 $\boxed{3}$	3517 $\boxed{4}$	4688 $\boxed{6}$	5861 $\boxed{7}$	7033 $\boxed{9}$	8205 $\boxed{10}$	9377 $\boxed{12}$	10548 $\boxed{13}$	11720 $\boxed{15}$	12891 $\boxed{16}$	14063 $\boxed{18}$	15234 $\boxed{19}$	16405
5600	0	1210 $\boxed{2}$	2420 $\boxed{3}$	3630 $\boxed{5}$	4840 $\boxed{6}$	6050 $\boxed{8}$	7260 $\boxed{9}$	8470 $\boxed{11}$	9680 $\boxed{13}$	10890 $\boxed{14}$	12099 $\boxed{16}$	13308 $\boxed{17}$	14518 $\boxed{19}$	15727 $\boxed{20}$	16935
5700	0	1250 $\boxed{2}$	2499 $\boxed{3}$	3749 $\boxed{5}$	4998 $\boxed{7}$	6247 $\boxed{8}$	7497 $\boxed{10}$	8746 $\boxed{12}$	9995 $\boxed{14}$	11244 $\boxed{15}$	12493 $\boxed{17}$	13741 $\boxed{19}$	14990 $\boxed{20}$	16238 $\boxed{22}$	17486
5800	0	1290 $\boxed{2}$	2581 $\boxed{4}$	3871 $\boxed{5}$	5162 $\boxed{7}$	6452 $\boxed{9}$	7742 $\boxed{11}$	9032 $\boxed{13}$	10322 $\boxed{15}$	11612 $\boxed{16}$	12902 $\boxed{18}$	14192 $\boxed{20}$	15481 $\boxed{22}$	16770 $\boxed{24}$	18059
5900	0	1333 $\boxed{2}$	2666 $\boxed{4}$	3999 $\boxed{6}$	5332 $\boxed{8}$	6665 $\boxed{10}$	7998 $\boxed{12}$	9331 $\boxed{14}$	10664 $\boxed{16}$	11996 $\boxed{18}$	13328 $\boxed{20}$	14661 $\boxed{22}$	15992 $\boxed{24}$	17324 $\boxed{25}$	18656
6000	0	1378 $\boxed{2}$	2755 $\boxed{4}$	4133 $\boxed{6}$	5510 $\boxed{8}$	6888 $\boxed{11}$	8265 $\boxed{13}$	9642 $\boxed{15}$	11019 $\boxed{17}$	12396 $\boxed{19}$	13773 $\boxed{21}$	15149 $\boxed{23}$	16526 $\boxed{25}$	17902 $\boxed{28}$	19278
6100	0	1424 $\boxed{2}$	2848 $\boxed{5}$	4272 $\boxed{7}$	5696 $\boxed{9}$	7120 $\boxed{11}$	8544 $\boxed{14}$	9967 $\boxed{16}$	11391 $\boxed{18}$	12814 $\boxed{20}$	14237 $\boxed{23}$	15660 $\boxed{25}$	17083 $\boxed{27}$	18505 $\boxed{30}$	19927
6200	0	1473	2945	4418	5890	7363	8835	10307	11779	13251	14722	16194	17665	19136	20606

Tabelki poprawek do interpolacji czteropunktowej

k	P_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0,00	1.00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,02	0,98	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0 4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6
0,04	0,96	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2
0,06	0,94	0,1	0,1	0 2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7
0,08	0,92	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2
0,10	0,90	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7	1.8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
0,12	0,88	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2
0,14	0,86	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6
0,16	0,84	0,1	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0	2,2	2,3	2,4	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,6	3,8	3,9	4,0
0,18	0,82	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	1,9	2,1	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0	4,1	4,3	4,4
0,20	0,80	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0	1,1	1,3	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,2	2,4	2,6	2,7	2,9	3,0	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0	4,2	4,3	4,5	4,6	4,8
0,22	0,78	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	1,2	1,4	1,5	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,6	2,7	2,9	3,1	3,3	3,4	3,6	3,8	3,9	4,1	4,3	4,5	4,6	4,8	5,0	5,1
0,24	0,76	0,2	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,7	2.9	3,1	3,3	3,5	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,7	4,9	5,1	5,3	5,5
0,26	0,74	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8
0,28	0,72	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0
0,30	0,70	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,5	5,7	5,9	6,1	6,3
0,35	0,65	0,2	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,8	2,0	2,3	2,5	2,7	3,0	3,2	3,4	3,6	3,9	4,1	4,3	4,6	4,8	5,0	5,2	5,5	5,7	5,9	6,1	6,4	6,6	6,8
0,40	0,60	0.2	0,5	0,7	1,0	1,2	1,4	1,7	1,9	2,2	2,4	2,6	2,9	3,0	3,4	3,6	3,8	4,1	4,3	4,6	4,8	5,0	5,3	5,5	5,8	6,0	6,2	6,5	6,7	7,0	7,2
0,50	0,50	0,2	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,0	3,2	3,5	3,8	4,0	4,2	4,5	4,8	5,0	5,2	5,5	5,8	6,0	6,2	6,5	6,8	7,0	7,2	7,5

$P_w = 0$

Uwaga: Znak zbieżności taki sam jak znak rzędnej Gaussa-Krûgera by oczywiście prościej podać wartości współczynników wielomianu i obliczać jego wartości bezpośrednio. Z reguły tabelaryzowana funkcja nie jest oczywiście wielomianem a tylko może być w granicach interpolacji uważana za wielomian, co omawiamy dalej.

P r z y k ł a d 2

Obliczymy zbieżność Gaussa (kąt który należy dodać do kąta osiowego kierunku na płaszczyżnie odwzorowania Gaussa-Krügera dla otrzymania azymutu astronomicznego tego kierunku) dla punktu o współrzędnych X_{GK} 6075 238,15 $Y_{GK} =$ 112 537,20. (patrz tablice na str. 328, 329).

Mieć będziemy:

$$k = \frac{75{,}23815 \text{ klm}}{100 \text{ klm}} = 0{,}752381 \qquad w = \frac{2{,}53720 \text{ klm}}{10 \text{ klm}} = 0{,}253720$$

	0,746280	0,253720
0,247619	0,184793	0,062826
0,752381	0,561487	0,190894

Mnożąc tę tabelkę interpolacyjną przez tabelkę funkcyjną:

15149	16526
15660	17083

otrzymamy wynik surowy interpolacji czteropunktowej równy odpowiednio $F_0 = 15891{,}6$

Odszukana w drugiej tabeli poprawka (dla 0,75 i $\boxed{23}$) wynosi $p_k = -4{,}3$

skąd ostatecznie poszukiwana zbieżność mieć będzie wartość $F = 15887^{cc}$

P r z y k ł a d 3

Tablica funkcyjna jest tu podwójna, to znaczy służy ona do obliczania — przy użyciu arytmometru podwójnego *jednocześnie*—dwóch funkcyj dwóch zmiennych

Służy ona do zamiany współrzędnych w odwzorowaniu Gaussa-Krûgera z pasa odwzorowawczego zachodniego na pas odwzorowawczy wschodni przy różnicy długości geograficznej południków osiowych równej 3^0.

x \ y	......	600 (100)	610 (110)	.....
	W tabeli współrzędne x • y w pasie odwzorowania wschodnim (3^0).			
5410	......	....	....	.....
5420	......	5420 392,32•380 121,09	5419 997,75•390 113,57	.....
5430	......	5430 385,05•380 515,94	5429 989,94•390 508,39	.....
5440	......	....	....	.....
....	......	....	....	.....

W tablicy funkcyjnej na przecięciu kolumny w nagłówku której napisane rzędną punktu w układzie zachodnim, wyrażoną w kilometrach, z wierszem w nagłówku, którego napisano odciętą punktu w układzie zachodnim, wyrażoną w kilometrach, znajdują się współrzędne odpowiadającego punktu odwzorowane w układzie wschodnim.

Wyrażono je w metrach — pisząc najpierw odciętą a obok rzędną. (bez tzw. „cechy", są to więc współrzędne Gaussa zwiększone o 500 klm).

Do wyinterpolowanej czteropunktowo odciętej żadnej poprawki wprowadzać nie trzeba. Wyinterpolowaną czteropunktowo rzędną poprawić należy odszukując poprawkę w niżej umieszczonej tabelce.

Współczynnik interpolacji kol.	Współczynnik interpolacji wierszowej										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	Poprawka do rzędnej wyinterpolowanej czteropunktowo										
0	00	0,02	0,04	0,05	0,06	0,06	0,06	0,05	0,04	0,02	0
0,1	—0,02	0	0,02	0,03	0,04	0,04	0,04	0,03	0,02	0	—0,02
0,2	—0,04	—0,02	0	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0	—0,02	—0,04
0,3	—0,05	—0,03	—0,01	0	0,01	0,01	0,01	0	—0,01	—0,03	—0,05
0,4	—0,06	—0,04	—0,02	—0,01	0	0	0	—0,01	—0,02	—0,04	—0,06
0,5	—0,06	—0,04	—0,02	—0,01	0	0	0	—0,01	—0,02	—0,04	—0,06
0,6	—0,06	—0,04	—0,02	—0,01	0	0	0	—0,01	—0,02	—0,04	—0,06
0,7	—0,05	—0,03	—0,01	0	0,01	0,01	0,01	0	—0,01	—0,03	—0,05
0,8	—0,04	—0,02	0	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0	—0,02	—0,04
0,9	—0,02	0	0,02	0,03	0,04	0,04	0,04	0,03	0,02	0	—0,02
1,0	0	0,02	0,04	0,05	0,06	0,06	0,06	0,05	0,04	0,02	0

Dla dokonania zamiany współrzędnych $x = 5424\ 127,15$ $y = 600\ 923,26$ z układu zachodniego na układ wschodni, mieć tu będziemy: współczynnik interpolacji w kolumnach 0,412 715, we wierszach 0,092 326. Tabliczka interpolacyjna mieć więc będzie postać:

	0,907 674	0,092 326
0,587 285	0,5330 6333	0,0542 2167
0,412 715	0,3746 1067	0,0381 0433

Mnożąc tę tabliczkę w sposób zupełny przez tabliczkę funkcyjną znajdziemy następujące wyniki interpolacji surowej — oznaczamy je przez $F_0(x)$ i $F_0(y)$.

$$F_0(x) = 5424\ 480,02 \qquad F_0(y) = 381\ 206,62$$

poprawka $\underline{-0,04}$ skąd ostatecznie:

$$x_{wsch} = 5424\ 480,02 \qquad y_{wsch} = 381\ 206,58$$ (bez tzw. cechy").

W ramach prac Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego (obecnie Instytut Geodezji i Kartografii) zostały w oparciu o podaną wyżej koncepcję, której uzasadnienie teoretyczne podaje się w części II, opracowane niżej wyszczególnione pomoce rachunkowe:

1) Tablice do interpolacyjnego przeliczania współrzędnych prostokątnych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera na sąsiedni układ trzystopniowy (W-wa 1952),

2) Tablice do zamiany współrzędnych geograficznych na prostokątne w odwzorowaniu Gaussa-Krügera w oparciu o elementy elipsoidy Bessela (3^0 od południka osiowego, czyli dla tzw. pasów sześciostopniowych),

3) Tablice do zamiany współrzędnych prostokątnych Gauss-Krügerowskich na współrzędne geograficzne w oparciu o elementy elipsoidy Bessela (dla pasów sześciostopniowych),

4) Tablice do zamiany wspkłrzędnych geograficznych na prostokątne w odwzorowaniu Gaussa-Krügera w oparciu o elementy elipsoidy Krassowskiego (dla pasów sześciostopniowych),

5) Tablice do przeliczania współrzędnych prostokątnych na sąsiedni układ trzystopniowy w odwzorowaniu Gaussa-Krügera w oparciu o elementy elipsoidy Krassowskiego.

Przy opracowaniu korzystano z materiału cyfrowego zawartego w pracy: „Brechpunktstabelle für Gauss-Krügerische Koordinaten — Oberkommando der Kriegsmarine, Berlin 1943" — po skorygowaniu błędów cyfrowych w obszarze wykorzystania (szerokość geograficzna 48^0—56^0), jak również częściowo z prac „Zahlentafeln zur Ermittlung der Zweiten Koordinaten", K. Schallhorn, Stuttgart 1942 i „Przeliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich". W-wa 1949 Józef Pawłowski. Przy transformacji współrzędnych z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krassowskiego korzystano z pracy I. Gombrycha „Przeliczenie współrzędnych płaskich w odwzorowaniu Gaussa-Krügera z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krassowskiego", Warszawa 1954.

Opracowanie cyfrowe wyszczególnionych prac wykonali: Ireneusz Gombrych, Stefan Hausbrandt, Kazimierz Napierkowski, Jan Panasiuk.

CZĘŚĆ II (TEORETYCZNA)

Uzasadnienie postępowania rachunkowego opisanego w części I oraz podstawy na których opiera się konstruowanie tablic i pomocy do obliczania poprawek interpolacyjnych

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja dwóch zmiennych $F(u,v)$ jest wielomianem drugiego stopnia $F(u,v) = au + bv + c.uv + d$, stabelaryzowanym w tablicy:

$$\begin{array}{c|ccccc} u \backslash v & & v_0 & v_1 & & \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0 & \dots & F_{00} & F_{10} & \dots & \dots \\ u_1 & \dots & F_{01} & F_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad \text{przy czym oznaczymy: } \boxed{\begin{array}{cc} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{array}} = T$$

wówczas wartość jaką ta funkcja przybiera dla wartości zmiennych $u.v$ scharakteryzowanych przez ułamki interpolacyjne

$$k = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \qquad w = \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}$$

jest równa sumie iloczynów elementów tabliczki T przez odpowiadające im położeniem elementy tabliczki I wyznaczonej jak następuje:

$$I = \boxed{\begin{array}{cc} (1-k).(1-w) & w(1-k) \\ k.(1-w) & k.w \end{array}} \quad \text{co oznaczymy umownie: } \underline{F(k,w) = T.I} \qquad (11)$$

Dowód. Wielkość $T.I$ jako zawierająca zmienne k, w w odpowiednich potęgach jest wielomianem rozpatrywanego typu względem zmiennych k, w, a z uwagi na liniową zależność k od u oraz w od v, jest ona też wielomianem rozpatrywanego typu względem zmiennych u i v. Ponieważ wielomian tego typu wyznaczony jest przez cztery parametry, przeto dla uzasadnienia twierdzenia wystarczy wykazać że wyrażenie TI

1) dla wartości $u_0 v_0$ tj. dla $k=0$ $w=0$ przybiera wartość F_{00}
2) „ „ $u_1 v_0$ „ „ $k=1$ $w=0$ „ „ F_{01}
3) „ „ $u_0 v_1$ „ „ $k=0$ $w=1$ „ „ F_{10}
4) „ „ $u_1 v_1$ „ „ $k=1$ $w=1$ „ „ F_{11}

Jest to jednak odrazu widoczne, bowiem przy założeniu 1) będzie $TI=F_{00}$, przy założeniu 2) będzie $TI=F_{01}$, przy założeniu 3) będzie $TI=F_{10}$, oraz przy założeniu 4) będzie $TI=F_{11}$, a to z uwagi na zamienianie się pozostałych elementów tabelki I na zero.

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja dwóch zmiennych $F(uv)$ jest pełnym wielomianem drugiego stopnia: $au+bv+cuv+du^2+ev^2+f$ stabelaryzowanym w tabeli prostokątnej:

$$\begin{array}{c|ccccc} & \dots & v_0 & v_1 & v_2 & \dots \\ \hline & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0 & \dots & F_{00} & F_{10} & F_{20} & \dots \\ u_1 & \dots & F_{01} & F_{11} & F_{21} & \dots \\ u_2 & \dots & F_{02} & F_{12} & F_{22} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

przyczym oznaczymy: $T=\boxed{\begin{array}{cc} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{array}}$

wówczas wartość jaką ta funkcja przybiera dla wartości zmiennych uv scharakteryzowanych przez ułamki interpolacyjne: k (ułamek interpolacji w kolumnach) i w (ułamek interpolacji w wierszach):

$$k=\frac{u-u_0}{u_1-u_0} \qquad w=\frac{v-v_0}{v_1-v_0}$$

jest równa sumie iloczynów elementów tabliczki T przez odpowiadające im położeniem elementy tabliczki I wyznaczonej jak i poprzednio:

$$I=\boxed{\begin{array}{cc} (1-k)(1-w) & w(1-k) \\ k(1-w) & kw \end{array}}$$

powiększonej o poprawkę interpolacji kolumnowej p_k oraz poprawkę interpolacji wierszowej p_w co oznaczymy jak następuje:

$$\boxed{F(kw)=T.I+p_k+p_w} \qquad \dots (12)$$

przyczym poprawki interpolacji kolumnowej i wierszowej wyznaczają wzory:

$$\left.\begin{array}{l} p_k=\dfrac{k(1-k)}{2}\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ lub ogólniej } p_k=\dfrac{k(1-k)}{2}\begin{Bmatrix} F_{rs} \\ F_{r,s+1} \\ F_{r,s+2} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ p_w=\dfrac{w(1-w)}{2}\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ lub ogólniej } p_w=\dfrac{w(1-w)}{2}\begin{Bmatrix} F_{qz} \\ F_{q+1,z} \\ F_{q+2,z} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \end{array}\right\} (13)$$

Dowód. Ponieważ założony wielomian wyznaczony jest przez sześć parametrów, dla uzasadnienia twierdzenia wystarczy wykazać że wyrażenie:

$$F(kw) = T \, . \, I + p_k + p_w$$

1) dla wartości $k=0$ $w=0$ przybiera wartość F_{00}
2) dla wartości $k=1$ $w=0$ „ „ F_{01}
3) dla wartości $k=2$ $w=0$ „ „ F_{02}
4) dla wartości $k=0$ $w=1$ „ „ F_{10}
5) dla wartości $k=1$ $w=1$ „ „ F_{11}
6) dla wartości $k=0$ $w=2$ „ „ F_{20}

Wykażemy to łatwo obliczając wartości jakie kolejne składniki wzoru

$$F(kw) = T\,I + p_k + p_w$$

oraz ich suma przybierać będą dla odpowiednich wartości zmiennych k i w.

dla k	w	mamy $T\,.\,I$	p_p	p_w	$F = T\,.\,I + p_k + p_w$
0	0	F_{00}	0	0	F_{00}
1	0	F_{01}	0	0	F_{01}
2	0	$2F_{01} - F_{00}$	$-2F_{01} + F_{00} + F_{02}$	0	F_{02}
0	1	F_{10}	0	0	F_{10}
1	1	F_{11}	0	0	F_{11}
0	2	$2F_{10} - F_{00}$	0	$F_{00} - 2F_{10} + F_{20}$	F_{20}

Ponieważ istotnie — jak to widać z powyższego zestawienia — wielomian $F(kw) = T\,I + p_k + p_w$, który jest wielomianem drugiego stopnia względem zmiennych kw, stanowiących z kolei funkcje liniowe zmiennych uv, przybiera dla sześciu założonych wartości argumentów odpowiadające wartości, twierdzenie zostało udowodnione.

Podane wyżej twierdzenia uzasadniają słuszność przepisanego rachunku liczbowego w „interpolacji czteropunktowej" opisanego w początku pracy.

Opracowanie tablic do interpolacji czteropunktowej wymaga przygotowania odpowiedniego zbioru tabelarycznego, przyczym można wygodnie opierać się na twierdzeniach, które podajemy dalej.

Twierdzenie 3. Suma iloczynów czterech wartości wielomianu drugiego stopnia dla równoodległych wartości argumentu przez współczynniki dwumianowe wielomianu trzeciego stopnia z przeplatającymi się znakami jest zerem.

$$\boxed{\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0} \qquad (14)$$

Twierdzenie to można wyrazić ogólniej przez równanie $\underline{F}\,\underline{N} = 0$, gdzie $\underline{F}$ jest krakowianem $n+2$ wartości wielomianu n-tego stopnia dla równoodległych wartości argumentu, zaś $\underline{N}$ krakowianem newtonowskim o $n+2$ wyrazach, to znaczy zespołem współczynników dwumianowych dwumianu $n+1$ stopnia o przeplatających się znakach. Prosty dowód słuszności tego twierdzenia pomijamy, ponieważ był on już podany w jednej z dawniejszych publikacyj Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego (Prace GINB N 7 Stefan Hausbrandt „Bezpośrednia Interpolacja wielomianowa ze szczególnym uwzględnieniem interpolacji funkcji dwóch argumentów ujęta krakowianowo, oraz poprzedzona krótkim zarysem rachunku krakowianowego", Warszawa 1950).

Twierdzenie jest przydatne przy zestawianiu tabeli funkcyjnej funkcji dwóch argumentów. W naszym wypadku funkcja, jako wielomian drugiego stopnia względem zmiennej kolumnowej i względem zmiennej wierszowej, musi spełniać kryterium $\underline{F}\,\underline{N} = 0$ zarówno dla każdych czterech wartości funkcji sąsiadujących w kolumnie, jak i dla każdych czterech wartości funkcji sąsiadujących w wierszu. Jest przytym zrozumiałe, że z uwagi na błędy zaokrągleń kryterium to nie będzie — naogół biorąc — spełnione ściśle (wyłączając wypadki gdy funkcja stanowi ściśle wielomian podany bez zaokrąglenia cyfr końcowych z czym zresztą w rachunkach praktycznych nie mamy nigdy do czynienia).

Jeżeli oznaczyć przez j wartość jednostki ostatniego rzędu stabelaryzowanej funkcji, wówczas, zakładając najniepomyślniejszy zbieg błędów zaokrągleń w czterech sąsiadujących wartościach funkcji, otrzymamy w rozważanym wypadku wielomianu drugiego stopnia maksymalny dopuszczalny błąd przy realizacji wzoru $\underline{F}\,\underline{N}$ wielkość $0{,}5 \cdot 8 \cdot j$ tj. $4 \cdot j$. W związku z tym wzór (14) do celów rachunku liczbowego przyjmie postać:

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \leqslant 4 \cdot j \tag{15}$$

W wypadku ogólnym, zważywszy że suma współczynników rozwinięcia dwumianu równa jest 2^n gdzie n jest stopniem wielomianu, mielibyśmy dla sprawdzenia przy pomocy krakowianów newtonowskich położenia $n+2$ punktów na wielomianie n-tego stopnia równanie:

$\boxed{\underline{F}\,\underline{N} \leqslant 2^n j}$ gdzie krakowiany $\underline{F}\,\underline{N}$ zawierają po $n+2$ elementy. (16)

Podkreślamy wysoką przydatność wzoru (16), którego wzór (15) jest szczególnym przypadkiem, do sprawdzania zbiorów tabelarycznych przy ich drukowaniu. Wiadomo że tzw. „sczytanie" tekstu cyfrowego jest sprawdzeniem niewystarczającym, zaś opieranie się na stwierdzaniu stałości n-tej tóżnicy jest bardzo pracochłonne z uwagi na potrzebę zapisywania wielu liczb w toku rachunku potrzebnych tylko przejściowo. Realizacja wzoru kontrolującego (16) jest w rachunku maszynowym bardzo prosta i w założeniu że operuje się wszystkimi wartościami tabelaryzowanej funkcji, daje zupełną gwarancję bezbłędności drukowanej tabeli funkcyjnej.

Obecnie podamy twierdzenia precyzujące bliżej granice błędu jakiego możemy oczekiwać gdy aproksymujemy funkcję przez wielomian drugiego stopnia, gdy winna ona być aproksymowana przez wielomian stopnia trzeciego. Twierdzenia są o tyle przydatne, że w zagadnieniach rachunku praktycznego zachodzą wypadki gdy nadmierne zagęszczanie tabeli funkcyjnej, celowe z punktu widzenia matematycznego, nie daje się uzasadnić względami praktycznymi.

Twierdzenie 4. Największa wartość błędu jaki otrzymamy interpolując przy pomocy wielomianu drugiego stopnia wartość funkcji która jest wielomianem stopnia trzeciego nie przekroczy wielkości f_{maks} określonej wzorem:

$$\boxed{f_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{27}\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}=0{,}06415\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}} \tag{17}$$

Symbole F_0 F_1 F_2 F_3 oznaczają tu — jak i poprzednio — wartości jakie przybiera funkcja dla czterech równoodległych wartości argumentu

Dowód słuszności twierdzenia można przeprowadzić opierając się na znanym „wzorze interpolacyjnym Newtona".

$$F=F_0+\binom{k}{1}a_0+\binom{k}{2}b_0+\binom{k}{3}c_0\ldots$$

gdzie F jest poszukiwaną wartością funkcji, F_0 wartością wyjściową, k ułamkiem interpolacyjnym, zaś a_0 b_0 $c_0\ldots$ oznaczają kolejne różnice położone na przekątnej tabeli różnicowej:

$$\begin{array}{llll}
F_0 & & & \\
 & a_0=F_1-F_0 & & \\
F_1 & & b_0=a_1-a_0=F_2-2F_1+F_0 & \\
 & a_1=F_2-F_1 & & c_0=b_1-b_0=F_3-3F_2+3F_1-F_0 \\
F_2 & & b_1=a_2-a_1=F_3-2F_2+F_1 & \\
 & a_2=F_3-F_2 & & c_1=b_2-b_1=F_4-3F_3+3F_2-F_1 \\
F_3 & & b_2=a_3-a_2=F_4-2F_3+F_2 & \\
 & a_3=F_4-F_3 & & \\
F_4 & & &
\end{array}$$

Łatwo sprawdzić że mamy

$$a_0=\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\qquad b_0=\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\qquad c_0=\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\qquad \text{itd. itd.}$$

lub uogólniając: kolejne różnice wzoru Newtona są równe krakowianom funkcyjnym $\underline{F}$ mnożonym przez krakowiany newtonowskie $\underline{N}$, przyczym przez krakowian funkcyjny rozumiemy zespół 2, 3, 4... sąsiadujących wartości funkcji (ogólniej zespół wartości funkcji dla równoodległych wartości argumentu), zaś przez krakowian newtonowski rozumiemy zespół współczynników rozwinięcia dwumianu stopnia 1, 2, 3... o przeplatających się znakach przy ostatnim znaku dodatnim*). Z tego uogólnienia wynika zresztą że gdy stabelaryzowana funkcja jest wielomianem n-tego stopnia wówczas dla krakowianów $\underline{F}\,\underline{N}$ o $n+1$ elementach, musi zachodzić związek $\underline{F}\,\underline{N}=0$, o którym mówiliśmy uprzednio (twierdzenie 3), a to z uwagi na zerowość $n+1$-szych różnic.

Napisanie wzoru interpolacyjnego Newtona pod postacią:

$$\boxed{F=F_0+\binom{k}{1}\cdot\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}+\binom{k}{2}\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}+\binom{k}{3}\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}} \tag{18}$$

pozwala odrazu zauważyć że różnica między wynikiem interpolacji przy pomocy wielomianu stopnia trzeciego a wynikiem interpolacji przy pomocy wielomianu stopnia drugiego wynosi:

$$f=\binom{k}{3}\cdot\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}=k\,.\,(k-1)\,.\,(k-2)\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\cdot\frac{1}{6}$$

Dla uzasadnienia słuszności twierdzenia (4) pozostaje obliczyć extremum wyrażenia $x=k\ (k-1)\ (k-2)$ i pomnożyć wartość tego extremum przez szóstą część iloczynu $\underline{N}\ \underline{F}$, Ponieważ pochodna:

$$\frac{dx}{dk}=3k^2-6k+2$$

zamienia się na zero przy $k=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, zaś wartość $k=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ w grę nie wchodzi, gdyż interesuje nas zmienność k ograniczona nierównością:

$$0\leqslant k\leqslant 1$$

pozostaje obliczyć wartość extremum dla $k=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Otrzymujemy:

$$x_{extr}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

*) Używam tu i nadal terminu „krakowian newtonowski", gdyż przyjął on się w pracach krakowianowych zarówno zagranicznych jak i krajowych. Obacz np. S. Arend „Paraboles de degié n passant par $n+1$ points dont les abscisses procèdent par intervalle constant" — Bruxelles 1953; K. Cebulak „Graficzno analityczne wyznaczanie krzywych hydrologicznych wyrównanych metodą krakowianową", Acta Geophysica Polonica, Warszawa 1953 vol I N 3, 4.

Mnożąc otrzymaną wartość extremum przez szóstą część iloczynu $\underline{F}\ \underline{N}$ otrzymamy ostatecznie:

$$f_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27}\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ cnd.}$$

U w a g a. W analogiczny sposób możemy otrzymać wzór na największą wartość błędu jaki otrzymamy interpolując przy pomocy wielomianu pierwszego stopnia (tzw interpolacja liniowa) wartość funkcji który jest wielomianem stopnia drugiego. Wzór ten ma postać:

$$f_{max} = \frac{1}{8}\cdot\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \ldots (19)$$

P r z y k ł a d l i c z b o w y

x	$F = \sqrt[3]{x}$
...	...
150	5,313 293
151	5,325 074
152	5,336 803
153	5,348 481
154	5,360 108
155	5,371 685
156	5,383 213

Stabelaryzowana obok funkcja może być interpolowana przy pomocy wielomianu drugiego stopnia. Taka interpolacja dawała by bowiem błędy, których wielkość nie przekraczała by 0,000 000 064 a więc błędy których wielkość może być pomijana z uwagi na dokładność tabelaryzacji. Natomiast interpolowanie przy pomocy wielomianu pierwszego stopnia dawać będzie błędy dochodzące do 0,000 0065 a więc przekraczające dokładność tabelaryzacji.

Sformułujemy teraz twierdzenie analogiczne do podanego ostatnio twierdzenia (4), lecz odnoszące się do funkcji dwóch argumentów.

Twierdzenie 5. Największa wartość błędu jaki otrzymamy interpolując przy pomocy wielomianu drugiego stopnia wartość funkcji dwóch zmiennych która jest wielomianem stopnia trzeciego nie przekroczy wielkości f określonej wzorem:

$$\boxed{f = \left[\left[\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}\right]\frac{\sqrt{3}}{27} + \left[\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{01} \\ F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right]\frac{1}{8}\right] \ldots} \quad (20)$$

przyczym wszystkie cztery składniki wzoru rozumieć należy w wartościach bezwzględnych

Dowód. Zauważymy najpierw że: jeżeli funkcja dwóch zmiennych $F(uv)$ jest pełnym wielomianem trzeciego stopnia:

$$au + bv + cuv + du^2 + ev^2 + fu^2v + gv^2u + hu^3 + iv^3 + j,$$

stabelaryzowanym w tabeli prostokątnej:

	......	v_0	v_1	v_2	v_3	......
	......	......	......	......	......	......
u_0	......	F_{00}	F_{10}	F_{20}	F_{30}	......
u_1	......	F_{01}	F_{11}	F_{21}	F_{31}	......
u_2	......	F_{02}	F_{12}	F_{22}	F_{32}	......
u_3	......	F_{03}	F_{13}	F_{23}	F_{33}	......
	......	......	......	......	......	......

wówczas wartość jaką funkcja przybiera dla wartości zmiennych u v scharakteryzowanych przez ułamki interpolacyjne: k (ułamek interpolacji w kolumnach) i w (ułamek interpolacji w wierszach):

$$k = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \qquad w = \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}$$

wyrażać się będzie wzorem:

$$F_{00} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \binom{k}{1} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \binom{w}{1} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{10} \\ F_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \binom{k}{1} \binom{w}{1} +$$

$$\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \binom{k}{2} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \binom{w}{2} + \Delta F,$$ gdzie ΔF jak oznaczyliśmy różnicę między wynikiem interpolacji przy pomocy wielomianu trzeciego stopnia a wynikiem interpolacji przy pomocy wielomianu drugiego stopnia wynosi:

$$\Delta F = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{k}{3} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{w}{3} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{k}{2} \binom{w}{1} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{01} \\ F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{k}{1} \binom{w}{2} \tag{21}$$

Jak bowiem łatwo sprawdzić (rachunek pomijamy) wartość całego wyrażenia zamienia się przy $k = 0$ $w = 0$ na F_{00}, przy $k = 0$ $w = 1$ na F_{10} itd itd.

Pozostaje wyznaczyć wartość której nie przekroczy wielkość ΔF stanowiąca różnicę wyników interpolacji trzeciego i drugiego stopnia, gdy ułamki interpolacyjne k w zmieniać się będą od zera do jedności.

Traktując wielkość ΔF (21) jako sumę czterech składników — oznaczmy je kolejne przez $ABCD$ — napisać możemy:

$$\Delta F_{max} < A_{max} + B_{max} + C_{max} + D_{max} \tag{22}$$

Lecz pierwsze dwa składniki — zgodnie z twierdzeniem (4) — nie przekroczą wartości:

$$\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{27} = A_{max} \quad \text{oraz} \quad \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{27} = B_{max} \tag{23}$$

obliczaliśmy już bowiem ekstremalne wartości analogicznego wyrażenia.

Co się tyczy trzeciego i czwartego składnika, rozumować będziemy jak następuje (rachunek pochodnych dałby nam tylko minimum równe zeru dla treści zadania nieistotne): iloczyn

$$\binom{k}{2}\binom{w}{1} = \frac{k(k-1)\,w}{2} = \frac{(k^2-k)\,w}{2} = (k^2-k)\,w\,\frac{1}{2}$$

składa się z dwóch czynników. Wartość bezwzględna pierwszego z nich w rozpatrywanych granicach zmienności nie przekroczy wielkości 0,25 wartość drugiego nie przekroczy wielkości 1, wartość trzeciego wynosi stale 0.5. Wartość iloczynu nie może więc w żadnym wypadku w rozpatrywanych granicach zmienności przekroczyć liczby

$$0{,}25 \,.\, 1 \,.\, 0{,}5 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$$

Wynika stąd już, że wartości bezwzględne trzeciego, a przez analogię i czwartego, składników wzoru (21) nie przekroczą w żadnym wypadku wielkości:

$$\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{8} = C_{max}, \quad \text{oraz} \quad \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{01} \\ F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{8} = D_{max} \tag{24}$$

Ze związków (22) (23) (24) wynika już słuszność twierdzenia (5) cnd.

Twierdzenie 6. Największa wartość błędu jaki otrzymamy interpolując przy pomocy wielomianu pierwszego stopnia wartość funkcji dwóch zmiennych która jest wielomianem stopnia drugiego nie przekroczy wielkości f określonej wzorem:

$$\boxed{f=\left[\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{1}{8}+\left[\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{10}\\F_{11}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{Bmatrix}\right]} \qquad (25)$$

Dowód. Przy założeniu że wielomian jest stopnia pierwszege przeprowadzilibyśmy interpolację wzorem:

$$F=F_{00}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}.k+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}.w$$

Porównując to z wzorem na interpolację stopnia drugiego napisanym pod postacią przyjętą we wzorzorze (21) widzimy, że różnica między wynikiem interpolacji drugiego stopnia i wynikiem interpolacji stopnia pierwszego będzie:

$$\Delta F=\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{10}\\F_{11}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{Bmatrix}k.w+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{03}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{2}k.(k-1)+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{2}w(w-1)$$

Ponieważ przy zmianie wartości kw w granicach od zera do jedności: wielkość wk nie przekroczy wartości 1, wielkość $k(k-1)\frac{1}{2}$ nie przekroczy wartości $\frac{1}{8}$, wreszcie wielkość $w(w-1)\frac{1}{2}$ nie przekroczy wartości $\frac{1}{8}$, przeto wielkość ΔF nie może w żadnym wypadku przekroczyć wartości f wyszczególnionej we wzorze (25) cnd.

Przykład liczbowy. Weźmy tabelę funkcyjną funkcji dwóch zmiennych podaną na str. 328 (fragment początkowy).

1136	2271	3407	4543
1172	2344	3517	
1210	2420		
1250			

W mysl twierdzenia 5 największa wartość błędu przy interpolacji drugiego stopnia nie przekroczy tu liczby $0{,}19^{cc}$ mniejszej od błędu zaokrąglenia przy tworzeniu tabeli. Interpolacja ta jest więc dostatecznie dokładna. Natomiast — w myśl twierdzenia 6 — największa wartość błędu przy interpolacji pierwszego stopnia nie przekroczy liczby 38^{cc}. Dokładność takiej interpolacji nie jest więc więc w myśl tego twierdzenia zagwarantowana.

Uwaga. Zarówno w wysłowieniu jak i w symbolice twierdzeń 4, 5, 6 nie podkreślaliśmy że chodzi tam o największe wartości bezwzględne, uważając że jest to zrozumiałe z natury rzeczy, zaś nadmierne silenie się na ścisłość w wysłowieniu i symbolice wpłynęło by ujemnie na przejrzystość twierdzeń

Układanie pomocy do obliczania poprawek interpolacji czteropunktowej

Wzór na interpolację funkcji dwóch argumentów przy pomocy wielomianu drugiego stopnia (por. twierdzenie 2) może być napisany pod postacią:

$$F = \boxed{\begin{matrix} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} (1-k)(1-w) & w(1-k) \\ k(1-w) & kw \end{matrix}} + k(1-k)\alpha + w(1-w)\beta$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} \qquad \beta = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} \tag{26}$$

Jest zrozumiałe, że wielkości które oznaczyliśmy tu przez α i β będą stałe dla zakresu zmienności zilustrowanego przez określoną tablicę funkcyjną tylko w tym wypadku, gdy stabelaryzowana funkcja jest ściśle wielomianem drugiego stopnia. Ponieważ praktycznie nigdy to nie nie zachodzi, gdyż funkcja wielomianem nie jest a jedynie zostaje przez wielomian w węższym zakresie zmienności aproksymowana, przeto wielkości α i β obliczane z różnych trzech sąsiadujących wartości F będą się między sobą nieco różnić. Pomoce rachunkowe służące do jaknajbardziej bezpośredniego (tj. bez dodatkowych rachunków odszukania poprawek interpolacji czteropunktowej:

$$p_k = k(1-k)\alpha \qquad p_w = w(1-w)\beta \tag{27}$$

muszą być tak skonstruowane aby:

1^0 zabierały możliwie mało miejsca, co umożliwi szybkie odszukanie wartości poprawek,

2^0 nie obniżały zanadto dokładności rezultatu interpolacji.

Ponieważ, jak to łatwo widzieć, maksymalna wartość czynnika $k(1-k)$ względnie $w(1-w)$ przez który mnoży się wielkości α względnie β wynosi 0,25, tedy posiłkowanie się pomocą rachunkową zestawioną dla wielkości α zamiast dla wielkości $\alpha + d\alpha$, względnie posiłkowaie się pomocą rachunkową zestawioną dla wielkości β zamiast dla wielkości $\beta + d\beta$ skutkować będzie odpowiednio błędy:

$$0{,}25\,d\alpha \qquad \text{względnie } 0{,}25\,d\beta$$

Oznaczmy $\Delta\alpha$ oraz $\Delta\beta$ różnice między tymi sąsiadującymi wartościami α_1 i α_2 oraz β_1 i β_2 dla których obliczono pomoce rachunkowe. Korzystający z tych pomocy przy prawidłowym korzystaniu z tablic będzie posługiwał się — nie mając pomocy dla właściwej wartości α względnie β — bliższą z pośród dwóch pozostawionych mu do dyspozycji wielkości $\alpha_1 \alpha_2$ względnie $\beta_1 \beta_2$. Wynika stąd że błąd $d\alpha$ przyjąć należy $0{,}5\,\Delta\alpha$. Ostatecznie więc błąd jaki wyniknie z zestawienia pomocy rachunkowych dla wielkości α odległych o $\Delta\alpha$, względnie dla wielkości β odległych o $\Delta\beta$ wyniesie odpowiednio:

$$\boxed{d_{\text{popr. kol.}} = 0{,}125\,\Delta\alpha \qquad d_{\text{popr. wier.}} = 0{,}125\,\Delta\beta} \tag{28}$$

Tak np. w przykładzie 2 (obliczanie zbieżności Gaussa) tabelki poprawek dla interpolacji kolumnowej podane są w przedziałach α co 0,5, gdyż jak łatwo sprawdzić, symbole orientacyjne odsyłające rachmistrza do odpowiedniej rubryki tabelki poprawkowej — znakowano je kwadracikami — równe są 2α, a podane są w odstępach co 1. Błąd jaki wyniknie z tego oddalenia $\Delta\alpha = 0{,}5$ wyniesie więc, w myśl wzoru (28), $0{,}125 \; 0{,}5 = 0{,}06^{cc}$, jest przy dokładnośi tabelaryzacji 1^{cc} bez znaczenia.

Pomoce rachunkowe służące do obliczania poprawek interpolacji czteropunktowej mogą być opracowane w różny sposób. Najmniej wygodne, choć najdokładniejsze, było by *podawanie cyfrowe wielkości* $\alpha\beta$ czy to przy każdej stabelaryzowanej wartości funkcji, czy też co kilka wartości, z uwzględnieniem tego, co było ostatnio powiedziane. Rachmistrz musi jednak wówczas wykonywać działania:

$$k(1-k)\alpha \quad \text{oraz} \quad w(1-w)\beta$$

niezbyt zresztą uciążliwie, lecz wymagające skupienia uwagi ze względu na brak jakiejkolwiek kontroli. Obliczenie poprawek najlepiej wówczas połączyć z rachunkiem głównym, co można — używając pojęcia mnożenia zupełnego, o którym była wyżej mowa, ująć łącznie w następujący wzór:

$$F = \begin{array}{|c|c|c|} \hline F_{00} & F_{10} & \beta \\ \hline F_{01} & F_{11} & \\ \hline \alpha & & \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1-k)(1-w) & w(1-k) & w(1-w) \\ \hline k(1-w) & kw & \\ \hline k(1-k) & & \end{array} \tag{28}$$

Tabelkę interpolującą najlepiej zestawić według uprzednio opisanego schematu, skontrolować sumę jej elementów (jedność), poczym dopisać w pierwszej kolumnie iloczyn $k(1-k)$ i w pierwszym wierszu iloczyn $w(1-w)$.

Dużo wygodniejsze są *tabelki poprawek,* zwłaszcza gdy podać na skrzyżowaniu odpowiedniego wiersza i kolumny wartość łącznej poprawki za interpolację w kolumnach i we wierszach. Tego rodzaju pomoce zastosowano w wydanych obecnie przez Instytut Geodezji i Kartografii tablicach rachunkowych, służących do przeliczania współrzędnych geograficznych na prostokątne, oraz do zamiany współrzędnych prostokątnych na sąsiedni układ odwzorowawczy. Fragment takiej tablicy podaliśmy w przykładzie 3.

Również wygodne, choć kosztowniejsze w reprodukcji i opracowaniu, są *pomoce nomograficzne.* Można je opracować czy to pod postacią nomogramu siatkowego, czy też równoległoskalowego. Nomogram siatkowy można przytym otrzymać pod postacią układu prostych, co nieco zmniejsza koszt jego opracowania. Szczegóły dotyczące obliczenia skal funkcyjnych, jako ogólnie znane z podręczników nomografii, pomijamy. (Wiadomości z nomografii wystarczające do konstruowania nomogramów mających służyć do obliczania poprawek interpolacyjnych znaleźć można w pracy autora: Rachunki Geodezyjne, Warszawa, 1953).

СТЕФАН ХАУСБРАНДТ

НЕКОТОРЫЙ СПОСОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ (ЧЕТЫРЕХПУНКТОВАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПОПРАВКАМИ)

Во многих геодезических вычислениях, в которых является надобность многократного вычисления значения функции двух переменных $F(u,v)$, целесообразно прибегать к готовой числовой таблице, дающей значения, которые приобретает эта функция для определеня равноотстоящих значений аргументов u и v и вычислить значения функции путем интерполирования. Такой прием выгодный тем, что он является совершенно общим: Вычисляющий, который решает при помощи интерполяции числовые задачи с весьма разнообразным математическим содержанием, вытекающем из разных форм функции $F(u,v)$, освобождается от нужды вникать в форму функционных связей и от нужды осваивания разнообразных приемов вычислительной техники.

Существует полная аналогия со случаем применения простейшей формы интерполяции: линейной интерполяции при употреблении таблиц логарифмов или таблиц значений тригонометрических функций.

Употребляющий эти таблицы часто не сознает этого, какие вычисления были нужны для составления употребляемой им таблицы; помимо этого он правильно и быстро решает задачу вычисления искомого значения логарифма или тригонометрической функции для данного значения аргумента, опираясь исключительно на принцип интерполяции. Насколько в области функции одного переменного, как например: $\log x$, или $\sin x$, возможность отступления в практическом вычислении от математического содержания задачи и применение интерполяции давно приняты правильными, то в области функции двух (или более) переменных числовое вычисление относительно редко идет самым экономическим путем: применения готового числового состава значений функции и нахождения значения этой функции, соответствующего данным значениям аргументов путем интерполяции. Типовыми примерами осложнения числового вычисления с отказом от интерполяции могут служить многие вычисления высшей геодезии и математической картографии, которые принуждают вычисляющего пользоваться схемами навязывающими очень сложный ход вычислений, в которых невозможно разобраться в основной мысли исполняемого вычисления.

Кажется что одной из главных причин малого распространения интерполяционного вычисления значения функции двух (и больше) переменных является отсутствие типовой формы такого вычисления, облегчающей его простое и проверяемое исполнение, в отличие от интерполяции функции одного аргумента, где эта типичность нашла полное отображение в принципе сгущеиия функционной таблицы к линейной форме и традиционных табличек „partes proportionales".

Другим поводом малой популярности интерполяционного вычисления в области функции двух аргументов является несомненно то обстоятельство, что пионерские работы в этой области опирались на формулах дифферентной интерполяции — очень неудачных с точки зрения очевидности и мало экономических в числовом счете.

В этой работе описан способ интерполяции для вычисления значения функции двух аргументов, который дальше будем звать „четырехпунктовой интерполяцией с поправкой" и который повидимому может быть с успехом принят как типовая форма интерполяции функции двух аргументов из регулярной функционной таблицы.

Подразумеваем, что мы считали полезным принять как правило чтобы совокупности значений функций двух аргументов были для целей практического вычисления сведены в таблицы так, чтобы они были подготовлены к описанной дальше четерехпунктовой интерполяции с поправкой.

Из вышесказанного видно что рассуждаемый вопрос является одновременно вопросом вычислительной техники и вопросом прикладной математики. С одной стороны мы должны описать систему таблиц и технику вычисления в предлагаемом способе интерполяции, с другой стороны — провести анализ теоретических оснований приема и достигаемой точности результатов.

Хотя теоретический анализ несомненно важнее вычислительной техники, то в этой работе поместим сначала описание предлагаемого приема и числовые примеры а теоретические рассуждения отнесем ко второй части работы. Такое расположение материала с одной стороны позволит лучше оценить простоту четырехпунктовой интерполяции, с другой стороны облегчит пользование работой читателю, которого математические рассуждения не интересуют, а который хотел бы познакомиться исключительно с технически-вычислительной стороной. Читатель желающий познакомиться только с теоретической стороной изволит прочесть и первую часть работы так как в ней будут даны обозначения и описание хода интерполяционного вычисления.

ЧАСТЬ I

ОПИСАНИЕ ДЕЙСТВИЙ СВЯЗАННЫХ С ЧЕТЫРЕХПУНКТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ

Примем следующие обозначения и названия:

u — переменное колонны, т. е. это независимое переменное („аргумент"), для которого очередные значения выписаны в заглавном столбце функционной таблицы.

v — переменное строки — т. е. это независимое переменное („аргумент"), для которого очередные значения выписаны в заглавной строке функционной таблицы.

F — функция переменных u и v, которой значения выписаны в таблице, причем значение, которое приобретает функция для значений переменных, находящихся в i-том столбце и в j-той строке, выписана на пересечении i-того столбца и j-той строки. Эти обозначения показаны на схеме:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
U \backslash V & \ldots\ldots & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \ldots\ldots \\
\hline
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
u_0 & \ldots\ldots & F_{00} & F_{10} & F_{20} & F_{30} & F_{40} & \ldots\ldots \\
u_1 & \ldots\ldots & F_{01} & F_{11} & F_{21} & F_{31} & F_{41} & \ldots\ldots \\
u_2 & \ldots\ldots & F_{02} & F_{12} & F_{22} & F_{32} & F_{42} & \ldots\ldots \\
u_3 & \ldots\ldots & F_{03} & F_{13} & F_{23} & F_{33} & F_{43} & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array} \qquad \ldots\ldots (1)$$

Приведенная ниже таблица является примером функционной таблицы двух переменных, причем значение этой функции для значения переменного колонны, равного 20 и значения переменного строки, равного 30, равняется 779.

	.....	20	30	40	50	.....
	.....	.....	.....	.....	.....	.....
10	.....	287	552	917	1382	.....
20	.....	489	779	1169	1659	.....
30	.....	791	1106	1521	2036	.....
40	.....	1193	1533	1973	2513	.....
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....

(2)

Дальше примем следующие обозначения и названия:

k — дробь интерполяции в столбцах, т. е. отношение разности между этим значением переменного колонны, для которого производим интерполяцию, а ближайшим ему меньшим значением переменного колонны, выписанного в заглавном столбце таблицы, к постоянной табличной разности для переменного колонны (как правило эта последняя разность — кратное 10, а в нашем примере она равна 10).

w — дробь интерполяции в строках, т. е. отношение разности между этим значением переменного строки, для которого производим интерполяцию, а ближайшим ему меньшим значением переменной строки, выписанным в заглавной строке таблицы, к постоянной табличной разности для переменного строки.

I — интерполяционная табличка, т. е. групповое квадратное число из четырех элементов, в котором в первой строке помещается произведение дополнения дроби интерполяции в столбцах к единице на такое же дополнение дроби интерполяции в строках и произведение дополнения дроби интерполяции в столбцах на дробь интерполяции в строках; во второй строке помещается произведение дроби интерполяции в столбцах на дополнение дроби интерполяции в строках к единице и произведение дроби интерполяции в столбцах на дробь интерполяции в строках.

Интерполяционная табличка, которую будем обозначать буквой I имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (1-k)(1-w) & (1-k)w \\ k(1-w) & kw \end{vmatrix} = I \tag{3}$$

Легче всего составить табличку так: в заглавном стольбце написать дополнение дроби интерполяции в столбцах к единице и дробь интерполяции в столбцах, а в заглавной строке дополнеиие дроби интерполяции в строках к единице и дробь интерполяции в строках и заполнить такую осевую схему

$$\begin{array}{r} \\ 1-k \\ k \end{array}\begin{array}{cc} 1-w & w \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c|}{\cdot} \\ \multicolumn{1}{|c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c|}{\cdot} \\ \hline \end{array} = I \tag{4}$$

произведениями чисел заглавного столбца и заглавной строки, определяющих данное поле. В случае интерполяции для 3/10 промежутка переменности переменного колонны и 4/10 промежутка переменности переменного строки, т. е. для случая $k=0{,}3$ и $w=0{,}4$ составим табличку:

$$\begin{array}{c|cc|} & 0{,}6 & 0{,}4 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}42 & 0{,}28 \\ 0{,}3 & 0{,}18 & 0{,}12 \\ \hline \end{array} = \mathrm{I} \qquad \ldots (5)$$

Сумма элементов интерполяционной таблички должна равняться единице. Если этого равенства нет, что возможно при округлении результатов вычисления элементов таблички, то следует обязательно согласовать эти результаты путем соответствующего округления так, чтобы их сумма была единицей.

Пренебрежение этим может повлечь за собой большие ошибки в результате интерполяции.

Число мест после запятой в элементах таблички достаточно брать одним больше числа мест переменных значений функии.

Эту часть функционной таблицы, которая будет употребляться для четырехпунктовой интерполяции, назовем функционной табличкой и обозначим буквой T. Эта табличка есть групповое число, состоящее из значения функции относящегося к исходным для данной интерполяции значениям независимых переменных и ближайших ему в таблицы значении функции относящихся к ближайшим значениям независимых переменных. Если обозначим значения независимых переменных, между которыми производим интерполяцию, буквами U_0 и U_1, а также V_0 и V_1 будет (см. схему (1)):

$$T = \left|\begin{array}{cc} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{array}\right| \qquad \ldots (6)$$

функционную табличку следует оконтурить карандашем или положить на ней соответствующий трафарет.

Полное произведение функционной таблички на интерполяционную табличку, т. е. сумма произведений элементов этих табличек, соответсвующих себе положением, назовем приближенным значением интерполяции и обозначим буквой F_0

$$F_0 = T \cdot \mathrm{I} \qquad \ldots (7)$$

Если данная функция является многочленом переменных U и V не содержащим степеней высших UV, т. е. если это многочлен

$$F = a_0 + a_u u + a_v v + a_{uv} uv \qquad \ldots (8)$$

то приближенный результат четырехпунктовой интерполяции является одновременно окончательным результатом, т. е. значение, вычисленное уравнением $F = T \,.\, J$ есть то значение, которое многочлен, помещенный в данной таблице, примет для значений аргументов соответствующих дробям интерполяции употребленным в вычислении.

Если функция является многочленом переменных U и V, содержащих не только произведение UV, но и другие степени переменных, т. е. если это полный многочлен второй степени

$$F = a_0 + a_u u + a_v v + a_{uv} uv + a_{u^2} u^2 + a_{v^2} v^2 \tag{9}$$

то приближеннный результат четырехпунктовой интерполяции не будет значением, которое принимает многочлен, помещенный в данной таблице для значений аргументов соответствующих дробям итерполяции, употребленным в вычислении по уравнении $F = TI$.

Чтобы найти значение, которое многочлен, помещенный в данной таблице принимает для значений независимых переменных соответствующих дробям интерполяции k и w, следует поправить приближенный результат интерполяции; вводя в него „поправку интерполяции в столбце" — p_k и „поправку интерполяции в строке" — p_w

Окончательно будет:

$$F = F_0 + p_k + p_w \tag{10}$$

Значения поправок интерполяции в столбце и в строке следует отыскать в табличках поправок, аналогичных табличкам partes proportionales линейной интерполяции, по аргументам: дробь интерполяции в столбце k (поправка интерполяции в столбце) и дробь интерполяции в строке w (поправка интерполяции в строке). В случае малого предела переменности этих поправок можно найти сразу суммарную поправку, т. е. сумму $p = p_k + p_w$ в прямоугольной таблице с двумя входами или по сетчатой номограмме.

Такие разного рода вычислительные пособия для вычисления поправки в приближенный результат интерполяции предлагаются дальше, как числовая иллюстрация вопроса.

Общая мысль предлагаемой системы функционных таблиц для интерполяционного вычисления функции двух аргументов сводится к следующим пунктам:

a) промежутки значений аргументов следует при составлении таблиц принимать так, чтобы было возможно найти функцию с погрешностю не больше единицы последнего места путем интерполяции при помощи многочлена второй степени.

b) Интерполяцию исполняют путем составления интерполяционной таблички, полного умножения на функционную табличку и введения поправок в приближенный результат интерполяции; вводятся поправки интерполяции в столбцах и поправки интерполяции в строках, отысканные в приложенных к таблице функции табличках поправок (или в номограммах).

c) Если вычислительные пособия к функционной таблице не приложены, то исполняя по данной таблице четырехпунктовую интерполяцию без поправки, получают погрешности непревышающие единицы последнего места. В противном случае при функционной таблице должна быть соответствующая оговорка.

Числовые примеры, на которые обращаем особое внимание читателя, находятся в польском тексте.

В порядке работ Геодезического Научно-Исследовательского Института (ныне Институт Геодезии и Картографии) на основании изложенной мысли, которой теоретическое обоснование излагается во второй части, разработаны следующие вычислительные пособия:

1. Таблицы для интерполяционного перевода прямоугольных координат Гаусса-Крюгера в соседнюю трехградусную зону (Варшава 1952).

2. Таблицы для перевода географических координат в прямоугольные в проекции Гаусса-Крюгера, на элипсоиде Бесселя (в шестиградусных зонах).

3. Таблицы для перевода географических координат в прямоугольные в проекции Гаусса-Крюгера на еллипсоиде Красовского (для шестиградусных зон).

4. Таблицы для перевода прямоугольных координат Гаусса-Крюгера на географические координаты на эллипсоиде Бесселя (для шестиградусных зон).

5. Таблицы для перевода прямоугольных координат Гаусса-Крюгера в соседнюю трехградусную зону, на эллипсоиде Красовского.

При разработке использован числовой материал, заключенный в работе: „Brechpunktstabelle für Gauss-Krügerische Koordinaten. Oberkommando der Kriegsmarine, Berlin, 1943" после устранения ошибок в области использования (географическая широта $48^0 — 56^0$), а также частично работа: „Zahlentafeln zur Ermittlung der Zweiten Koordinaten, K. Schallhorn, Stuttgart, 1942" и „Przeliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich". W-wa 1949 Józef Pawłowski.

При трансформации координат с эллипсоида Бесселя на эллипсоид Красовского использована работа И. Гомбрыха: „Przeliczenie współrzędnych płaskich w odwzorowaniu Gaussa-Krügera z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krasowskiego" Варшава 1954.

Числовую разработку вышеприведенных работ исполнили: И. Гомбрых, С. Гаусбрандт, К. Наперковский, Я. Панасюк.

ЧАСТЬ II

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОПИСАННОГО В ЧАСТИ I ВЫЧИСЛЕНИЯ И ОСНОВЫ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦ И ПОСОБИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОПРАВОК

Теорема 1: Если функция двух переменных $F(u,v)$ есть многочлен второй степени: $F(u,v)=au+bv+cuv+d$ помещенный в таблице

$u \backslash v$		v_0	v_1		
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
u_0	...	F_{00}	F_{10}	...	...
u_1	...	F_{01}	F_{11}	...	..
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

причем обозначаем: $\boxed{\begin{matrix} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{matrix}} = T$

то значение, приобретаемое функцией для значений переменных u, v изображенных дробями интерполяции:

$$k=\frac{u-u_0}{u_1-u_0} \qquad w=\frac{v-v_0}{v_1-v_0}$$

равно сумме произведений элементов T на соответствующие им положением элементы таблички:

$$I=\boxed{\begin{matrix} (1-k).(1-w) & w(1-k) \\ k.(1-w) & k.w \end{matrix}}$$ что обозначаем условно: $\underline{F(k,w)=T.I}$ (11)

Доказательство: Величина $T.I$ содержит переменные k, w, в соответствующих степенях и является многочленом рассматриваемого типа по отношению к переменным k, w, а по поводу линейной зависимости k от u и w от v, она же является тоже многочленом рассматриваемого типа по отношению к переменным u и v. Так как многочлен этого типа определяется четыремя параметрами, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что выражение $T.I$:

1)	Дла	значений	u_0v_0	т. е.	для	$k=0$	$w=0$	приобретатет	значение	F_{00}
2)	„	„	u_1v_0	„	„	$k=1$	$w=0$	„	„	F_{01}
3)	„	„	u_0v_1	„	„	$k=0$	$w=1$	„	„	F_{10}
4)	„	„	u_1v_1	„	„	$k=1$	$w=1$	„	„	F_{11}

Видно сразу, что эти условия выполняются, т. е. при условии 1) будет $TI=F_{00}$, при условии 2) будет $TI=F_{01}$, при условии 3) будет $TI=F_{10}$, при условии 4) будет $T.I=F_{11}$, так как остальные элементы таблички I обращаются в нули.

Теорема 2. Если функция двух переменных $F(uv)$ есть полный многочлен второй степени:

$$au+bv+cuv+du^2+ev^2+f$$

помещенный в таблице:

$$\begin{array}{c|ccccc} & \cdots & v_0 & v_1 & v_2 & \cdots \\ \hline & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0 & \cdots & F_{00} & F_{10} & F_{20} & \cdots \\ u_1 & \cdots & F_{01} & F_{11} & F_{21} & \cdots \\ u_2 & \cdots & F_{02} & F_{12} & F_{22} & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

причем обозначаем: $T=\boxed{\begin{array}{cc} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{array}}$

то значение, приобретаемое функцией для значений переменных u, v изображенных дробями интерполяции: k (дробь интерполяции в столбцах) и w (дробь интерполяции в строках):

$$k=\frac{u-u_0}{u_1-u_0} \qquad w=\frac{v-v_0}{v_1-v_0}$$

равняется сумме произведений элементов таблички T на соответствующие им положением элементы таблички I:

$$I=\boxed{\begin{array}{cc} (1-k)(1-w) & w(1-k) \\ k\,(1-w) & kw \end{array}}$$

увеличенной на поправку интерполяции в столбцах p_k и поправку интерполяции в строках p_w, что обозначим:

$$\boxed{F(kw)=T\,.\,I+p_k+p_w} \qquad \ldots (12)$$

причем поправки интерполяции в столбцах и в строках определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} p_k&=\frac{k(1-k)}{2}\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ или обобщено } p_k=\frac{k(1-k)}{2}\begin{Bmatrix} F_{rs} \\ F_{r,s+1} \\ F_{r,s+2} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ p_w&=\frac{w(1-w)}{2}\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ или обобщено } p_w=\frac{w(1-w)}{2}\begin{Bmatrix} F_{qz} \\ F_{q+1,z} \\ F_{q+2,z} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \qquad (13)$$

Доказательство. Так как данный многочлен определяется шестью параметрами, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что выражение:

$$F(kw)=T\,.\,I+p_k+p_w$$

1)	для значения		$k=0$	$w=0$	приобретает	значение	F_{00}
2)	„	„	$k=1$	$w=0$	„	„	F_{01}
3)	„	„	$k=2$	$w=0$	„	„	F_{02}
4)	„	„	$k=0$	$w=1$	„	„	F_{10}
5)	„	„	$k=1$	$w=1$	„	„	F_{11}
6)	„	„	$k=0$	$w=2$	„	„	F_{20}

Докажем это легко вычисляя значения, которые очередные члены уравнения:

$$F(kw) = T\,I + p_k + p_w$$

а также их сумма будут приобретать для соответствующих значений переменных k и w:

для k	w	имеем $T\,.\,I$	p_k	p_w	$F = T\,.\,I + p_k + p_m$
0	0	F_{00}	0	0	F_{00}
1	0	F_{01}	0	0	F_{01}
2	0	$2F_{01} - F_{00}$	$-2F_{01} + F_{00} + F_{02}$	0	F_{02}
0	1	F_{10}	0	0	F_{10}
1	1	F_{11}	0	0	F_{11}
0	2	$2F_{10} - F_{00}$	0	$F_{00} - 2F_{10} + F_{20}$	F_{20}

Из таблицы видно, что многочлен $F(k, w) = T\,.\,I + p_k + p_w$, который является многочленом второй степени по отношении к переменным k и w, которые в свою очередь являются линейными функциями переменных u, v для шести перечисленных значений аргументов приобретает соответствующие значения, чем и доказывается теорема.

Указанные выше теоремы доказывают справедливость предлагаемого вычисления „четырехпунктовой интерполяции" описанного в этой работе.

Для составления таблиц для четырехпунктовой интерполяции необходимо приготовить соответствующий набор, причем полезно использовать теоремы, которые приведены дальше:

Теорема 3. Сумма произведений четырех значений многочлена второй степени для равноотстоящих значений аргумента на биномальные коэфициенты многочлена третьей степени с чередующимися знаками равна нулю:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0} \tag{14}$$

Теорему можно обобщить выражая ее уравнением $\underline{F}\,\underline{N} = 0$, где $\underline{F}$ краковян $n+2$ значение многочлена n-той степени для равноотстоящих значений аргумента; $\underline{N}$ — нютоновский краковян о $n+2$ членах, т. е комплекс биномальных коэфициентов бинома $n+1$ степени с чередующимися знаками. Простое доказательство этой теоремы не приведно, т. к. оно опубликовано в работе: S. Hausbrandt „Bezpośrednia Interpolacja wielomianowa ze szczególnym uwzględnieniem interpolacji funkcji dwóch argumentów ujęta krakowianowo, oraz poprzedzona krótkim zarysem rachunku krakowianowego", Warszawa 1950. Prace GINB Nr 7.

Теорема пригодная при составлении функционной таблицы функции двух аргументов. В нашем случае функция, как многочлен второй степени по отношению к переменной столбца и переменной строки должен удовлетворять критерии $\underline{F}\,\underline{N}=0$ для любых четырех соседних значений функции в столбце, как и для любых четырех соседних значений функции в строке.

Понятно, что из за округлений этот критерий не будет строго выполнен (исключая случаи, когда функция представляет собой строго данный многочлен, без округления концевых мест что, между прочим, не встречается в практике).

Обозначая через j значение единицы последнего места функции и принимая самый неблагоприятный случай накопления погрешностей округления в четырех очередных значениях функции, получим в рассматриваемом случае многочлена второй степени максимальную допустимую погрешность для выражения $\underline{F}\,\underline{N}$ — величину $0{,}5 \,.\, 8 \,.\, j$ т. е $4 \,.\, j$.

В связи с этим формула (14) для вычислительной практики примет вид:

$$\left\{\begin{matrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}\right\} \leqslant 4 \,.\, j \tag{15}$$

В общем случае, принмая во внимамие, что сумма коэфициентов развернутого бинома равна 2^n где — n степепь многочлена, мы имели бы для проверки положения $n+2$ пунктов многочлена n-той степени при помощи нютоновских краковянов уравнение: $\boxed{\underline{F}\,\underline{N} \leqslant 2^n j}$ (16) где краковяны $\underline{F}\,\underline{N}$ имеют по $n+2$ елементов. Подчеркиваем большую пригодность формулы (16); формула (15) является частным случаем формулы (16), для проверки составленных таблиц при их печатании.

Известно, что т. н. „сличение" цифрового текста не даёт удовлетворительного контроля, а проверка постоянства n-той разницы очень трудоёмка, так как требует записи большого количества чисел в процессе вычисления нужных только временно. Использование формулы (16) при помощи арифмометра очень просто и, полагая, что употребляем все значения функции, даёт полную гарантию, что печатанная таблица безошибочна.

Приведем доказательства, уточняющие границы погрешности, которых можно ожидать выражая функцию высшей степени приближенно многочленом второй степени. Приведенные теоремы пригодны потому, что в практике встречаются случаи, когда чрезмерное сгущивание функционной таблицы целесообразно с точки зрения математики, не обосновано практическими нуждами.

Теорема 4. Самое большое значение пргрешности, которую получим интерполируя при помощи многочлена второй степени значение функции, которая является многочленом третей степени, не превысит величины f_{max}, выраженной формулой:

$$\boxed{f_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27}\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0{,}06415\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}} \tag{17}$$

Символы $F_0\ F_1\ F_2\ F_3$ обозначают, как и в предыдуших формулах значения, которые приобретает функция для четырех равноотстоящих значений аргумента.

Доказательство: Правильность теоремы можно доказать опираясь на известную интерполяционную формулу Нютона:

$$F = F_0 + \binom{k}{1} a_0 + \binom{k}{2} b_0 + \binom{k}{3} c_0 + \dots$$

где; F — искомое значение функции, F_0 — исходное значение, k — интерполяционная дробь, $a_0\ b_0\ c_0 \cdots$ — очередные разности, расположенные по диагонали таблицы:

$$\begin{array}{llll}
F_0 & & & \\
 & a_0 = F_1 - F_0 & & \\
F_1 & & b_0 = a_1 - a_0 = F_2 - 2F_1 + F_0 & \\
 & a_1 = F_2 - F_1 & & c_0 = b_1 - b_0 = F_3 - 3F_2 + 3F_1 - F_0 \\
F_2 & & b_1 = a_2 - a_1 = F_3 - 2F_2 + F_1 & \\
 & a_2 = F_3 - F_2 & & c_1 = b_2 - b_1 = F_4 - 3F_3 + 3F_2 - F_1 \\
F_3 & & b_2 = a_3 - a_2 = F_4 - 2F_3 + F_2 & \\
 & a_3 = F_4 - F_3 & & \\
F_4 & & &
\end{array}$$

Легко проверить, что

$$a_0 = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \mathrm{b}_0 = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad c_0 = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

или обобщая: очередные разности формулы Нютона равны функционным краковянам $\underline{F}$ умноженным на нютоновские краковяны $\underline{N}$, причем под функционным краковяном подразумеваем группу 2, 3, $\overline{4}$... соседних значений функции (комплекс значений функции для равноотстоящих значений аргумента). Под нютоновским краковяном подразумеваем комплекс коэфициентов развертывания бинома 1, 2, 3... степени с чередующимися знаками, с тем, что последний знак будет положит ельный.

Из этого обобщения между прочем вытекат, что, если функция, для которой составляется таблица является многочленом n-той степени, то для краковянов $\underline{F}\,\underline{N}$ с $n+1$ элементами должна существовать связь $\underline{F}\,\underline{N}=0$, о которой уже говорилось (теорема 3), так как $n+1$ вые разности равны нулю.

Напишем формулу Нютона в виде:

$$\boxed{F=F_0+\binom{k}{1}\cdot\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}+\binom{k}{2}\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}+\binom{k}{3}\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}} \tag{18}$$

и заметим, что разница между результатом интерполяции при помоши многочлена третей степени а результатом интерполяции при помощи многочлена второй степени равиа:

$$f=\binom{k}{3}\cdot\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}=k\cdot(k-1)\,.\,(k-2)\begin{Bmatrix}F_0\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\cdot\frac{1}{6}$$

Для обоснования правильности теоремы 4 следует вычислить экстремум выражения $x=k\ (k-1)\ (k-2)$ и умножить значение этого экстрема на шестую часть произведения $\underline{N}\,\underline{F}$. Так как производная:

$$\frac{dx}{dk}=3k^2-6k+2$$

обращается в нуль при $k=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, причем $k=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ неприменимо, потому что нас интересует область значений переменного k ограничена неравенством:

$$0\leqslant k\leqslant 1$$

то нам остаётся вычислить значение экстремум для $k=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Получим:

$$x_{extr}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

Умножая полученное значение на шестую часть произведения $\underline{F}\,\underline{N}$ получим окончательно:

$$f_{max}=\frac{\sqrt{3}}{27}\begin{Bmatrix}F\\F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}$$

что следовало доказать.

Примечание: Аналогичным способом получим формулу на максимальное значение погрешности, которую получим от интерполяции при помощи многочлена первой степени (т. н. линейная интерполяция) значение функции, которая является многочленом второй степени.

Формула имеет вид:

$$f_{\max} = \frac{1}{8} \cdot \left\{ \begin{matrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \qquad \ldots (19)$$

Теорема 5. Максимальное значение погрешности, которую получим интерполируя при помощи многочлена второй степени чначение функции двух переменных, которая является многочленом третьей степени не превысит величины f, выраженной формулой:

$$\boxed{f = \left[\left\{ \begin{matrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \frac{\sqrt{3}}{27} + \left[\left[\left\{ \begin{matrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{01} \\ F_{11} \\ F_{21} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right]\right] \frac{1}{8} \ldots} \qquad (20)$$

причем все члены следует брать в их абсолютных значениях.

Доказательство. Заметим сначала, что если функция двух переменных $F(u, v)$ — полный многочлен третьей степени:

$$au + bv + cuv + du^2 + ev^2 + fu^2v + gv^2u + hu^3 + iv^3 + j,$$

для которого составлена таблица

	......	v_0	v_1	v_2	v_3	......
	......	......	......	......	......	......
u_0	......	F_{00}	F_{10}	F_{20}	F_{30}	......
u_1	......	F_{01}	F_{11}	F_{21}	F_{31}	......
u_2	......	F_{02}	F_{12}	F_{22}	F_{32}	......
u_3	......	F_{03}	F_{13}	F_{23}	F_{33}	......
	......	......	......	......	......	......

то значение, которое эта функция приобретает для значений $u\ v$ выраженных дробями интерполяции: k (дробь интерполяции в столбцах) и w (дробь интерполяции в строках):

$$k = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \qquad w = \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}$$

будет выражена формулой:

$$F_{00}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{k}{1}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{w}{1}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{10}\\F_{11}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{k}{1}\binom{w}{1}+$$

$$\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{k}{2}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{w}{2}+\Delta F,$$

где ΔF — разность между результатом интерполяции при помощи многочлена третей степени, а результатом интерполяции при помощи многочлена второй степени. Эта разность выразится формулой:

$$\Delta F=\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\\F_{03}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\binom{k}{3}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\\F_{30}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\binom{w}{3}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\\F_{10}\\F_{11}\\F_{12}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\2\\-1\\1\\-2\\1\end{Bmatrix}\binom{k}{2}\binom{w}{1}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\\F_{01}\\F_{11}\\F_{21}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\2\\-1\\1\\-2\\1\end{Bmatrix}\binom{k}{1}\binom{w}{2}\tag{21}$$

Легко проверить, что значение всего выражения при $k=0$ и $w=0$ равно F_{00}, при $k=0$, $w=1$ равно F_{10} и. т. д.

Остаётся вычислить максимальное значение величины ΔF, т. е. разности результатов интерполяции третьей и второй степени, когда дроби интерполяции k и w будут принимать очередные значения от нуля до единицы. Поскольку величина ΔF (21) является суммой четырех слагаемых — обозначим их символами $A, B. C, D$ — можем написать:

$$\Delta F_{\max}<A_{\max}+B_{\max}+C_{\max}+D_{\max}\tag{22}$$

Но первые два слагаемые — согласно теореме 4 не превысят значения:

$$\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\\F_{03}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{27}=A_{\max}\quad\text{и}\quad\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\\F_{30}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{27}=B_{\max}\tag{23}$$

что было уже доказано в аналогичном случае.

Что касается третьего и четвертого слагаемых, то будем разсуждать следующим образом (вычисление производной даёт только значение минимум, что для нашей задачи несущественно).

Произведение:

$$\binom{k}{2}\binom{w}{1}=\frac{k\,(k-1)\,w}{2}=\frac{(k^2-k)\,w}{2}=(k^2-k)\,w\cdot\frac{1}{2}$$

слагается из двух членов. Абсолютное значение первого члена в рассматриваемой области значений не превысит величины 0,25, значение другого члена не будет больше единицы, значение третьего члена постоянно и равно 0,5. Значение произведения в расматриваемой области, ни в коем случае не будет больше

$$0{,}25\,.\,1\,.\,0{,}5 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$$

Из этого вытекает, что абсолютные значения третьего — и аналогично — четвертого членов ни в коем случае не будет больше величины:

$$\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{8} = C_{\max}, \quad \text{и} \quad \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{01} \\ F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{8} = D_{\max} \tag{24}$$

Из формул (22), (23), (24) вытекает правильность теоремы, что и следовало доказать.

Теорема 6. Максимальное значение погрещности, которую получим иинтерролируя при помощи многочлена первой степени, значение функции двух переменных, которая является многочленом второй степени, не превысит величины f, выраженной формулой:

$$\boxed{f = \left[\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \frac{1}{8} + \left[\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{10} \\ F_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]} \tag{25}$$

Доказательство: Полагая многочлен первой степени, мы интерполировалибы по формуле:

$$F = F_{00} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} . k + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} . w$$

Сравнивая эту формулу с формулой на интерполяцию второй степени (формула 21), мы видим, что разность между результатом интерполяции второй степени и результатом интерполяции первой степени будет:

$$\Delta F = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{10} \\ F_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} k\,.\,w + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} k\,.\,(k-1) + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} w\,(w-1)$$

Так как в области значений k и w в границах от нуля до единицы значение wk будет не больше 1, величина $k(k-1)\cdot\frac{1}{2}$ будет не больше $\frac{1}{8}$, величина $w(w-1)\cdot\frac{1}{2}$ будет не больше $\frac{1}{8}$, то величина ΔF ни в коем случае не будет больше значения f, выраженного формулой (25), что и следовало доказать.

Примечание. В изложении ни в символике теорем 4, 5 и 6 мы не подчеркивали того, что речь идёт о максимальных абсолютных значениях, полагая, что это вытекает из сути вопроса, чрезмерно точное изложение и символика повлияли бы вредно на ясность теорем.

Составление пособий для вычислений поправок четырехпунктовой интерполяции.

Формулу интерполяции функции по двум аргументам при помощи многочлена второй степени (теорема 2) можно написать в виде:

$$F = \boxed{\begin{matrix} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} (1-k)(1-w) & w(1-k) \\ k(1-w) & kw \end{matrix}} + k(1-k)\alpha + w(1-w)\beta$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} \qquad \beta = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} \tag{26}$$

Понятно, что величины которые мы здесь обозначили α и β будут постоянными для области значений, изображенных в данной функционной таблице лишь в том случае, когда функция является строго многочленом второй степени. Так как в практике это никогда не имеет места, потому что данная функция — не многочлен; а её значение в узкой области выражено приближенно многочленом, то величины α и β вычисленные из трех соседних значений F не будут одинаковы. Вычислительные пособия для непосредственного нахождения поправок четырехпунктовой интерполяции:

$$p_k = k(1-k)\alpha \qquad p_w = w(1-w)\beta \tag{27}$$

следует составлять так, что бы:

1) занимали возможно мало места, что способствует легкому отысканию значений поправок,
2) не занижали чрезмерно точности результата интерполяции.

Легко видеть, что максимальное значение члена $k(1-k)$ или $w(1-w)$, на который умножают величины α и β равно 0,25. Из этого вытекает, что употребление вычислительного пособия, составленное для величины α вместо величины $\alpha + d\alpha$, или составленное для величины β вместо величины $\beta + d\beta$, повлечет за собой погрешности:

$$0{,}25\, d\alpha \text{ или } 0{,}25\, d\beta$$

Обозначим через $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ разности между соседними значениями α_1 и α_2, а также между β_1 и β_2, для которых вычислены пособия. Употребляющий эти пособия, пользуясь правильно таблицами, не имея пособия для подходящего значения α или β, возьмет ближайшую из двух предоставленных ему величин $\alpha_1\,\alpha_2$ или $\beta_1\,\beta_2$. Из этого вытекает, что погрешпость величины $d\alpha$ следует принять $0{,}5\,\Delta\alpha$. Окончательно погрешность вычислительного пособия для величины α, отстоящих на $\Delta\alpha$ или для веливины β отстоящих на $\Delta\beta$ будет:

$$\boxed{d_{\text{popr. kol.}} = 0{,}125\,\Delta\alpha \qquad d_{\text{popr. wier.}} = 0{,}125\,\Delta\beta} \tag{28}$$

В примере 2 (вычисление конвргенции Гаусса) таблички поправок для интерполяции в столбцах составлены в интервалах α через 0,5; легко проверить, что символы, направлющие в соответствующую графу таблички поправок даны в интервалах через 1, т. е. равны 2α. Погрешность, вытекающая из этого интервала $\Delta\alpha = 0{,}5$, согласно формуле (28) будет: $0{,}125 \,.\, 0{,}5 = 0{,}06^{cc}$, что при точности таблицы 1^{cc} несущественно.

Вычислительные пособия для поправок четырехпунктовой интерполяции можно составлять разными способами. Менее удобный, но самый точный способ — давать цифровые величины α и β при каждом табличном значении функции или промежуточно через несколько значений, учитывая вышесказанное.

Вычисляющий в этом случае исполняет действия:

$$k(1-k)\alpha \quad \text{и} \quad w(1-w)\beta$$

не слишком сложные, но требующие напряжения внимания, имея в виду отсутствие какого либо контроля. Вычисление поправок целесообразно совместить с главным вычислением, что можно исполнить по следующей формуле, учитывая принцип полного умножения, о котором говорилось выше.

$$F = \begin{array}{|c|c|c|} \hline F_{00} & F_{10} & \beta \\ \hline F_{01} & F_{11} & \\ \hline \alpha & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1-k)(1-w) & w(1-k) & w(1-w) \\ \hline k(1-w) & kw & \\ \hline k(1-k) & & \\ \hline \end{array} \qquad (28)$$

Интерполяционную табличку целесообразно составить по ранее описанной схеме, проверить сумму её элементов (единица) и приписать в первом столбце произведение $k(1-k)$ и в первой строке произведение $w(1-w)$.

Очень удобны таблички поправок, особенно, если поместить на скрещении соответствующего столбца и строки значение полной поправки за интерполяцию в столбцах и в строках. Этого рода пособия применены в изданных в последнее время Институтом Геодезии и Картографии таблицах для перевода географических координат в прямоугольные, а также для перевода прямоугольных координат в соседнюю зону. Часть такой таблицы показана в примере 3.

Удобны тоже, но дороги в обработке н печатании номографические пособия. Они могут быть составлены, как номограммы сетчатые или параллельно — шкаловые. Сетчатая номограмма может быть составлена в форме системы прямых, что уменьшает его стоимость. Подробности, касающиеся вычисления функционных шкал, здесь не приведены, как общеизвестные.

(Сведения по номографии в размере достаточном для конструирования номограмм для вычисления интерполяционных поправок можно найти в работе автора: Геодезические Вычисления, Варшава, 1953).

STEFAN HAUSBRANDT

A certain method of the interpolary computation of a function of two variables (Four-point interpolation with corrections)

INTRODUCTION

In many geodetic calculations in which it is necessary to compute many times values of the function of two variables $F(u, v)$ it is wise to use a ready-made numerical table showing the values which the function will assume for definite equidistant values of the arguments $u\,v$, and to compute the values of the function by interpolation. Such a procedure has the advantage of full generality: when solving by interpolation numerical problems of a great variety of mathematical content resulting from the diversity of form of the function $F(u\,v)$ the computer is here free from the necessity of investigating the form of functional relations and from that of studying ever new details of computation technique.

There is of course a full analogy here to the application of the simplest form of interpolation: the linear interpolation with the use of logarythmic tables of those of values of trigonometrical functions. The user of these tables is often not aware what calculations were needed to arrange the tabular collection he uses, yet quite correct and quickly does he solve the problems of computing the sought value of the logarythm or of the trigonometric function for the given value of the argument by referring only to interpolation. However while in the domain of the function of one variable, e. g., $\log x$ or $\sin x$, the necessity of leaving out of account the mathematical content of the problem in practical computation and the use of interpolation have both been long recognized as legitimate, in the domain of the function of two (or more) variables it is comparatively seldom that numerical computation follows the most economical course of making use of a ready—made numerical collection of values of the function and of finding by way of interpolation the values of this function corresponding to the assumed values of the argument. As typical examples of complicating numerical computation by avoiding interpolary calculation can serve almost all computation in higher geodesy and mathematical cartography based on the classical conception, which compels the computer to use patterns imposing extremely complicated procedure and making it impossible for him to follow the main idea of the calculation in question.

It seems to us that one of the main reasons why the interpolary calculation of the value of a function of two (or more) variables is not widely accepted is that *typical form* of such calculation, a form which would facilitate its simple and controlled verification, has not been fixed yet, in contradistinction to the interpolation of a function of one argument, where this *typical character* has found full expression in the principle of condensing the function table to a linear form and of the traditional presentation of tables of the „partes proportionales". Another reason why interpolary calculation in the domain of functions of two arguments is not popular is doubtlessly the fact that the pionneer works in this field were based upon formulae of differential interpolation which again were deplorably obscure and not very economical in numerical calculation.

The present work describes the interpolary procedure for computing values of a function of two arguments, which procedure is further called „four-point interpolation with a correction", and, as it seems, could be profitably accepted as a typical form of the interpolation of a function of two arguments from a standard function table. What we mean by this is that we would rather think that it would be useful to accept the principle that tables of the values of a function of two arguments for practical computation ought to be so arranged that they should be prepared for four-point interpolation with a correction described further below.

It follows from what I have said so far that the problem we want to discuss below is both a problem of computation technique and of applied mathematics. This is because on the one hand we must describe here the arrangement of tables and computation technique in the interpolary procedure we suggest, and, on the other, we must make an analysis of the theoretical foundations of the procedure and of the achievable accuracy of its results.

Although it is clear that theoretical analysis is more important for a clear understanding of the problem than computation technique, in our work we present a description of the suggested interpolary procedure and numerical examples first and place the theoretical examination in the second part of the work. This arrangement of the materials will both allow everybody better to appreciate the simplicity of four-point interpolation and help the reader not interested in mathematical argumentation but keen on getting acquainted with the technical aspect of the computation. Any body eager to know its theoretical side will read the first part as well since it contains the denotations and a description of interpolary procedure.

PART ONE

A description of the operations connected with four-point interpolation

We accept the following denotations and names:

u *the columnar variable,* i. e., the independent variable („argument") whose successive values are inscribed in the head column of the functional table;

v *the linear variable,* i. e., the independent variable („argument") whose successive values are inscribed in the head line of the functional table;

F *the function of the variables* u *and* v whose values are inscribed in the table, the value assumed by the function for the values of the variables written in the i-th column and the j-th line being inscribed at the intersection of the i-th column and the j-th line. The denotation is illustrated by the following diagram:

$U \backslash V$		v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	.....
.	.....	...	...	...	...	...	.....
.	.....	...	...	...	...	...	.....
.	.....	...	...	...	...	...	.....
u_0	.....	F_{00}	F_{10}	F_{20}	F_{30}	F_{40}	.....
u_1	.....	F_{01}	F_{11}	F_{21}	F_{31}	F_{41}	.....
u_2	.....	F_{02}	F_{12}	F_{22}	F_{32}	F_{42}	.....
u_3	.....	F_{03}	F_{13}	F_{23}	F_{33}	F_{43}	.....
.	.....	...	...	...	...	...	.....
.	.....	...	...	...	...	...	.....
.	.....	...	...	...	...	...	.....

..... (1)

In particular, for example, the table below is a functional table of a function of two variables, where the value of this function for the value of the columnar variable $= 20$ and for the value of the linear variable $= 30$ amounting to 779.

	.....	20	30	40	50	.....
	....	....	....	....	....	.....
10	.....	287	552	917	1382	.....
20	.....	489	779	1169	1659	.....
30	.....	791	1106	1521	2036	.....
40	.....	1193	1533	1973	2513	.....
...	....	....	....	....	....	.....

(2)

Furthermore we accept the following denotations and names:

k *columnar interpolation fraction*, i. e., the ralation of the difference between the value of the columnar variable for which the interpolation is being made and the nearest smaller value of the columnar variable inscribed in the head column of the table to the constant of the tabular difference for the columnar variable (the latter difference amounting to a multiple of 10 as a rule, and to 10 in our example);

w *linear interpolation fraction*, i. e., the relation of the difference between the value of the linear variable for which the interpolation is being made and the nearest smaller value of the linear variable inscribed in the head line, to the constant of the tabular differenc for the linear variable;

I *interpolary tablet*, i. e., a square set of four elements containing in its first line the product of the complementation of the fraction of columnar interpolation to one by the complementation of the fraction of linear interpolation to one and the product of the complementation of the fraction of columnar interpolation to one by the fraction of linear interpolation, and in its second line the product of the fraction of columnar interpolation by the complementation of the fraction of linear interpolation to one and the product of the fraction of columnar interpolation by the fraction of linear interpolation.

Thus the interpolation tablet, which we shall denote by the letter I, has the form:

$$\left|\begin{array}{cc} (1-k)(1-w) & (1-k)\,w \\ k(1-w) & kw \end{array}\right| = I \tag{3}$$

The most convenient way of including it to the computation is to *write in the form of the head column the complementation of the interpolary fraction in columns to one and the fraction of interpolation in colums, and in the form of the head line the complementation of the interpolary fraction in lines to one and the fraction of interpolation in lines,* and to fill in the axial scheme

$$\begin{array}{c|cc|} & 1-w & w \\ \hline 1-k & \cdot & \cdot \\ k & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} = I \tag{4}$$

with the numbers of the head column and of the head line determining the given field. Specifically, e. g., in case we make interoplations for $\frac{3}{10}$ of the interval of the columnar variable and $\frac{4}{10}$ of the interval of the linear variable, i. e., in case $k=0.3$ and $w=0.4$, we shall obtain an interpolary tablet as follows:

$$\begin{array}{c|cc|} & 0{,}6 & 0{,}4 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}42 & 0{,}28 \\ 0{,}3 & 0{,}18 & 0{,}12 \\ \hline \end{array} = \mathrm{I} \tag{5}$$

The sum of the elements of the interpolary tablet must strictly equal one. If this is not the case — which may happen when the results are rounded off while calculating the elements of the tablet — the results should necessarily be squared by rounding them off so that the sum of the elements of the tablet is one. This operation being neglected gross errors may be made in the results of the interpolation. In the elements of the interpolary tablet it is sufficient to take into account the number of figures at the right of the decimal point larger by one than the number of figures of the variables in the values of the function interpolated.

Let us furthermore call *the functional tablet* and denote by T the part of the functional table which will be used for four-point interpolation, i. e., the four-element set containing the value of the function F corresponding to the values of the independent variables initial in the given interpolation and the values of the function next to it in the tablet and corresponding to further values of the independent variables next to the initial ones. Thus if we denote by u_0 and u_1 as well as by v_0 and v_1 the values of the independent variables between which we make the interpolation, then (see Diagram 1)

$$T = \begin{array}{|cc|} \hline F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \\ \hline \end{array} \tag{6}$$

When interpolating it is wise to make the functional tablet evident either by outlining it in pencil or laying a suitable stencil on the functional table.

The complete product of the functional tablet by the interpolary table, or the sum of the products of the elements of those tablets corresponding to each other in position we shall call *the rough result of the interpolation* and we shall denote it by F_0.

$$F_0 = T \cdot \mathrm{I} \tag{7}$$

In the function tabulated is a polynomial of the variables uv with no higher powers than uv, i. e., if it is the polynomial

$$F = a_0 + a_u u + a_v v + a_{uv} uv \tag{8}$$

the rough result of four-point interpolation is at the same time its exact result, that is to say, the value calculated with the formula $F_0 = T \,.\, I$ is one which the polynomial tabulated in the given tablet assumes for the values of the arguments characterized by the interpolary fractions used in the computation.

If the function tabulated is a polynomial of the variables uv containing not only the product uy but also the square powers of the variables, that is to say, if it is a full polynomial of the second degree

$$F = a_0 + a_u u + a_v v + a_{uv} uv + a_{u^2} u^2 + a_{v^2} v^2 \tag{9}$$

the rough result of four-point interpolation is not equal to the value assumed by the polynomial tabulated for the values of the independent variables characterized by the interpolary fractions used for the realization of the formula $F = T \,.\, I$.

To arrive at the value assumed by the polynomial tabulated for the values of the independent variables characterized by the interpolary fraction kw, *the rough result of the interpolation ought to be corrected by adding to it „the correction of columnar interpolation p_k" as well as „the correction of linear interpolation p_w".*

Eventually then

$$F = F_0 + p_k + p_w \tag{10}$$

The values of the corrections of the columnar and the linear interpolations should be found in the tables of corrections similar to the partes proportionales of linear interpolation after the arguments: the fraction of columnar interpolation k (the correction of columnar interpolation) and the fraction of linear interpolation w (the correction of linear interpolation). In case the extent of variation of these corrections is small one can find at once the total correction, i. e., the sum $p = p_k + p_w$ in the rectangular table with two entrances or from a net nomograph.

Such computation aids of all kinds serving to calculate the correction of rough interpolation are given as numerical illustration of the problem (in the original text).

The general conception of the suggested system of functional tables for computing functions of two arguments by interpolation can ultimately be brought down to the following items:

a) The tabular collections are so condensed when arranged that the value of the function with the error of the $\pm$ unit in the last place could be found by interpolation with the help of a polynomial of the second degree.
b) This interpolation is made by arranging an interpolary table, multiplying it completely by the functional tablet and correcting this result of rough interpolation by adding the corrections of the

columnar and the linear interpolations, found in the correction tables included to the functional table (or in the nomographs).

c) If the computation aids allowing to define the extent of the corrections of the result of rough interpolation are not included in the functional table we obtain, when making four-point interpolation with no correction from the given tables, errors which do not exceed the $\pm$ unit in the last place. If this is not the case a remark to this effect should be made in the functional table.

PART TWO

The explanation of the computation procedure described in Part One and the principles of arranging tables and aids for computing interpolary corrections

Theorem 1: If the function of two variables $F(u,v)$ is a polynomial of the second degree $F(u,v) = au + bv + c \, . \, uv + d$, tabulated as

$u \backslash v$		v_0	v_1		
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
u_0	...	F_{00}	F_{10}	...	...
u_1	...	F_{01}	F_{11}	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

where $\boxed{\begin{matrix} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{matrix}} = T$

the value assumed by this function for the values of the variables $u \, v$ characterized by the interpolary fractions

$$k = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \qquad w = \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}$$

is equal to the sum of the products of the elements of the tablet T by the elements of the tablet I corresponding to them in position, the latter tablet being determined as follows

$$I = \boxed{\begin{matrix} (1-k) \, . \, (1-w) & w(1-k) \\ k \, . \, (1-w) & k \, . \, w \end{matrix}} \text{ which we agree to denote } \underline{F(k,w) = T \, . \, I} \quad (11)$$

Proof. The quantity $T \, . \, I$, containing the variables k, w in corresponding powers is a polynomial of the type under consideration with respect to the variables k, w, and because of the linear dependence of k upon u and of w upon v it is also a polynomial of the type under consideration with respect to the variables u and v.

Since a polynomial of this type is defined by four parameters, the theorem may be proved by showing that the term TI.

1) assumes the value F_{00} for the value $u_0 v_0$, i. e., for $k=0$ $w=0$,
2) assumes the value F_{01} for the value $u_1 v_1$, i. e. for $k=1$ $w=0$,
3) assumes the value F_{10} for the value $u_0 v_1$, i. e., for $k=0$ $w=1$,
4) assumes the value F_{11} for the value $u_1 v_1$, i. e., for $k=1$ $w=1$.

This is, however, evident at once, because when 1), is assumed $TI=F_{00}$, when 2) is assumed $TI=F_{01}$, when 3) is assumed $TI=F_{10}$, and when 4) is assumed $TI=F_{11}$, as the other elements of Tablet I change to zero.

Theorem 2. If the function of two variables $F(uv)$ is a full polynomial of the second degree: $au+bv+cuv+du^2+ev^2+f$, tabulated in a rectangular

$$\begin{array}{c|ccccc} & \cdots & v_0 & v_1 & v_2 & \cdots \\ \hline & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0 & \cdots & F_{00} & F_{10} & F_{20} & \cdots \\ u_1 & \cdots & F_{01} & F_{11} & F_{21} & \cdots \\ u_2 & \cdots & F_{02} & F_{12} & F_{22} & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad \text{where} \quad T = \begin{array}{|cc|} \hline F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \\ \hline \end{array}$$

the value assumed by this function for the values of the variables uv characterized by the interpolary fractions k (the fraction of columnar interpolation) and w (the fraction of linear interpolation)

$$k=\frac{u-u_0}{u_1-u_0} \qquad w=\frac{v-v_0}{v_1-v_0}$$

is equal to the sum of the products of the elements of the tablet T by the elements of the tablet I corresponding to them in position, the latter tablet being determined as before

$$I=\begin{array}{|cc|} \hline (1-k)(1-w) & w(1-k) \\ k\,(1-w) & kw \\ \hline \end{array}$$

and increased by the correction of the columnar interpolation p_k and that of the linear interpolation p_w, which we denote

$$\boxed{\underline{F(kw)=T\,.\,I+p_k+p_w}} \tag{12}$$

the corrections of the columnar and the linear interpolations being determined by the formulae

$$p_k = \frac{k(1-k)}{2} \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{or, more generally} \quad p_k = \frac{k(1-k)}{2} \begin{Bmatrix} F_{rs} \\ F_{r,s+1} \\ F_{r,s+2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

$$p_w = \frac{w(1-w)}{2} \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{or, more generally} \quad p_w = \frac{w(1-w)}{2} \begin{Bmatrix} F_{qz} \\ F_{q+1,z} \\ F_{q+2,z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Proof. As the polynomial assumed is determined by six parameters the theorem may be proved by showing that the term

$$F(kw) = T \,.\, I + p_k + p_w$$

1) assumes the value F_{00} for the values $k=0$ $w=0$;
2) assumes the value F_{01} for the values $k=1$ $w=0$;
3) assumes the value F_{02} for the values $k=2$ $w=0$:
4) assumes the value F_{10} for the values $k=0$ $w=1$;
5) assumes the value F_{11} for the values $k=1$ $w=1$;
6) assumes the value F_{20} for the values $k=0$ $w=2$.

This is shown easily by the computation of the values which the succesive compenents of the formula

$$F(kw)\, TI + p_k + p_w$$

and their sum assume for the corresponding values of the variables k and w.

k	w	$T\,.\,I$	p_k	p_w	$F = T\,.\,I + p_k + p_w$
0	0	F_{00}	0	0	F_{00}
1	0	F_{01}	0	0	F_{01}
2	0	$2F_{01} - F_{00}$	$-2F_{01} + F_{00} + F_{02}$	0	F_{02}
0	1	F_{10}	0	0	F_{10}
1	1	F_{11}	0	0	F_{11}
0	2	$2F_{10} - F_{00}$	0	$F_{00} - 2F_{10} + F_{20}$	F_{20}

Since in point fact as seen from the above the polynomial $F(kw) = TI + p_k + p_w$, which is a polynomial of the second degree with respect to the variables $k\,w$, constituting in turn linear functions of the variables $u\,v$, assumes the corresponding values for the six assumed values of the arguments, the theorem is proved.

The theorems presented above prove the suggested numerical computation in the „four-point interpolation" described early in this work.

The arrangement of tables for four-point interpolation requires the preparation of a suitable tabular collection which it is convenient to base upon the theorems presented below.

Theorem 3. The sum of the products of the 4 values of a polynomial of the second degre for the equidistant values of the argument by the binomial coefficients of a polynomial of the third degree with alternating signs is zero.

$$\boxed{\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0} \tag{14}$$

This theorem may be expressed more generally by the equation $\underline{F}\,\underline{N} = 0$, where $\underline{F}$ is the cracovian $n+2$ of the values of a polynomial of the n-th degree for the equidistant values of the argument while $\underline{N}$ is a Newtonean cracovian with $n+2$ terms, i. e., a set of binomial coefficients of the binomial of $n+1$ th degree with alternating signs. We abstain from the simple proof of this theorem since it was presented before in one of the Geodetic Scientific Research Institute publications (The Proceedings of the Geodetic Scientific Research Institute No 7, Stefan Hausbrandt, Bezpośrednia interpolacja wielomianowa ze szczególnym uwzględnieniem interpolacji funkcji dwóch argumentów ujęta krakowianowo, oraz poprzedzona krótkim zasysem rachunku krakowianowego", Warsaw 1950).

The theorem may help in arranging a table of functions of two arguments. In our case the function, as a polynomial ot the second degree with respect to the columnar variable and the linear one, must fulfil the criterion $\underline{F}\,\underline{N} = 0$ both for any four values of the functions next to each other in a column and for any four values of the iunctions next to each other in a line. It is also plain that in view of the errors in rounding off this criterion will not — on the whole — be fulfilled (except for the cases when the function is exactly a polynomial represented without final figures rounded off, which again is never the case in practical computation).

If j is the value of the unit of the last row of the function tabulated, and if we assume the most unfavourable coincidence of errors in rounding off in the four neighbouring values of the function, w obtain in the considered case of a polynomial of the second degree the maximum admissible orror in the realization of the formula $\underline{F}\,\underline{N}$, the quantity $0{,}5 \,.\, 8 \,.\, j$, i. e., $4\,j$. In this connection the formula (14) assumes for numerical computation the following form:

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \leqslant 4 \,.\, j \tag{15}$$

In a general case, considering that the sum of the coefficients of the development of the binomial is equal to 2^n, where n is the degree of the polynomial, the equation:

$\boxed{\underline{F}\,\underline{N} \leqslant 2^n j}$ where the cracowians $\underline{F}\,\underline{N}$ contain $n+2$ elements each (16)

would serve to verify, with the help of Newtonean cracovians the position of $n+2$ points in a polynomial of the second degree.

We emphasize a very high degree of suitability of the formula (16), of which the formula (15) is a particular case, for verifying tabular collections when they are printed.

As is known the reading off of the figures is no sufficient verification, while to base oneself upon the assertion of the constance of the n-th difference takes much work, since a great many figures must then be written down which are needed only incidentally during the computation. The realization of the controlling formula (16) in machine computation is very simple and, if all values of the function tabulated are taken into account, secures the fuull accuracy of the functional table which is printed.

We shall now present the theorems which define even more exactly the extent of error we may expect when we approximate a function of a polynomial of the second degree when it should be approximated by a polynomial of the third degree. These theorems are useful in the problems of practical computation when too large a congestion of a functional table desirable fom the mathematical point of view cannot be justified by practical considerations.

Theorem 4. The maximum value of the error we obtain when interpolating with the help of a polynomial of the second degre the value of a function which is a polynomial of the third degree does not exceed the quantity $f_{\max}$ defined by the formula

$$\boxed{f_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{27}\left\{\begin{matrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}\right\} = 0{,}06415\left\{\begin{matrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}\right\}} \qquad (17)$$

The symbols $F_0\,F_1\,F_2\,F_3$ denote here — as they did before — the values assumed by the function for the four equidistant values of the argument.

Proof. The theorem may be proved with the help of „Newton's interpolary formula"

$$F = F_0 + \binom{k}{1} a_0 + \binom{k}{2} b_0 + \binom{k}{3} c_0 + \dots$$

where F is the value of the function to be found, F_0 is its starting value, k is the interpolary fraction, while $a_0\,b_0\,c_0 \dots$ denote the successive differences situated on the diagonal of the differential table

$$\begin{array}{llll}
F_0 & & & \\
 & a_0 = F_1 - F_0 & & \\
F_1 & & b_0 = a_1 - a_0 = F_2 - 2F_1 + F_0 & \\
 & a_1 = F_2 - F_1 & & c_0 = b_1 - b_0 = F_3 - 3F_2 + 3F_1 - F_0 \\
F_2 & & b_1 = a_2 - a_1 = F_3 - 2F_2 + F_1 & \\
 & a_2 = F_3 - F_2 & & c_1 = b_2 - b_1 = F_4 - 3F_3 + 3F_2 - F_1 \\
F_3 & & b_2 = a_3 - a_2 = F_4 - 2F_3 + F_2 & \\
 & a_3 = F_4 - F_3 & & \\
F_4 & & &
\end{array}$$

It is easy to see that

$$a_0 = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad b_0 = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad c_0 = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ etc. etc.}$$

or generalizing, the successive differences of Newton's formula are equal to the functional cracovian $\underline{F}$ multiplied by the Newtonean cracovians $\underline{N}$, where by the functional cracovian the set 2, 3, 4... of the neighbouring values of the function (or, more generally, the set of values of the function for the equidistant values of the argument) is meant, while the Newtonean cracovian denotes a set of coefficients of the development of a polynomial of the 1 st, 2 nd, 3 rd,... degree with alternating signs the last of them being positive.*) Besides it follows from this generalization that if the function tabulated is a polynomial of the n-th degree the relation $\underline{F} \cdot \underline{N} - 0$, discussed before (Theorem 3), must hold for the cracovians $\underline{F}\,\underline{N}$ with $n+1$-th differences being zero.

If we write Newton's interpolary formula in the form

$$\boxed{F = F_0 + \binom{k}{1} \cdot \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \binom{k}{2} \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \binom{k}{3} \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}} \tag{18}$$

we can see at once that the difference between the result ot the interpolation madewith the help of a polynomial of the third degree and the result of the interpolation made with the help of a polynomial of the second degree amounts to

$$f = \binom{k}{3} \cdot \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{6}$$

*) The term „Newtonean cracovian" is used here and below because it has been accepted in both foreign and home cracovian literature. See, e. g., S. Arend „Paraboles de degré n passant par $n+1$ points dont les abscisses procèdent par intervalle constant" — Bruxelle 1953, K. Cabulak „Graficzne analityczne wyznaczanie krzywych hydrologicznych wyrównanych metodą krakowianową", Acta Geophysica Polonica, Warsaw, 1953, Vol. I N 3, 4.

To prove the theorem *4* we must only compute the extremum of the term $x = k(k-1)(k-2)$ and multiply the value of this extremum by a sixth part of the product $\underline{F}\,\underline{N}$. As the derivative

$$\frac{dx}{dk} = 3k^2 - 6k + 2$$

changes into zero if $k = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, while the value $k = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ is irrelevant here since we are interested in the mutability of k limited by the inequality

$$0 \leqslant k \leqslant 1,$$

we must only compute the value of the extremum for $k = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

We obtain

$$x_{extr} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

By multiplying the value of the extremum thus obtained by one sixth part of the product $\underline{F}\,\underline{N}$ we finally obtain

$$f_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27}\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad Q.\,E.\,D.$$

N. B. Similarly we can arrive at a formula for the maximum value of the error we obtain when interpolating with the help of a polynomial of the first degree (the so called linear interpolation) the value of a function which is a polynomial of the second degree. This formula reads

$$f_{max} = \frac{1}{8}\cdot\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

x	$F = \sqrt[3]{x}$
....	....
150	5,313 293
151	5,325 074
152	5,336 803
153	5,348 481
154	5,360 108
155	5,371 685
156	5,383 213

Numerical illustration. The function tabulated here may be interpolated by means of a polynomial of the second degree. Such interpolation would involve errors the extent of which would not exceed 0.000 000 064, i.e., errors the extent of which could be passed over because of the accuracy of the tabulation while the interpolation with the help of a polinomial of the first degree erros approaching 0.000 0065, i. e., exceeding the accuracy of the tabulation.

We shall now formulate a theorem similar to the theorem *4* presented before yet relating to a function of two arguments.

Theorem 5. The maximum value of the error we obtain when interpolating with the help of a polynomial of the second degree the value of a function of two variables, which is a polynomial of the third degree does not exceed the quantity f defined by the formula

$$\boxed{f=\left[\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\\F_{03}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\\F_{30}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\sqrt{3}}{27}+\left[\left[\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\\F_{10}\\F_{11}\\F_{12}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\2\\-1\\1\\-2\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\\F_{01}\\F_{11}\\F_{21}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\2\\-1\\1\\-2\\1\end{Bmatrix}\right]\right]\frac{1}{8}\dots} \tag{20}$$

all the four components of which should be understood as having absolute values.

Proof. Let us first notice that if the function of two variables $F(uv)$ is a full polynomial of the third degree:

$$au+bv+cuv=du^2+ev^2+fu^2v+gv^2u+hu^3+iv^3+j$$

tabulated in a rectangular

	......	v_0	v_1	v_2	v_3	......
	......	...	...	...	...	......
u_0	......	F_{00}	F_{10}	F_{20}	F_{30}	......
u_1	......	F_{01}	F_{11}	F_{21}	F_{31}	......
u_2	......	F_{02}	F_{12}	F_{22}	F_{32}	......
u_3	......	F_{03}	F_{13}	F_{23}	F_{33}	......
	......	...	...	...	...	......

the value assumed by this function for the values of the variables uv, characterized by the interpolary fractions k (the fraction of columnar interpolation) and w (the fraction of linear interpolation)

$$k=\frac{u-u_0}{u_1-u_0} \qquad w=\frac{v-v_0}{v_1-v_0}$$

we express in the formula

$$F_{00}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{k}{1}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{w}{1}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{10}\\F_{11}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{k}{1}\binom{w}{1}+$$

$$\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{01}\\F_{02}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{k}{2}+\begin{Bmatrix}F_{00}\\F_{10}\\F_{20}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\cdot\binom{w}{2}+\Delta F,$$

where ΔF, as we have denoted the différence between the result of the interpolation with the help of a polynomial of the third degree and the result of the interpolation with the help of a polynomial of the second degree, amounts to

$$\Delta F = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{k}{3} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{w}{3} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{k}{2} \binom{w}{1} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{01} \\ F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \binom{k}{1} \binom{w}{2} \tag{21}$$

As may be easily verified (we dispense with computation) the value of the whole term changes into F_{00} if $k=0$ $w=0$, into F_{01} if $k=0$ $w=1$ etc. etc.

Then the value should be determined which not exceeded by the quantity ΔF constituting the difference between the results of interpolation of the third and the second degrees if the interpolary fractions $k\,w$ change from zero to one. Let us treat the quantity ΔF (21) as the sum of four components and denote them by $A\,B\,C\,D$ respectively. We can write

$$\Delta F_{max} < A_{max} + B_{max} + C_{max} + D_{max} \tag{22}$$

But the first two components, in accordance with the theorem *4*, do not exceed the value

$$\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{27} = A_{max} \quad \text{и} \quad \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{27} = B_{max} \tag{23}$$

since we have already computed the extreme values of a similar term.

As for the third and the fourth components we shall proceed as follows (the computaton of the derivatives would only give us a minimum equal to zero, irrelevant to the problem): the product

$$\binom{k}{2}\binom{w}{1} = \frac{k\,(k-1)\,w}{2} = \frac{(k^2-k)\,w}{2} = (k^2-k)\,w \cdot \frac{1}{2}$$

consists of two components. The absolute value of the first within the considered extent of mutability does not exceed 0.25; the value of the second component does not exceed one and that of the third always amounts to 0.5. Therefore the value of the product can never, within the considered extent of variance, exceed the number

$$0.25 \cdot 1 \cdot 0.5 = 0.125 = \frac{1}{8}$$

If follows hence that the absolute values of the third, and, by analogy, also of the fourth compents of the formula (21) never exceed the quantity

$$\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{8} = C_{max}, \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \\ F_{01} \\ F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{8} = D_{max} \tag{24}$$

The relations (22) (23) (24) prove the theorem 5. Q. E. D.

Theorem 6. The maximum value of the error we obtain when interpolating with the help of a polynomial of the first degree the value of a function of two variables, which is a polynomial of the second degree, does not exceed the quantity f defined by the formula

$$\boxed{f = \left[\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \frac{1}{8} + \left[\begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{10} \\ F_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]} \tag{25}$$

Proof. Assuming that the polynomial is of the first degree we should interpolate with the formula

$$F = F_{00} + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} . k + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} . w$$

We compare this with the formula of interpolation of the second degree written in the form as accepted in the formula (21) and see that the difference between the result of interpolation of the second degree and that of interpolation of the firsf degree is

$$\Delta F = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{10} \\ F_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} k . w + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} k . (k-1) + \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} w (w-1)$$

Since, when the values kw change from zero to one the quantity wk does not exceed one, the quantity $k(k-1)\frac{1}{2}$ does not exceed $\frac{1}{8}$, and the quantity $w(w-1)\frac{1}{2}$ does not exceed $\frac{1}{8}$, the quantity ΔF can never exceed the value f specified in the formula (25), Q.E.D.

Numerical illustration. Let us refer to the functional table of the functions of two variables as presented on p. 328 (its initial fragment)

1136	2271	3407	4543
1172	2344	3517	
1210	2420		
1250			

According to Theorem 5 the maximum value of the error in the interpolation of the second degree does not exceed here 0.19^{cc}, a number smaller than the error in rounding off when arranging the table. This interpolation is sufficiently accurate then. On the other hand — according to Theorem 6 — the maximum value of the error in interpolation of the first degree does not exceed 38^{cc}. Thus the accuracy of such an interpolation is, according to this theorem, not quaranteed.

N.B. Both in the wording and symbols of Theorems 4, 5, 6 we did not emphasise that the maximum absolute values were meant as we thought that this was clear from the nature of the problem while exessive attemps at accuracy in wording and symbols would affect the clarity of the theorems.

The arrangement of the computation aids for the corrections of four-point interpolation

The formula for the interpolation of the function of two arguments with the help of a polynomial of the second degree (compare Theorem 2) may be writen in the form

$$F = \overline{\begin{vmatrix} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{vmatrix}} \; \overline{\begin{vmatrix} (1-k)(1-w) & w(1-k) \\ k(1-w) & kw \end{vmatrix}} + k(1-k)\alpha + w(1-w)\beta$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} \qquad \beta = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} \tag{26}$$

It is plain that the quantities we have denoted here by α and β are constant for the extent of mutability illustrated by a definite functional table and if and only if the function tabulated is strictly a polynomial of the second degree. Since this never occurs in practice, as the function is not a polynomial and only becomes approximated by polynomial in a narrower extent of mutability the quantities α and β computed from the thre different neighbouring values of F will somewhat differ from each other. Computation aids serving to find, as directly as possible, (i. e., without any more computation), the corrections of four-point interpolation:

$$p_k = k(1-k)\alpha \qquad p_w = w(1-w)\beta \tag{27}$$

must be so arranged that they

1^0 take as little space as possible, which helps us quickly find the values of the corrections:

2^0 do not lower the accuracy of the result of interpolation too much.

Since, as may easily be seen, the maximum value of the factor $k(1-k)$ or $w(1-w)$, by which the quantities α or β are multiplied, amounts to 0.25 the application of the computation aid arranged for the quantity α instead of the quantity $\alpha+d\alpha$, or the application of the computation aid arranged for the quantity β instead of the quantity $\beta+d\beta$ results in the errors

$$0.25\,d\alpha \text{ or } 0.25\,d\beta \text{ respectively.}$$

Let $\Delta\alpha$ and $\Delta\beta$ denote the differences between those neighbouring values α_1 and α_2 as well as β_1 and β_2, for which the computation aids have been calculated. When applying these aids and making proper use of the tables one will refer, there being no aid for the proper value of α or β, to the nearer one of the two values at his disposals $\alpha_1\,\alpha_2$ or $\beta_1\,\beta_2$. It follows hence that the error $d\alpha$ should be accepted as $0{,}5\,\Delta\alpha$. Thus, ultimately, the error abtained from the arrangement of computation aids for the quantities α, distant by $\Delta\alpha$, or the quantities β, distant by $\Delta\beta$ amounts to

$$\boxed{d_{\text{popr. kol.}} = 0{,}125\,\Delta\alpha \qquad d_{\text{popr. wier.}} = 0{,}125\,\Delta\beta} \tag{28}$$

respectively.

Thus in Example 2 (the computation of the Gauss convergence) the tables of corrections for the columnar interpolation are given with intervals α every 0.5, because, as can be easily seen, the guidings symbols showing the user a suitable column of the correction table — marked with small squares — are equal to 2α and are given at intervals of 1. The error occuring from this span $\Delta\alpha = 0.5$ thus amounts (see Formula 28) to $0.125 \cdot 0.5 = 0.06$, which is of no consequence since the accuracy of the tabulation is 1^{cc}.

Computation aids serving to compute the corrections of four-point interpolation may be arranged in many ways. This least convenient, though most accurate, would be to *give numerical quantities* $\alpha\,\beta$ either for every tabulated value of the function or for every few values, taking into account what has just been said. Still the user must then perform the operations

$$k(1-k)\,\alpha \quad \text{and} \quad w(1-w)\,\beta$$

not very *inconvenient* for that matter yet requiring much concentration as there is no control. The computation of the corrections can best be connected then with the main computation, which — to use the term of full multiplication mantioned above — can be expressed in the following formula

$$F = \begin{array}{|c|c|c|} \hline F_{00} & F_{10} & \beta \\ \hline F_{01} & F_{11} & \\ \hline \alpha & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1-k)(1-w) & w(1-k) & w(1-w) \\ \hline k(1-w) & kw & \\ \hline k(1-k) & & \\ \hline \end{array} \tag{28}$$

The interpolation table can best be arranged after the diagram described above. We then check the sum of their elements (one) and enter the product $k(1-k)$ in the first column and the product $w(1-w)$ in the first line.

Much more convenient are *corrections tables*, particularly when the value of the whole correction can be given in the proper line and column in terms of interpolation in columns and lines. Aids of this kind we applied in the computation tables published recently by the Instytut Geodezji i Kartografii (Institute of Geodesy and Cartography) for the conversion of geographical co-ordinates into rectangular ones and for the conversion of rectangular co-ordinates into the neighbouring projection system. A fragment of such a table we present in Example 3 (in the original text).

Also convenient, though more expensive in reproduction and arrangement are nomographic aids. They can be arranged as net nomographs or nomographs with parallel scales. A net nomograph can be obtained at a somewhat lower cost in the form of a system of straight lines. Particulars on the computation of functional scales we leave out of account since they are generally known from handbooks of nomography. (Such nomographic information as suffices to arrange nomographs for the computation of interpolary corrections may also be found in the present author's work, „Rachunki geodezyjne" („Geodetic computations"), Warsaw 1953).