

SPIS TREŚCI

Wstęp	Str. 7
-----------------	-----------

C z ę ś ć I

BADANIE SIECI ELEMENTARNYCH

R o z d z i a ł I

Podstawy teoretyczne badania dokładności sieci kątowych. Analiza sieci elementarnych złożonych z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)

Wstęp	17
1) Związek między zmianą wartości współrzędnych punktów wyznaczających kąt a zmianą wartości kąta	19
2) Równania błędów obserwacji kątowych	21
3) Charakterystyka dokładności wyznaczenia współrzędnych w sieci kątowej	22
4) Analiza sieci o kształcie trójkąta foremnego wypełnionego trójkątami foremnymi	23
a) sieć złożona z jednego trójkąta	24
b) sieć złożona z czterech trójkątów	25
c) sieć złożona z dziewięciu trójkątów	28
5) Twierdzenie o sieciach w kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)	33
6) Wykaz średnich błędów współrzędnych i średnich błędów położenia punktów w sieciach elementarnych z n^2 trójkątów ($n = 1, 2, 3$)	34

R o z d z i a ł II

Średnie błędy względne długości boków sieci i błędy kątów

Wstęp	35
1) Ustalenie wzoru na błąd średni funkcji niewiadomych określonych z układu równań normalnych Gaussa	37
2) Zastosowanie wzoru ogólnego do obliczenia średnich błędów względnych boków sieci kątowej w kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)	40
3) Zastosowanie wzoru ogólnego do obliczenia średnich błędów kątów wyrównanej sieci kątowej w kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)	41
4) Twierdzenie o błędach kątów i błędach względnych długości w sieciach o kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 trójkątów foremnych	44
5) Inna postać wzoru na błąd średni funkcji	44

Rozdział III

Wpływy błędów nieprzypadkowych

	Str.
Wstęp	45
1) Wpływ zmiany wartości obserwacji o dl na współrzędne punktu najbardziej odległego od podstawy sieci	46
2) Wpływ zmiany wartości obserwacji o dl na błąd względny boków sieci	52
3) Twierdzenie o wpływie błędów nieprzypadkowych	54
4) Inna postać wzoru na zmianę dx_i i -tej niewiadomej	54

Rozdział IV

Porównanie dokładności wyznaczenia położenia punktów pośrednich w sieciach elementarnych

Wstęp	55
1) Analiza sieci o czterech trójkątach	56
2) Analiza sieci o szesnastu trójkątach	57
3) Wykaz średnich błędów współrzędnych i średnich błędów położenia punktów w sieci elementarnej złożonej z 16 trójkątów	61

Rozdział V

Porównanie dokładności mało- i wielkotrójkątowych sieci elementarnych przez zastosowanie kryterium błędu średniego błędu

Wstęp	61
1) Omówienie istoty i przydatności pojęcia błędu średniego błędu	63
2) Zastosowanie kryterium błędu średniego błędu do sieci o kształcie trójkąta foremnego wypełnionego przez trójkąty foremne	64
3) Twierdzenie o zagęszczaniu dowolnej sieci	65

Rozdział VI

Porównanie sieci mało- i wielkotrójkątowych z punktu widzenia efektu ogólnego procesów wyrównawczych. Twierdzenie Otrębskiego o średnim zmniejszeniu błędu średniego obserwacji przez proces wyrównawczy

Wstęp	67
1) Omówienie zagadnienia zmniejszenia średniego błędu obserwacji przez wyrównanie. Dowód słuszności twierdzenia Otrębskiego	68
2) Zastosowanie twierdzenia Otrębskiego do sieci elementarnych	71

Rozdział VII

Podsumowanie wyników badania dokładnościowego sieci elementarnych i wnioski z tego badania

72

C z ę ś ć II

BADANIE SIECI OKRĄŻAJĄCYCH I ILUSTRACJE GRAFICZNE BADAŃ

Rozdział VIII

Wyznaczanie punktów sieci centralnych i częściowo-centralnych z punktów obwodowych

Wstęp	77
1) Ustalenie wzoru na błąd średni położenia punktu centralnego wyznaczonego z punktów obwodowych dla przypadku sieci pojedynczych trójkątów	79

2) Twierdzenie o wyznaczaniu punktu centralnego z punktów obwodowych w sieci złożonej z pojedynczych trójkątów	Str. 82
3) Ustalenie wzoru na błąd średni punktu centralnego wyznaczonego z punktów obwodowych przy budowie sieci z sieci elementarnych czterotrójkątowych	83
a) Wyznaczenie z dwóch punktów obwodowych, tj. z jednej sieci elementarnej	83
b) Wyznaczenie z trzech punktów obwodowych tj. z dwóch sieci elementarnych	83
c) Wyznaczenie z czterech punktów obwodowych tj. z trzech sieci elementarnych	86
d) Wyznaczenie z pięciu punktów obwodowych tj. z czterech sieci elementarnych	90
e) Wyznaczenie z sześciu punktów obwodowych tj. z pięciu sieci elementarnych	94
f) Wyznaczenie z sieci zamkniętej	97
4) Twierdzenia uogólniające dotyczące sieci okrażających budowanych z czterotrójkątowych sieci elementarnych	101

Rozdział IX

Pojęcie elipsy błędu i zastosowanie tego pojęcia do ilustrowania wyników analiz dokładnościowych sieci triangulacyjnych

Wstęp	102
1) Elipsa błędu punktu wyznaczanego pojedynczo	103
2) Wyznaczenie wielkości pól elipsy błędów oraz jej orientacji	107
3) Wyznaczenie związku między wielkością parametru s^2 i prawdopodobieństwem W położenia punktu wewnątrz elipsy błędu	109
4) Elipsy błędów rozpowszechnione w praktyce geodezyjnej	111
5) Przypadek spostrzeżeń niejednakowo dokładnych	116
6) Wyznaczanie elips błędów w układach wielopunktowych	117
7) Wyznaczanie elementów elips błędu z odwrotności pierwiastka krakowianowego	121
8) Związek między wielkością pola obszaru wewnątrz którego punkt wyznaczany znajduje się z założonym prawdopodobieństwem W a wielkością prawdopodobieństwa	122
9) Przykład — wpływ nadliczbowych pomiarów liniowych	123

Rozdział X

Ilustracje graficzne badań

Wstęp	133
Wykres 1	135
Wykres 2	136
Wykres 3	139
Wykres 4	140
Wykres 5	141
Wykres 6	143
Wykres 7	144
Wykres 8	146
Wykres 9	147
Uwaga dotycząca elips błędu na wykresach	149

Rozdział XI	Str.
Podsumowanie wyników badania porównawczego sieci mało- i wielkotrójkątowych i nawiązanie do literatury fachowej	150

Część III

TEORIA WYRÓWNANIA SIECI KĄTOWO LINIOWEJ I WYNIKI BADANIA DOKŁADNOŚCIOWEGO SIECI EKSPERYMENTALNEJ GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO- BADAWCZEGO

Rozdział XII	
Podstawy teoretyczne wyrównania sieci triangulacyjnej dowiązanej do punktów stałych o znanych błędach średnich, w której mierzono elementy kątowe i elementy liniowe	Str.
Wstęp	155
1) Pomocnicze symbole rachunkowe	158
2) Postać ogólna równania błędu obserwacji geodezyjnej	162
3) Rozwiązanie zagadnienia wyrównawczego	165

Rozdział XIII

Sieć eksperymentalna Geodezyjnego Instytutu Naukowo Badawczego

Wstęp	168
Wykresy ilustrujące badanie dokładnościowe sieci eksperymentalnej Geodezyjnego Instytutu Naukowo Badawczego	
Wykres I	169
Wykres II	171
Uwagi końcowe dotyczące środków rachunkowych przy wyrównaniu wielkich sieci triangulacyjnych	172
Streszczenie	175
Резюме	193
Summary	213

WSTĘP

Wojna światowa 1939-1945 wywarła na polskie prace geodezyjne wogóle a na prace triangulacyjne w szczególności przemożny wpływ. Z jednej strony cały niemal dorobek geodezyjny Polski międzywojennej uległ zniszczeniu na skutek działań zbrojnych i długotrwałej okupacji, z drugiej strony głębokie zmiany strukturalne związane z uprzemysłowieniem kraju, wysuniętym jako naczelne hasło przez zastępujący dawne formy życia społecznego socjalizm, spowodowały konieczność szybkiego tworzenia nowego materiału geodezyjnego jako niezbędnej osnowy wszelkiej akcji planowej. Jeżeli dodamy do tego tak charakterystyczny dla każdego ruchu rewolucyjnego wzrost powagi nauki, skutkujący przystąpieniem do realizacji zagadnień geodezyjnych długofalowych których znaczenie niedoceniane było przez ustrój kapitalistyczny (np. badanie figury ziemi), zrozumiemy bez trudności że narodzeniu się Polski Ludowej towarzyszyć musiało zupełne przeorganizowanie działalności na odcinku geodezyjnym.

W dziedzinie prac triangulacyjnych, których pewnym fragmentem będziemy się w niniejszej rozprawie zajmować, to przeorganizowanie wyraziło się w pierwszym rzędzie przez zerwanie z klasycznym szablonem czterorzędowości sieci triangulacyjnych oraz przez szerokie zastosowanie koncepcji wież z elementów prefabrykowanych, pozwalającej na wydátne przyspieszenie i potaniecie prac polowych.

Inicjatorzy zerwania z czterorzędowością sieci triangulacyjnych wysuwali początkowo daleko idący projekt zastąpienia sieci pierwszych trzech rzędów przez jednolitą sieć powierzchniową o bokach długości około 10 km, wypełniającą cały obszar Państwa, z której w miarę potrzeby można by określać boki i kąty trójkątów większych, stanowić mające wyłącznie element rachunkowy, upraszczający żmudne dla wielkich sieci wyrównanie błędów przypadkowych pomiaru.

Koncepcja ta, wysunięta przez pracowników b. Głównego Urzędu Pomiarów Kraju, ob. ob. mgr. inż. Józefa Borysowskiego i mgr. inż. Błażeja Duliana, i naogół życzliwie przyjęta przez polski świat techniczny, była następnie (od r. 1947) realizowana przez Główny Urząd Pomiarów Kraju — jednakże nie w całej rozciągłości.

Postanowiono mianowicie istniejące już na gruncie punkty triangulacji I, a niekiedy i II rzędu, bądź to założone przez geodezję polską okresu międzywojennego, bądź też założone przez dawne państwa, zaborcze i stransponowane na polski układ państwowy, potraktować jako punkty stałe do których nawiązywać się będzie zakładana sieć powierzchniową o bokach rzędu około 10 km, nazwaną i nazywaną dalej w niniejszej pracy siecią „wypełniającą”. To odstępstwo od koncepcji pierwotnej — jak to wyniknie z dalszych rozważań teoretycznie słuszniejszej — podyktowane zostało względami praktycznymi. Życie gospodarcze kraju domagało się bowiem dostarczania opracowanego materiału geodezyjnego wprowadzić w formie fragmentarycznej, jednak b e z z w ł o c z n i e.

Spowodowało to konieczność rezygnacji z doskonalszego opracowania materiału obserwacyjnego, zmuszając do wplatania układów geodezyjnych wysokowartościowych — zarówno z punktu widzenia dokładności obserwacji jak i z punktu widzenia kształtu — w układy geodezyjne gorsze bo mniej nowoczesne i bardzo niekiedy ubogie w obserwacje nadliczbowe (np. pojedyncze łańcuchy trójkątów).

Takie prowizoryczne wyrównanie materiału obserwacyjnego nie przesądziło oczywiście w niczym możliwości zgodnego z nauką wykorzystania tego materiału z chwilą gdy najpilniejsze potrzeby życia gospodarczego zostaną zaspokojone i problem sieci triangulacyjnej w Polsce stanie się problemem naukowo geodezyjnym.

Materiał obserwacyjny tworzony w sieci wypełniającej jest, naogół biorąc, materiałem wysokiej klasy. Błędy średnie obserwacji kątowych liczone z wzoru Ferrero — a więc bez obciążenia wpływami błędów stałych punktów nawiązania — są wielkościami rzędu 0,5". Nie są więc one dalekie od wielkości 0,3" którą uważa się w „Handbuch der Vermessungskunde” Jordana-Eggerta za granicę dokładności obserwacji kątowych osiąganą przy dzisiejszym stanie techniki instrumentalnej i wiedzy o zniekształcających wpływach środowiska.

Poza obserwacjami kątowymi które prowadzono nowoczesnymi teodolitami gradowymi Wild T3 obserwując poszczególne kąty wokół horyzontu, przeprowadzano w sieciach wypełniających również obserwacje liniowe o wysokiej precyzji mierząc przeciętnie jeden bok na około 1800 km². Średnie błędy względne obserwacji liniowych były wielkościami rzędu 1/1000000. W wzmiankowanym wyżej prowizorycznym wyrównaniu materiał dotyczący obserwacji liniowych nie był zresztą z reguły wykorzystywany, a traktowano go jedynie jako kontrolę mającą upewniać o dostatecznej do celów technicznych dokładności sieci*).

*) W późniejszych etapach pracy zrezygnowano nawet zupełnie z pomiaru baz. Celem pracy było bowiem, jak to zaznaczyliśmy, przede wszystkim szybkie opracowanie osnowy dla prac technicznych. Stwierdzono zaś w pierwszym okresie pracy że niezgodności liniowe, konstatowane przy kontrolnym pomiarze baz, były wielkościami rzędu zupełnie pomijalnego wobec założeń dokładności prac technicznych (błędy względne mniejsze od 1/80 000).

Ponieważ w kołach fachowych istniały wątpliwości, czy koncepcja zmniejszania ilości rzędów w sieci, a mówiąc ogólniej czy koncepcja zastępowania sieci wielkotrójkątowych przez sieci małowrójkątowe, jest słuszna z punktu widzenia analizy dokładności, Centralny Urząd Geodezji i Kartografii uznał potrzebę prac badawczych w tym kierunku, nawiązujących do założeń teoretycznych jak i do lokalnych warunków polskich.

W wyniku tej decyzji podjęto w Geodezyjnym Instytucie Naukowo-Badawczym, przy współdziałaniu Zakładu Rachunku Wyrównawczego przy Katedrze Geodezji Wyższej Politechniki Warszawskiej i częściowo Państwowego Przedsiębiorstwa Geodezyjnego, pracę badawczą, której wynikiem jest niniejsza publikacja.

Publikacja niniejsza jest pracą z dziedziny rachunku wyrównawczego, lub ściślej pracą z dziedziny analizy dokładności opierającą się na założeniach metody najmniejszych kwadratów. Nie porusza się więc w niej zupełnie zagadnień luźno związanych z tematem i należących do innych dziedzin, a więc np.: zagadnienia przeliczania układów obserwacyjnych z geoidy na elipsoidę, zagadnienia obrania takiej czy innej elipsoidy odniesienia dla pomiarów na obszarze Polski, zagadnienia zastosowania takiego czy innego odwzorowania kartograficznego przy przenoszeniu załamania wyrównawczego na płaszczyznę odwzorowania itp.

W pracy tej postawiono wyłącznie pytanie czy typowe układy triangulacyjne — rozważane jako układy płaskie — są z punktu widzenia efektu dokładnościowego korzystniejsze, gdy budować je będziemy z trójkątów małych czy gdy budować je będziemy z trójkątów wielkich; jeżeli przyjmiemy założenie że błąd średni pomiaru kąta w sieci jest taki sam dla sieci budowanej z małych trójkątów, którą nazywać będziemy dalej siecią „małowrójkątową“, jak dla sieci budowanej z wielkich trójkątów, którą nazywać będziemy dalej siecią „wielkotrójkątową“.

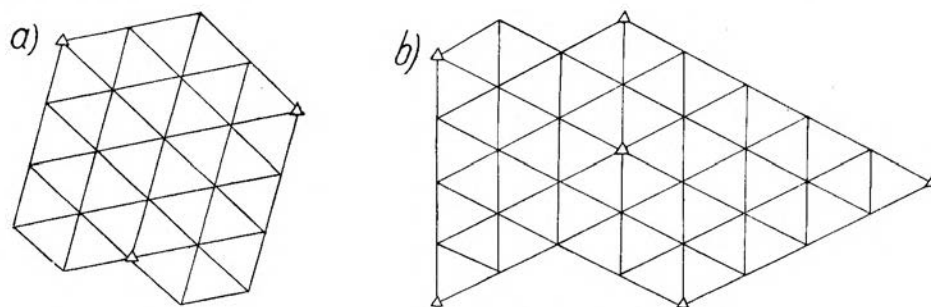
Jakkolwiek założenie równości błędu pomiaru kąтового w sieciach małow- i wielkotrójkątowych nie jest dla przebiegu rozumowania istotne, gdyż wartość błędu średniego obserwacji kątovej którą stale w pracy oznaczać będziemy m_0 , figurować będzie we wszystkich ustalanych przez nas w dalszym toku pracy wzorach, założenie to jest istotne przy wyprowadzeniu wniosków ostatecznych. Z tego względu wydaje się słuszne poświęcić parę słów jego omówieniu, aczkolwiek nie wchodzi ono właściwie w zakres rachunku wyrównawczego. „Słuszność“ czy „nie-słuszność“ założenia równości średniego błędu obserwacji kątovej w sieciach małowrójkątowych i wielkotrójkątowych może być oczywiście rozstrzygnięta tylko na gruncie eksperymentalnym.

Jeżeli sięgnąć do praktyki polskich sieci triangulacyjnych i przyjąć za kryterium orientujące wzór Ferrero, skontatujemy, że średni błąd pomiaru kąta waha się dla obu tych typów sieci w granicach od $1''$ do $3''$, nie wykazując zdecydowanych różnic na korzyść sieci małow- czy wielkotrójkątowych. Gdy jednak weźmiemy pod uwagę że obserwacje na sieciach

wielkotrójkątowych otaczane są większą pieczołowitością i z reguły bogatsze w spostrzeżenia nadliczbowe (specjalnie wybierany personel obserwujący, większe ilości serii, wydatniejsze ograniczenie okresu sezonu obserwacyjnego itp.), dojdziemy raczej do wniosku że w sieciach małowielkotrójkątowych dałoby się osiągnąć większą dokładność niż w sieciach wielkotrójkątowych*). Należało by to prawdopodobnie przypisać większej stałości optycznej ośrodka w czasie obserwacji na krótszych odcinkach niż na dłuższych. Imponujące wyniki dokładnościowe przy pomiarach kątowych w pracach inżynierskich o najwyższej precyzji (np. pomiary odkształceń budowli), operujących bardzo nawet krótkimi celowymi, również nie dają żadnych podstaw do przypuszczenia że skrócenie długości celowych w sieciach triangulacyjnych może powodować spadek dokładności pomiarów kątowych. Uważamy, że przyjęcie założenia niezależności wartości m_0 od długości celowych w sieciach triangulacyjnych może być postawione, i zauważymy że *postawienie tego założenia jest w analizie porównawczej niekorzystne raczej dla sieci małowielkotrójkątowych**).*

Powiedzieliśmy wyżej, że badać będziemy czy typowe układy triangulacyjne są z punktu widzenia efektu dokładnościowego korzystniejsze gdy budować je będziemy z trójkątów małych, czy z trójkątów wielkich. W niniejszym wstępie należało by więc jeszcze wyjaśnić jakie układy uważać będziemy za „typowe“, oraz wspomnieć pokrótce jakie zastosujemy kryteria przy uznawaniu jednego układu za korzystniejszy od drugiego z punktu widzenia efektu dokładnościowego.

Za układ typowy dla sieci powierzchniowych należało by właściwie uważać wszelki układ zbudowany z trójkątów foremnych, w którym przynajmniej dwa punkty są znane. Byłby więc np. typowym każdy z układów naszkicowanych na rysunku 1, na którym odróżniono punkty stałe od wyznaczanych przez oznaczenie pierwszych trójkątami, co będziemy w pracy i nadal stosować.



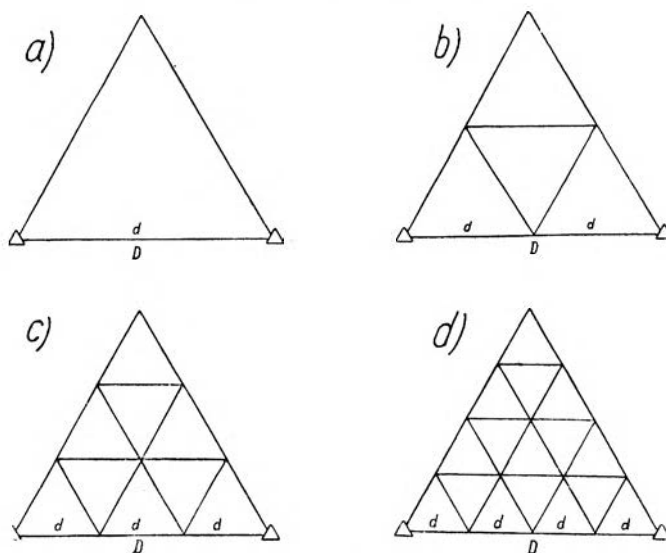
Rys. 1

*) Potwierdzają to ostatnie badania eksperymentalne geodetów węgierskich (E. Regöczy „Sieć triangulacji I rzędu utworzona z sieci III rzędu“).

**) Wpływy błędów centrowania w nowoczesnych triangulacjach uważać można za nieistotne.

Ponieważ takie ujęcie byłoby zbyt ogólne i nadmiernie utrudniło by wysnuwanie wniosków dotyczących porównania przydatności sieci małych i wielkotrójkątowych, uprościmy sobie nieco zadanie, idąc przytym za piękną radą Kartezjusza wygłoszoną w jego „Rozprawie o metodzie“, a cytowaną tu z „Algebry krakowianowej“ Banachiewicza, w myśl której to rady, należy zagadnienia skomplikowane rozczłonkować na zagadnienia prostsze po rozwiązaniu których z kolei przechodzimy do form bardziej skomplikowanych, wykorzystując już wiadomości osiągnięte przy analizie zagadnień prostszych.

Rozważać będziemy w tym celu najpierw sieci o kształcie trójkąta foremnego wypełnionego przez trójkąty foremne (rys. 2), które nazywać będziemy sieciami „elementarnymi“ — z uwagi na to, że można je traktować z kolei jako elementy sieci bardziej skomplikowanych. W sieciach elementarnych zakładamy znajomość i bezbłądność boku trójkąta wielkiego sieci, oraz pomiarzenie wszystkich kątów sieci z błędem średnim m_0 i badamy cechy charakteryzujące dokładność i pewność wyznaczenia punktu najbardziej odległego od podstawy oraz punktów pośrednich przy założeniu zmienności liczby oderwanej n , wyrażającej stosunek długości wielkiego boku sieci D do długości boku małego trójkąta w tej sieci d .



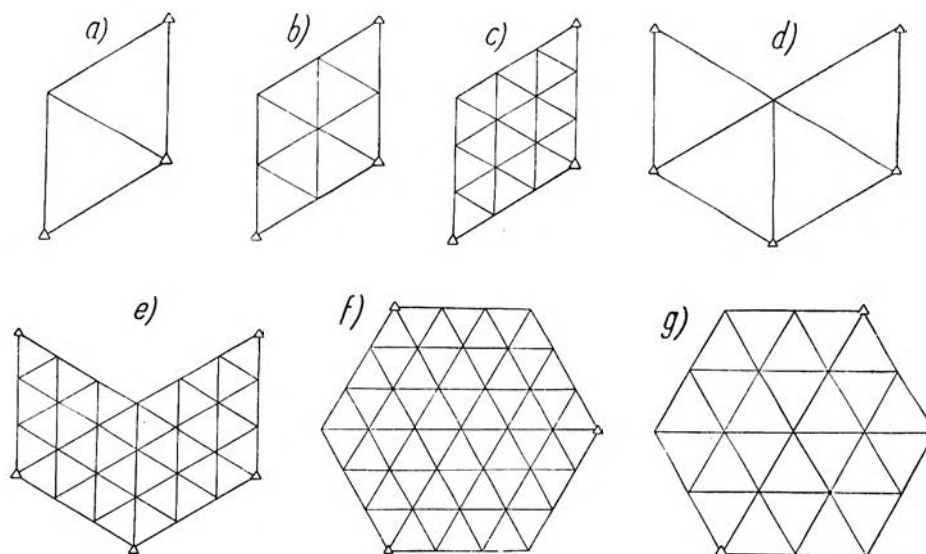
Rys. 2

Po zapoznaniu się z właściwościami sieci elementarnych, co stanowić będzie, oprócz omówienia podstaw badania sieci w formie zupełnie ogólnej, temat części I niniejszej pracy, przejdziemy do sieci bardziej skomplikowanych, które nazwiemy sieciami „okrężającymi“ i których analiza będzie tematem części II.

Przez sieci okrężające rozumieć będziemy sieci, zwane w geodezji sieciami centralnymi, oparte o dwa do sześciu punktów, zbudowane z sieci elementarnych, jak również fragmenty sieci centralnych powstające przez opuszczenie w sieci centralnej jednej lub kilku sieci elementarnych. Ilustruje to rys. 3.

Ponieważ w części I omawia się szczegółowo podstawy teoretyczne badania dowolnych sieci oraz przeprowadza się szczegółowy rachunek wyznaczenia charakterystyk dokładnościowych sieci elementarnych, w części II pominięto już znaczną część rachunków, poprzestając na podawaniu ich rezultatów.

Uważny czytelnik który zapoznał się z częścią I nie będzie miał co do przebiegu tych rachunków żadnych wątpliwości. Podawanie ich in extenso nadmiernie zwiększyło by objętość pracy nie wnosząc elementów pojęciowo nowych.



Rys. 3

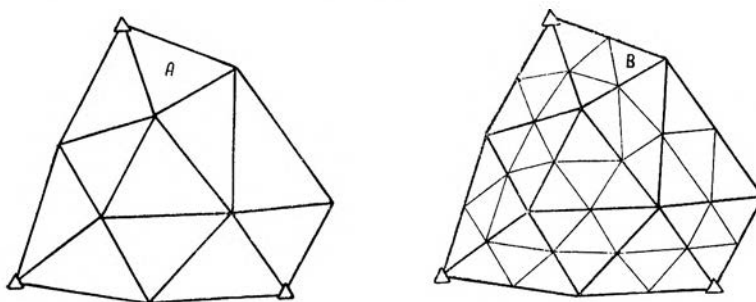
Właściwości sieci, zarówno elementarnych jak i okrężających poznane na drodze żmudnego rachunku, starano się następnie zilustrować graficznie opierając się przede wszystkim na pojęciu elipsy błędu, pozwalającym od jednego rzutu oka ocenić wyższość sieci małopółkowych nad sieciami wielopółkowymi we wszystkich rozważanych układach obserwacyjnych. *Na te wykresy, syntetyzujące wyniki rozważań (zarówno umieszczone w części II jak i na końcu pracy) zwracamy specjalną uwagę czytelnika który pragnął by wyłącznie zapoznać się z wnioskami, nie wnikając w przebieg badań.* Dalszym ułatwieniem dla takiego czytelnika jest krótkie omawianie na początku każdego niemal rozdziału zarówno tematu

jak i wyniku badań przeprowadzanych w danym rozdziale, oraz zestawienia wyników badań poszczególnych części pracy.

Z natury podjętego zagadnienia: analiza porównawcza dokładności sieci mało- i wielkotrójkątowych wynika, że nie może ono być rozwiązane w formie zupełnie ogólnej, i że badanie w najistotniejszej swej części porównawczej musi ograniczyć się do rozważania skończonej ilości układów, stanowiących, jak by można powiedzieć, wyidealizowane schematy układów spotykanych w geodezji praktycznej.

Wprawdzie jest możliwym ustalenie kilku twierdzeń zupełnie ogólnych, bądź to odnoszących się do porównywania dowolnych układów mało- i wielkotrójkątowych (np. str. 65); bądź to do porównywania sieci mało- i wielkotrójkątowych elementarnych czy też okrężających (np. str. 33, 81), jednak twierdzenia takie nie mogą przesądzać wyższości każdej sieci małowotrójkątowej nad każdą siecią wielkotrójkątową, opartą o te same punkty.

Z tego względu nie przywiązujemy do tych twierdzeń zbyt wielkiej wagi, aczkolwiek niektóre z nich są dość interesujące. Np. twierdzenie które orzeka, że zamiana zupełnie dowolnej sieci wielkotrójkątowej na sieć małowotrójkątową, opartą o te same punkty stałe, a powstającą na drodze wypełnienia każdego z t trójkątów sieci wielkiej przez n^2 trójkątów małych, (np. zamiana sieci A na sieć B — rys. 4) powodować musi zmniejszenie średniego błędu, błędu średniego obserwacji, gdyż przyrost ilości spostrzeżeń nadliczbowych spowodowany przez zagęszczenie sieci nie może być mniejszy od wielkości $t(n-1)(2n-1)$. Lub twierdzenie orzekające, że w sieci elementarnej średni błąd względny wielkiego boku sieci uzyskamy w wyniku wyrównania układu nie jest zależny od ilości odcinków n na którą podzielono podstawę sieci D ($n = 1, 2, 3, 4$), gdyż wynosi on stale $m_0 \sqrt{2/3}$, przy czym wielkość $m_0 \sqrt{2/3}$ wyraża jednocześnie średni błąd kąta sieci wielkiej po wyrównaniu.



Rys. 4

Przechodzimy do pobieżnego omówienia kryteriów jakie w analizie porównawczej decydowały o przyznaniu pewnym typom sieci pierwszeństwa przed innymi typami. Za podstawowe kryteria przyjęto.

a) Wielkości średnich błędów współrzędnych wyznaczanych punktów sieci, jakie otrzymało by się przeprowadzając obserwacje kątowe z założoną dokładnością, scharakteryzowaną przez błąd średni kąta równy m_0 . Niekiedy — dla nawiązania do literatury fachowej — oprócz średnich błędów współrzędnych dających wyznaczyć błąd położenia punktu, obliczano jeszcze wielkości błędów średnich innych funkcji obserwacji wyrównanych metodą najmniejszych kwadratów (np. średnie błędy względne długości i kątów sieci wyznaczanych pośrednio).

b) Wpływy błędów nieprzypadkowych na deformację układu, to znaczy wielkości zniekształceń jakich doznają współrzędne punktów wyznaczanych, obliczone w wyniku wyrównania układu metodą najmniejszych kwadratów, jeżeli zniekształcimy jedną z obserwacji i ponownie wyrównamy układ metodą najmniejszych kwadratów.

c) Wielkość średniego błędu jakim obciążony będzie w danym układzie obserwacyjnym błąd średni pojedynczej obserwacji — a więc w konsekwencji i średnie błędy wszelkich funkcji tych obserwacji. To kryterium błędu średniego błędu, znane już od czasów Gaussa, często bywa pomijane w analizach dokładnościowych, co sprzyja niekiedy wyciąganiu błędnych wniosków.

d) Wielkość przeciętnego zmniejszenia się kwadratu błędu średniego obserwacji w danym układzie pod wpływem wyrównania tego układu metodą najmniejszych kwadratów (kryterium Otrębskiego).

Można by powiedzieć że pierwsze kryterium charakteryzuje *dokładność* rezultatów opracowania geodezyjnego, drugie i trzecie — *stopień wiarygodności* tych rezultatów, wreszcie czwarte ocenia w danym układzie *efekt procesu wyrównawczego od strony statystycznej*. Bliższe szczegóły dotyczące obranych kryteriów znajdują się w tekście głównym.

Żadne z obranych kryteriów w zakresie przeprowadzonych badań nie wykazało wyższości sieci wielokotrójkątowych, a odwrotnie — większość ich przemawiała za sieciami małokotrójkątowymi. W świetle przeprowadzonych badań należy tedy uznać, że koncepcja zastępowania sieci wielokotrójkątowych przez sieci małokotrójkątowe, realizowana jak to już nadmieniliśmy w geodezji polskiej od roku 1947, jest słuszna.

Aby wyczerpać zagadnienie od strony praktycznej, w części III niniejszej pracy omówiono rezultaty konkretnego zbadania jednej z polskich sieci wypełniających. Obrano przytym celowo sieć położoną w złych warunkach obserwacyjnych i bardzo odbiegającą od ideału foremności. Badanie sprowadziło się do wyrównania układu obserwacyjnego metodą najmniejszych kwadratów, obliczenia średnich błędów położenia wszystkich punktów sieci, zilustrowania efektu dokładnościowego rezultatów przez wykreślenie elips błędów wszystkich punktów, oraz częściowego zbadania wpływu błędów nieprzypadkowych.

Nowością w procesie wyrównania omawianej sieci — nazywanej przez nas dalej „siecią eksperymentalną“ — było postawienie warunku mini-

mum w formie ogólniejszej od formy tradycyjnie stosowanej. Warunkiem tym objęto mianowicie przy wyrównaniu łącznie: obserwacje kątowe, obserwacje liniowe oraz współrzędne punktów nawiązania. Wyrównanie sprowadziło się więc do *nadania kątom, długościom i współrzędnym takich poprawek wyrównawczych v aby suma kwadratów tych poprawek dzielonych przez kwadraty odpowiadających błędów średnich była najmniejszością:*

$$\left[\frac{mm}{vv} \right] = \text{minimum.}$$

Takie ujęcie pozwala: a) uchronić dobry układ obserwacyjny przed zniekształceniem go przez warunki nawiązania do punktów o małej wartości technicznej (np. częściowo przesunięte w terenie, mało dokładnie wyznaczone itp.), oraz b) scharakteryzować dokładnie nie tylko punkty wyznaczane przez sieć, ale i punkty nawiązania.

Szczegółowe dane dotyczące metody wyrównania sieci eksperymentalnej podano w części III. Tu nadmienimy tylko że przeprowadzone wyrównanie z jednej strony pozwoliło upewnić się o wysokim poziomie technicznym przedwojennej polskiej sieci triangulacyjnej na rozważanym obszarze, z drugiej strony potwierdziło ono zarówno słuszość koncepcji sieci małotrójkątowych jak i słuszość założenia omówionego wyżej szkicowo rozszerzenia warunku minimum przy wyrównaniu.

Świadczą o tym następujące liczby:

a) Przeciętna wartość przesunięcia liniowego punktu nawiązania obliczona dla sześciu punktów oparcia sieci eksperymentalnej wynosi 4 cm (maksymalna 6,8 cm), przeciętna wartość błędu średniego położenia punktu obliczona dla punktów oparcia wyniosła 4,4 cm (założoną a priori równa była 5 cm).

b) Wartość błędu średniego pomiaru kąтового — nie świadcząca nb. wcale o wysokim poziomie obserwacji w sieci eksperymentalnej — obliczona z błędów pozornych wyniosła $2,7''$ w zupełnej zgodzie z założoną a priori wartością błędu średniego obliczoną z wzoru Ferrero (również $2,7''$).

c) Poprawka wyrównawcza jedyne w sieci pomiaru liniowego wyniosła 2 mm (błąd średni założony — 6 mm).

d) Pomimo dalekiego od doskonałości, jak to już podkreśliliśmy, poziomu obserwacji kątowych, oraz bardzo niedoskonałego kształtu sieci, przeciętna wartość błędu średniego położenia punktu, obliczona dla wszystkich 52 punktów: 6 danych i 46 wyznaczanych wynosi 5,1 cm. Wartość ta jest więc niższa od cytowanej w „Handbuch der Vermessungskunde“ Jordana-Eggerta wartości przeciętnej średniego błędu położenia punktu w sieciach podstawowych niemieckich, wynoszącej 5,5 cm. Zważywszy że związek między średnim błędem położenia punktu i średnim błędem pomiaru kąтового jest — dla ustalonej sieci — związkiem liniowym, doj-

dziemy łatwo do wniosku, że nawet przy niepomysłnym kształcie rozważanej sieci małopółkątowej można by łatwo osiągnąć przeciętną wartość błędu średniego położenia punktu rzędu 2 — 3 cm, gdyby postawić na nieco wyższym poziomie obserwacje kątowe. Wystarczyło by w tym celu zarzucić stosowane u nas przez przedsiębiorstwa geodezyjne normowanie robót precyzyjnych, zmuszające obserwatora do pracy w czasie niezawsze jej sprzyjającym. Takie wyłączenie robót precyzyjnych z normowania stosowane jest, jak wiadomo, w Związku Radzieckim i przynosi tam bardzo dobre rezultaty.

Pozostaje podanie paru uwag na temat ujęcia niniejszej pracy od strony formalno matematycznej i rachunkowej. Pomimo, że rachunek krakowianowy Banachiewicza nie jest jeszcze u nas tak szeroko rozpowszechniony jakby na to zasługiwał, gdyż od kilku zaledwie lat stanowi on przedmiot nauczania na wyższych studiach technicznych, jednak autor niniejszej pracy zdecydował się na całkowite jej „skrakowianizowanie“, to znaczy na przeprowadzanie zarówno dowodów jak i rachunków w oparciu o algebrę krakowianową. Dokonane to zostało w głębokim przeświadczeniu, że przyswojenie sobie przez czytelnika podstaw algebry krakowianu — ułatwione dziś znakomicie przez publikacje Banachiewicza i Kochmańskiego — pozwoli czytelnikowi widzieć myśl przewodnią wszystkich przeprowadzonych i podanych w pracy analiz bez potrzeby zagłębiania się w szczegóły i szczególiki, co było by niezbędne przy ujęciu klasycznym. Również i wykonanie pracy rachunkowej, koniecznej przy przeprowadzaniu analiz dokładnościowych, trudno by było wyobrazić sobie bez użycia rachunku krakowianowego — jeżeli postawimy założenie, że rachmistrz w każdym etapie pracy ma nad nią panować i rozumieć jej treść.

Autor postawił sobie za zadanie tak ująć pracę aby dla czytelnika było możliwe wykorzystanie tych fragmentów które go interesują, bez potrzeby zaznajamiania się z całością. Spowodowało to konieczność pewnych — drobnych zresztą — powtórzeń, z których uważam za obowiązek tu się usprawiedliwić.

Na zakończenie niniejszego wstępu pragnę wyrazić gorące podziękowanie Instytucjom i osobom, które swym ustosunkowaniem się lub poniesionym trudem przyczyniły się do powstania niniejszej pracy.

Prof. dr Czesławowi Kameli kierownikowi Katedry Geodezji Wyższej Politechniki Warszawskiej, wyrażam serdeczne podziękowanie za umożliwienie korzystania w pracy z maszyn rachunkowych jakimi rozporządza Katedra.

Na koniec gorąco dziękuję Kolegom Ciesielskiemu, Deryło, Gaździckiemu, Gombrychowi, Januszowi, Napierkowskiemu, Okseniuk, Panasiukowi i Radwańskiej, którzy w tej typowo zespołowej pracy ponieśli ciężki trud wykonania żmudnych rachunków, zarówno w analizach ogólnych jak i w analizie sieci eksperymentalnej.

Część I

Badanie sieci elementarnych

Rozdział I

Podstawy teoretyczne badania dokładności sieci kątowych. Analiza sieci elementarnych złożonych z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)

WSTĘP

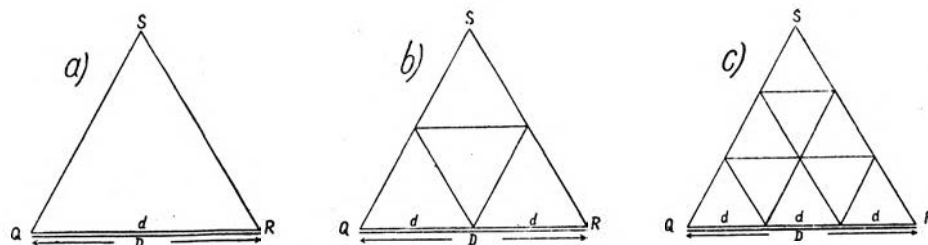
Tematem rozdziału I-go będzie analiza porównawcza dokładności z jaką wyznaczyć możemy punkt geodezyjny przy pomocy sieci triangulacyjnej opartej na zespole punktów stałych, jeżeli do wyznaczenia tego punktu zakładać będziemy sieci foremne ustalonego typu o różnej długości boku elementarnego.

Ponieważ sieć geodezyjną na elipsoidalnej powierzchni odniesienia dla celów wyrównawczych przenieść możemy zawsze w znany sposób na pomocniczą płaszczyznę odwzorowania i za obiekt wyrównania przyjąć sieć płaską, w której elementy geometryczne równe są zaobserwowanym elementom sieci elipsoidalnej zmienionym o poprawki odwzorowawcze, będziemy w dalszym ciągu mówili wyłącznie o sieciach płaskich.

Za punkt wyjścia przy badaniu przyjmujemy sieci złożone z trójkątów foremnych, określających położenie punktu S w stosunku do znanych i przyjętych za bezbłędne punktów Q i R , przy czym punkty Q , R , S wyznaczają trójkąt foremny. Taką „sieć elementarną“ rozwinąć możemy posługując się różną ilością trójkątów foremnych, w których, jak będziemy dalej przyjmować, pomierzone zostały wszystkie kąty. Zachodzi pytanie którą z rozpatrywanych konstrukcji geodezyjnych najdokładniej wyznaczy położenie punktu S przy tej samej mierze dokładności obserwacji a więc przy takim samym błędzie średnim obserwacji kątowej. Ogólniej: jaki zachodzi związek między średnim błędem m_s położenia punktu S w obranym układzie a średnim błędem m_o pojedynczej obserwacji kątowej w sieci i parametrami charakteryzującymi sieć pod względem geometrycznym: odległością D między punktami $Q - R$ i liczbą oderwaną n

wyznaczającą stosunek odległości D do długości obranego boku elementarnego sieci d .

$$n = \frac{D}{d}$$



Rys. 5

Jak się okaże w wyniku badania poszukiwany związek funkcyjny, który w ogólnej postaci należało by podać równaniem:

$$m_s = f(m_0 D n),$$

dla przedstawionych na rysunku sieci nie jest zależny od wielkości n , wyraża się on bowiem przez równanie:

$$m_s = \frac{2 m_0 D}{\sqrt{3}} \approx 1,15 m_0 D. \quad (\text{I. 1})$$

Zauważymy, że okoliczność ta ma już znaczenie praktyczne: skoro bowiem dokładność wyznaczenia punktu S w sieci o długich bokach elementarnych — powiedzmy 30 km — nie jest większa od dokładności wyznaczenia punktu S w sieci o krótkich bokach elementarnych — powiedzmy 10 km — zaś obserwacje przy długich celowych są i trudniejsze i zawodniejsze i kosztowniejsze, nie jest z punktu widzenia rachunku wyrównawczego uzasadnione obstawanie przy tzw. triangulacji klasycznej, która pokrywała teren siecią wielkich trójkątów wplatając następnie w tę sieć rzędów niższych. Nie pragniemy zresztą narazie wyciągać wniosków ze związku (I. 1) którego słuszności jeszcze nie uzasadniliśmy. Nie chcemy też poprzestawać na analizie dokładnościowej takiego tylko typu sieci jaki przedstawiono na rys. 5. Celem naszym narazie było wyłącznie zilustrowanie celowości postawienia zagadnienia znajdowania związków funkcyjnych między średnim błędem wyznaczenia punktu przez sieć geodezyjną pewnego typu a ilością trójkątów w tej sieci. Ponieważ te związki funkcyjne, podobnie jak związek (I. 1) odbiegać będą przeważnie od tego co nasuwa nam intuicja i niewłaściwa interpretacja zasady „od ogółu do szczegółu“ tak popularnej w geodezji, obawiamy się, iż mniej uważnemu czytelnikowi może wydać się, że związki te stanowią konsekwencję postawienia swoistych założeń, odmiennych od założeń metody najmniejszych kwadratów. Podkreślamy więc specjalnie że tak nie jest, to znaczy że związki które w dalszym toku pracy ustalimy stanowią wyłącznie konsekwencję rachunkową założeń metody najmniejszych kwadratów i ogół-

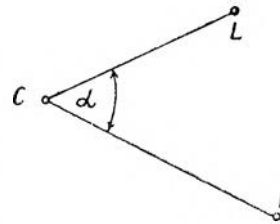
nie znanych w tej metodzie zależności między średnimi błędami niewiadomych wyznaczonych z układu równań normalnych Gaussa a błędem średnim pojedynczej obserwacji. Aby nie pozostawiać jakichkolwiek niedomówień, sugerujących czytelnikowi wprowadzanie przez autora dodatkowych założeń, starać się będziemy o jaknajwiększą przejrzystość układu.

Spowoduje to niejednokrotnie konieczność powtarzania rzeczy ogólnie znanych, co zechce czytelnik wybaczyć traktując jako usprawiedliwione przez wyłuszczone wyżej obawy autora.

Uważając że niniejszy wstęp i podany w nim przykład dostatecznie naświetliły temat zagadnienia, cel podjęcia tego tematu i założenia na których będziemy się opierać, przechodzimy do szczegółowych rozważań.

1. Związek między zmianą wartości współrzędnych punktów wyznaczających kąt a zmianą wartości kąta

Niech α będzie kątem prawoskrętnym wyznaczonym przez punkty L, P, C — (punkt na lewym ramieniu, punkt na prawym ramieniu i punkt w centrum).



Rys. 6

Jeżeli współrzędnym punktów¹ wyznaczających ten kąt, to jest współrzędnym: $x_L, y_L, x_P, y_P, x_C, y_C$ nadamy niewielkie przyrosty $dx_L, dy_L, dx_P, dy_P, dx_C, dy_C$, dostatecznie małe, aby można zaniedbywać ich wyższe ponad pierwszą potęgę, wówczas kąt α otrzyma niewielki przyrost $d\alpha$ który utożsamić można z różniczką zupełną:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_L} dx_L + \frac{\partial \alpha}{\partial y_L} dy_L + \frac{\partial \alpha}{\partial x_P} dx_P + \frac{\partial \alpha}{\partial y_P} dy_P + \frac{\partial \alpha}{\partial x_C} dx_C + \frac{\partial \alpha}{\partial y_C} dy_C.$$

Przed obliczeniem tej różniczki wprowadzimy kilka oznaczeń pozwalających na nadanie przejrzystszej postaci wzorom, którymi będziemy się dalej posługiwali.

Oznaczmy więc przez $\Delta x_L, \Delta y_L$ przyrosty współrzędnych wzdłuż lewego ramienia kąta, przez $\Delta x_P, \Delta y_P$ przyrosty współrzędnych wzdłuż prawego ramienia kąta, to znaczy wyrażnie:

$$\Delta x_L = x_L - x_C \quad \Delta y_L = y_L - y_C \quad \text{oraz} \quad \Delta x_P = x_P - x_C \quad \Delta y_P = y_P - y_C,$$

zaś przez A_L i B_L oraz A_P i B_P „współczynniki kierunkowe“ lewego i prawego ramienia kąta. Współczynnik kierunkowy A zdefiniujemy przytym jako stosunek przyrostu odciętej do kwadratu długości, zaś współczynnik kierunkowy B jako stosunek przyrostu rzędnej do kwadratu długości. Będzie więc ogólnie

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\cos \varphi}{d}, \quad \text{oraz:} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\sin \varphi}{d},$$

gdzie przez φ oznaczono kąt kierunkowy odcinka, zaś przez d jego długość.

Zwracamy uwagę, że współczynniki kierunkowe zdefiniowaliśmy w odmiennym od ogólnie przyjętego sposób: A przyjmujemy tu proporcjonalne do Δx , B do Δy zgodnie z porządkiem leksykograficznym, znaki współczynników przyjmujemy zgodnie ze znakami przyrostów.

Celowość tej definicji wykluczającej przestawienia i zamianę znaków, łatwo stwierdzić w rachunku praktycznym.

Przystępujemy do obliczenia różniczki $d\alpha$. Pisząc związek między wartością kąta a wartościami współrzędnych wyznaczających ten kąt punktów, tj. związek:

$$\alpha = \arctg \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} - \arctg \frac{y_L - y_C}{x_L - x_C}$$

i różniczkując ten związek kolejno względem zmiennych $x_L, y_L, x_P, y_P, x_C, y_C$ otrzymamy — przy zastosowaniu wprowadzonych wyżej oznaczeń:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x_L} &= B_L, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_L} = -A_L, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_P} = -B_P, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_P} = A_P, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_C} = \\ &= B_P - B_L, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_C} = A_L - A_P, \end{aligned}$$

Szczegółowy przebieg różniczkowania podajemy w odsyłaczu*). Wzór na różniczkę kąta możemy więc napisać pod postacią:

$$d\alpha = B_L dx_L - A_L dy_L - B_P dx_P + A_P dy_P - (B_P - B_L) dx_C + (A_L - A_P) dy_C$$

$$\begin{aligned} *) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_L} &= \frac{-1}{1 + \left(\frac{y_L - y_C}{x_L - x_C} \right)^2} \cdot \frac{-(y_L - y_C)}{(x_L - x_C)^2} = \frac{y_L - y_C}{(x_L - x_C)^2 + (y_L - y_C)^2} = \frac{\Delta y_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2} = B_L \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_L} &= \frac{-1}{1 + \left(\frac{y_L - y_C}{x_L - x_C} \right)^2} \cdot \frac{(x_L - x_C)}{(x_L - x_C)^2} = \frac{-(x_L - x_C)}{(x_L - x_C)^2 + (y_L - y_C)^2} = \frac{-\Delta x_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2} = -A_L \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_P} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} \right)^2} \cdot \frac{-(y_P - y_C)}{(x_P - x_C)^2} = \frac{-(y_P - y_C)}{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = \frac{-\Delta y_P}{\Delta x_P^2 + \Delta y_P^2} = -B_P \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_P} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} \right)^2} \cdot \frac{(x_P - x_C)}{(x_P - x_C)^2} = \frac{(x_P - x_C)}{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = \frac{\Delta x_P}{\Delta x_P^2 + \Delta y_P^2} = A_P \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_C} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} \right)^2} \cdot \frac{(y_P - y_C)}{(x_P - x_C)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y_L - y_C}{x_L - x_C} \right)^2} \cdot \frac{-(y_L - y_C)}{(x_L - x_C)^2} = B_P - B_L \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_C} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} \right)^2} \cdot \frac{-(x_P - x_C)}{(x_P - x_C)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y_L - y_C}{x_L - x_C} \right)^2} \cdot \frac{-(x_L - x_C)}{(x_L - x_C)^2} = A_L - A_P \end{aligned}$$

lub też — dużo przejrzysiej pod względem formy — jako sumę trzech wyznaczników:

$$d\alpha = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix} \quad (I. 2)$$

Można to wysłowić jn.

Przyrost różniczkowy kąta równy jest sumie trzech wyznaczników drugiego stopnia, w górnych wierszach których figurują różniczkowe przyrosty współrzędnych wyznaczających punkt na lewym ramieniu, punkt na prawym ramieniu i punkt w centrum kąta, zaś w dolnych wierszach: współczynniki kierunkowe lewego ramienia, mniej współczynniki kierunkowe prawego ramienia kąta, oraz sumy elementów poprzedzających tegoż wiersza z przeciwnymi znakami.

2. Równania błędów obserwacji kątowych

Związek między zmianą wartości kąta a zmianami wartości współrzędnych punktów wyznaczających ten kąt (I. 2) pozwala na zestawianie równań błędów obserwacji kątowych. Oznaczmy mianowicie przez α_{prz} wartość kąta α obliczoną z przybliżonych współrzędnych punktów *LPC* wyznaczających ten kąt, przez α_{obs} wartość kąta α uzyskaną z obserwacji, oraz przez v poprawkę, która w procesie wyrównania zostanie przyporządkowana wartości zaobserwowanej kąta. (Przez „współrzędne przybliżone“ rozumiemy — jak zawsze w geodezji — współrzędne tak bliskie ostatecznych współrzędnych, mających być określonymi w wyniku wyrównania układu obserwacyjnego, aby można zaniedbywać wyższe ponad pierwszą potęgę poprawek dx , dy , jakie otrzymają współrzędne przybliżone przy zmianie ich na ostateczne).

Wartość kąta wyrównaną wyrazić można bądź jako sumę wartości zaobserwowanej tego kąta i jego poprawki wyrównawczej: $\alpha_{obs} + v$, bądź też jako sumę wartości kąta obliczonej z przybliżonych współrzędnych i wartości przyrostu $d\alpha$ jakiego dozna kąt, gdy współrzędnym wyznaczających go punktów nadamy poprawki dx , dy zamieniające te współrzędne na współrzędne ostateczne: $\alpha_{prz} + d\alpha$. Musi być oczywiście: $\alpha_{obs} + v = \alpha_{prz} + d\alpha$ skąd: $v = d\alpha + \alpha_{prz} - \alpha_{obs}$. Po wyrażeniu przyrostu $d\alpha$ w funkcji przyrostów dx dy w myśl wzoru (2) otrzymamy następujące „równanie błędu obserwacji kątowej“:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix} + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v \quad (I. 3)$$

Takie „równanie błędu“ napisać możemy oczywiście dla każdego zaobserwowanego w sieci kąta. Wystarczy w tym celu na miejsce symboli dx_L dy_L dx_P dy_P dx_C dy_C podstawiać przyjęte w danej sieci oznaczenia poprawek współrzędnych punktu położonego na lewym ramieniu rozpatrywanego

kąta, na jego ramieniu prawym i w punkcie centralnym, na miejsce symboli AB podstawiać wartości odpowiednich współczynników kierunkowych — lewego ($A_L B_L$) względnie prawego ($A_P B_P$) ramienia danego kąta — dające się obliczyć w oparciu o znajomość przybliżonych współrzędnych wreszcie na miejsce wyrazów wolnych, tj. na miejsce symboli $\alpha_{prz} - \alpha_{obs}$, podstawiać różnicę między wartością danego kąta obliczoną z przybliżonych współrzędnych i jego wartością uzyskaną z obserwacji.

Dla przejścia od układu równań błędów napisanego w postaci (I. 3), którą nazywamy dalej „postacią tabelaryczną“, do zwykłej postaci układu równań liniowych — nazywamy ją dalej „postacią algebraiczną“ — wystarczy zrealizować mnożenia wyznacznikowe. Jeżeli oznaczyć przytym — jak to się z reguły praktykuje — przez $x, y, z, u, \dots$ kolejne niewiadome w równaniach błędów (poprawki przybliżonych współrzędnych), przez $a_i, b_i, c_i, d_i, \dots$ współczynniki przy tych niewiadomych w i -tym równaniu błędu, przez l_i wolny wyraz w tymże równaniu i przez v_i poprawkę i -tej obserwacji, otrzymamy znany układ równań błędów (śluszniej „równań obserwacyjnych“):

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u \dots &= l_1 + v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u \dots &= l_2 + v_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots &\dots \quad \dots \\ a_n x + b_n y + c_n z + d_n u \dots &= l_n + v_n \end{aligned}$$

3. Charakterystyka dokładności wyznaczenia współrzędnych w sieci katowej

Znajomość krakowianu współczynnikowego układu równań błędów obserwacyj katowych, tj. znajomość elementów liczby zespolonej a :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{pmatrix} \quad (I. 4)$$

wystarcza już do rozwiązywania większości zagadnień analizy dokładności katowych sieci triangulacyjnych. Zagadnienie te sformułować można jak następuje.

Dana jest co do kształtu i skali pewna sieć triangulacyjna. Między punktami tej sieci znajdują się przynajmniej dwa punkty których współrzędne uważa się w toku rozumowania za bezbłędne. Zapytujemy — jakimi błędami średnimi obciążone będą najprawdopodobniejsze wartości współrzędnych punktów wyznaczanych przez sieć, jeżeli zaobserwujemy w tej sieci wielkości katowe z założoną z góry miarą dokładności a więc z określonym błędem średnim pojedynczego spostrzeżenia m_0 ? Ponieważ błędy średnie najprawdopodobniejszych wartości współrzędnych wyznaczanych punktów równe będą błędom średnim poszukiwanych poprawek przybliżonych współrzędnych, przeto rozwiązanie zagadnienia sprowadza

się tu do wyznaczenia średnich błędów niewiadomych obliczonych z układu równań normalnych Gaussa:

$$[a^2] \cdot x + [ab] \cdot y + [ac] \cdot z \dots = [al]$$

$$[ab] \cdot x + [bb] \cdot y + [bc] \cdot z \dots = [bl]$$

$$\dots \dots \dots$$

powstających w drodze znanej operacji z układu równań błędów.

Stosując symbolikę krakowianową wyrazimy średni błąd i -tej niewiadomej — oznaczmy ten błąd przez m_i — wzorem:

$$m_i = m_o \sqrt{(a^2)_{ii}^{-1}} \quad (I. 5)$$

gdzie symbol $(a^2)_{ii}^{-1}$ oznacza element i -tej kolumny i i -tego wiersza odwrotności kwadratu krakowianu współczynnikowego układu równań błędów (I. 4), lub, inaczej element i -tej kolumny i i -tego wiersza odwrotności krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych (w oznaczeniach Gaussowskich Q_{ii}).

Stosując symbolikę wyznacznikową oznaczmy przez Δ wyznacznik charakterystyczny układu równań normalnych, przez Δ_{ii} podwyznacznik którego tabela powstaje z tabeli wyznacznika charakterystycznego Δ przez skreślenie w niej i -tej kolumny i i -tego wiersza, i napiszemy:

$$m_i = m_o \sqrt{\frac{\Delta_{ii}}{\Delta}} \quad (I. 6)$$

Wzory (I. 5) i (I. 6) są oczywiście identyczne co do treści choć różne co do formy. Wzór wyznacznikowy dopisaliśmy zresztą raczej dlatego że słuszność jego wnika bezpośrednio z tak popularnych w geodezji „równań wag”^{*)}. Przez to staje się on odrazu nieobcy nawet temu geodecie który nie korzysta z rachunku krakowianowego, pozwalając mu ponadto zauważyć że odwrotność krakowianu można interpretować jako tabelę wyznacznika dołączonego („tabelę minorów”) dzieloną przez wartość wyznacznika charakterystycznego.

4. Analiza sieci o kształcie trójkąta foremego wypełnionego trójkątami foremnymi

Opierając się na wzorach (I. 3, I. 5) przeprowadzić już możemy analizę sieci wyznaczającej wierzchołek trójkąta foremnego w oparciu o znajomość przeciwległej podstawy. Analizę takiej sieci, o której wspominaliśmy we wstępie, i którą uważać należy za typową dla koncepcji triangulacji, przeprowadzimy dla następujących przypadków szczególnych:

- a) sieć złożona z jednego trójkąta (ob. rys. 5a),
- b) sieć złożona z czterech trójkątów (ob. rys. 5b),
- c) sieć złożona z dziewięciu trójkątów (ob. rys. 5c).

(W rozdziale IV przeprowadzimy też analizę sieci elementarnej z 16 trójkątów).

^{*)} Wystarczy napisać układ „równań wag” dla i -tej niewiadomej, zastosować wzór Cramera i rozwinąć wyznacznik tego wzoru według elementów i -tej kolumny.

a) Sieć złożona z jednego trójkąta

Jeżeli oś główną układu OX obrać prostopadle do podstawy trójkąta, zaś za jednostkę długości w rachunku obrać bok trójkąta, wówczas wartości współczynników kierunkowych dla poszczególnych boków wyniosą odpowiednio:

$$\begin{aligned} A = OB = 1 \text{ (bok } QR) \quad A = 0,5 \sqrt{3} \quad B = 0,5 \text{ (bok } QS) \\ A = 0,5 \sqrt{3} \quad B = -0,5 \text{ (bok } RS). \end{aligned}$$

Dla ułatwienia śledzenia rozwiązania powtarzamy tu rysunek wypisując na nim wartości współczynników kierunkowych A B przy poszczególnych bokach.

Równania błędów poszczególnych kątów napisane w postaci tabelarycznej mieć będą postać:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & dy \\ -0,5 \sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 \sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v_1$$

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ 0,5 \sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0,5 \sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} + \beta_{prz} - \beta_{obs} = v_2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0,5 \sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 \sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & dy \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \gamma_{prz} - \gamma_{obs} = v_3$$

Bez obawy o nieporozumienia pisaliśmy tu tabele sąsiadujących w równaniu wyznaczników (wzór I. 3) bezpośrednio obok siebie, to znaczy opuszczając znak $+$ i kreski wyznacznikowe.

Realizując mnożenie wyznacznikowe napiszemy układ równań błędów pod wyrażną postacią:

$$0,5 \, dx + 0,5 \sqrt{3} \, dy + \dots = v_1$$

$$0,5 \, dx - 0,5 \sqrt{3} \, dy + \dots = v_2$$

$$-dx + \dots = v_3,$$

gdzie opuszczamy wolne wyrazy jako liczbowo nieznanne i dla rachunku nieistotne.

Używając symboliki krakowianowej mieć będziemy:

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} 0,5 & 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 & -0,5 \sqrt{3} \\ -1 & \end{Bmatrix} \quad \text{Skąd} \quad \underline{a}^2 = \begin{Bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{Bmatrix}$$

Ponieważ zaś odwrotnością ostatniego krakowianu, jak to łatwo sprawdzić, jest krakowian: $(\underline{a}^2)^{-1} = \begin{Bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{Bmatrix}$ tedy błędy średnie odciętej i rzęd-

nej wyznaczanego punktu S wyrażone w jednostkach równych długości boku sieci wyniosą odpowiednio:

$$m_x = m_o \sqrt{2/3} \quad m_y = m_o \sqrt{2/3},$$

gdzie m_o jest średnim błędem obserwacji kątowej wyrażonym w mierze radialnej. Dla wyrażenia błędów średnich w metrach wystarczy pomnożyć otrzymane wyrażenia przez długość boku sieci d wyrażoną w metrach. Otrzymamy: $m_x = m_o d \sqrt{2/3}$ oraz $m_y = m_o d \sqrt{2/3}$.

Określając stąd błąd średni wyznaczenia położenia punktu S — oznaczmy ten błąd przez m_s — otrzymamy:

$$m_s = \frac{2 m_o d}{\sqrt{3}} = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3}} \quad (I. 7)$$

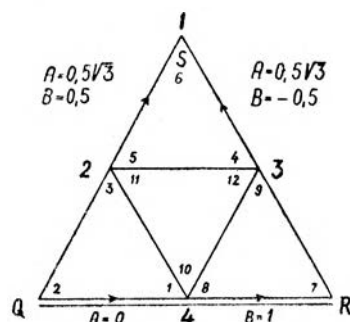
gdzie $D = d$ podstawa sieci.

b) Sieć złożona z czterech trójkątów

Obierając znów oś główną układu OX prostopadle do podstawy trójkąta i przyjmując za jednostkę długości w rachunku bok trójkąta sieci d —

0	0	dx_2	dy_2	dx_4	dy_4	$\dots = v_1$
0	-1	$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	$0,5 \sqrt{3}$	0,5	
dx_2	dy_2	dx_4	dy_4	0	0	$\dots = v_2$
$0,5 \sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	
dx_1	dy_1	0	0	dx_2	dy_2	$\dots = v_3$
$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	$0,5 \sqrt{3}$	0,5	0	-1	
dx_2	dy_2	dx_1	dy_1	dx_3	dy_3	$\dots = v_4$
0	-1	$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	$0,5 \sqrt{3}$	0,5	
dx_1	dy_1	dx_3	dy_3	dx_2	dy_2	$\dots = v_5$
$0,5 \sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	
dx_3	dy_3	dx_2	dy_2	dx_1	dy_1	$\dots = v_6$
$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	$0,5 \sqrt{3}$	0,5	0	-1	
dx_4	dy_4	dx_3	dy_3	0	0	$\dots = v_7$
0	-1	$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	
dx_3	dy_3	0	0	dx_4	dy_4	$\dots = v_8$
$0,5 \sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	
0	0	dx_4	dy_4	dy_3	dy_3	$\dots = v_9$
$-0,5 \sqrt{3}$	0,5	$0,5 \sqrt{3}$	0,5	0	-1	
dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_1	dy_1	$\dots = v_{10}$
$0,5 \sqrt{3}$	-0,5	$-0,5 \sqrt{3}$	-0,5	0	1	
dx_3	dy_3	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	$\dots = v_{11}$
0	1	$0,5 \sqrt{3}$	-0,5	$-0,5 \sqrt{3}$	-0,5	
dx_4	dy_4	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	$\dots = v_{12}$
$-0,5 \sqrt{3}$	-0,5	0	1	$0,5 \sqrt{3}$	-0,5	

równy obecnie połowie podstawy: $d = 0,5 D$, napiszemy bez trudności wartości współczynników kierunkowych AB dla poszczególnych boków. Dla ułatwienia śledzenia rozwiązania powtarzamy tu rysunek (rys. 8) pi-



Rys. 8

sząc na nim wartości współczynników kierunkowych dla trzech boków, co w zupełności wystarcza do napisania równań błędów wszystkich obserwacji kątowych, o ile pamięta się definicję współczynników na którą zwracaliśmy uwagę na str. Układ równań błędów napisany pod postacią tabelaryczną zestawiliśmy na str. 25.

Pisaliśmy tu znów tabele sąsiadujących w równaniu błędów wyznaczników bezpośrednio obok siebie, to znaczy opuszczając znaki $+$ i kreski wyznacznikowe. Nume-

racja poprawek odpowiada oczywiście numeracji kątów w sieci podanej na rysunku. Na miejscu wyrazów wolnych równań błędów stawialiśmy kropki.

Realizując mnożenia wyznacznikowe otrzymamy układ równań błędów pod postacią algebraiczną:

dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	
		0,5	$0,5\sqrt{3}$			0,5	$-0,5\sqrt{3}$	..
		0,5	$-0,5\sqrt{3}$			-1	0	..
		-1				0,5	$0,5\sqrt{3}$	..
0,5	$0,5\sqrt{3}$	-1		0,5	$-0,5\sqrt{3}$			..
0,5	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	-1	0			..
-1		0,5	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$			..
				0,5	$0,5\sqrt{3}$	-1		..
				0,5	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	..
				-1		0,5	$-0,5\sqrt{3}$	..
		-0,5	$-0,5\sqrt{3}$	-0,5	$0,5\sqrt{3}$	1		..
		-0,5	$0,5\sqrt{3}$	1		-0,5	$-0,5\sqrt{3}$	..
		1		-0,5	$-0,5\sqrt{3}$	-0,5	$0,5\sqrt{3}$	..

W wierszu nagłówkowym napisaliśmy tu oznaczenia niewiadomych. Poniżej znajdują się wyłącznie liczbowe wartości współczynników. Jest to więc krakowian współczynnikowy układu równań błędów, który przyjęliśmy oznaczać literą a . Podnosząc ten krakowian do kwadratu, czyli przechodząc od tabeli współczynnikowej układu równań błędów do tabeli współczynnikowej układu równań normalnych Gaussa, otrzymamy:

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & -0,75 & 0,75\sqrt{3} & -0,75 & -0,75\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -0,75\sqrt{3} & -0,75 & 0,75\sqrt{3} & -0,75 & 0 & 0 \\ -0,75 & -0,75\sqrt{3} & 4,5 & 0 & -1,5 & 0 & -1,5 & 0 \\ 0,75\sqrt{3} & -0,75 & 0 & 4,5 & 0 & -1,5 & 0 & -1,5 \\ -0,75 & 0,75\sqrt{3} & -1,5 & 0 & 4,5 & 0 & -1,5 & 0 \\ -0,75\sqrt{3} & -0,75 & 0 & -1,5 & 0 & 4,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & 0 & -1,5 & 0 & -1,5 & 0 & 4,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & -1,5 & 0 & 4,5 \end{pmatrix}$$

co można też napisać pod postacią:

$$a^2 = 3,4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & 6 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & \sqrt{3} & -2 & 0 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Łatwo sprawdzić na drodze mnożenia krakowianowego, że odwrotnością tej tabeli będzie tabela:

$$(a^2)^{-1} = 1/12 \begin{pmatrix} 32 & 0 & 12 & -4\sqrt{3} & 12 & 4\sqrt{3} & 8 & 0 \\ 0 & 32 & 4\sqrt{3} & 12 & -4\sqrt{3} & 12 & 0 & 8 \\ 12 & 4\sqrt{3} & 10 & 0 & 5 & 3\sqrt{3} & 5 & \sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 12 & 0 & 10 & -3\sqrt{3} & 5 & -\sqrt{3} & 5 \\ 12 & -4\sqrt{3} & 5 & -3\sqrt{3} & 10 & 0 & 5 & -\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 12 & 3\sqrt{3} & 5 & 0 & 10 & \sqrt{3} & 5 \\ 8 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & 5 & \sqrt{3} & 6 & 0 \\ 0 & 8 & \sqrt{3} & 5 & -\sqrt{3} & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Wynika stąd zaraz że błędy średnie współrzędnych punktu pierwszego (S) wyrażone w jednostkach równych długości boku d wyrażą wzory:

$$m_x = m_o \sqrt{32/12} = m_o \cdot \sqrt{8/3} \quad m_y = m_o \cdot \sqrt{8/3}.$$

Mnożąc te wartości przez długość boku sieci d wyrażoną w metrach otrzymamy wzory na błędy średnie wyrażone w metrach (m_o rozumiemy oczywiście w mierze radialnej): $m_x = m_o d \sqrt{8/3}$ $m_y = m_o d \sqrt{8/3}$. Wprowadzając zamiast boku sieci d podstawę całej konstrukcji D , w myśl związku $d = 0,5 D$ znajdziemy:

$$m_x = m_o D \sqrt{8/12} = m_o D \sqrt{2/3} \quad \text{oraz} \quad m_y = m_o D \sqrt{2/3}.$$

Widzimy, że średnie błędy współrzędnych są tu — przy takim samym błędzie średnim pomiaru kąta w sieci — takie same jak poprzednio. Prze-

chodząc do średniego błędu wyznaczenia punktu w sieci $m_s = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ otrzymamy więc znów znane nam wyrażenie:

$$m_s = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3}} \quad (\text{I. 8})$$

c) Sieć złożona z dziewięciu trójkątów

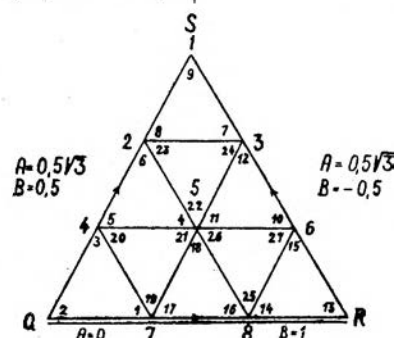
Obierzmy, jak i poprzednio, oś główną układu OX prostopadłe do podstawy sieci QR i przyjmijmy za jednostkę długości w rachunku bok trójkąta sieci d , równy obecnie jednej trzeciej długości podstawy: $d = \frac{1}{3} D$.

Dla ułatwienia śledzenia rozwiązania powtarzamy rysunek (rys. 9), pisząc na nim wartości współczynników kierunkowych trzech boków.

0	0	dx_4	dy_4	dx_7	dy_7	$\dots = v_1$
0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_4	dy_4	dx_7	dy_7	0	0	$\dots = v_2$
$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_7	dy_7	0	0	dx_4	dy_4	$\dots = v_3$
$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	
dx_4	dy_4	dx_1	dy_1	dx_5	dy_5	$\dots = v_4$
0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_2	dy_2	dx_5	dy_5	dx_4	dy_4	$\dots = v_5$
$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_5	dy_5	dx_4	dy_4	dx_2	dy_2	$\dots = v_6$
$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	
dx_2	dy_2	dx_1	dy_1	dx_3	dy_3	$\dots = v_7$
0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_1	dy_1	dx_3	dy_3	dx_2	dy_2	$\dots = v_8$
$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_3	dy_3	dx_2	dy_2	dx_1	dy_1	$\dots = v_9$
$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	
dx_5	dy_5	dx_3	dy_3	dx_6	dy_6	$\dots = v_{10}$
0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_3	dy_3	dx_6	dy_6	dx_5	dy_5	$\dots = v_{11}$
$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_6	dy_6	dx_5	dy_5	dx_3	dy_3	$\dots = v_{12}$
$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	
dx_8	dy_8	dx_6	dy_6	0	0	$\dots = v_{13}$
0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
dx_6	dy_6	0	0	dx_8	dy_8	$\dots = v_{14}$
$0,5\sqrt{3}$	0,5	0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	0,5	

0	0	dx_8	dy_8	dx_6	dy_6	$\dots = v_{15}$
$-0,5\sqrt{3}$	$0,5$	$0,5\sqrt{3}$	$0,5$	0	-1	
dx_7	dy_7	dx_5	dy_5	dx_8	dy_8	$\dots = v_{16}$
0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	$0,5$	$0,5\sqrt{3}$	$0,5$	
dx_5	dy_5	dx_8	dy_8	dx_7	dy_7	$\dots = v_{17}$
$0,5\sqrt{3}$	$0,5$	0	-1	$-0,5\sqrt{3}$	$0,5$	
dx_8	dy_8	dx_7	dy_7	dx_5	dy_5	$\dots = v_{18}$
$-0,5\sqrt{3}$	$0,5$	$0,5\sqrt{3}$	$0,5$	0	-1	
dx_4	dy_4	dx_5	dy_5	dx_7	dy_7	$\dots = v_{19}$
$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	0	1	
dx_5	dy_5	dx_7	dy_7	dx_4	dy_4	$\dots = v_{20}$
0	1	$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	
dx_7	dy_7	dx_4	dy_4	dx_5	dy_5	$\dots = v_{21}$
$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	0	1	$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	
dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_5	dy_5	$\dots = v_{22}$
$0,5\sqrt{3}$	$0,5$	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	0	1	
dx_3	dy_3	dx_5	dy_5	dx_2	dy_2	$\dots = v_{23}$
0	1	$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	
dx_5	dy_5	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	$\dots = v_{24}$
$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	0	1	$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	
dx_5	dy_5	dx_6	dy_6	dx_8	dy_8	$\dots = v_{25}$
$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	0	1	
dx_6	dy_6	dx_8	dy_8	dx_5	dy_5	$\dots = v_{26}$
0	1	$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	
dx_8	dy_8	dx_5	dy_5	dx_6	dy_6	$\dots = v_{27}$
$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	0	1	$0,5\sqrt{3}$	$-0,5$	

Patrząc na rysunek i mając w pamięci wzór (I. 3) i określenie współczynników kierunkowych, bez trudności zestawimy układ równań błędów w postaci tabelarycznej napisany powyżej. Realizując mnożenia wyznacznikowe przejdziemy do zwykłej algebraicznej postaci układu równań błędów o krakowianie współczynnikowym a równym: (nad krakowianem współczynnikowym piszemy symbole niewiadomych) str. 30.



Rys. 9

Podnosząc krakowian a do kwadratu, czyli przechodząc od tabeli współczynnikowej układu równań błędów do tabeli współczynnikowej układu równań normalnych Gaussa znajdujemy (powtarzający się we wszystkich elementach ułamek $3/4$ wynieśliśmy przed znak krakowianu): str. 31.

[illegible]

$$a = \frac{3}{4}$$

Łatwo sprawdzić na drodze mnożenia krakowianowego, że odwrotnością tabeli ze str. 31 będzie tabela zamieszczona powyżej, gdzie powtarzający

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{54} \\
 (a^2)^{-1} =
 \end{array}
 \left(\begin{array}{cccccc}
 324 & 0 & 180 - 36\sqrt{3} & 180 & 36\sqrt{3} & 72 - 36\sqrt{3} \\
 0 & 324 & 36\sqrt{3} & 180 - 36\sqrt{3} & 180 & 36\sqrt{3} & 72 \\
 180 & 36\sqrt{3} & 142 & 0 & 107 & 37\sqrt{3} & 68 - 18\sqrt{3} \\
 -36\sqrt{3} & 180 & 0 & 142 - 37\sqrt{3} & 107 & 18\sqrt{3} & 68 \\
 180 - 36\sqrt{3} & 107 - 37\sqrt{3} & 142 & 0 & 43 & -29\sqrt{3} \\
 36\sqrt{3} & 180 & 37\sqrt{3} & 107 & 0 & 142 & 29\sqrt{3} & 43 \\
 72 & 36\sqrt{3} & 68 & 18\sqrt{3} & 43 & 29\sqrt{3} & 58 & 0 \\
 -36\sqrt{3} & 72 & -18\sqrt{3} & 68 & -29\sqrt{3} & 43 & 0 & 58 \\
 108 & 0 & 78 & -10\sqrt{3} & 78 & 10\sqrt{3} & 42 & -14\sqrt{3} \\
 0 & 180 & 10\sqrt{3} & 78 & -10\sqrt{3} & 78 & 14\sqrt{3} & 42 \\
 72 & -36\sqrt{3} & 43 & -29\sqrt{3} & 68 & -18\sqrt{3} & 17 & -19\sqrt{3} \\
 36\sqrt{3} & 72 & 29\sqrt{3} & 43 & 18\sqrt{3} & 68 & 19\sqrt{3} & 17 \\
 72 & 0 & 55 & -7\sqrt{3} & 53 & 5\sqrt{3} & 35 & -11\sqrt{3} \\
 0 & 72 & 7\sqrt{3} & 55 & -5\sqrt{3} & 53 & 11\sqrt{3} & 35 \\
 72 & 0 & 53 & -5\sqrt{3} & 55 & 7\sqrt{3} & 31 & -7\sqrt{3} \\
 0 & 72 & 5\sqrt{3} & 53 & -7\sqrt{3} & 55 & 7\sqrt{3} & 31
 \end{array} \right)$$

się we wszystkich elementach ułamek $1/54$ wynieśliśmy przed znak krakowianu).

Wynika stąd, że błędy średnie współrzędnych punktu pierwszego (S) wyrażone w jednostkach równych długości boku sieci d wyrażą wzory:

$$m_x = m_o \sqrt{324/53} = m_o \sqrt{6} \quad \text{oraz} \quad m_y = m_o \sqrt{6},$$

przy czym średni błąd kąta rozumie się oczywiście w mierze radialnej.

Mnożąc otrzymane wartości błędów przez długość boku sieci d wyrażoną w metrach otrzymamy wzory na błędy średnie współrzędnych punktu (S) wyrażone w metrach:

$$m_x = m_o d \sqrt{6} \quad m_y = m_o d \sqrt{6}.$$

Wprowadzając zamiast boku sieci d podstawę całej konstrukcji D , w myśl związku $d = \frac{1}{3} D$ znajdziemy:

$$m_x = m_o D \sqrt{6/9} = m_o D \sqrt{2/3} \quad \text{oraz} \quad m_y = m_o D \sqrt{2/3}.$$

Jak widać średnie błędy współrzędnych są tu — przy takim samym błędzie średnim pomiaru kąta w sieci — takie same jak w wypadkach sieci uprzednio rozpatrywanych. Przechodząc do średniego błędu wyznaczenia punktu (S) w sieci:

$$m_s = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

otrzymamy więc i tutaj znane nam już wyrażenie:

$$m_s = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}} \quad (\text{I. 9})$$

108	0	72	$36\sqrt{3}$	72	0	72	0
0	108	$-36\sqrt{3}$	72	0	72	0	72
78	10	3	43	$29\sqrt{3}$	55	$7\sqrt{3}$	53
$-10\sqrt{3}$	78	$-29\sqrt{3}$	43	$-7\sqrt{3}$	55	$-5\sqrt{3}$	53
78	$-10\sqrt{3}$	68	$18\sqrt{3}$	53	$-5\sqrt{3}$	55	$-7\sqrt{3}$
$10\sqrt{3}$	78	$-18\sqrt{3}$	68	$5\sqrt{3}$	53	$7\sqrt{3}$	55
42	$14\sqrt{3}$	17	$19\sqrt{3}$	35	$11\sqrt{3}$	31	$7\sqrt{3}$
$-14\sqrt{3}$	42	$-19\sqrt{3}$	17	$-11\sqrt{3}$	35	$-7\sqrt{3}$	31
60	0	42	$14\sqrt{3}$	42	$2\sqrt{3}$	42	$-2\sqrt{3}$
0	60	$-14\sqrt{3}$	42	$-2\sqrt{3}$	42	$2\sqrt{3}$	42
42	$-14\sqrt{3}$	58	0	31	$-7\sqrt{3}$	35	$-11\sqrt{3}$
$14\sqrt{3}$	42	0	58	$7\sqrt{3}$	31	$11\sqrt{3}$	35
42	$-2\sqrt{3}$	31	$7\sqrt{3}$	46	0	32	$-6\sqrt{3}$
$2\sqrt{3}$	42	$-7\sqrt{3}$	31	0	46	$6\sqrt{3}$	32
42	$2\sqrt{3}$	35	$11\sqrt{3}$	32	$6\sqrt{3}$	46	0
$-2\sqrt{3}$	42	$-11\sqrt{3}$	35	$-6\sqrt{3}$	32	0	46

5. **Twierdzenie o sieciach w kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)**

W wyniku przeprowadzonego badania wypowiedzieć już możemy następujące twierdzenie dotyczące dokładności określenia położenia punktu wyznaczonego przez kątową sieć foremną złożoną z trójkątów foremnych, opartą o podstawę o długości D stanowiącą wielokrotność boku sieci d dla stosunku $n = \frac{D}{d}$ równego jednej z liczb 1, 2, 3: w sieci trójkątnej foremnej składającej się z trójkątów foremnych średni błąd położenia punktu najbardziej oddalonego od podstawy sieci równy jest podwójnemu iloczynowi długości podstawy sieci trójkątnej przez średni błąd pomiaru kątownego podzielonemu przez pierwiastek z trzech:

$$\boxed{m_s = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}}} \quad (1.10)$$

Błąd ten jest więc niezależny od ilości trójkątów w sieci, to znaczy dla różnych sieci (ob rys. 5a, b, c) przy tej samej długości podstawy i tym samym błędzie pomiaru kątownego zachowuje tę samą wartość.

Twierdzenie nasze nie przesądza oczywiście w niczym postaci związku $m_s = f(m_o D d)$ dla liczb naturalnych $n = \frac{D}{d}$ większych od trzech. (Zobaczmy zresztą w rozdziale IV, że twierdzenie obowiązuje też dla $n = 4$).

Ustalenie tego związku w postaci ogólnej i stwierdzenie czy błąd średni położenia punktu najbardziej oddległego od podstawy sieci jest stale nie-

zależny od n , jest niewątpliwie interesującym, choć trudnym problemem matematycznym. Dla rozpatrywanego w niniejszej pracy zagadnienia geodezyjnego: rozważenia celowości dwu- trzy krotnego skrócenia długości boków podstawowych sieci triangulacyjnych postać ogólna związku jest obojętna.

6. Wykaz średnich błędów współrzędnych i średnich błędów położenia punktów w sieciach elementarnych, złożonych z n^2 trójkątów ($n = 1, 2, 3$)

Z obliczonych w toku analizy odwrotności krakowianów współczynnikowych układów równań normalnych Gaussa bez trudności odczytać można wartości elementów przekątnych odwrotności $(a)_{ii}^{-1}$ czyli Gaussowskich „współczynników wagowych“ Q_{ii} dla każdej niewiadomej układu.

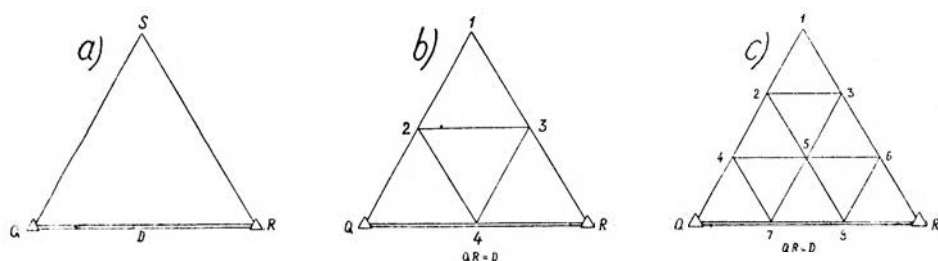
Wykaz błędów średnich

(numery punktów zgodne ze szkicami sieci na rys. 10 a, b, c)

Numer punktów	Średnie błędy współrzędnych $m_x = m_y$	Średnie błędy położenia punktu m_p	Przeciętna wartość błędz łożenia p kt. w sieci
Sieć jednotrójkątowa			
1 = S	$m_o D \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,155 m_o D$	1,155 $m_o D$
Sieć czterotrójkątowa			
1	$m_o D \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,155 m_o D$	0,736 $m_o D$
2,3	$m_o D \sqrt{\frac{5}{24}} = 0,456 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{5}{12}} = 0,645 m_o D$	
4	$m_o D \sqrt{\frac{1}{8}} = 0,354 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,500 m_o D$	
Sieć dziewięciotrójkątowa			
1	$m_o D \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,155 m_o D$	0,628 $m_o D$
2,3	$m_o D \sqrt{\frac{71}{243}} = 0,541 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{142}{243}} = 0,764 m_o D$	
4,6	$m_o D \sqrt{\frac{29}{243}} = 0,346 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{58}{243}} = 0,489 m_o D$	
5	$m_o D \sqrt{\frac{30}{243}} = 0,351 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{60}{243}} = 0,497 m_o D$	
7,8	$m_o D \sqrt{\frac{23}{243}} = 0,308 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{46}{243}} = 0,435 m_o D$	

m_o średni błąd pomiaru kąta w mierze radialnej
 D długość wielkiego boku sieci (podstawy).

Mnożąc pierwiastki z tych wielkości przez wartość błędu średniego m_0 , otrzymalibyśmy średnie błędy współrzędnych wyrażone w obranej do rachunku jednostce: małym boku sieci d . Dla jednolitości wyrazimy je w jednostkach metrycznych mnożąc przez stosunek $\frac{D}{n}$. Obrazuje to wykaz na str. 34 w którym podano wartości błędów średnich współrzędnych $m_x = m_y$ oraz błędy średnie położenia punktów, i który będzie nam przydatny przy opracowaniach graficznych, podanych w części II pracy (elipsy błędu i wykresy przesunięć).



Rys. 10

Rozdział II

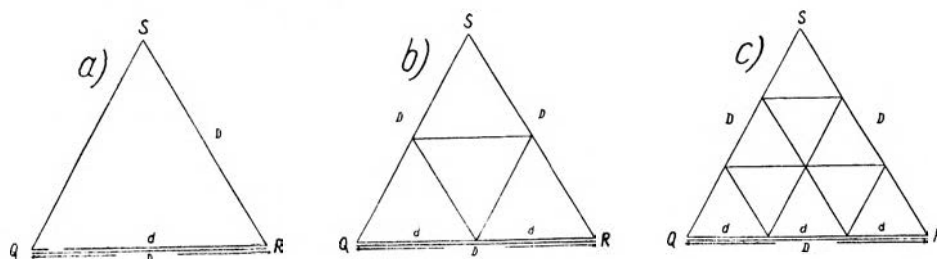
Średnie błędy względne długości boków sieci i błędy kątów

WSTĘP

Jakkolwiek wielkość średniego błędu położenia punktu najbardziej oddległego od podstawy sieci, wynoszącą dla sieci omawianego typu (l. 10)

$$m_p = \frac{2 m_0 D}{\sqrt{3}}$$

można by uznać za dostateczną charakterystykę dokładnościową efektu pracy, wyznaczmy jeszcze wielkość błędu względnego boku sieci QS lub RS jak również wielkości średnich błędów kątów $Q = SQR$ $R = SRQ$ $S = RSQ$ po wyrównaniu.



Rys. 11

Wielkość średniego błędu względnego boku sieci:

$$M = \frac{m_{QS}}{D} = \frac{m_{RS}}{D}$$

jest zresztą chętnie używana jako charakterystyka dokładnościowa i obliczenie jej pozwoli nam na nawiązanie do odnośnej literatury fachowej.

Jak z góry można przewidzieć — pamiętając treść twierdzenia o sieciach foremnych (Rozdział I) — błąd względny boku sieci M nie będzie zależny od ilości trójkątów w sieci. Zarówno dla sieci złożonej z jednego trójkąta, jak dla sieci złożonej z 4 trójkątów, jak wreszcie dla sieci złożonej z 9 trójkątów wielkość błędu względnego będzie przy tym samym błędzie średnim pomiaru kąta w sieci ściśle taka sama. Jak zobaczymy dalej wynosi ona:

$$M = m_o \sqrt{2/3} \quad (\text{II. 1})$$

wyrażając przy tym jednocześnie wartość średniego błędu kąta QR lub S po wyrównaniu (rozumianą oczywiście w mierze radialnej kąta).

W ostatnich wydaniach „Handbuch der Vermessungskunde“ Jordana-Eggerta stwierdza się, że najwyższa osiągalna obecnie dokładność pomiarów kątowych charakteryzuje się przez błąd średni rzędu $1/3''$, tzn. $m_o = 1/3 \cdot 206265$.

Mnożąc tę wielkość przez $\sqrt{2/3} = 0,816496$ otrzymamy:

$$M_{min} = \frac{1}{757 \ 800},$$

jako najwyższą osiągalną dokładność względną w sieciach nowoczesnych omawianego typu. Warto może zauważyć, że praktyka polskich sieci triangulacyjnych ostatnich lat potwierdza dość dobrze to autorytatywne twierdzenie, o błędach nowoczesnych pomiarów kątowych, które w sieciach naszych rzadko osiągają $\pm 1''$.

W najlepszych sieciach błąd średni kąta (ustalany z wzoru Ferrero) jest $< 1^c$.

Niewątpliwie przy tak wysokiej dokładności pomiarów kątowych słuszność zaniechania w operacjach wyrównawczych błędów pomiarów bazowych — tak popularnego w geodezji i usprawiedliwionego dawniej, — staje się dziś problematyczna. Konsekwentniej jest rozpatrywać sieci nowoczesne jako łączne układy obserwacji kątowych i liniowych podlegające jednoczesnemu wyrównaniu przy zachowaniu warunku minimum pod jego postacią najogólniejszą:

$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum.}$$

W przypadku nawiązywania sieci geodezyjnej do punktów sieci nienowoczesnych, przyjmowanie punktów nawiązanie jako punktów „stałych“, to znaczy punktów których współrzędne nie otrzymują poprawek wyrównawczych w związku z powstaniem nowego układu obserwacyjnego, również staje się niekonsekwentne.

Podobnie jak w przypadku przyjmowania obserwacji liniowych za bezbłędne, tak też i w przypadku przyjmowania punktów których współrzędne obciążone są błędami średnimi rzędu około 5—10 cm za bezbłędne, powodujemy przez niekonsekwentne wyrównanie zniekształcanie nowoczesnego kąowego układu obserwacyjnego. Ponieważ zagadnienia te omawiamy szczegółowo w innym miejscu, nie będziemy się tutaj nad nimi zatrzymywać. Uważaliśmy jedynie za wskazane zasygnalizować tutaj istnienie zgadnienia niepotrzebnego zniekształcenia układów obserwacyjnych najwyższej klasy narzucającego się w związku ze stwierdzeniem do jak wysokiej dokładności zdolne są nowoczesne sieci kąowe.

U w a g a : Jakkolwiek można by uważać, że wzór na błąd średni funkcji niewiadomych obliczonych z układu równań normalnych Gaussa wyrażony pod postacią krakowianową, zarówno jak i krakowianowy dowód tego wzoru, są czytelnikowi-geodecie znane gdyż opublikowane zostały przez twórcę rachunku krakowianowego, Tadeusza Banachiewicza, przed dwudziestu kilku laty z okazji posiedzenia Bałtyckiej Komisji Geodezyjnej w Helsinkach (por. „Über die Anwendung der Krakowiane in der Methode der kleinsten Quadrate“ von T. Banachiewicz, Helsinki 1933), jednak autor niniejszej pracy uważał za celowe podając wzór przeprowadzić jego dowód, a to z następujących względów:

1) podanie dowodu umożliwi wykorzystanie otrzymanego w toku dowodu równania (II. 3), które będzie nam potrzebne w innym miejscu pracy,

2) krótkość i prostota dowodu, tak skomplikowanego w symbolice Gaussowskiej, skłonić może czytelnika nieobeznanego z rachunkiem krakowianowym do poznania tego rachunku, którego zdobycze zarówno w dziedzinie pojęciowej jak i rachunkowej ułatwiają naukowe podchodzenie do wielu zagadnień.

1. Ustalenie wzoru na błąd średni funkcji niewiadomych określonych z układu równań normalnych Gaussa

Niech $F(x, y, z, \dots)$ będzie jakąkolwiek rozwijalną w szereg Taylora funkcją najprawdopodobniejszych wartości wzajemnie niezależnych zmiennych:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + dx \\y &= y_0 + dy \\z &= z_0 + dz \\&\dots \dots \dots\end{aligned}$$

gdzie $x_0, y_0, z_0, \dots$ są przybliżonymi wartościami tych zmiennych, zaś $dx, dy, dz, \dots$ najprawdopodobniejszymi wartościami ich poprawek, dającymi się wyznaczyć z układu równań normalnych Gaussa:

$$\begin{aligned}[aa] dx + [ab] dy + [ac] dz \dots &= [al] - \\[ab] dx + [bb] dy + [bc] dz \dots &= [bl] - \\[ac] dx + [bc] dy + [cc] dz \dots &= [cl] - \\&\dots \dots \dots\end{aligned}$$

otrzymane równanie pod postacią $F = F(x_0, y_0, z_0, \dots) + x f$. Po podstawieniu obliczonej wartości $x = \underline{l} [(\underline{a}^2)^{-1} \underline{\tau a}]$ znajdziemy:

$$F = F(x_0, y_0, z_0, \dots) + \underline{l} [(\underline{a}^2)^{-1} \underline{\tau a}] f,$$

gdzie ostatni iloczyn krakowianowy jest oczywiście krakowianem jednoelementowym. Po połączeniu ostatnich czynników w tym iloczynie mamy:

$$F = F(x_0, y_0, z_0, \dots) + \underline{l} [f(\underline{\tau a}(\underline{a}^2)^{-1})] \text{ lub } F = F(x_0, y_0, \dots) + \underline{l} [f(\underline{a}^2)^{-1} \underline{\tau a}] \quad (\text{II. 3})$$

Ponieważ ostatni krakowian jest jak to widać kolumną współczynników przy wyrazach obserwacyjnych, co możemy dla lepszego uzmysłowienia napisać:

$$F = F(x_0, y_0, z_0, \dots) + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

zaś $F(x_0, y_0, z_0, \dots)$ nie jest zależne od wyników obserwacji, przeto suma kwadratów elementów k_1^2, k_2^2, k_n^2 , równa liczbowo kwadratowi krakowianu $f(\underline{\tau a}(\underline{a}^2)^{-1})$, pomnożona przez kwadrat średniego błędu jednostkowego m_o^2 , wyrażać będzie kwadrat poszukiwanego błędu średniego funkcji F — oznaczmy ten kwadrat m_F^2 .

Mamy więc: $m_F^2 = m_o^2 [f(\underline{\tau a}(\underline{a}^2)^{-1})]^2$. Stosując dwukrotnie wzór na kwadrat iloczynu dwóch krakowianów: $(k_1, k_2)^2 = k_1(\underline{\tau k_2})^2 k_1$ mamy:

$$m_F^2 = m_o^2 [f((\underline{a}^2)^{-1} \underline{\tau a})]^2 = m_o^2 [f((\underline{a}^2)^{-1} \underline{a}^2 (\underline{a}^2)^{-1}) f] = m_o^2 [f(\underline{\tau}(\underline{a}^2)^{-1}) f]$$

i ostatecznie, ponieważ krakowian symetryczny $(\underline{a}^2)^{-1}$ jest identyczny ze swą transpozą, otrzymujemy:

$$m_F = m_o \sqrt{f(\underline{a}^2)^{-1} \cdot f}. \quad (\text{II. 4})$$

Z tego wzoru na średni błąd dowolnej funkcji niewiadomych wyznaczonych z układu równań normalnych Gaussa, otrzymać można od razu wzór na średni błąd niewiadomej obliczonej z tego układu, którym to wzorem posługiwaliśmy się w rozdziale I. Ponieważ mianowicie dla i -tej niewiadomej krakowian f przybierze postać kolumny w której i -ty element jest jednością, zaś pozostałe elementy są zerami, przeto iloczyn pierwszych dwóch krakowianów pod pierwiastkiem będzie kolumną elementów, w której na i -tym miejscu znajdzie się element położony w i -tej kolumnie i i -tym wierszu tabeli $(\underline{a}^2)^{-1}$, oznaczamy ten element przez $(\underline{a}^2)^{-1}_{ii}$. Mnożąc z kolei otrzymaną kolumnę przez krakowian f , którego wszystkie elementy za wyjątkiem i -tego elementu równego jedności są zerami, otrzymamy jako wynik mnożenia $f(\underline{a}^2)^{-1} f$ element $(\underline{a}^2)^{-1}_{ii}$. Wzór na błąd średni i -tej niewiadomej z układu równań normalnych Gaussa ma więc istotnie postać:

$$m_i = m_o \sqrt{(\underline{a}^2)^{-1}_{ii}} \quad (\text{II. 5})$$

którą posługiwaliśmy się już w rozdziale I.

2. Zastosowanie wzoru ogólnego do obliczenia średnich błędów względnych boków sieci kątowej w kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 ($n = 1, 2, 3$) trójkątów foremnych

Ponieważ w sieciach rozpatrywanego typu mamy oznaczając przez F ($xyz..$) długość boku sieci QS:

$$F = \sqrt{(x_s - x_Q)^2 + (y_s - y_Q)^2}$$

otrzymamy po zróżniczkowaniu funkcji względem obu zmiennych x_s i y_s :

$$F'_{x_s} = f_1 = \cos \varphi_{QS} = 0,5 \sqrt{3}$$

$$F'_{y_s} = f_2 = \sin \varphi_{QS} = 0,5$$

Zważywszy, że odcięta punktu S przyjmowaliśmy stałe za pierwszą niewiadomą w układzie, zaś rzędną punktu S przyjmowaliśmy stałe za drugą niewiadomą w układzie, otrzymamy dla wszystkich rozpatrywanych przypadków sieci ($n = 1, 2, 3$) następujący wzór na błąd średni długości wielkiego boku wyznaczonego przez triangulację (bok QS lub RS):

$$m_F = m_o \sqrt{\begin{vmatrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \\ \vdots \end{vmatrix} (a^2)^{-1} \begin{vmatrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \\ \vdots \end{vmatrix}}$$

Ponieważ we wszystkich odwrotnościach (patrz rozdział I) zachodzą związki:

$$(a^2)_{11}^{-1} = (a^2)_{22}^{-1} \text{ oraz } (a^2)_{12}^{-1} = (a^2)_{21}^{-1} = 0,$$

możemy dla rozpatrywanego wypadku długości QS (lub RS) napisać jeszcze prostszy wzór:

$$m_F = m_o \sqrt{\begin{vmatrix} 0,5 \sqrt{3} (a^2)_{11}^{-1} \\ 0,5 (a^2)_{22}^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \end{vmatrix}} = m_o \sqrt{3/4 \cdot (a^2)_{11}^{-1} + 1/4 (a^2)_{22}^{-1}}$$

i ostatecznie:

$$m_F = m_o \sqrt{(a^2)_{11}^{-1}}$$

Błąd ten wyrażony jest w jednostkach równych bokowi małego trójkąta sieci, w tych bowiem jednostkach prowadziliśmy rachunek odwrotności. Chcąc wyrazić błąd w metrach należy pomnożyć otrzymane wyrażenie przez długość małego boku sieci d wyrażoną w metrach.

Ponieważ $d = D/n$ gdzie $D = QS$, zaś n stosunek dużego boku D do małego d , mamy; przechodząc do jednostek metrycznych:

$$m_F = m_o \frac{D}{n} \sqrt{(a^2)_{11}^{-1}}$$

Po podzieleniu przez D otrzymamy ostatecznie na błąd średni względny boku QS (lub RS) wyrażenie:

$$\frac{m_{QS}}{QS} = \frac{m_{RS}}{RS} = M = \frac{m_o}{n} \sqrt{(a^2)_{11}^{-1}}$$

Realizując ten wzór dla poszczególnych sieci przez podstawienie wartości pierwszych elementów odwrotności $(a^2)^{-1}_{11}$ znajdujemy:

1) sieć o jednym trójkącie:	$M = \frac{m_o}{1} \sqrt{2/3} = m_o \sqrt{2/3}$
2) sieć o czterech trójkątach:	$M = \frac{m_o}{2} \sqrt{32/12} = m_o \sqrt{2/3}$
3) sieć o dziewięciu trójkątach:	$M = \frac{m_o}{3} \sqrt{324/54} = m_o \sqrt{2/3}$

3. Zastosowanie wzoru ogólnego do obliczenia średnich błędów kątów wyrównane sieci katowej w kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)

Dla obliczenia średnich błędów kątów QRS obliczonych z sieci o n^2 trójkątach ($n = 1, 2, 3$) wyrazić należy wartość odnośnego kąta jako funkcję współrzędnych wyznaczających go punktów, zestawić krakowian kolumnowy f z pochodnych cząstkowych i zastosować wzór ogólny: $m_f = m_o \sqrt{f (a^2)^{-1} f}$. Ponieważ jednak błędy średnie kątów Q i R muszą być z uwagi na symetrię sieci równe sobie:

$$m_Q = m_R,$$

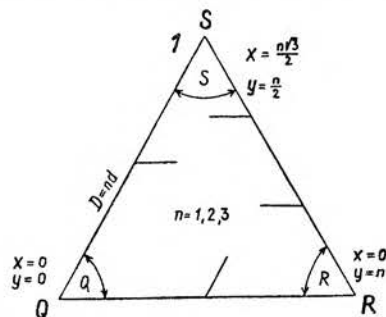
wystarczy przeprowadzić rachunek wyznaczenia średniego błędu dla dwóch tylko kątów: Q i S. Należy pamiętać, że przy rachunku dotychczasowym przyjmowaliśmy stałe jako jednostkę mały bok sieci d . W tej więc jednostce wyrazić obecnie musimy współrzędne, względnie ich przyrosty, którymi operować będziemy dalej ustalając wartości średnich błędów kątów Q i S. Zrobimy to przyjmując za zero obie współrzędne punktu Q oraz odciętą punktu R, za n (ilość małych boków sieci $n = D/d$) rzędną punktu R, wreszcie za $\frac{n\sqrt{3}}{2}$ oraz za $\frac{n}{2}$ odciętą i rzędną punktu S. Uzmysławia to załączony rysunek, który należy mieć przed oczami przy odczytywaniu dalszego tekstu. Z rysunku tego są od razu widoczne wartości współczynników kierunkowych boków które będą nam potrzebne w dalszym rachunku:

$$A_{QS} = \frac{n\sqrt{3}}{2n^2} = \frac{\sqrt{3}}{2n} \quad B_{QS} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

skąd zaraz wynika

$$A_{SQ} = -\frac{\sqrt{3}}{2n} \quad B_{SQ} = -\frac{1}{2n},$$

$$A_{SR} = \frac{-n\sqrt{3}}{2n^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2n} \quad B_{SR} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$



Rys. 12

Obliczenie śr. błędu kąta Q .

$$\text{Mamy } F = Q = \arctan \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = \arctan \frac{y_S - y_Q}{x_S - x_Q}.$$

Przeprowadzenie różniczkowania uważamy za zbędne, gdyż dokonaliśmy już tej czynności w postaci ogólnej w rozdziale I, poszukując związku między zmianą wartości współrzędnych punktów wyznaczających kąt a zmianą wartości kąta. Przypominamy ten związek:

$$dx = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix},$$

z którego od razu odczytamy potrzebne nam wartości pochodnych. Przypominamy, że symbole LPC w ostatnim równaniu odnoszą się odpowiednio do punktów na lewym ramieniu kąta, na prawym ramieniu kąta oraz w centrum kąta.

Mamy, pisząc zupełnie wyraźnie:

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_S} = B_L = B_{QS} = \frac{1}{2n} \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial y_S} = -A_L = -A_{QS} = \frac{\sqrt{3}}{2n}.$$

Ponieważ tylko pochodne kąta względem współrzędnych pierwszego punktu sieci (punkt S) są odmienne od zera, możemy już zestawiać krakowian f

$$f = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5\sqrt{3} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \frac{1}{n} \text{ i napisać wzór na błąd średni:}$$

$$m_Q = m_o \frac{1}{n} \sqrt{\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5\sqrt{3} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} (a^2)^{-1} \begin{pmatrix} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}$$

co może być też, zważywszy wszystko co było powiedziane przy obliczeniu średnich błędów boków, napisane pod postacią:

$$m_Q = \frac{m_o}{n} \sqrt{(a^2)^{-1}_{11}}$$

lub, wprowadzając n pod pierwiastek:

$$m_Q = m_o \sqrt{\frac{(a^2)^{-1}_{11}}{n^2}}.$$

Ponieważ dla wszystkich obliczonych przez nas odwrotności będziemy mieć:

$$\frac{(a^2)^{-1}_{11}}{n^2} = \frac{2}{3} \text{ bowiem: } \frac{2/3}{1} = \frac{32/14}{4} = \frac{324/54}{9} = \frac{2}{3} \text{ (patrz ob. Rozdział I),}$$

tedy błąd średni kąta Q , zarówno jak równy mu z uwagi na symetrię sieci błąd średni kąta R , wyrazi się jako iloczyn średniego błędu pomiaru kąta w sieci przez pierwiastek z $2/3$.

$$m_Q = m_R = m_o \sqrt{2/3} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3.$$

Obliczenie średniego błędu kąta S .

Dla kąta S mieć będziemy:

$$F = S = \arctan \frac{y_Q - y_S}{x_Q - x_S} = \arctan \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S}.$$

Korzystając znowu ze związku między zmianą wartości współrzędnych punktów wyznaczających kąt a zmianą wartości kąta i z ostatniego rysunku oraz napisanych przy nim wartości współczynników kierunkowych napiszemy:

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_S} = -(B_L - B_P) = -(B_{SR} - B_{SQ}) = -\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{n},$$

$$f_2 = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial y_S} = (A_L - A_P) = A_{SR} - A_{SQ} = -\frac{\sqrt{3}}{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2n} = 0.$$

Ponieważ tylko pochodne kąta względem współrzędnych pierwszego punktu sieci (tzn. punktu S) są różne od zera, możemy już zestawiać krakowian f :

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \frac{1}{n} \text{ i napisać wzór na błąd średni:}$$

$$m_S = m_o \frac{1}{n} \sqrt{\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} (a^2)^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}}$$

Ostatecznie:

$$m_S = m_o \frac{1}{n} \sqrt{(a^2)^{-1}_{11}} = m_o \sqrt{\frac{(a^2)^{-1}_{11}}{n^2}}$$

a więc, tak samo jak w przypadku poprzednim, zważywszy że dla wszystkich naszych odwrotności $\frac{(a^2)^{-1}_{11}}{n^2} = 2/3$, wyrazić możemy średni błąd kąta S jako iloczyn średniego błędu pomiaru kąta w sieci przez pierwiastek $2/3$

$$\boxed{m_S = m_o \sqrt{2/3} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3.}$$

4. **Twierdzenie o błędach kątów i błędach względnych długości w sieciach o kształcie trójkąta foremnego złożonego z n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3$)**

W wyniku przeprowadzonego badania wypowiedzieć możemy następujące twierdzenie. Wyznaczając trójkąt foremny QRS zdanej podstawy QR , przyjętej za bezbłędną, otrzymamy zarówno średnie błędy względne wyznaczonych długości QS RS , jak i średnie błędy radialne kątów QRS równe iloczynowi średniego błędu pomiaru kątowego m_α przez pierwiastek z $2/3$:

$$\boxed{\frac{m_{QS}}{QS} = \frac{m_{RS}}{RS} = M = m_Q = m_R = m_S = m_\alpha \sqrt{2/3}} \quad (\text{II. 6})$$

niezależnie od tego, czy trójkąt foremny QRS zbudowano z jednego, z czterech, czy z dziewięciu trójkątów foremnych.

5. **Inna postać wzoru na błąd średni funkcji**

Wzór Banachiewicza na średni błąd funkcji niewiadomych wyznaczonych z układu równań normalnych:

$$m_F = m_\alpha \sqrt{f (a^2)^{-1} f}$$

można napisać i realizować pod nieco inną postacią, która w niektórych przypadkach może być wygodniejsza. Ustalamy, że nazwiemy iloczynem zupełnym dwóch równowymiarowych tabel liczbowych sumę iloczynów elementów tych tabel odpowiadających sobie położeniem. Oznaczać przy tym będziemy tabelę znakiem prostokąta wewnątrz którego napisano elementy tabeli lub też jej symboliczne oznaczenie przyjęte w danym rachunku. Sumę elementów tabeli oznaczmy stawiając znak s pod oznaczeniem tabeli. W myśl tego będzie więc np.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 42 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_s = 44 \text{ itp.}$$

Założmy dalej, że symbol $\begin{bmatrix} a/b \end{bmatrix}$

będzie oznaczał tabelę utworzoną z dwóch szeregów liczbowych a_1 a_2 $a_3...$ oraz b_1 b_2 $b_3...$ w ten sposób, że szereg liczbowy a napisano pod postacią kolumny nagłówkowej, szereg b pod postacią wiersza nagłówkowego, a następnie otrzymany tak schemat:

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & & \\ a_2 & & \end{array}$$

wypełniono iloczynami liczb obu szeregów utworzonymi jak poniżej

$$\begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \end{bmatrix}$$

Naprzykład dla szeregów liczbowych $a \dots 1 \ 5$ oraz $b \dots 2 \ 4 \ 6$ będzie:

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 4 & 6 \\ 1 & & & \\ 5 & & & \end{array} \quad \boxed{a/b} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 10 & 20 & 30 \\ \hline \end{array}$$

Podobnie dla szeregu $f \dots 1 \ 3 \ 7$ dla obliczenia $\boxed{f/f}$ napiszemy:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 3 & 7 \\ 1 & & & \\ 3 & & & \\ 7 & & & \end{array} \quad \text{skąd zaraz mamy: } \boxed{f/f} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 3 & 9 & 21 \\ \hline 7 & 21 & 49 \\ \hline \end{array} \quad \text{itp.}$$

Można łatwo wykazać, że rezultat mnożenia krakowianowego $\underline{x} \underline{y} \underline{z}$, gdy krakowiany $\underline{x}$ oraz $\underline{z}$ są jednokolumnowe, jest identyczny z iloczynem tabeli $\boxed{x/z}$ przez tabelę $\boxed{y}$. Tak np. mamy:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 16 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 37, \text{ zaś licząc } \begin{array}{c} 3 \ 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \text{ mamy } \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} = 37$$

Przy wprowadzonych oznaczeniach błąd średni funkcji wyrazi się jak widać jako iloczyn tabeli $\boxed{f/f}$ przez tabelę odwrotności krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych $\underline{Q} = (\underline{a}^2)^{-1}$ przez błąd średni m_0 . Mamy więc:

$$m_F = m_0 \sqrt{\boxed{f/f} \boxed{Q}} \quad (\text{II. 7})$$

Rachunek sprowadza się więc do zestawienia tabeli $\boxed{f/f}$ gdzie f jest znaną kolumną i wierszem pochodnych funkcji $F(xyzu\dots)$ względem kolejnych niewiadomych układu równań normalnych oraz pomnożenia tej tabeli w sposób zupełny przez tabelę $\boxed{Q}$.

Rozdział III

Wpływy błędów nieprzypadkowych

WSTĘP

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy milcząco założenie że układ błędów obserwacyjnych, wyrównywanych w geodezyjnej sieci kątowej, jest układem błędów przypadkowych podlegających „prawu błędów“ Gaussa-Laplace'a.

Aczkolwiek wiadomo jest, że geodezyjne pomiary kątowe w bardzo wysokim stopniu spełniają to prawo, nie ulega jednak wątpliwości, że istnieją w sieciach niekiedy też obserwacje obciążone błędami „stałymi“, to znaczy błędami niepodlegającymi prawu błędów Gaussa-Laplace'a, których wyeliminowanie nie leży przytym w możliwości obserwatora. Godząc się z konieczności z istnieniem takich błędów, których ilość jest oczywiście

bardzo niewielka i w żadnym razie nie zależna od ilości dokonywanych obserwacji, i przeprowadzając operację wyrównania błędów metodą najmniejszych kwadratów, zapytać możemy: jakimi wielkościami charakteryzować się będzie zniekształcający wpływ przyjęcia założenia przypadkowości błędów w układzie, jeżeli w układzie tym wystąpi tego rodzaju „pechowy” błąd obserwacji? Konkretyzując zagadnienie powiemy, że dla wyznaczenia pewnej określonej funkcji wielkości $L_1, L_2, \dots, L_n$

$$F(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

układ obserwacyjny uznamy za tym korzystniejszy, im mniejsze będzie zniekształcenie wartości funkcji

$$F(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

(gdzie l_i rezultat obserwacji nad wielkością L_i względnie $l_i = L_i + \text{const}$), spowodowane przez zmianę tego z pomiędzy wyrazów obserwacyjnych l , którego zmiana najdobitniej zniekształci wartość funkcji $F(l_1, l_2, \dots, l_n)$. Tak np. jeżeli wartość funkcji F przy przyjęciu dwóch różnych układów obserwacyjnych wyrażać się będzie raz pod postacią:

$$F = \begin{Bmatrix} 0,03 \\ -0,15 \\ 0,25 \\ -0,03 \\ 0,05 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{Bmatrix} \quad \text{a drugi raz pod postacią:} \quad F = \begin{Bmatrix} 0,15 \\ 0,12 \\ -0,10 \\ 0,15 \\ 0,15 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{Bmatrix}$$

przy czym wyrazy obserwacyjne l_i są w obu układach przyjmowane za równodokładne, wówczas uznamy drugi układ obserwacyjny za korzystniejszy dla wyznaczenia wartości F , pomimo że — jak łatwo zauważyć — średni błąd funkcji m_F będzie w drugim układzie nieco większy. Jeżeli bowiem zaistnieje przypadek popełnienia błędu nieprzypadkowego dl w pierwszym układzie, wówczas zniekształcenie wartości funkcji F , wyniesie może w najniekorzystniejszym razie:

$$dF = 0,25 \, dl$$

Jeżeli natomiast zniekształcimy obserwację przez popełnienie błędu nieprzypadkowego dl w układzie drugim, wówczas zniekształcenie wartości funkcji F wyniesie może w najniekorzystniejszym razie:

$$dF = 0,15 \, dl.$$

Przeprowadzone w dalszym ciągu rozważania porównujące w myśl omówionego kryterium przydatność układów obserwacyjnych przedstawionych na rys. 11 do wyznaczenia współrzędnych punktu najbardziej odległego i długości podstawy wykazują że układy o większej ilości trójkątów są korzystniejsze.

1. Wpływ zmiany wartości obserwacji o dl na współrzędne punktu najbardziej odległego od podstawy sieci

Wyrażenie poprawek współrzędnych punktów sieci jako liniowych funkcji wyrazów obserwacyjnych daje nam wzór (II. 2), który tu powtarzamy:

$$\underline{x} = \underline{l} [a^2]^{-1} \tau \underline{a}.$$

Ponieważ wartości krakowianów występujących w nawiasie napisanego wzoru obliczaliśmy dla wszystkich trzech typów rozpatrywanych sieci (por. rys. 5), pozostaje realizacja napisanego związku. Wypisując ten związek w całości dla sieci o jednym trójkącie (Rozdz. I str. 24), otrzymamy.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} dx_s \\ dy_s \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5\sqrt{3} & 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie l_1, l_2, l_3 są wyrazami obserwacyjnymi dla kątów α, β, γ , rozumianymi oczywiście w mierze radialnej. Poprawki współrzędnych wyrażone tu będą w jednostkach równych długości boku sieci — w tych bowiem jednostkach prowadzono rachunek. Dla otrzymania poprawek współrzędnych wyrażonych w metrach należy pomnożyć rezultat przez długość boku sieci $d = D$ wyrażoną w metrach. Mamy:

$$\begin{Bmatrix} dx_s \\ dy_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{Bmatrix} D = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{D}{3}$$

Wynika stąd, że popełnienie błędu dl w wyrazie obserwacyjnym spowodować może w najgorszym razie (przypominamy że oś rzędnych pokrywa się z podstawą):

- a) zniekształcenie odciętej o wielkość $\frac{2}{3} dl D$
- b) zniekształcenie rzędnej o wielkość $\frac{1}{3}\sqrt{3} dl D$
- c) zniekształcenie położenia punktu o $\frac{2}{3} dl D$

(ostatnie wynika ze związku $dp = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, gdzie dp przesunięcie punktu odpowiadające zmianom współrzędnych dx, dy).

Konkretyzując otrzymane wzory powiemy np. że w razie zniekształcenia obserwacji o 2'' (tzn. $dl = 0.00001$ w jednym z kątów trójkąta o pod-

stawie 30 km otrzymać możemy w najgorszym razie dla punktu wyznaczonego:

a) zniekształcenie odciętej o wielkość	0,20 metra
b) zniekształcenie rzędnej o wielkość	0,17 metra
c) zniekształcenie położenia punktu	0,20 metra

Zbytecznym jest podkreślać, że wielkości tych zniekształceń nie mają nic wspólnego z pojęciem średniego błędu. Nie charakteryzują one dokładności sieci w myśl zasad rachunku prawdopodobieństwa, lecz możliwość zniekształceń spowodowanych przez „błędy grube“, lub omyłki w obserwacjach.

Przechodzimy do sieci o czterech trójkątach. (Rozdz. I str. 25). Realizując wzór $\underline{x} = \underline{l}[(a^2)^{-1}\tau a]$ napiszemy go pod postacią: $\underline{x} = \underline{l} \underline{t}$ gdzie: $\underline{t} = (a^2)^{-1}\tau a$ i rozpoczniemy od obliczenia krakowianu $\underline{t}$, transformującego wyrazy obserwacyjne na niewiadome układu równań normalnych. Mamy:

$$t = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 32 & 0 & \dots \\ 0 & 32 & \dots \\ 12 & 4\sqrt{3} & \dots \\ -4\sqrt{3} & 12 & \dots \\ 12 & -4\sqrt{3} & \dots \\ 4\sqrt{3} & 12 & \dots \\ 8 & 0 & \dots \\ 0 & 8 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5\sqrt{3} & -0,5\sqrt{3} \\ 0,5 & 0,5 & -1 & -1 & 0,5 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5\sqrt{3} & 0 & 0 & 0,5\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5\sqrt{3} & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 & 0 & 0 \\ -0,5\sqrt{3} & 0 & 0,5\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 & 1 \\ -0,5\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -0,5\sqrt{3} & 0,5\sqrt{3} & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & -1 & -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5\sqrt{3} & -0,5\sqrt{3} & 0 & 0,5\sqrt{3} & 0 & -0,5\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0,5 & 0,5 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,5\sqrt{3} & -0,5\sqrt{3} & 0 & -0,5\sqrt{3} & 0,5\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Po zrealizowaniu mnożenia napisać możemy:

$$\begin{pmatrix} dx_S \\ dy_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \\ l_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4\sqrt{3} \\ 4 & -4\sqrt{3} \\ -8 & 0 \\ 4 & 4\sqrt{3} \\ 4 & -4\sqrt{3} \\ -8 & 0 \\ 4 & 4\sqrt{3} \\ 4 & -4\sqrt{3} \\ -8 & 0 \\ 8 & 0 \\ -4 & -4\sqrt{3} \\ -4 & 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{12}$$

Poprawki współrzędnych wyrażone tu są w jednostkach równych długości małego boku sieci d . Dla wyrażenia ich w metrach należy pomnożyć przez długość boku sieci d podaną w metrach. Zastępując d przez $0,5 D$ mamy:

$$\begin{Bmatrix} dx_s \\ dy_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \\ l_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{Bmatrix} \frac{D}{6}$$

Wynika stąd, że popełnienie błędu dl w wyrazie obserwacyjnym spowodować może dla punktu najbardziej oddległego od podstawy w sieci o kształcie trójkąta foremego złożonego z 4 trójkątów foremnych w najgorszym razie następujące zniekształcenia: (przypominamy że oś rzędnych pokrywa się z podstawą):

- a) zniekształcenie odciętej o wielkość $\frac{1}{3} dl D$
- b) zniekształcenie rzędnej o wielkość $\frac{\sqrt{3}}{6} dl D$
- c) zniekształcenie położenia punktu o $\frac{1}{3} dl D$

(astatnie wynika ze związku $dp = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gdzie dp przesunięcie punktu odpowiadające zmianom współrzędnych dx dy).

Konkretyzując otrzymane wzory powiemy np. że w razie zniekształcenia obserwacji o 2'' (tzn. $dl = 0,00001$) w jednym z kątów trójkąta w sieci o czterech trójkątach foremnych opartej na podstawie 30 km otrzymać możemy w najgorszym razie dla punktu najbardziej oddalonego od podstawy:

- a) zniekształcenie odciętej o wielkość 0,10 metra
- b) zniekształcenie rzędnej o wielkość 0,09 metra
- c) zniekształcenie położenia punktu 0,10 metra

Widzimy, że popełnienie „błędu nieprzypadkowego“, lub mówiąc inaczej: popełnienie omyłki w wyrazie obserwacyjnym jest dla sieci cze-

rotrójkątowej dużo mniej groźne niż dla sieci jednotrójkątowej. Z wartości elementów krakowianu transformującego wyrazy obserwacyjne na poprawki współrzędnych jest od razu widoczna interesująca właściwość sieci foremnych: bezwzględna wartość zniekształcenia położenia punktu najbardziej odległego od podstawy jest niezależna od tego która spośród wszystkich dokonanych obserwacji zostanie zniekształcona o założoną wielkość.

Dla sieci o dziewięciu trójkątach foremnych (por. Rozdział I str. 23 i nast.) wartość krakowianu transformującego wyrazy obserwacyjne na poprawki współrzędnych.

$$\underline{t} = (a^2)^{-1} \tau a$$

wyniesie, jak łatwo przekonać się realizując mnożenie:

$$t = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

Dla wyrażenia poprawek w metrach należy pomnożyć otrzymany krakowian przez długość małej podstawy sieci d , gdyż przyjmowaliśmy ją za jednostkę rachunku.

Wyrażając małą podstawę sieci przez wielką w myśl związku $d = \frac{1}{3} D$ napiszemy ostatecznie związek między poprawkami współrzędnych i wyrazami obserwacyjnymi pod postacią:

$$\begin{Bmatrix} dv_s \\ dy_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \\ l_{14} \\ l_{15} \\ l_{16} \\ l_{17} \\ l_{18} \\ l_{19} \\ l_{20} \\ l_{21} \\ l_{22} \\ l_{23} \\ l_{24} \\ l_{25} \\ l_{26} \\ l_{27} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{Bmatrix} \frac{D}{9}.$$

Wynika stąd że popełnienie błędu dl w wyrazie obserwacyjnym spowodować może dla punktu najbardziej oddległego od podstawy w sieci o kształcie trójkąta foremnego złożonego z 9 trójkątów foremnych w najgorszym razie następujące zniekształcenie (przypominamy że oś rzędnyco pokrywa się z podstawą):

- a) zniekształcenie odciętej o wielkość $\frac{2}{9} dl D$
- b) zniekształcenie rzędnej o wielkość $\frac{\sqrt{3}}{9} dl D$
- c) zniekształcenie położenia punktu o $\frac{2}{9} dl D$

Konkretyzując otrzymane wzory powiemy, że np. w razie zniekształcenia obserwacji o 2'' (tzn. $dl = 0,00001$) w jednym z kątów trójkąta w sieci o dziewięciu trójkątach foremnych opartej na podstawie 30 km otrzymać możemy w najgorszym razie dla punktu najbardziej oddalonego od podstawy:

a) zniekształcenie odciętej o wielkość	0,07 metra
b) zniekształcenie rzędnej o wielkość	0,06 metra
c) zniekształcenie położenia punktu o	0,07 metra

Podobnie jak w przypadkach poprzednich wartość bezwzględna zniekształcenia położenia punktu najbardziej odległego od podstawy jest niezależna od tego, która z pośród obserwacji kątowych zostanie zniekształcona o założoną wielkość.

2. Wpływ zmiany wartości obserwacji o dl na błąd względny boków sieci

Rozważmy obecnie jak zmieni się wartość błędu względnego boku sieci QS lub RS, jeżeli założymy zmianę wartości którejkolwiek obserwacji kątowej o wielkość dl , a więc jeżeli — w szczególności — założymy popełnienie błędu nieprzypadkowego dl w jednym z kątów sieci. Widzieliśmy w Rozdziale II (II. 3), że funkcję niewiadomych wyznaczonych z równań normalnych Gaussa można napisać pod postacią: $F = F(x_o, y_o, z_o, \dots)$

$$+ l[f(\tau a (a^2)^{-1})], \text{ lub też:}$$

$$F = F(x_o, y_o, z_o, \dots) + l[f(a^2)^{-1} \tau a],$$

gdzie $\underline{f}$ jest kolumną pochodnych funkcji względem poszczególnych niewiadomych układu równań normalnych Gaussa. Wynika stąd, że zmiana wartości i -tej z kolei wielkości w kolumnie obserwacyjnej o dl spowodować będzie zmianę wartości funkcji o iloczyn $dl T_i$ gdzie przez T_i oznaczyliśmy i -ty element w krakowianie

$$\underline{T} = \underline{f} (a^2)^{-1} \tau a .$$

Jeżeli podlegającą rozważaniu funkcją będzie bok sieci QS wówczas kolumna pochodnych ma, jak to już widzieliśmy w Rozdziale II, postać:

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

Ponieważ tylko dwa pierwsze elementy tej kolumny są różne od zera, obliczając krakowian $\underline{T}$ wystarczy brać dwa tylko wiersze odwrotności $(a^2)^{-1}$.

Dla przypadku sieci o jednym trójkącie mieć będziemy:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(szczegóły prostego rachunku pomijamy).

Dla przypadku sieci o dwóch trójkątach napiszemy:

$$\underline{f}(\underline{a}^e)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} \\ 4 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ 3 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mnożąc z kolei obliczony krakowian przez τa , znajdziemy krakowian $\underline{T}$. Ponieważ krakowian $\underline{a}$ napisany jest in ekstenso w rozdziale I (patrz sieć złożona z czterech trójkątów) i czytelnik ma możliwość wykonania tego prostego rachunku, pomijamy go poprzestając na podaniu gotowej wartości krakowianu $\underline{T}$. Napiszemy go przy tym — dla zaoszczędzenia miejsca — w postaci stransponowanej. Mamy mianowicie:

$$\tau \underline{T} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} 0 -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} 0 \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} 0 -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} -\frac{\sqrt{3}}{3} 0 \right\}.$$

Jest już widoczne, że największy błąd w długości boku sieci spowodowany przez zmianę wartości obserwacji o dl wyniesie, zarówno w przypadku jednego trójkąta jak i czterech trójkątów (analogicznie i dziewięciu trójkątów):

$$dF_{maks} = \frac{\sqrt{3}}{3} dl$$

Błąd ten z uwagi na obrane przez nas w rachunku jednostki długości (zawsze mały bok sieci) wyrażony będzie za każdym razem w innych jednostkach. Dla porównania wyników sprowadzimy go, jak zawsze, do jednostki D (bok wielki sieci). Będzie dla sieci o jednym trójkącie

$$dF_{maks} = \frac{1}{1} D \frac{\sqrt{3}}{3} dl$$

dla sieci o czterech trójkątach

dla sieci o 9 trójkątach

$$dF_{maks} = \frac{1}{2} D \frac{\sqrt{3}}{3} dl$$

$$dF_{maks} = \frac{1}{3} D \frac{\sqrt{3}}{3} dl$$

Wynika stąd od razu, że maksymalna wartość otrzymanego błędu względnie boku wielkiego sieci będzie odwrotnie proporcjonalna do

ilości odcinków n na którą podzielono bok wielki sieci, i wyrazi się ogólnie wzorem:

$$\frac{dF_{n,ahs}}{F} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt{3}}{3} dl \quad (n = 1, 2, 3).$$

Dla zorientowania się w wielkościach zniekształcenia obliczymy jego wartość, zakładając jak i poprzednio, że długość podstawy sieci wynosi 30 km, zaś błąd (zmiana) kąta wynosi 2" (tzn. $dl = 0,00001$). Otrzymamy:

dla sieci o 1 trójkącie 1 : 173 000
dla sieci o 4 trójkątach 1 : 346 000
dla sieci o 9 trójkątach 1 : 520 000

Jeżeli przypomnimy że zniekształcenia położenia punktu najbardziej odległego od podstawy były:

0,20 metra
0,10 metra
0,07 metra,

powiemy ogólnie, że popęśnienie błędu nieprzypadkowego w sieci o małych trójkątach jest — przy tej samej wartości błędu — duzo mniej groźne niż w sieci o dużych trójkątach. W wyniku badania możemy też wypowiedzieć następujące

3. Twierdzenie o wpływie błędów nieprzypadkowych w sieciach elementarnych

Przy wyrównaniu metodą najmniejszych kwadratów sieci kątowej o kształcie trójkąta foremnego wypełnionego przez trójkąty foremne zmiana wartości jednej z obserwacji o wielkość dl powoduje liniową zmianę położenia punktu najbardziej odległego od podstawy D o wielkość:

$$\frac{2}{3} D dl \frac{1}{n}$$

oraz błąd względny w długości boku sieci:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} dl \frac{1}{n}$$

gdzie n jest stosunkiem długości boku sieci do jej podstawy. ($n = 1, 2, 3$).

4. Inna postać wzoru na zmianę dx_i i -tej niewiadomej

w układzie równań normalnych, jakiej dozna ta niewiadoma gdy nadamy k -tej obserwacji przyrost dl_k .

Łatwo sprawdzić że słuszne jest następujące sformułowanie: zmiana jakiej dozna i -ta niewiadoma w układzie wyrównywanym metodą najmniejszych kwadratów gdy nadamy k -tej obserwacji przyrostek dl_k jest równa iloczynowi wiersza odwrotności tabeli współczynnیکowej równań normalnych, odpowiadającego i -tej niewiadomej, przez wiersz tabeli

współczynnikiem układu równań błędów, odpowiadający k -tej obserwacji. Można to napisać w symbolice krakowianowej jak następuje:

$$\boxed{\frac{dx_i}{dl_k} = (\underline{a}^2)_{(i)w}^{-1} \cdot \underline{a}_{(k)}} \quad (\text{III. 1})$$

Z równania $x = \underline{l} \underline{t}$, gdzie $\underline{t}$ używany już przez nas krakowian transformujący wyrazy poprawkowe na niewiadome wynosił $\underline{t} = (\underline{a}^2)_i^{-1} \tau \underline{a}$, wynika:

$$dx_i = dl_k t_{ik} \quad \text{Zaś } t_{ik} = (\underline{a}^2)_i^{-1} \tau a_k = (\underline{a}^2)_i^{-1} \underline{a}_{(k)} = (\underline{a}^2)_{(i)}^{-1} \cdot \underline{a}_{(k)},$$

gdyż k -ta kolumna krakowianu τa jest identyczna z k -tym wierszem krakowianu $\underline{a}$, zaś w krakowianie $(\underline{a}^2)^{-1}$ jako symetrycznym kolumny i wiersze są identyczne.

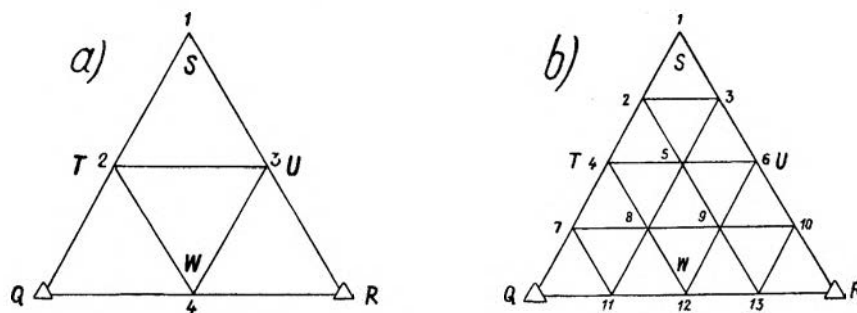
Wynika stąd słuszność uzasadnianego związku.

Rozdział IV

Porównanie dokładności wyznaczenia położenia punktów pośrednich w sieciach o kształcie trójkąta foremnego wypełnionego przez trójkąty foremne

WSTĘP

Analiza dokładności wyznaczania położenia punktu przez sieci o wielkich trójkątach i przez sieci o małych trójkątach, oparte na tych samych punktach stałych, byłaby niekompletna gdybyśmy ograniczyli się do porównywania dokładności wyznaczenia położenia punktu najbardziej odległego od podstawy sieci, pomijając punkty pośrednie. Dla porównania dokładności wyznaczenia położenia punktów pośrednich, tj. punktów położonych pomiędzy podstawą a punktem najbardziej od niej odległym, rozpatrzmy najprostszy przypadek przedstawiony na rysunku 13, wy-



Rys. 13

obrazającym sieć o czterech i sieć o szesnastu trójkątach, wyznaczające położenie tych samych punktów *STUW* w odniesieniu do tej samej podstawy *QR*.

Analiza wykaże, że — przy takim samym błędzie średnim pojedynczej obserwacji kątowej, równym m_0 — sieć małopółkątowa wyznaczy położenie punktów pośrednich z dokładnością wyższą niż sieć wielokółkątowa. Różnica w wartości błędów średnich położenia punktów odpowiadających sobie w obu sieciach jest zresztą bardzo nieznaczna, tym niemniej jednak przemawia ona zdecydowanie za koncepcją sieci małopółkątowych. Odnosne wartości błędów średnich położenia punktów wynoszą:

W sieci małopółkątowej	W sieci wielokółkątowej
dla punktów <i>TU</i> (oznaczonych w rachunku <i>NN</i> 4 i 6)	dla punktów <i>TU</i> (oznaczonych w rachunku <i>NN</i> 2 i 3)
$m_p = m_0 D \sqrt{\frac{127}{336}}$	$m_p = m_0 D \sqrt{\frac{140}{336}}$
dla punktu <i>W</i> (oznaczonego w rachunku <i>N</i> 12)	dla punktu <i>W</i> (oznaczonego w rachunku <i>N</i> 4)
$m_p = m_0 D \sqrt{\frac{71}{336}}$	$m_p = m_0 D \sqrt{\frac{84}{336}}$

Okaze się jednocześnie, że dokładność wyznaczenia położenia punktu najbardziej odległego od podstawy sieci (punkt *S*, oznaczony w rachunku w obu sieciach *N* 1) będzie tu dla obu sieci jednakowa. Pozwoli nam to uogólnić znany już wzór

$$m_0 = \frac{2 m_p D}{\sqrt{3}}$$

dla sieci złożonych z n^2 trójkątów foremnych i przypadek $n = 4$.

1. Analiza sieci o czterech trójkątach

przeprowadzona już została szczegółowo w rozdziale I. Obliczyliśmy tam bowiem cały krakowian $(a^2)^{-1}$, to znaczy odwrotność krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych Gaussa. Dla obliczenia potrzebnych nam obecnie błędów średnich punktów 1, 2, 3, 4 potrzebne nam będą elementy przekątne tego krakowianu (Gaussowskie „współczynniki wagowe“ Q_{ii}). Ponieważ wynoszą one kolejno:

$$\frac{32}{12} \quad \frac{32}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{6}{12}$$

zaś poprawki współrzędnych punktu 1 są pierwszą i drugą niewiadomą układu, poprawki współrzędnych punktu 2 są trzecią i czwartą niewiadomą układu, poprawki współrzędnych punktu 3 są piątą i szóstą niewiadomą układu, wreszcie poprawki współrzędnych punktu 4 są siódmą

	dx_1, dy_1		dx_2, dy_2		dx_3, dy_3		dx_4, dy_4		dx_5, dy_5		dx_6, dy_6		dx_7, dy_7		dx_8, dy_8		dx_9, dy_9		dx_{10}, dy_{10}		dx_{11}, dy_{11}		dx_{12}, dy_{12}		dx_{13}, dy_{13}	
1													0,5	0,5√3							0,5	-0,5√3				
2													0,5	-0,5√3							-1					
3													-1								0,5	0,5√3				
4							0,5	0,5√3					-1		0,5	-0,5√3										
5							0,5	-0,5√3					0,5	0,5√3	-1											
6							-1						0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3										
7			0,5	0,5√3			-1		0,5	-0,5√3																
8			0,5	-0,5√3			0,5	0,5√3	-1																	
9			-1				0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3																
10	0,5	0,5√3	-1		0,5	-0,5√3																				
11	0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3	-1																					
12	-1		0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3																				
13					0,5	0,5√3			-1		0,5	-0,5√3														
14					0,5	-0,5√3			0,5	0,5√3	-1															
15					-1				0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3														
16											0,5	0,5√3					-1		0,5	-0,5√3						
17											0,5	-0,5√3					0,5	0,5√3	-1							
18											-1						0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3						
19																			0,5	0,5√3					-1	
20																			0,5	-0,5√3					0,5	0,5√3
21																			-1						0,5	-0,5√3
22																	0,5	0,5√3				-1			0,5	-0,5√3
23																	0,5	-0,5√3					0,5	0,5√3	-1	
24																	-1						0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3
25															0,5	0,5√3					-1		0,5	-0,5√3		
26															0,5	-0,5√3					0,5	0,5√3	-1			
27														-1						0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3			
28								0,5	0,5√3					-1		0,5	0,5√3									
29								0,5	-0,5√3					0,5	0,5√3	-1										
30								-1						0,5	-0,5√3	0,5	0,5√3									
31			-0,5	-0,5√3	-0,5	0,5√3			1																	
32			-0,5	0,5√3	1				-0,5	-0,5√3																
33			1		-0,5	-0,5√3			-0,5	0,5√3																
34							-0,5	-0,5√3	-0,5	0,5√3					1											
35							-0,5	0,5√3	1						-0,5	-0,5√3										
36							1		-0,5	-0,5√3					-0,5	0,5√3										
37								-0,5	-0,5√3	-0,5	0,5√3						1									
38								-0,5	-0,5√3	1							-0,5	-0,5√3								
39								1		-0,5	-0,5√3						-0,5	0,5√3								
40												-0,5	-0,5√3	-0,5	0,5√3					1						
41												-0,5	0,5√3	1						-0,5	-0,5√3					
42												1		-0,5	-0,5√3					-0,5	0,5√3					
43													-0,5	-0,5√3	-0,5	0,5√3							1			
44													-0,5	0,5√3	1							-0,5	-0,5√3			
45													1		-0,5	-0,5√3						-0,5	0,5√3			
46																0,5	-0,5√3	-0,5	0,5√3					1		
47																-0,5	0,5√3	1						-0,5	-0,5√3	
48																1		-0,5	-0,5√3					-0,5	0,5√3	

A

$$a^2 = \frac{3}{4}$$

2	0	-1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$																							
0	2	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	-1																							
-1	$-\sqrt{3}$	6	0	-2	0	-1	$\sqrt{3}$	-2																				
$\sqrt{3}$	-1	0	6	0	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	-2																			
-1	$\sqrt{3}$	-2	0	6	0	0	0	-2	0	-1	$-\sqrt{3}$																	
$-\sqrt{3}$	-1	0	-2	0	6	0	0	0	-2	$\sqrt{3}$	-1																	
		-1	$-\sqrt{3}$	0	0	6	0	-2	0	0	0	-1	$\sqrt{3}$	-2														
		$\sqrt{3}$	-1	0	0	0	6	0	-2	0	0	$-\sqrt{3}$	-1	0	-2													
		-2	0	-2	0	-2	0	12	0	-2	0	0	0	-2	0	-2												
		0	-2	0	-2	0	-2	0	12	0	-2	0	0	0	-2	0	-2											
				-1	$\sqrt{3}$	0	0	-2	0	6	0	0	0	0	0	-2	0	-1	$-\sqrt{3}$									
				$-\sqrt{3}$	-1	0	0	0	-2	0	6	0	0	0	0	0	-2	$\sqrt{3}$	-1									
						-1	$-\sqrt{3}$	0	0	0	0	6	0	-2	0	0	0	0	0	-2								
						$\sqrt{3}$	-1	0	0	0	0	0	6	0	-2	0	0	0	0	0	-2							
						-2	0	-2	0	0	0	-2	0	12	0	-2	0	0	0	-2	0	-2						
							-2	0	-2	0	0	0	-2	0	12	0	-2	0	0	0	-2	0	-2					
								-2	0	-2	0	0	0	-2	0	12	0	-2	0	0	0	-2	0	-2				
									-2	0	-2	0	0	0	-2	0	12	0	-2	0	0	0	-2	0	-2			
									-1	$\sqrt{3}$	0	0	0	0	-2	0	6	0	0	0	0	0	0	-2	0			
									$-\sqrt{3}$	-1	0	0	0	0	0	-2	0	6	0	0	0	0	0	0	-2			
											-2	0	-2	0	0	0	0	6	0	-1	$\sqrt{3}$	0	0					
												-2	0	-2	0	0	0	0	6	$-\sqrt{3}$	-1	0	0					
													-2	0	-2	0	0	0	-1	$-\sqrt{3}$	6	0	-1	$\sqrt{3}$				
														-2	0	-2	0	0	$\sqrt{3}$	-1	0	6	$-\sqrt{3}$	-1				
															-2	0	-2	0	0	0	-1	$-\sqrt{3}$	6	0				
																-2	0	-2	0	0	0	$\sqrt{3}$	-1	0	6			

B

$$(a^2)^{-1} = \frac{1}{84}$$

896	0	588	$-84\sqrt{3}$	588	$84\sqrt{3}$	336	$-112\sqrt{3}$	392	0	336	$112\sqrt{3}$	140	$-84\sqrt{3}$	252	$-28\sqrt{3}$	252	$28\sqrt{3}$	140	$84\sqrt{3}$	168	0	224	0	168	0
0	896	$84\sqrt{3}$	588	$-84\sqrt{3}$	588	$112\sqrt{3}$	336	0	392	$-112\sqrt{3}$	336	$84\sqrt{3}$	140	$28\sqrt{3}$	252	$-28\sqrt{3}$	252	$-84\sqrt{3}$	140	0	168	0	224	0	168
588	$84\sqrt{3}$	472	0	404	$100\sqrt{3}$	300	$-56\sqrt{3}$	302	$30\sqrt{3}$	234	$102\sqrt{3}$	138	$-56\sqrt{3}$	209	$-3\sqrt{3}$	193	$37\sqrt{3}$	97	$71\sqrt{3}$	139	$13\sqrt{3}$	182	$14\sqrt{3}$	134	$8\sqrt{3}$
$-84\sqrt{3}$	588	0	472	$-100\sqrt{3}$	404	$56\sqrt{3}$	300	$-30\sqrt{3}$	302	$-102\sqrt{3}$	234	$56\sqrt{3}$	138	$3\sqrt{3}$	209	$-37\sqrt{3}$	193	$-71\sqrt{3}$	97	$-13\sqrt{3}$	139	$-14\sqrt{3}$	182	$-8\sqrt{3}$	134
588	$-84\sqrt{3}$	404	$-100\sqrt{3}$	472	0	234	$-102\sqrt{3}$	302	$-30\sqrt{3}$	300	$56\sqrt{3}$	97	$-71\sqrt{3}$	193	$-37\sqrt{3}$	209	$3\sqrt{3}$	138	$56\sqrt{3}$	134	$-8\sqrt{3}$	182	$-14\sqrt{3}$	139	$-13\sqrt{3}$
$84\sqrt{3}$	588	$100\sqrt{3}$	404	0	472	$102\sqrt{3}$	234	$30\sqrt{3}$	302	$-56\sqrt{3}$	300	$71\sqrt{3}$	97	$37\sqrt{3}$	193	$-3\sqrt{3}$	209	$-56\sqrt{3}$	138	$8\sqrt{3}$	134	$14\sqrt{3}$	182	$13\sqrt{3}$	139
336	$112\sqrt{3}$	300	$56\sqrt{3}$	234	$102\sqrt{3}$	254	0	203	$51\sqrt{3}$	137	$87\sqrt{3}$	132	$-28\sqrt{3}$	161	$19\sqrt{3}$	132	$42\sqrt{3}$	56	$56\sqrt{3}$	108	$24\sqrt{3}$	137	$25\sqrt{3}$	98	$14\sqrt{3}$
$-112\sqrt{3}$	336	$-56\sqrt{3}$	300	$-102\sqrt{3}$	234	0	254	$-51\sqrt{3}$	203	$-87\sqrt{3}$	137	$28\sqrt{3}$	132	$-19\sqrt{3}$	161	$-42\sqrt{3}$	132	$-56\sqrt{3}$	56	$-24\sqrt{3}$	108	$-25\sqrt{3}$	137	$-14\sqrt{3}$	98
392	0	302	$-30\sqrt{3}$	302	$30\sqrt{3}$	203	$-51\sqrt{3}$	230	0	203	$51\sqrt{3}$	97	$-45\sqrt{3}$	157	$-13\sqrt{3}$	157	$13\sqrt{3}$	97	$45\sqrt{3}$	109	$5\sqrt{3}$	146	0	109	$-5\sqrt{3}$
0	392	$30\sqrt{3}$	302	$-30\sqrt{3}$	302	$51\sqrt{3}$	203	0	230	$-51\sqrt{3}$	203	$45\sqrt{3}$	97	$13\sqrt{3}$	157	$-13\sqrt{3}$	157	$-45\sqrt{3}$	97	$-5\sqrt{3}$	109	0	146	$5\sqrt{3}$	109
336	$-112\sqrt{3}$	234	$-102\sqrt{3}$	300	$-56\sqrt{3}$	137	$-87\sqrt{3}$	203	$-51\sqrt{3}$	254	0	56	$-56\sqrt{3}$	132	$-42\sqrt{3}$	161	$-19\sqrt{3}$	132	$28\sqrt{3}$	98	$-14\sqrt{3}$	137	$-25\sqrt{3}$	108	$-24\sqrt{3}$
$112\sqrt{3}$	336	$102\sqrt{3}$	234	$56\sqrt{3}$	300	$87\sqrt{3}$	137	$51\sqrt{3}$	203	0	254	$56\sqrt{3}$	56	$42\sqrt{3}$	132	$19\sqrt{3}$	161	$-28\sqrt{3}$	132	$14\sqrt{3}$	98	$25\sqrt{3}$	137	$24\sqrt{3}$	108
140	$84\sqrt{3}$	138	$56\sqrt{3}$	97	$71\sqrt{3}$	132	$28\sqrt{3}$	97	$45\sqrt{3}$	56	$56\sqrt{3}$	108	0	92	$26\sqrt{3}$	67	$33\sqrt{3}$	22	$34\sqrt{3}$	68	$26\sqrt{3}$	80	$24\sqrt{3}$	55	$13\sqrt{3}$
$-84\sqrt{3}$	140	$-56\sqrt{3}$	138	$-71\sqrt{3}$	97	$-28\sqrt{3}$	132	$-45\sqrt{3}$	97	$-56\sqrt{3}$	56	0	108	$-26\sqrt{3}$	92	$-33\sqrt{3}$	67	$-34\sqrt{3}$	22	$-26\sqrt{3}$	68	$-24\sqrt{3}$	80	$-13\sqrt{3}$	55
252	$28\sqrt{3}$	209	$3\sqrt{3}$	193	$37\sqrt{3}$	161	$-19\sqrt{3}$	157	$13\sqrt{3}$	132	$42\sqrt{3}$	92	$-26\sqrt{3}$	132	0	115	$15\sqrt{3}$	67	$33\sqrt{3}$	92	$12\sqrt{3}$	119	$5\sqrt{3}$	83	$-3\sqrt{3}$
$-28\sqrt{3}$	252	$-3\sqrt{3}$	209	$-37\sqrt{3}$	193	$19\sqrt{3}$	161	$-13\sqrt{3}$	157	$-42\sqrt{3}$	132	$26\sqrt{3}$	92	0	132	$-15\sqrt{3}$	115	$-33\sqrt{3}$	67	$-12\sqrt{3}$	92	$-5\sqrt{3}$	119	$3\sqrt{3}$	83
252	$-28\sqrt{3}$	193	$-37\sqrt{3}$	209	$-3\sqrt{3}$	132	$-42\sqrt{3}$	157	$-15\sqrt{3}$	161	$19\sqrt{3}$	67	$-33\sqrt{3}$	115	$-15\sqrt{3}$	132	0	92	$26\sqrt{3}$	83	$3\sqrt{3}$	119	$-5\sqrt{3}$	92	$-12\sqrt{3}$
$28\sqrt{3}$	252	$37\sqrt{3}$	193	$3\sqrt{3}$	209	$-42\sqrt{3}$	132	$13\sqrt{3}$	157	$-19\sqrt{3}$	161	$33\sqrt{3}$	67	$15\sqrt{3}$	115	0	132	$-26\sqrt{3}$	92	$-3\sqrt{3}$	83	$5\sqrt{3}$	119	$12\sqrt{3}$	92
140	$-84\sqrt{3}$	97	$-71\sqrt{3}$	138	$-56\sqrt{3}$	56	$-56\sqrt{3}$	97	$-45\sqrt{3}$	132	$-28\sqrt{3}$	22	$-34\sqrt{3}$	67	$-33\sqrt{3}$	92	$-26\sqrt{3}$	108	0	55	$-13\sqrt{3}$	80	$-24\sqrt{3}$	68	$-26\sqrt{3}$
$84\sqrt{3}$	140	$71\sqrt{3}$	97	$56\sqrt{3}$	138	$56\sqrt{3}$	56	$45\sqrt{3}$	97	$28\sqrt{3}$	132	$34\sqrt{3}$	22	$-33\sqrt{3}$	67	$26\sqrt{3}$	92	0	108	$13\sqrt{3}$	55	$24\sqrt{3}$	80	$26\sqrt{3}$	68
168	0	139	$-13\sqrt{3}$	134	$8\sqrt{3}$	108	$-24\sqrt{3}$	109	$-5\sqrt{3}$	98	$14\sqrt{3}$	68	$-26\sqrt{3}$	92	$-12\sqrt{3}$	83	$-3\sqrt{3}$	55	$13\sqrt{3}$	94	0	90	$-14\sqrt{3}$	54	$-14\sqrt{3}$
0	168	$13\sqrt{3}$	139	$-8\sqrt{3}$	134	$24\sqrt{3}$	108	$5\sqrt{3}$	109	$-14\sqrt{3}$	98	$26\sqrt{3}$	68	$12\sqrt{3}$	92	$3\sqrt{3}$	83	$-13\sqrt{3}$	55	0	94	$14\sqrt{3}$	90	$14\sqrt{3}$	54
224	0	182	$-14\sqrt{3}$	182	$14\sqrt{3}$	137	$-25\sqrt{3}$	146	0	137	$25\sqrt{3}$	80	$-24\sqrt{3}$	119	$-5\sqrt{3}$	119	$5\sqrt{3}$	80	$24\sqrt{3}$	90	$14\sqrt{3}$	192	0	90	$-14\sqrt{3}$
0	224	$14\sqrt{3}$	182	$-14\sqrt{3}$	182	$25\sqrt{3}$	137	0	146	$-25\sqrt{3}$	137	$24\sqrt{3}$	80	$5\sqrt{3}$	119	$-5\sqrt{3}$	119	$-24\sqrt{3}$	80	$-14\sqrt{3}$	90	0	142	$14\sqrt{3}$	90
168	0	134	$-8\sqrt{3}$	139	$13\sqrt{3}$	98	$-14\sqrt{3}$	109	$5\sqrt{3}$	108	$24\sqrt{3}$	55	$-13\sqrt{3}$	83	$3\sqrt{3}$	92	$12\sqrt{3}$	68	$26\sqrt{3}$	54	$14\sqrt{3}$	90	$14\sqrt{3}$	94	0
0	168	$8\sqrt{3}$	134	$-13\sqrt{3}$	139	$14\sqrt{3}$	98	$-5\sqrt{3}$	109	$-24\sqrt{3}$	108	$13\sqrt{3}$	55	$-3\sqrt{3}$	83	$-12\sqrt{3}$	92	$-26\sqrt{3}$	68	$-14\sqrt{3}$	54	$-14\sqrt{3}$	90	0	94

i ósmą niewiadomą układu, przeto na wartości błędów średnich położenia punktów 1, 2, 3, 4 otrzymamy wyrażenia:

$$m_o d \sqrt{\frac{64}{12}} \quad m_o d \sqrt{\frac{20}{12}} \quad m_o d \sqrt{\frac{20}{12}} \quad m_o d \sqrt{\frac{12}{12}},$$

gdzie m_o oznacza błąd średni pomiaru kąta w sieci, zaś d , długość boku sieci (przypominamy że w rachunkach przyjęto tę długość za jednostkę). Podstawiając $d = 0,5 D$, gdzie $D = QR$ oznacza bok podstawowy sieci, otrzymamy odpowiednio:

$$m_o D \sqrt{\frac{16}{12}} \quad m_o D \sqrt{\frac{5}{12}} \quad m_o D \sqrt{\frac{5}{12}} \quad m_o D \sqrt{\frac{3}{12}}$$

co można też napisać pod postacią:

$$1) m_o D \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}} \quad 2,3) m_o D \sqrt{\frac{140}{336}} \quad 4) m_o D \sqrt{\frac{84}{336}}$$

która będzie wygodniejsza przy porównywaniu z siecią małopółką.

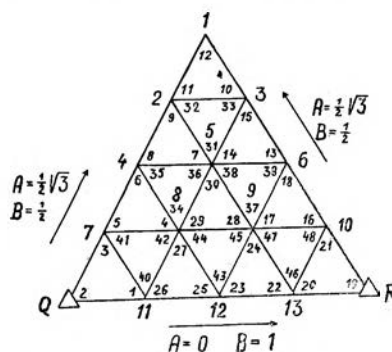
2. Analiza sieci o szesnastu trójkątach

Obierając za oś układu współrzędnych prostopadłą do podstawy sieci QR i przyjmując za jednostkę długości w rachunku bok trójkąta sieci d — równy jednej czwartej podstawy sieci — napiszemy wartości współczynników kierunkowych AB dla poszczególnych boków. Dla ułatwienia śledzenia rozwiązania umieszczamy rys. 14, pisząc na nim numery kątów sieci oraz wartości współczynników kierunkowych: (tabl. str. 58 i nast.)

Pisaliśmy tu, jak i w poprzednich zagadnieniach, tabele sąsiadujących w równaniu błędu wyznaczników bezpośrednio obok siebie, to znaczy opuszczając kreski wyznacznikowe i znaki $+$. Realizacja mnożeń wyznacznikowych daje układ równań błędów, którego krakowian współczynnikowy a piszemy poniżej (wkładka A).

Kwadrat krakowianu a tj. tablica współczynnikowa układu równań normalnych Gaussa, czyli krakowian a mieć więc będzie postać: (wkładka B).

Odwrotnością krakowianu a^2 jak to łatwo sprawdzić przez mnożenie będzie napisany poniżej krakowian — oznaczamy go jak zawsze $(a^2)^{-1}$: (wkładka C).



Rys. 14

Zestawienie równań błędów dla 48 obserwacji kątowych daje:

1)	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_7 & dy_7 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_{11} & dy_{11} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_1$
2)	$\begin{matrix} dx_7 & dy_7 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_{11} & dy_{11} \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_2$
3)	$\begin{matrix} dx_{11} & dy_{11} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_7 & dy_7 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\dots = v_3$
4)	$\begin{matrix} dx_7 & dy_7 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_4 & dy_4 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_8 & dy_8 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_4$
5)	$\begin{matrix} dx_4 & dy_4 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_8 & dy_8 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dy_7 & dy_7 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_5$
6)	$\begin{matrix} dx_8 & dy_8 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_7 & dy_7 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_4 & dy_4 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\dots = v_6$
7)	$\begin{matrix} dx_4 & dy_4 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_2 & dy_2 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_5 & dy_5 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_7$
8)	$\begin{matrix} dx_2 & dy_2 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_5 & dy_5 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_4 & dy_4 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_8$
9)	$\begin{matrix} dx_5 & dy_5 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_4 & dy_4 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_2 & dy_2 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\dots = v_9$
10)	$\begin{matrix} dx_2 & dy_2 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_1 & dy_1 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_3 & dy_3 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{10}$
11)	$\begin{matrix} dx_1 & dy_1 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_3 & dy_3 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_2 & dy_2 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{11}$
12)	$\begin{matrix} dx_3 & dy_3 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_2 & dy_2 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_1 & dy_1 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\dots = v_{12}$
13)	$\begin{matrix} dx_5 & dy_5 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_3 & dy_3 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_6 & dy_6 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{13}$
14)	$\begin{matrix} dx_3 & dy_3 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_6 & dy_6 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_5 & dy_5 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{14}$
15)	$\begin{matrix} dx_6 & dy_6 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_5 & dy_5 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_3 & dy_3 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\dots = v_{15}$
16)	$\begin{matrix} dx_9 & dy_9 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dy_6 & dy_6 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_{10} & dy_{10} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{16}$
17)	$\begin{matrix} dx_6 & dy_6 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_{10} & dy_{10} \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_9 & dy_9 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{17}$
18)	$\begin{matrix} dx_{10} & dy_{10} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_9 & dy_9 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_6 & dy_6 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\dots = v_{18}$
19)	$\begin{matrix} dx_{13} & dy_{13} \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_{10} & dy_{10} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0,5\sqrt{9} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{19}$
20)	$\begin{matrix} dx_{10} & dy_{10} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} dx_{13} & dy_{13} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{matrix}$	$\dots = v_{20}$

c. d.

21)	$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{13} & dy_{13} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{10} & dy_{10} \\ 0 & -1 \end{array}$	$\dots = v_{21}$
22)	$\begin{array}{cc} dx_{12} & dy_1 \\ 0 & 1 - \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_9 & dy_9 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{13} & dy_{13} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\dots = v_{22}$
23)	$\begin{array}{cc} dx_9 & dy_9 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_3 & dy_{13} \\ 0 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{12} & dy_{12} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\dots = v_{23}$
24)	$\begin{array}{cc} dx_{13} & dy_{13} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{12} & dy_{12} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_9 & dy_9 \\ 0 & -1 \end{array}$	$\dots = v_{24}$
25)	$\begin{array}{cc} dx_{11} & dy_{11} \\ 0 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{12} & dy_{12} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\dots = v_{25}$
26)	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{12} & dx_{12} \\ 0 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{11} & dy_{11} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\dots = v_{26}$
27)	$\begin{array}{cc} dx_{12} & dy_{12} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{11} & dy_{11} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ 0 & -1 \end{array}$	$\dots = v_{27}$
28)	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ 0 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_3 & dy_9 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\dots = v_{28}$
29)	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_9 & dy_9 \\ 0 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\dots = v_{29}$
30)	$\begin{array}{cc} dx_9 & dy_9 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_3 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0 & -1 \end{array}$	$\dots = v_{30}$
31)	$\begin{array}{cc} dx_2 & dy_2 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_3 & dy_3 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\dots = v_{31}$
32)	$\begin{array}{cc} dx_3 & dy_3 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_2 & dy_2 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\dots = v_{32}$
33)	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_2 & dy_2 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_3 & dy_3 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\dots = v_{33}$
34)	$\begin{array}{cc} dx_4 & dy_4 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\dots = v_{34}$
35)	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_4 & dy_4 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\dots = v_{35}$
36)	$\begin{array}{cc} dx_8 & dx_8 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_4 & dy_4 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{array}$	$\dots = v_{36}$
37)	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_6 & dy_6 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_9 & dy_9 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\dots = v_{37}$
38)	$\begin{array}{cc} dx_6 & dy_6 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_3 & dy_9 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\dots = v_{38}$
39)	$\begin{array}{cc} dx_9 & dy_9 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_5 & dy_5 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_6 & dy_6 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\dots = v_{39}$
40)	$\begin{array}{cc} dx_7 & dy_7 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_8 & dy_8 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$	$\begin{array}{cc} dx_{11} & dy_{11} \\ 0 & 1 \end{array}$	$\dots = v_{40}$

c. d.

41)	$\frac{dx_8}{0} \quad \frac{dy_8}{1}$	$\frac{dx_{11}}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{11}}{-0,5}$	$\frac{dx_7}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_7}{-0,5}$	$\dots = v_{41}$
42)	$\frac{dx_{11}}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{11}}{-0,5}$	$\frac{dx_7}{0} \quad \frac{dy_7}{1}$	$\frac{dx_8}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_8}{-0,5}$	$\dots = v_{42}$
43)	$\frac{dx_8}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_8}{-0,5}$	$\frac{dx_9}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_9}{-0,5}$	$\frac{dx_{12}}{0} \quad \frac{dy_{12}}{1}$	$\dots = v_{43}$
44)	$\frac{dx_9}{0} \quad \frac{dy_9}{1}$	$\frac{dx_{12}}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{12}}{-0,5}$	$\frac{dx_8}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_8}{-0,5}$	$\dots = v_{44}$
45)	$\frac{dx_{12}}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{12}}{-0,5}$	$\frac{dx_8}{0} \quad \frac{dy_8}{1}$	$\frac{dx_9}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_9}{-0,5}$	$\dots = v_{45}$
46)	$\frac{dx_9}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_9}{-0,5}$	$\frac{dx_{10}}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{10}}{-0,5}$	$\frac{dx_{13}}{0} \quad \frac{dy_{13}}{1}$	$\dots = v_{46}$
47)	$\frac{dx_{10}}{0} \quad \frac{dy_{10}}{1}$	$\frac{dx_{13}}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{13}}{-0,5}$	$\frac{dx_3}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_3}{-0,5}$	$\dots = v_{47}$
48)	$\frac{dx_{13}}{-0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{13}}{-0,5}$	$\frac{dx_3}{0} \quad \frac{dy_3}{1}$	$\frac{dx_{10}}{0,5\sqrt{3}} \quad \frac{dy_{10}}{-0,5}$	$\dots = v_{48}$

Wynika stąd, że średnie błędy położenia punktów *STUW* wyrażone w jednostkach równych długości małego boku sieci *d* wyniosą odpowiednio:

$$m_o \sqrt{\frac{2 \cdot 896}{84}} \quad m_o \sqrt{\frac{2 \cdot 254}{84}} \quad m_o \sqrt{\frac{2 \cdot 254}{84}} \quad m_o \sqrt{\frac{2 \cdot 142}{84}}.$$

Mnożąc te wartości przez długość małego boku sieci *d* wyrażoną w metrach otrzymamy odpowiednie wzory na błędy średnie wyrażone w metrach

$$m_o d \sqrt{\frac{64}{3}} \quad m_o d \sqrt{\frac{127}{21}} \quad m_o d \sqrt{\frac{127}{21}} \quad m_o d \sqrt{\frac{71}{21}}.$$

Wprowadzając zamiast małego boku sieci *d* podstawę całej konstrukcji *D* w myśl związku $d = \frac{1}{4} D$ znajdziemy:

$$m_s = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}} \quad m_T = m_U = m_o D \sqrt{\frac{127}{336}} \quad m_W = m_o D \sqrt{\frac{71}{336}}$$

Porównując to ze średnimi błędami położenia punktów *STUW* wyznaczonych przez sieć o czterech trójkątach, które powtarzamy poniżej:

$$m_s = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}} \quad m_T = m_U = m_o D \sqrt{\frac{140}{336}} \quad m_W = m_o D \sqrt{\frac{84}{336}}$$

stwierdzamy, że za wyjątkiem punktu najbardziej oddległego od podstawy (*S*), dokładność którego jest niezależna od ilości trójkątów w sieci, i po-

zostaje stale równa $\frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$ wyznaczenie punktów wspólnych dla obu sieci jest dokładniejsze w sieci o większej ilości trójkątów.

3. Wykaz średnich błędów współrzędnych i średnich błędów położenia punktów w sieci elementarnej złożonej z 16 trójkątów.

Poniżej podajemy obliczony na podstawie elementów odwrotności wykaz błędów średnich dla sieci elementarnej z 16 trójkątów, analogiczny do wykazu podanego na str. 34 dla sieci elementarnych z 1, 4, 9 trójkątów.

(numery punktów zgodne ze szkicem sieci na rys. 14)

Numery punktów	Średnie błędy współrzędnych $m_x = m_y$	Średnie błędy położenia punktu
Sieć szesnastotrójkątowa		
1	$m_o D \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,155 m_o D$
2, 3	$m_o D \sqrt{\frac{59}{168}} = 0,593 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{59}{84}} = 0,838 m_o D$
4, 6	$m_o D \sqrt{\frac{127}{672}} = 0,435 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{127}{336}} = 0,615 m_o D$
5	$m_o D \sqrt{\frac{115}{672}} = 0,414 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{115}{336}} = 0,585 m_o D$
7, 10	$m_o D \sqrt{\frac{27}{336}} = 0,283 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{27}{168}} = 0,401 m_o D$
8, 9	$m_o D \sqrt{\frac{11}{112}} = 0,313 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{11}{56}} = 0,443 m_o D$
11, 13	$m_o D \sqrt{\frac{47}{672}} = 0,264 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{47}{336}} = 0,374 m_o D$
12	$m_o D \sqrt{\frac{71}{672}} = 0,325 m_o D$	$m_o D \sqrt{\frac{71}{336}} = 0,460 m_o D$
	m_o średni błąd pomiaru kąta w mierze radialnej, D długość wielkiego boku sieci (podstawy).	Wartość przeciętna średniego błędu punktu wyznaczonego przez sieć wynosi $0,58 m_o D$

Rozdział V

Porównanie dokładności mało- i wielotrójkątowych sieci elementarnych przez zastosowanie kryterium błędu średniego błędu

WSTĘP

Przeprowadzając dotychczasowe rozważania abstrahowaliśmy od tego z jaką dokładnością możemy w rozpatrywanych sieciach określić wielkość średniego błędu pojedynczej obserwacji, a więc w konsekwencji z jaką dokładnością ustalone będą w tych sieciach ostateczne charakterystyki

dokładnościowe: średnie błędy położenia wyznaczanych punktów, średnie błędy długości, kątów, kierunków czy jakichkolwiek innych funkcji wyrównanych współrzędnych. W dalszym ciągu zajmiemy się ustaleniem dokładności tych charakterystyk, bez czego powzięcie ostatecznej decyzji dotyczącej przewagi dokładnościowej sieci pewnego typu nie jest możliwe. Dopóki bowiem obracamy się w sferze czystej teorii możemy oczywiście zakładać, że błędy przypadkowe obserwacji kątowych w dwu sieciach podlegają prawu Gaussa-Laplace'a przy tej samej wartości miary dokładności h , a więc przy tej samej wartości średniego błędu pojedynczej obserwacji. Z chwilą jednak gdy przechodzimy do zastosowań praktycznych, musimy liczyć się z tym że wartości błędów średnich nie mogą być przez nas ściśle wyznaczone, gdyż musimy je ustalić w oparciu o skończoną ilość obserwacji. W następstwie średni błąd pojedynczej obserwacji m_0 stanowiący podstawowy czynnik w każdej charakterystyce dokładnościowej wyznaczony będzie z pewnym błędem. Spowodować to może, że z pomiędzy dwóch sieci, które przy założeniu tego samego błędu średniego pojedynczej obserwacji dają identyczne wartości błędów średnich wyznaczanych punktów, będziemy musieli uznać jedną sieć za zdecydowanie lepszą od drugiej, gdyż taki sam formalnie błąd średni pojedynczej obserwacji w jednej sieci wyznaczony będzie z wybitnie większą dokładnością, tzn. z wybitnie mniejszym błędem średnim. Jakkolwiek kryterium błędu średniego, średniego błędu, stanowiące potężną broń w naukowym badaniu przydatności sieci geodezyjnych, ustalone zostało już przez Gaussa, jest ono z reguły pomijane w analizach dokładnościowych i z tego względu pozwalamy sobie w tekście omówić jego istotę nieco obszerniej. Zastosowanie kryterium błędu średniego średniego błędu do zagadnienia sieci elementarnych doprowadzi nas do wniosku, że sieci małopółkątowe wykazują tu wybitną przewagę nad sieciami wielopółkątowymi, gdyż błąd średni średniego błędu — oznaczamy go symbolem m — wyraża się w zależności od ilości odcinków n na którą podzielono bok wyjściowy sieci, wzorem:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{4n^2 - 6n + 4}} \quad (V. 1)$$

Błąd średni średniego błędu jest więc jak widać w przybliżeniu proporcjonalny do długości boku elementarnego w sieci. Wynika stąd np. w szczególności, że otrzymując w sieci jednopółkątowej ($n = 1$) oraz w sieci dziewięciopółkątowej ($n = 3$) błąd średni pojedynczej obserwacji równy 1", możemy z jednakowym prawdopodobieństwem (równym ca 0,68) twierdzić że w pierwszej z tych sieci wartość bezwzględna średniego błędu obserwacji zawarta jest w granicach od 0,3 do 1,7 tak że w drugiej sieci wartość bezwzględna średniego błędu obserwacji zawarta jest w granicach od 0,8 do 1,2. Dane dokładnościowe drugiej sieci będą więc jak by można powiedzieć, dużo „realniejsze“ lub „pewniejsze“.

1. Omówienie istoty i przydatności pojęcia błędu średniego błędu

Gdybyśmy zapytali kogoś — mało nawet obznajmionego z rachunkiem wyrównawczym — co zasługuje na większe zaufanie: czy średnia arytmetyczna z 3 spostrzeżeń scharakteryzowana dokładnościowo przez pewien błąd średni średniej arytmetycznej m , czy średnia arytmetyczna z 9 spostrzeżeń scharakteryzowana dokładnościowo przez taki sam błąd średni średniej arytmetycznej m , zapytany wypowiedział by się niewątpliwie za obdarzeniem większym zaufaniem średniej arytmetycznej z większej ilości spostrzeżeń. Uważał by on zapewne, że średnia arytmetyczna z większej ilości spostrzeżeń mniej będzie zależna od przypadkowości w układzie błędów obserwacyjnych. Gdybyśmy rozszerzyli zapytanie formułując je tak: co zasługuje na większe zaufanie — średnia arytmetyczna z n spostrzeżeń scharakteryzowana przez średni błąd średniej arytmetycznej m_1 , czy też średnia arytmetyczna z n_2 spostrzeżeń scharakteryzowana przez średni błąd średniej arytmetycznej m_2 , zapytany nie sformułował by niewątpliwie tak prędko odpowiedzi nie znając pojęcia błędu średniego błędu, aczkolwiek zrozumiał by że istota zagadnienia jest tu ta sama. Istota zagadnienia sprowadza się bowiem do tego, że błąd średni określa się jako granicę do której dąży pierwiastek ze średniej arytmetycznej kwadratów błędów obserwacji o stałej dokładności, gdy ilość obserwacji wzrasta nieograniczenie. Im więc z większej ilości obserwacji — ogólniej: z im większej ilości obserwacji nadliczbowych — wyznaczać będziemy błąd średni, tym dokładniej a więc z tym mniejszym błędem średnim zostanie ten błąd wyznaczony. Związek między błędem średnim błędu średniego oraz ilością spostrzeżeń nadliczbowych w układzie z którego ten błąd wyznaczamy ma postać:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2 n_n}} \quad (V. 2)$$

tzn.: Błąd średni błędu średniego równy jest temu błędowi podzielonemu przez pierwiastek z ilości spostrzeżeń nadliczbowych pomnożonej przez dwa.

Znając ten związek nie potrzebujemy już podchodzić do pierwszego przykładu kierując się intuicją gdyż możemy go zinterpretować liczbowo. Ponieważ średnia arytmetyczna z 3 spostrzeżeń jest wielkością wyznaczoną z 2 spostrzeżeń nadliczbowych, zaś średnia arytmetyczna z 9 spostrzeżeń jest wielkością wyznaczoną z ośmiu spostrzeżeń nadliczbowych, więc błędy średnie średnich błędów średnich arytmetycznych wyniosą:

w pierwszym przypadku:

$$\frac{m}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \pm 0,5 m$$

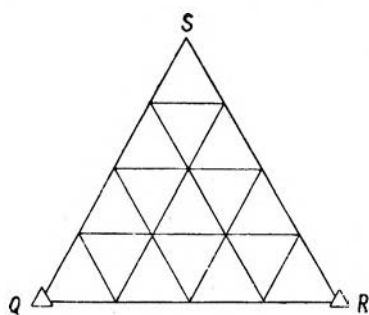
w drugim przypadku:

$$\frac{m}{\sqrt{2 \cdot 8}} = \pm 0,25 m.$$

Możemy z równym prawdopodobieństwem (równym prawdopodobieństwu nieprzekroczenia błędu średniego tzn. ok. 0,68) twierdzić, że co do wartości bezwzgl.:

- a) błąd średni średniej arytmetycznej z 3 spostrzeżeń zawiera się w granicach od + 0,5 m do + 1,5 m.
- b) błąd średni średniej arytmetycznej z 9 spostrzeżeń zawiera się w granicach od + 0,75 m do + 1,25 m, i obdarzać większym zaufaniem średnią z 9 spostrzeżeń jako „pewniejszą“.

2. Zastosowanie kryterium błędu średniego błędu do sieci o kształcie trójkąta foremnego wypełnionego przez trójkąty foremne (sieci „elementarnych“)



Rys. 15

Chcąc zastosować kryterium błędu średniego błędu do sieci nazywanych przez nas sieciami elementarnymi musimy wyznaczyć ilość obserwacji nadliczbowych n_n w sieci elementarnej, w której podstawa główna sieci QR podzielona została na n części, tj. w sieci elementarnej składających się n^2 trójkątów (rys. 15 przedstawia taką sieć dla przypadku $n = 4$, co zresztą nie ogranicza ogólności rozumowania). Ponieważ w każdym trójkącie takiej sieci

zaobserwowano po 3 kąty, przeto ogólna ilość obserwacji wynosi tu $3 n^2$.

Ilość wszystkich punktów w sieci — łącznie z punktami nawiazania Q i R — obliczyć łatwo jako sumę wyrazów postępu arytmetycznego

$$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n \ n + 1$$

równą:

$$\frac{1 + n + 1}{2} (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Odejmując od ilości wszystkich punktów dwa punkty nawiazania otrzymamy ilość punktów wyznaczanych przez sieć:

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - 2 = \frac{n^2 + 3n + 2 - 4}{2} = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$$

Ponieważ do wyznaczenia każdego punktu niezbędne są dwie obserwacje geodezyjne, wobec tego mieć będziemy dla takiej sieci:

$$\text{ilość obserwacji niezbędnych} = n^2 + 3n - 2$$

Odejmując ilość obserwacji niezbędnych od ogólnej ilości obserwacji dokonanych równej $3 n^2$, otrzymamy ilość obserwacji nadliczbowych n_n równą:

$$n_n = 2 n^2 - 3 n + 2.$$

Podzielenie średniego błędu obserwacji kątowej w sieci m_o przez pierwiastek z podwójnej ilości obserwacji nadliczbowych pozwoli nam ostatecznie napisać poszukiwany wzór na wielkość średniego błędu błędu średniego w sieci elementarnej wypełnionej przez n^2 trójkątów:

$$m_m = \frac{m_o}{\sqrt{4n^2 - 6n + 4}}$$

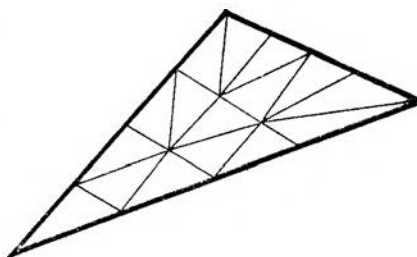
Realizując ten wzór dla $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ otrzymamy poniższą tabelkę:

n	Ilość trójkątów sieci n^2	Wielkość średniego błędu błędu średniego m_m
1	1	0,707 m_o
2	4	0,353 m_o
3	9	0,213 m_o
4	16	0,151 m_o
5	25	0,116 m_o
6	36	0,094 m_o

Z tabelki tej widać wybitną przewagę sieci małych trójkątów nad sieciami wielkotrójkątowymi pod względem dokładności wyznaczenia średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia, a w konsekwencji i dokładności wyznaczenia jakiejkolwiek innej charakterystyki dokładnościowej sieci. Pomimo więc, że błąd średni wyznaczenia położenia punktu najbardziej odległego od podstawy jest — przy tym samym błędzie średnim m_o — niezależny od ilości trójkątów w sieci, w istocie i ten punkt sieć małych trójkątów wyznaczy dokładniej.

3. Twierdzenie o zagęszczaniu dowolnej sieci

Weźmy dowolną sieć składającą się z t trójkątów — dowolnie usytuowanych — i utwórzmy z niej sieć nową w ten sposób, że podzielimy każdy z boków w danych trójkątach na n części, po czym wypełnimy każdy trójkąt przez n^2 nowych trójkątów. To wypełnienie, które nazwiemy „zagęszczeniem” sieci może się odbyć np. przez połączenie odpowiadających punktów podziału na dwóch bokach i dzielenie otrzymanych odcinków na 1, 2, 3... $n-1$ części. Po dokonaniu podziału łączymy punkty sąsiadujących linii działowych w sposób zobrazowany na rysunku uwidocznia-



Rys. 16

jącym taką konstrukcję dla przypadku $n = 4$. W wyniku zagęszczenia w każdym z t trójkątów pierwotnej sieci, łącznie z wierzchołkami trójkąta, mieć będziemy ilość punktów dającą się obliczyć jako suma wyrazów postępu arytmetycznego:

$$\frac{1 + (n + 1)}{2} (n + 1) = \frac{(n + 1)(2 + n)}{2}.$$

Odejmując od tego trzy punkty wierzchołkowe dzielonego trójkąta znajdziemy ilość punktów nowych w tym trójkącie równą:

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - 3 = \frac{n^2 + 3n + 2 - 6}{2} = \frac{n^2 + 3n - 4}{2}.$$

Ilość punktów nowych w całej sieci zależeć będzie od takiego czy innego usytuowania t trójkątów w sieci pierwotnej. W żadnym jednak razie ilość punktów nowych w całej sieci nie może być większa od iloczynu:

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{2} t,$$

którego wartość osiągnie w krańcowym przypadku, gdy żadne z dwóch trójkątów w sieci pierwotnej nie mają wspólnego boku. Wynika stąd, że ilość spostrzeżeń koniecznych do wyznaczenia nowych punktów sieci, czyli przyrost Δk ilości koniecznych obserwacji do zagęszczenia sieci spełniać musi nierówność:

$$\Delta k \leq (n^2 + 3n - 4)t \quad \text{lub inaczej:} \quad -\Delta k \geq -(n^2 + 3n - 4)t.$$

Przyrost ilości obserwacji wykonanych w sieci — oznaczmy go przez Δw — wynosić będzie:

$$w\Delta = 3n^2t - 3t,$$

gdyż $3n^2t$ jest ilością kątów w sieci zagęszczonej, zaś $3t$ jest ilością kątów w sieci pierwotnej. Odejmując od przyrostu ilości obserwacji dokonanych przyrost ilości obserwacji koniecznych, czyli sumując ostatnio napisane równanie i uprzednio znaną nierówność, otrzymamy przyrost ilości obserwacji nadliczbowych Δ jakiego dozna sieć w wyniku zagęszczenia. Będzie on równy:

$$\Delta \geq 3n^2 - 3t - n^2t - 3nt + 4t \quad \text{lub} \quad \Delta \geq 2n^2t - 3nt + t.$$

Ponieważ prawa strona nierówności daje się przedstawić pod postacią iloczynu trzech czynników z których dla $n > 1$ każdy jest dodatni: $t(n - 1) \cdot (2n - 1)$, więc ilość obserwacji nadliczbowych przy zagęszczeniu sieci zawsze wzrasta a tym samym błąd średni średniego błędu przy zagęszczeniu sieci maleje.

Tę właściwość odnoszącą się do dowolnej sieci można ująć w następujące ciekawe twierdzenie o zagęszczaniu dowolnej sieci: przyrost ilości obserwacji nadliczbowych powstający w wyniku zagęszczenia sieci o t trójkątach na drodze podziału każdego boku w każdym trójkącie na n

części i wypełnienia każdego trójkąta przez n^2 trójkątów nowych spełnia nierówność:

$$\Delta \geq t(n-1)(2n-1) \quad (V\ 3)$$

z czego wynika, że wszelkie zagęszczenie sieci zwiększa ilość obserwacji nadliczbowych, a więc zmniejsza błąd średni średniego błędu.

Rozdział VI

Porównanie sieci mało- i wielkotrójkątowych z punktu widzenia efektu ogólnego procesów wyrównawczych. Twierdzenie Otrębskiego o średnim zmniejszeniu błędu średniego obserwacji przez proces wyrównawczy

WSTĘP

Efektom każdego procesu wyrównawczego jest zmniejszenie średniego błędu wielkości obserwowanej. Przy wyrównywaniu dowolnego układu obserwacyjnego przystępujemy do zadania opierając się na zespole wielkości obserwowanych obciążonych określonymi błędami średnimi, zaś w rezultacie zastosowania do tego zespołu zasady minimum otrzymujemy nowy zespół — zespół wielkości również obciążonych określonymi błędami średnimi, jednak zmniejszonymi tak czy inaczej przez proces wyrównania. To zmniejszenie średniej wartości błędu średniego (względnie kwadratu błędu średniego) obserwacji, spowodowane przez proces wyrównania metodą najmniejszych kwadratów, stanowi wartościowe, choć oczywiście nie wyczerpujące, kryterium celowości założenia danego układu obserwacyjnego. Dzięki rozwojowi rachunku krakowianowego Banachiewicza okazało się możliwym proste sformułowanie prawa rządzącego zmniejszeniem średniej wartości błędu średniego spowodowanym przez wyrównanie układu metodą najmniejszych kwadratów. To prawo sformułowane przez A. Otrębskiego nosi nazwę: „twierdzenia o średnim zmniejszeniu kwadratu błędu obserwacji przez wyrównanie“ lub „twierdzenia Otrębskiego“, i daje się wypowiedzieć jak następuje: W każdym układzie obserwacyjnym średnia arytmetyczna ze stosunków: kwadratu błędu średniego obserwacji po wyrównaniu do kwadratu błędu średniego tejże obserwacji przed wyrównaniem — przy przeprowadzeniu wyrównania metodą najmniejszych kwadratów — równa jest stosunkowi ilości obserwacji niezbędnych do wyznaczenia układu do ilości wszystkich dokonanych w układzie obserwacji.

Oznaczając przez r średnią arytmetyczną ze stosunków kwadratu błędu średniego po wyrównaniu do kwadratu błędu średniego przed wyrówna-

niem (wielkość tę można by nazywać np. ogólnym „efektem“ wyrównania), tzn. kładąc:

$$r = \frac{1}{n} \left(\frac{\overline{m}_1^2}{m_1^2} + \frac{\overline{m}_2^2}{m_2^2} + \dots + \frac{\overline{m}_n^2}{m_n^2} \right) \quad \text{gdzie } \frac{\overline{m}_i}{m_i} \text{ błędy } \begin{matrix} \text{śr:} & \text{po wyrównaniu} \\ & \text{przed wyrównaniem} \end{matrix}$$

zapiszemy twierdzenie Otrębskiego: jn

$$r = \frac{\text{ilość obserwacji niezbędnych w układzie}}{\text{ilość obserwacji dokonanych w układzie}} \quad (\text{VI } 1)$$

Zastosowanie twierdzenia Otrębskiego do sieci utworzonych przez wypełnienie trójkąta foremnego przez trójkąty foremne, tj. do sieci które nazwaliśmy sieciami elementarnymi, wykazuje i tutaj przewagę sieci małopółkowych nad sieciami wielkopółkowymi. Stosunek bowiem r maleje ze wzrostem ilości trójkątów w sieci, dążąc do granicy równej $\frac{1}{3}$.

Związek ma postać:

$$r = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{2}{3n^2} \quad (\text{VI } 2)$$

jeżeli rozumieć przez n ilość odcinków na jaką podzieliliśmy bok wyjściowy sieci (tzn. n^2 jest ilością trójkątów w sieci).

Ze względu na ogromną ogólność twierdzenia Otrębskiego i małe jego rozpowszechnienie omówimy je nieco obszerniej w tekście.

1. Omówienie zagadnienia zmniejszenia średniego błędu obserwacji przez wyrównanie. Dowód słuszności twierdzenia Otrębskiego

W wyniku wyrównania układu n spostrzeżeń nad jedną niewiadomą:

$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \dots l_n$ obciążonych średnimi błędami:

$m \quad m \quad m \dots m$ otrzymujemy układ wartości wyrównanych:

$l_1 + v_1 \quad l_2 + v_2 \quad l_3 + v_3 \dots l_n + v_n$ obciążonych średnimi błędami

równymi:

$$\frac{m}{\sqrt{n}} \quad \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \frac{m}{\sqrt{n}} \dots \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Stosunek kwadratu błędu średniego obserwacji po wyrównaniu do kwadratu błędu średniego obserwacji przed wyrównaniem będzie tutaj jak widać zawsze równy:

$$\frac{m^2}{n} : \frac{1}{m^2} = \frac{1}{n}.$$

Ponieważ liczba 1 wyraża tu ilość obserwacji niezbędnych do wyznaczenia jednej niewiadomej, zaś liczba n wyraża ilość obserwacji dokonanych w układzie, przy tym średnia z n równych sobie wielkości równa jest tej wielkości, przeto możemy, jak widać, znany wzór na błąd średni

średniej arytmetycznej inaczej zinterpretować mówiąc: wynikiem wyrównania układu obserwacji nad jedną niewiadomą jest zmniejszenie się kwadratu błędu średniego obserwacji, względnie zmniejszenie się przeciętnej wartości kwadratu błędu średniego obserwacji, równe liczbowo stosunkowi ilości obserwacji niezbędnych do ilości wszystkich dokonanych obserwacji.

Zauważymy, że ta sama zasada będzie obowiązywała dla przypadku spostrzeżeń nad jedną niewiadomą wykonanych nie z jednakową dokładnością — jak to przyjmowaliśmy powyżej — lecz z różnymi dokładnościami, scharakteryzowanymi przez średnie błędy równe: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.

W przypadku takim błędy średnie obserwacji po wyrównaniu, czyli błąd średni uogólnionej średniej, będzie jak wiadomo równy:

$$\frac{m_o}{\sqrt{[p]}} \cdot \frac{m_o}{\sqrt{[p]}} \cdot \dots \cdot \frac{m_o}{\sqrt{[p]}}$$

przy czym związek między „wagą“ i -tej obserwacji p_i jest średnim błędem m_i oraz średnim błędem spostrzeżenia o jednostkowej wadze m_o wyraża znany wzór

$$p_i = \frac{m_o^2}{m_i^2}.$$

Obliczając średnią ze stosunku kwadratów błędów średnich obserwacji po wyrównaniu do kwadratów błędów średnich obserwacji przed wyrównaniem znajdujemy (oznaczamy tę średnią przez r):

$$r = \frac{\frac{m_o^2}{[p]m_1^2} + \frac{m_o^2}{[p]m_2^2} + \dots + \frac{m_o^2}{[p]m_n^2}}{n} = \frac{1}{[n]} \left(\frac{m_o^2}{m_1^2} + \frac{m_o^2}{m_2^2} + \dots + \frac{m_o^2}{m_n^2} \right)$$

Skąd ostatecznie uwzględniając że $\left[\frac{m_o^2}{m_i^2} \right] = [p]$, otrzymujemy tak samo

jak w przypadku spostrzeżeń jednakowo dokładnych: $r = \frac{1}{n}$.

Przechodzimy do udowodnienia słuszności twierdzenia Otrębskiego, to znaczy do wykazania, że omówiona wyżej właściwość średniego zmniejszania się kwadratu błędów obserwacyjnych w stosunku: (ilość obserwacji niezbędnych) do (ilości obserwacji wykonanych) jest właściwa wszystkim układom obserwacyjnym wyrównanym metodą najmniejszych kwadratów. Ponieważ interesujący nas przypadek wyrównywania sieci triangulacyjnych dotyczy układów obserwacji jednakowo dokładnych, poprzestaniemy na przeprowadzeniu dowodu dla tego tylko przypadku, aczkolwiek twierdzenie nie ogranicza się do tego tylko przypadku.

Niech więc będzie układ równań błędów jednakowo dokładnych obserwacji o błędzie średnim pojedynczej obserwacji równym m_0 . Chcąc wyznaczyć z tego układu

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z \dots &= l_1 + v_1 \text{ (ilość równań błędów } n) \\ a_2x + b_2y + c_2z \dots &= l_2 + v_2 \text{ (ilość niewiadomych } u) \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

średni błąd i -tej obserwacji po wyrównaniu zastosować możemy wzór na błąd średni funkcji niewiadomych wyznaczonych z układu równań normalnych Gaussa:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z \dots &= [al] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z \dots &= [bl] \end{aligned}$$

który uzasadniliśmy i stosowaliśmy w rozdziale II, i który tu przypominamy:

$$m_i^2 = m_0^2 (f(a^2)^{-1}f)$$

Ponieważ wartość i -tej obserwacji po wyrównaniu wyrazi się przez niewiadome układu równań normalnych jak następuje:

$$a_ix + b_iy + c_iz \dots$$

przeto krakowian f mieć będzie postać: $f = \tau(a_i b_i c_i \dots)$ i obliczenie stosunku kwadratu średniego błędu i -tej obserwacji po wyrównaniu do kwadratu średniego błędu i -tej obserwacji przed wyrównaniem będzie wymagało zrealizowania wzoru:

$$\frac{m_i^2}{m_0^2} = \left\{ \begin{matrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ \vdots \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} & \dots \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} & \dots \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ \vdots \end{matrix} \right\}$$

gdzie krakowian Q jest odwrotnością krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych Gaussa to znaczy $Q(a^2) = \tau$.

Łatwo jednak zauważyć, że realizację napisanego wzoru krakowianowego na stosunek $m_i^2 : m_0^2$ przeprowadzić można zestawiając tabelę liczbową:

$a_i a_i$	$a_i b_i$	$a_i c_i$	$\dots$	$\cdot$	Q_{11}	Q_{21}	Q_{31}	$\dots$	$\cdot$
$a_i b_i$	$b_i b_i$	$b_i c_i$	$\dots$	$\cdot$	Q_{12}	Q_{22}	Q_{32}	$\dots$	$\cdot$
$a_i c_i$	$b_i c_i$	$c_i c_i$	$\dots$	$\cdot$	Q_{13}	Q_{23}	Q_{33}	$\dots$	$\cdot$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\cdot$

i sumując, otrzymane w drodze takiego „zupełnego” mnożenia tabel, iloczyny.

Wynika stąd, że dla zesumowania wszystkich stosunków $m_i^2 : m_o^2$ gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, n$ wystarczy zestawić tabelę liczbową:

[aa] [ab] [ac] ...	pomnożyć każdy element tej ta-	Q_{11} Q_{21} Q_{31} ...
[ab] [bb] [bc] ...	beli przez odpowiadający mu	Q_{21} Q_{22} Q_{23} ...
[ac] [bc] [cc] ...	położeniem element tabeli:	Q_{31} Q_{32} Q_{33} ...

i zesumować otrzymane w drodze tego mnożenia iloczyny. Ponieważ zaś mnożąc elementy każdej kolumny pierwszej tabeli przez odpowiadające elementy odpowiadającej kolumny drugiej tabeli i sumując iloczyny otrzymywać musimy jedność, gdyż krakowiany $\underline{a}^2$ i $\underline{Q}$ — o analogicznych tabelach — są wzajemnie odwrotne, przeto rezultatem zesumowania wszystkich stosunków $m_i^2 : m_o^2$ musi być jedność powtórzona tyle razy, ile rzędów mają powyższe tabele, czyli ile niewiadomych występuje w danym układzie równań normalnych:

$$\frac{m_1^2}{m_o^2} + \frac{m_2^2}{m_o^2} + \frac{m_3^2}{m_o^2} + \dots + \frac{m_n^2}{m_o^2} = u.$$

Dzieląc sumę stosunków kwadratów błędów średnich po wyrównaniu do kwadratów błędów średnich przed wyrównaniem przez ogólną ilość obserwacji równą n otrzymamy poszukiwane „średnie zmniejszenie kwadratu błędu obserwacyjnego“ spowodowane przez wyrównanie, czyli wielkość którą oznaczyliśmy przez r :

$$r = \frac{u}{n}$$

lub, ponieważ ilość równań normalnych u wyraża ilość obserwacji niezbędnych do wyznaczenia rozważanego układu, będzie też:

$$r = \frac{\text{ilość obserwacji niezbędnych w układzie}}{\text{ilość obserwacji dokonanych w układzie}}$$

co mieliśmy udowodnić.

2. Zastosowanie twierdzenia Otrębskiego do sieci elementarnych

Dla obliczenia efektu wyrównania w sieciach elementarnych przypomniemy, że ilość obserwacji wykonanych w takiej sieci wynosi $3n^2$, zaś ilość obserwacji niezbędnych do wyznaczenia układu równa jest $n^2 + 3n - 2$ (Rozdz. V).

Symbol n oznacza przy tym ilość odcinków na jaką podzielono bok wyjściowy sieci, tzn. n^2 jest ilością trójkątów w sieci. W związku z tym średnie zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji r wyniesie:

$$r = \frac{n^2 + 3n - 2}{3n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{2}{3n^2}$$

Konkretnie dla $n = 1$ otrzymalibyśmy:

$$r_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{2}{3 \cdot 1^2} = \frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

Natomiast dla $n = 4$ otrzymalibyśmy:

$$r_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3 \cdot 4^2} = \frac{26}{48} = \frac{13}{24} \quad \text{itp.}$$

Różnica w zmniejszeniu kwadratu błędu średniego obserwacji nie jest tu zresztą duża, lecz przemawia zdecydowanie za sieciami małopółkątowymi.

Rozdział VII

Podsumowanie wyników badania dokładnościowego sieci elementarnych i wnioski z tego badania

Wyniki badania nad sieciami o kształcie trójkąta foremnego wypełnionego przez n^2 trójkątów foremnych ($n = 1, 2, 3, 4$), które nazwaliśmy sieciami elementarnymi, streścić możemy krótko jak następuje:

Przy stałej wartości średniego błędu obserwacji kątowej m_o , wartość techniczna punktów wyznaczanych przez sieć małopółkąową będzie wyższa od wartości technicznej punktów wyznaczonych przez odpowiadającą sieć wielopółkąową, gdyż:

a) Chociaż średni błąd położenia punktu najbardziej odległego od podstawy sieci będzie dla obu porównywanych sieci taki sam:

$$m_s = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3}}$$

a w konsekwencji równe też będą dla obu sieci wielkość błędów względnych boków wielkich sieci i błędy średnie kątów w wielkim trójkącie sieci, równe:

$$M = m_o \sqrt{2/3}$$

jednak błędy średnie wyznaczenia punktów pośrednich w sieci małopółkąowej będą cokolwiek mniejsze od błędów średnich wyznaczenia tych samych punktów pośrednich w sieci wielopółkąowej. Różnice tych błędów, podane w rozdziale IV, są zresztą bardzo nieznaczne i w żadnym razie przy braku innych argumentów nie mogły by stanowić podstawy do uznania praktycznej wyższości małopółkąowych sieci elementarnych nad wielopółkąowymi.

b) Sieci małopółkąowe w dużo mniejszym stopniu deformują układ w przypadku popełnienia nieprzypadkowego („grubego”) błędu w obserwacji. W szczególności jeżeli zniekształcimy dowolną obserwację kątową w sieci elementarnej o wielkość dl i przeprowadzimy wyrównanie ukła-

du metodą najmniejszych kwadratów otrzymamy w wyniku przesunięcie punktu najdalszego od podstawy równe

$$dp = -\frac{2}{3} \cdot d \cdot dl \quad \text{gdzie } d \text{ bok małego trójkąta sieci.}$$

Wartość liniowego przesunięcia punktu spowodowanego przez błąd grubość jest więc proporcjonalna do długości małego boku sieci, a przez to samo popełnienie błędu grubego w sieci małopółkąowej jest dużo mniej szkodliwe w skutkach.

c) Wielkość błędu średniego błędu z uwagi na dużo większą ilość spostrzeżeń nadliczbowych w sieciach małopółkąowych jest zawsze dla sieci małopółkąowej mniejsza jak dla sieci wielkopółkąowej opartej o te same punkty. W szczególności dla sieci elementarnej o n^2 trójkątach błąd średni średniego błędu, obliczonego w toku wyrównania w oparciu o znajomość sumy kwadratów poprawek, wyniesie:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{4n^2 - 6n + 4}}$$

Wynika stąd, że wszelkie charakterystyki dokładnościowe (średnie błędy obserwacji, średnie błędy współrzędnych, średnie błędy boków czy kątów po wyrównaniu itp.) obliczane z sieci małopółkąowych są wiarygodniejsze od odnośnych charakterystyk obliczanych z sieci wielkopółkąowych. Tym samym jednak i materiał techniczny dla prac inżynierskich, a więc współrzędne punktów sieci, uzyskany z sieci małopółkąowych będzie zawsze wiarygodniejszy od materiału technicznego uzyskanego z sieci wielkopółkąowych niezależnie od tego czy przeprowadza się w danej pracy rachunek charakterystyk dokładnościowych, czy się go pomija.

Cecha większej wiarygodności materiału technicznego uzyskiwanego z sieci małopółkąowych nie odnosi się przy tym tylko do sieci elementarnych, leczb do zupełnie dowolnych sieci. Zagęszczenie bowiem jakiegokolwiek sieci składającej się z t trójkątów, dokonane w drodze podzielenia każdego boku tej sieci na n części i utworzenia wewnątrz każdego trójkąta nowych n^2 trójkątów, spowoduje wzrost ilości spostrzeżeń nadliczbowych o wielkość niemniejszą od wielkości

$$t \cdot (n - 1) \cdot (2n - 1)$$

która jest zawsze liczbą dodatnią.

d) Średnie zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji spowodowane przez wyrównanie układu metodą najmniejszych kwadratów, równe na zasadzie twierdzenia Otrębskiego stosunkowi ilości obserwacji

niezbędnych dla wyznaczenia układu do ilości wszystkich dokonanych w układzie obserwacji, wyraża dla sieci elementarnych wzór:

$$r = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{2}{3n^2}$$

z którego wynika, że średnie zmniejszenie kwadratu błędu obserwacji będzie zawsze przemawiało za sieciami małotrójkątowymi. Średnie bowiem zmniejszenie kwadratu błędu obserwacji ze wzrostem n stale maleje, dążąc do granicy $1/3$ stanowiącej najwyższy efekt jakiego dostarczyć może wyrównanie układu metodą najmniejszych kwadratów przy wyrównywaniu sieci elementarnych.

Ostatni argument (d) trudno jest traktować jako argument sam z siebie wystarczający do przyznania przewagi sieciom małotrójkątowym nad sieciami wielkotrójkątowymi. Praktycznie — dopóki nie mówimy o tak wielkiej wartości n jaka w technice i tak stosowana nie będzie — zmniejszenie się kwadratu błędu średniego będzie znikome (np. dla $n = 1$ będzie

$$r = \frac{26}{24}, \text{ zaś dla } n = 4 \text{ otrzymamy } r = \frac{13}{24} \text{ itp.).}$$

Podaliśmy tu jednak i ten argument — raz dlatego, że oparty jest na twierdzeniu wysoce interesującym przez swą ogólność, powtóre dlatego, że naświetla on zagadnienie od szerszej pojętej strony koncepcyjnej. Nie wnikając mianowicie w szczegóły stwierdzamy tu od razu, że koncepcja sieci małotrójkątowych jest poprawniejsza od koncepcji sieci wielkotrójkątowych. Istotna bowiem korzyść jaką osiągamy z wyrównywania układów metodą najmniejszych kwadratów: uzyskanie rezultatów dokładniejszych od rezultatów obserwacji bezpośrednich występuje wydatniej w sieciach małotrójkątowych.

Spośród wszystkich powyżej przytoczonych argumentów przemawiających za sieciami małotrójkątowymi autor niniejszej pracy uważa za argumenty największej wagi, o charakterze rozstrzygającym, znikomość wpływu błędów nieprzypadkowych w sieciach małotrójkątowych na pierwszym miejscu oraz zmniejszanie się błędu średniego w tych sieciach na miejscu drugim.

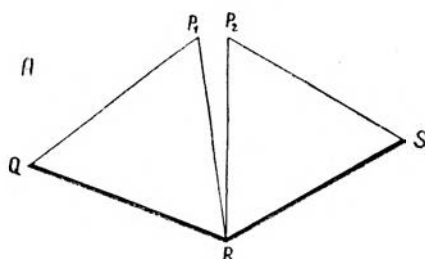
Autor pracy jest nawet zdania, że każda z wymienionych ostatnio zalet sieci małotrójkątowych wzięta oddzielnie już dostatecznie wyraźnie przemawia — z punktu widzenia analizy dokładności — za zerwaniem z klasyczną koncepcją sieci wielkotrójkątowych z którą tak energiczną walkę podjął w ostatnich czasach prof. Bastl, o czym mówi się obszerniej w innym miejscu pracy.

Badając w następstwie sieci złożone z sieci elementarnych przekonamy się, że zalety sieci małotrójkątowych wystąpią tam o wiele wyraźniej niż w oderwanej od całości analizie sieci elementarnych. W miarę mianowicie łączenia sieci elementarnych w coraz większe zespoły centralne, coraz dobitniej występować będzie zjawisko zmniejszania się wielkości śred-

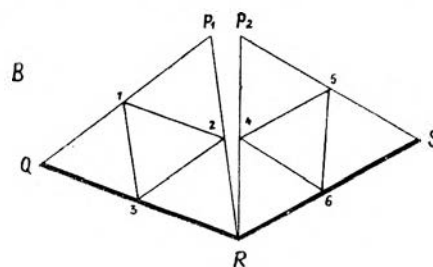
niego błędu wyznaczania położenia punktów, nie odgrywające w analizie sieci elementarnych praktycznego znaczenia ze względu na rząd wielkości (czytelnik zauważył że zbagatelizowaliśmy świadomie zwiększenie dokładności wyznaczania położenia punktów pośrednich w miarę zagęszczania sieci elementarnej nie podając nawet w niniejszych wnioskach danych cyfrowych dotyczących analizy porównawczej sieci cztero i szesnastokątowej przeprowadzonej na str. 55 i nast.

Ponieważ zjawisko wzrostu dokładności wyznaczania położenia punktów w sieciach centralizujących sieci elementarne daje się przewidzieć już na podstawie dotychczasowej analizy, uważamy za wskazane w zakończeniu części I pracy, dotyczącej analizy sieci elementarnych, poświęcić mu parę słów.

Wyobraźmy sobie w tym celu, że z punktów stałych QRS , tworzących równoramienny trójkąt o kącie wierzchołkowym w punkcie R równym 120° i o bokach $QR = RS = D$, wyznaczamy za pośrednictwem sieci elementarnych położenie punktów P_1 i P_2 (rys. 17) tak usytuowanych w



Rys. 17



Rys. 18

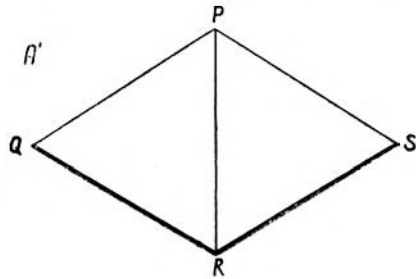
stosunku do punktów QRS aby można trójkąty QRP_1 oraz RSP_2 uważać, z dostateczną dla analizy dokładnościowej dokładnością — za trójkąty foremne.

W myśl znanego nam już twierdzenia o błędzie średnim położenia punktu najbardziej oddalonego od podstawy w sieci elementarnej ustalimy że średnie błędy położenia, zarówno punktu P_1 , jak i punktu P_2 równo będą $\frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$ niezależnie od tego z jakiej sieci elementarnej położenie ich zostanie określone. Znajdzie więc to zarówno w przypadku wyznaczenia położenia punktów z sieci RQP_1 oraz SRP_2 przedstawionych na rys. 17, jak i z sieci $P_1 1, 2, Q, 3, R$ oraz $P_2 4, 5, R, 6, S$ przedstawionych na rys. 18.

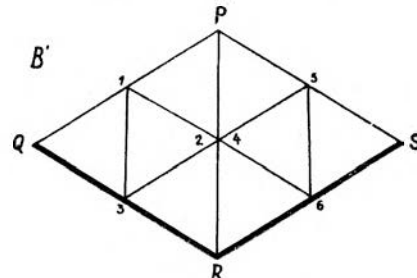
Jeżeli jednak wyobraźmy sobie teraz że punkty P_1 i P_2 stają się identyczne, zamieniając się na punkt P , oraz że punkty 2 i 4 stają się identyczne, zamieniając się na punkt 24, co ilustrują załączone rysunki na których powstające w wyniku omówionej zmiany konstrukcje, rys. 17, rys. 18 i rys. 19, 20, wówczas — jak to łatwo można przewidzieć — w obu

konstrukcjach zmaleje średni błąd wyznaczenia położenia punktu P , jednak w sieci małopółkątowej (rys. 20) błąd ten musi zmniejszyć się wydatniej.

W sieci wielokątowej (rys. 19) obie bowiem użyte do konstrukcji sieci elementarne QRP i RSP związane będą przez warunek identyczności jednego tylko punktu P , dającego się wyznaczyć z obu tych sieci.



Rys. 19



Rys. 20

W sieci małopółkątowej natomiast obie użyte do konstrukcji sieci elementarne QRP i RSP będą obecnie związane zarówno przez warunek identyczności punktu P , jak i przez warunek identyczności punktu 24.

Można by powiedzieć, że rachmistrz wyrównujący (nieprawidłowo wprowadzając z punktu widzenia metody najmniejszych kwadratów) układ wielokątowy może obliczyć współrzędne punktu P raz z sieci QRP jako całości, następnie z sieci RSP jako całości, a następnie wypośredkować średnie, zwiększając tak dokładność wyznaczenia. Rachmistrz natomiast wyrównujący układ małopółkątowy, przeprowadzając analogiczny rachunek, będzie miał ponadto możliwość zwiększenia dokładności wyznaczenia położenia punktu P , jeżeli jeszcze uwzględni warunek identyczności punktu 24 obliczonego raz z sieci RQP , a drugi raz z sieci RSP .

W poprawnej naukowej analizie trzeba oczywiście stanąć ściśle na gruncie metody najmniejszych kwadratów, zamiast posilkować się intuicją geometryczną, co zrobiliśmy w niniejszych rozważaniach. Droga przeprowadzenia poprawnej analizy jest nam już dobrze znana, gdyż takie analizy przeprowadzaliśmy w części I dla sieci elementarnych ze wszystkimi szczegółami rachunku. Analizie sieci okrężających, jak nazywać będziemy sieci powstające przez zespolenie sieci elementarnych zilustrowane tu na przykładzie, poświęcona będzie część II niniejszej pracy.

Część II

Badanie sieci okrężających i ilustracje graficzne badań

Rozdział VIII

Wyznaczanie punktów sieci centralnych i częściowo-centralnych z punktów obwodowych

WSTĘP

W rozdziałach poprzedzających zajmowaliśmy się zagadnieniem wyznaczenia dokładności położenia punktu stanowiącego wierzchołek trójkąta foremego, którego podstawa jest znana. Rozszerzymy obecnie treść zagadnienia badając dokładność wyznaczania punktu określonego z większej od dwóch ilości punktów stałych położonych na obwodzie sześciokąta foremego. Rozpocznijmy od przypadku najprostszego, gdy punkt P (rys. 21) wyznaczony zostaje przez pomierzenie wszystkich kątów w t trójkątach foremnych ($t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), których podstawami — znanymi w zagadnieniu — są boki sześciokąta foremego.

Jak wyniknie z badania związek między wielkością średniego błędu pomiaru kąтового m_o , długością boku sieci D oraz ilością trójkątów użytych do wyznaczenia t ma postać:

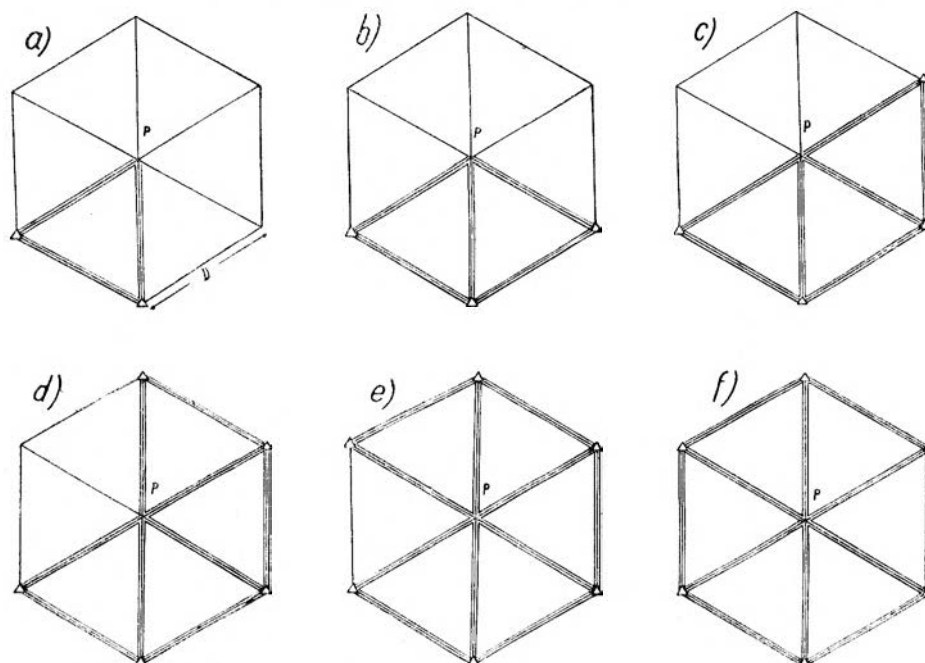
$$m_p = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3t}} \quad (\text{VIII. 1})$$

Wzór ten — w pewnym znaczeniu — uważać można za ogólniejszą postać związku $m_p = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3}}$ obowiązującego dla pojedynczego trójkąta.

Wzór ujmuje przy tym zarówno przypadki przedstawione na rysunku 21 — gdy trójkąty sąsiadują ze sobą — jak i wszelkie inne możliwe układy t trójkątów opartych o punkty obwodowe. Średni błąd względny wyznaczenia odległości między punktem centralnym i peryferyjnym jest także odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka z ilości trójkątów wyznaczających i wynosi odpowiednio:

$$M = \frac{m_p}{D} = m_o \sqrt{\frac{2}{3t}} \quad (\text{VIII. 2})$$

W dalszym ciągu poddaje się badaniu sieci zbudowane w analogiczny do wyżej opisanego sposobu z sieci elementarnych cztero-trójkątowych. Okazuje się, że w procesie „okrażania” punktu centralnego, to znaczy w procesie wyznaczania go z coraz to większej ilości sieci elementarnych opartych o wierzchołki sześcioboku foremnego, dokładność wyznaczenia położenia punktu centralnego rośnie szybciej aniżeli to zachodziło w



Rys. 21

przypadku użycia w konstrukcji sieci elementarnych jedno-trójkątowych. Uzmysławia to rysunek 22, na którym wykreślono analogiczną konstrukcję okrażającą, raz przy użyciu sieci elementarnych jedno-trójkątowych, a drugi raz przy użyciu sieci elementarnych cztero-trójkątowych, pisząc na rysunku wielkości odpowiadających błędów średnich wyznaczenia położenia punktu centralnego.

Oznaczając przez $m_{(1)}$ błąd średni wyznaczenia położenia punktu centralnego w dowolnej sieci okrażającej opartej o więcej niż dwa punkty stałe, przy posługiwaniu się sieciami elementarnymi jedno-trójkątowymi, zaś przez $m_{(4)}$ błąd średni wyznaczenia położenia tegoż punktu w takiej samej sieci okrażającej przy posługiwaniu się sieciami elementarnymi cztero-trójkątowymi, będziemy mieć zawsze:

$$m_{(4)} < m_{(1)}.$$

Wielkości błędu średniego położenia punktu centralnego wyznaczanego przez układy sieci elementarnych cztero-trójkątowych podajemy dalej.

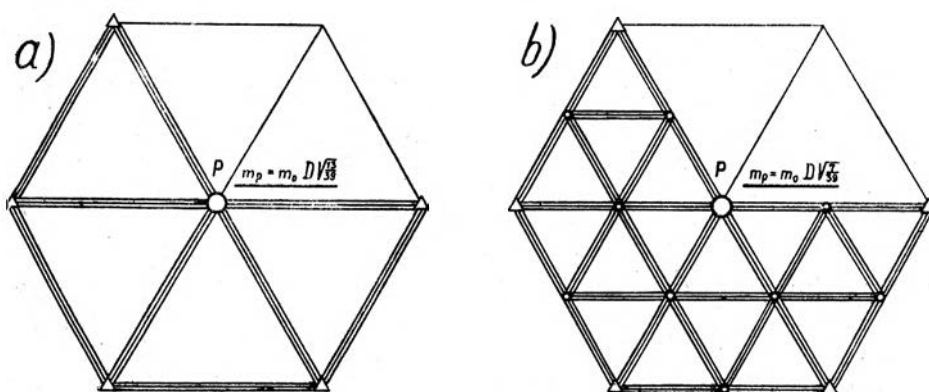
Przy oznaczeniu przez t ilości wielkich trójkątów w sieci budowanej z sieci elementarnych czterotrójkątowych dla t różnego od jedności słuszną będzie nierówność:

$$m_p < \frac{2 m_o D}{\sqrt{4t}} \quad (\text{VIII. 3})$$

którą napisaliśmy w tej formie dla ułatwienia porównania z wzorem:

$$m_p = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3t}}$$

obowiązującym dla układów budowanych z sieci elementarnych jednotrójkątowych.



Rys. 22

Słuszność napisanej powyżej nierówności łatwo sprawdzić porównując z tabelą funkcyjną na str. 101 podającą wartości średniego błędu położenia punktu centralnego dla $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, gdzie podaliśmy też równania pozwalające obliczyć wielkości m_p dla dowolnego t od 1 do 6. W uciążliwym rachunku analiz sieci okrażających przeważający wkład pracy wnieśli inż. Ireneusz Gombrych i inż. Wojciech Janusz.

1. Ustalenie wzoru na błąd średni położenia punktu centralnego wyznaczonego z punktów obwodowych dla przypadku sieci pojedynczych trójkątów

Rozważajmy układ centralny trójkątów foremnych, w którym wyznaczeniu podlega punkt centralny P , zaś punkty na obwodzie są punktami stałymi. W układzie takim możemy obserwować kąty wypełniające t dowolnych trójkątów układu.

Jeżeli zestawimy równania obserwacyjne wszystkich kątów w układzie, grupując je według poszczególnych trójkątów, zauważymy od razu interesującą właściwość jaką odznaczać się będą równania normalne Gaussa zestawiane dla układów obserwacyjnych obejmujących pełny zespół kątów t trójkątów naszego układu.

nostkę i kierując oś główną OX układu w kierunku promienia. Pisząc równania obserwacyjne (równania błędów) dla kątów 1, 2, 3 w trójkącie I otrzymujemy:

Zestawienie równań obserwacyjnych dla kątów 4, 5, 6 daje:

Dla kątów 7, 8, 9 otrzymamy:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -0.5 & -0.5\sqrt{3} & -0.5 & 0.5\sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy \\ -0.5 & 0.5\sqrt{3} & 1 & 0 & -0.5 & -0.5\sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5\sqrt{3} & -0.5 & 0.5\sqrt{3} & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \ln : \quad \begin{array}{|c|c|} \hline dx & dy \\ \hline 0 & -1 \\ -0.5\sqrt{3} & 0.5 \\ 0.5\sqrt{3} & 0.5 \\ \hline \end{array}$$

Dla kątów 10, 11, 12 znajdujemy:

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|} \hline 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & -0,5\sqrt{3} & -1 & 0 \\ \hline dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0,5 & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy \\ 0,5 & 0,5\sqrt{3} & -1 & 0 & 0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ \hline \end{array} \quad \text{czyli:} \quad \begin{array}{cc} dx & dy \\ \hline -0,5\sqrt{3} & -0,5 \\ 0 & 1 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$$

Zestawienie równań obserwacyjnych dla kątów 13, 14, 15 daje:

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy \\ 0,5 & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & -0,5\sqrt{3} & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0,5 & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ \hline dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5\sqrt{3} & -1 & 0 & 0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{czyli pod} \\ \text{postacią} \\ \text{tabeli:} \end{array} \quad \begin{array}{cc} dx & dy \\ \hline 0 & 1 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{array}$$

Wreszcie pisząc równania obserwacyjne dla kątów 16, 17, 18 otrzymamy:

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|} \hline dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & -0,5\sqrt{3} & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy \\ -1 & 0 & 0,5 & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5\sqrt{3} & -1 & 0 & 0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{lub pod} \\ \text{postacią} \\ \text{tabeli:} \end{array} \quad \begin{array}{cc} dx & dy \\ \hline 0,5\sqrt{3} & -0,5 \\ -0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{array}$$

Ponieważ w każdej z otrzymanych tabel współczynnikowych suma kwadratów dowolnej kolumny równa się $\frac{3}{2}$ (mamy bowiem $(0,5\sqrt{3})^2 + (0,5\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}$ oraz $(0,5)^2 + (0,5)^2 + 1 = \frac{3}{2}$), zaś suma iloczynów elementów jednej kolumny przez odpowiadające elementy drugiej kolumny jest zawsze zerem, przeto: zestawiając układ równań normalnych Gaussa dla jakichkolwiek t trójkątów układu, w którym zaobserwowano wszystkie kąty w każdym trójkącie (nie obserwując innych kątów w układzie), otrzymamy zawsze tabelę współczynnikową układu równań normalnych Gaussa o postaci:

$$a^2 = \begin{pmatrix} \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

Ponieważ odwrotnością tej tabeli jest tabela:

$$(a^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3t} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3t} \end{pmatrix}$$

więc średni błąd rzędnej lub odciętej punktu centralnego wyznaczonego w drodze zaobserwowania wszystkich kątów w t trójkątach wyniesie:

$$m_x = m_y = m_o \sqrt{\frac{2}{3t}}$$

Obliczając zaś błąd położenia punktu $m_p = m_x \sqrt{2}$ otrzymamy:

$$m_p = m_o \sqrt{\frac{4}{3t}} = \frac{2m_o}{\sqrt{3t}}$$

przy czym obliczone powyżej wyrażone są w przyjętej do rachunku jednostce: w długości promienia sieci. Dla wyrażenia błędów w metrach należy pomnożyć je przez długość promienia sieci wyrażoną w metrach tj przez D .

Znajdziemy wówczas dla błędu średniego położenia punktu:

$$m_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3t}}$$

2) W wyniku przeprowadzonego badania możemy już sformułować następujące: *Twierdzenie o wyznaczaniu punktu centralnego z punktów obwodowych w sieci złożonej z pojedynczych trójkątów: średni błąd położenia punktu wyznaczonego z t trójkątów foremnych, w których zmierzono wszystkie kąty i których podstawami są boki sześciokąta foremnego, jest równy podwójnemu iloczynowi średniego błędu pomiaru kąta przez długość boku sześciokąta, podzielonemu przez pierwiastek z potrójnej ilości trójkątów użytych do wyznaczenia punktu.*

Z twierdzenia widzimy, iż proces „okrażania” wyznaczanego punktu, to znaczy wyznaczania go z coraz to większej ilości punktów peryferyjnych, wydatnie podnosi dokładność wyznaczenia punktu. Kwadrat błędu średniego wyznaczenia położenia punktu będzie mianowicie odwrotnie proporcjonalny do ilości użytych do wyznaczenia trójkątów.

$$\frac{m_1^2}{m_2^2} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Po omówieniu pojęcia elipsy błędu zapoznamy się jeszcze z ilustracją graficzną pozwalającą od jednego rzutu oka ocenić wpływ procesu okrażania na dokładność wyznaczania położenia punktu. Obecnie przejdziemy do badania wpływu procesu okrażania na dokładność wyznaczenia położenia punktu w przypadku budowania „sieci okrażającej” nie z sieci elementarnych złożonych z pojedynczych trójkątów, co zrobiliśmy ostatnio, lecz z sieci elementarnych złożonych z czterech trójkątów każda.

3. Ustalenie wzoru na błąd średni punktu centralnego wyznaczonego z punktów obwodowych przy budowie sieci z sieci elementarnych czterotrójkątowych

a) Wyznaczenie z dwóch punktów obwodowych, tj. z jednej sieci elementarnej

Przypadek ten rozpatrywaliśmy już badając sieci elementarne. (Rozdz. I, str. 25. Przypominamy, że wynik badania — gdy chodzi o błąd wyznaczenia położenia punktu 1 (rys. 8) który obecnie będziemy „okrężać” tj. wyznaczać z coraz większej ilości punktów obwodowych — daje się wyrazić wzorem:

$$m_p = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3}}$$

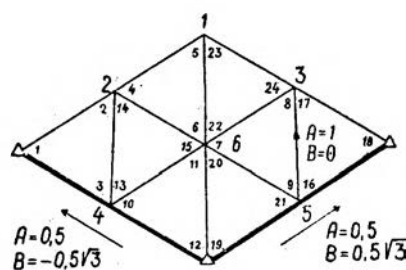
w którym m_o jest błędem pomiaru kąta w sieci, zaś D długością podstawy.

b) Wyznaczenie z trzech punktów obwodowych, tj. z dwóch sieci elementarnych

Wyznaczenie to ilustruje rys. 24 z którego w myśl zasad ogólnych ustalonych w Rozdziale I napisać możemy układ równań błędów obserwacji kątowych.

Jeżeli obierzemy za jednostkę długości mały bok sieci d , co jest o tyle wygodne, że wartości współczynników kierunkowych AB wyrażą się wówczas najprościej, otrzymamy układ równań błędów którego krakowian współczynnikowy a przytaczamy.

Proces zestawiania równań błędów — jako dostatecznie naświetlony od strony praktycznej przez wyczerpujące podawanie rachunków w analizach sieci elementarnych — pominęliśmy.



Rys. 24

Krakowian współczynnikowy układu równań błędów.
(nad krakowianem wpisaliśmy symbole niewiadomych przyporządkowanych kolumnom).

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} dx_1 & dy_1 & dx_2 & dy_2 & dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 & dx_5 & dy_5 & dx_6 & dy_6 \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 & & & & & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & & & & \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & & & & \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 & & 1 & & & & & & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & & & & & & & 1 & \\ & 1 & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & & & & & & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & \\ & & & & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & & 1 & \\ & & & & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & & & 1 & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & \\ & & & & & 1 & & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & \\ & & & & & & 1 & & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & & \\ & & & & & & & 0,5\sqrt{3} & -0,5 & & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & \\ & & & & & & & -0,5\sqrt{3} & -0,5 & & 1 & \\ & & & & & & & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & \\ & & -1 & & & & & -1 & & & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & & & & & & & -1 & \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & & \\ & & & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & -1 & & & & & \\ & & & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & & \\ & & & & & & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & -1 & & \\ & & & & & & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & \\ & & & & & & -1 & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & \\ & & & & & & & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & & & -1 & \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & 0,5\sqrt{3} & 0,5 & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & -0,5\sqrt{3} & 0,5 & \end{bmatrix}$$

Kwadrat tego krakowianu tj. krakowian współczynniki układu równań normalnych Gaussa $\underline{a}^2$ będzie miał postać:

$$\underline{a}^2 = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Ponieważ odwrotnością ostatniego krakowianu jest — co łatwo sprawdzić przez mnożenie — napisany poniżej krakowian:

$$(\alpha^2)^{-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{176}$$

128	0	48	$-24\sqrt{3}$	48	$24\sqrt{3}$	32	$-8\sqrt{3}$	32	$8\sqrt{3}$	48	0
0	128	$24\sqrt{3}$	$-24\sqrt{3}$	48	48	$8\sqrt{3}$	32	$-8\sqrt{3}$	32	0	48
48	$24\sqrt{3}$	70	0	10	$18\sqrt{3}$	33	$3\sqrt{3}$	13	$9\sqrt{3}$	29	$9\sqrt{3}$
$-24\sqrt{3}$	48	0	70	$-18\sqrt{3}$	10	$-3\sqrt{3}$	33	$-9\sqrt{3}$	13	$-9\sqrt{3}$	29
48	$-24\sqrt{3}$	10	$-18\sqrt{3}$	70	0	13	$-9\sqrt{3}$	33	$-3\sqrt{3}$	29	$-9\sqrt{3}$
$24\sqrt{3}$	48	$18\sqrt{3}$	10	0	70	$9\sqrt{3}$	13	$3\sqrt{3}$	33	$9\sqrt{3}$	29
32	$8\sqrt{3}$	33	$-3\sqrt{3}$	13	$9\sqrt{3}$	48	0	12	$4\sqrt{3}$	23	$3\sqrt{3}$
$-8\sqrt{3}$	32	$3\sqrt{3}$	33	$-9\sqrt{3}$	13	0	48	$-4\sqrt{3}$	12	$-3\sqrt{3}$	23
32	$-8\sqrt{3}$	13	$-9\sqrt{3}$	33	$3\sqrt{3}$	12	$-4\sqrt{3}$	48	0	23	$-3\sqrt{3}$
$8\sqrt{3}$	32	$9\sqrt{3}$	13	$-3\sqrt{3}$	33	$4\sqrt{3}$	12	0	48	$3\sqrt{3}$	23
48	0	29	$-9\sqrt{3}$	29	$9\sqrt{3}$	23	$-3\sqrt{3}$	23	$3\sqrt{3}$	40	0
0	48	$9\sqrt{3}$	$-9\sqrt{3}$	29	29	$3\sqrt{3}$	23	$-3\sqrt{3}$	23	0	40

przeto średnie błędy położenia poszczególnych punktów, wyrażone w przyjętej do rachunku jednostce — małym boku sieci, będą odpowiednio równe:

$$m_1 = m_o \sqrt{\frac{256 \cdot 4}{3 \cdot 176}} \quad m_2 = m_o \sqrt{\frac{140 \cdot 4}{3 \cdot 176}} = m_3 \quad m_4 = m_o \sqrt{\frac{96 \cdot 4}{3 \cdot 176}} = m_5$$

$$m_6 = m_o \sqrt{\frac{80 \cdot 4}{3 \cdot 176}}$$

Pamiętając, że stosunek małego boku sieci do boku wielkiego wynosi w naszym zadaniu 1 : 2, wyrazimy ostatecznie błędy średnie położenia punktów przez bok wielkiej sieci D wzorami:

$$m_1 = m_o D \sqrt{\frac{16}{33}} \quad m_2 = m_3 = m_o D \sqrt{\frac{35}{132}} \quad m_4 = m_5 = m_o D \sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$m_6 = m_o D \sqrt{\frac{5}{33}}$$

Widzimy teraz, iż przewidywania podane w rozdz. VII, że sieci okrażające małotrójkątowe wyznaczać będą punkt centralny konstrukcji dokładniej od sieci wielotrójkątowych, oparte na rozważaniach geometrycznych, znajduje potwierdzenie w analizie opartej na metodzie najmniejszych kwadratów.

Mielibyśmy bowiem dla punktu 1 (rys. 24) w przypadku wyznaczenia go z sieci dwóch pojedynczych trójkątów opartych o te same punkty wyjściowe:

$$m'_1 = m_o D \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 2}} = m_o D \sqrt{\frac{2}{3}} = m_o D \sqrt{\frac{22}{33}} \quad (\text{porównaj str. 82})$$

podczas gdy błąd średni tegoż punktu w rozpatrzonej ostatnio konstrukcji dwóch trójkątów wypełnionych siecią wyniósł:

$$m_1 = m_o D \sqrt{\frac{16}{33}}$$

Warto też zauważyć, że wybitnemu zmniejszeniu ulegnie też błąd średni średniego błędu. Zważywszy bowiem że w przypadku dwóch pojedynczych trójkątów mamy 4 spostrzeżenia nadliczbowe, zaś w wypadku dwóch trójkątów wypełnionych siecią rozpatrywanych ostatnio mamy 12 spostrzeżeń nadliczbowych, określimy odnośne błędy średnie średniego błędu przez równania:

$$m_{m'_1} = \frac{m}{\sqrt{8}} = 0,35 m \quad m_{m_1} = \frac{m}{\sqrt{24}} = 0,20 m.$$

c) *wyznaczenie z czterech punktów obwodowych, tj. z trzech sieci elementarnych*

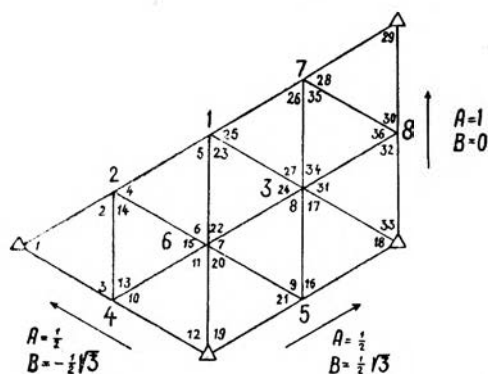
Wyznaczenie to zilustrowane jest przez rysunek 25, z którego w myśl zasad ogólnych podanych w rozdziale I napisać możemy układ równań

D

	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	dx_5	dy_5	dx_6	dy_6	dx_7	dy_7	dx_8	dy_8
1			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
2			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				1								
3				1			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
4	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5		1							- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				
5	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								1				
6		1	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5							$0,5\sqrt{3}$	- 0,5				
7					$0,5\sqrt{3}$	- 0,5			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5		1				
8					- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				1	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5				
9						1			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				
10								1			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5				
11							$0,5\sqrt{3}$	- 0,5			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				
12							- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				1				
13				- 1			$0,5\sqrt{3}$	0,5			- $0,5\sqrt{3}$	0,5				
14			- $0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1			$0,5\sqrt{3}$	0,5				
15			$0,5\sqrt{3}$	0,5			- $0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1				
16						- 1			$0,5\sqrt{3}$	0,5						
17					- $0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1						
18					$0,5\sqrt{3}$	0,5			- $0,5\sqrt{3}$	0,5						
19									- $0,5\sqrt{3}$	0,5		- 1				
20									$0,5\sqrt{3}$	0,5	- $0,5\sqrt{3}$	0,5				
21										- 1	$0,5\sqrt{3}$	0,5				
22		- 1			- $0,5\sqrt{3}$	0,5					$0,5\sqrt{3}$	0,5				
23	- $0,5\sqrt{3}$	0,5			$0,5\sqrt{3}$	0,5						- 1				
24	$0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1					- $0,5\sqrt{3}$	0,5				
25		1			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5							$0,5\sqrt{3}$	- 0,5		
26	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5				1						- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5			
27	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5							1			
28													1	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5	
29												$0,5\sqrt{3}$	0,5			1
30												- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5	
31						1								$0,5\sqrt{3}$	- 0,5	
32					$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5	
33					- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5										1
34					$0,5\sqrt{3}$	0,5							- 1	- $0,5\sqrt{3}$	0,5	
35						- 1						- $0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
36					- $0,5\sqrt{3}$	0,5						$0,5\sqrt{3}$	0,5			- 1

błędów obserwacji kątowych. Przy obraniu za jednostkę rachunku małego boku sieci d krakowian współczynnikowy a układu równań błędów będzie miał postać uwidocznioną poniżej (wkładka D).

Nad krakowianem pod postacią „wiersza nagłówkowego“ napisaliśmy symbole niewiadomych, obok krakowianu pod postacią „kolumny nagłówkowej“ napisaliśmy NN obserwacji według numeracji przyjętej na rys. 25.



Rys. 25

Podnosząc do kwadratu zestawiony na wkładce D krakowian współczynnikowy układu równań błędów a otrzymamy krakowian współczynnikowy układu równań normalnych Gaussa a^2 który poniżej podajemy:

$$a^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1\sqrt{3} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -\sqrt{3} & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ — co łatwo sprawdzić przez mnożenie krakowianowe — odwrotnością tego krakowianu będzie następujący krakowian $Q = (a)^{-1}$

$\dots 96$	$\dots 0$	$\dots 36$	$-20\sqrt{3}$	$\dots 36$	$4\sqrt{3}$	$24-8\sqrt{3}$	24	$24-4\sqrt{3}$	36	$36-4\sqrt{3}$	24	$24-8\sqrt{3}$	36	$20\sqrt{3}$	24	$8\sqrt{3}$
0	96	$20\sqrt{3}$	$36-4\sqrt{3}$	36	36	$8\sqrt{3}$	24	0	24	$4\sqrt{3}$	36	$-20\sqrt{3}$	36	$36-8\sqrt{3}$	24	24
36	$20\sqrt{3}$	78	0	15	$9\sqrt{3}$	36	$2\sqrt{3}$	15	$5\sqrt{3}$	30	$6\sqrt{3}$	3	$15\sqrt{3}$	6	$8\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$
$-20\sqrt{3}$	36	0	78	$-9\sqrt{3}$	$15-2\sqrt{3}$	$36-5\sqrt{3}$	36	$15-6\sqrt{3}$	15	$-6\sqrt{3}$	30	$-15\sqrt{3}$	3	$3-8\sqrt{3}$	6	6
36	$-4\sqrt{3}$	15	$-9\sqrt{3}$	42	0	$12-4\sqrt{3}$	12	$21-\sqrt{3}$	21	$-3\sqrt{3}$	21	30	$6\sqrt{3}$	24	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
$4\sqrt{3}$	36	$9\sqrt{3}$	15	0	42	$4\sqrt{3}$	60	12	$2\sqrt{3}$	24	$2\sqrt{3}$	6	$8\sqrt{3}$	6	$4\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$
24	$8\sqrt{3}$	36	$-2\sqrt{3}$	12	$4\sqrt{3}$	12	0	60	$-2\sqrt{3}$	12	$-2\sqrt{3}$	24	$-8\sqrt{3}$	15	$5\sqrt{3}$	12
$-8\sqrt{3}$	24	$2\sqrt{3}$	$36-4\sqrt{3}$	12	12	12	0	$12-2\sqrt{3}$	12	$-2\sqrt{3}$	24	$-8\sqrt{3}$	15	$5\sqrt{3}$	12	$2\sqrt{3}$
24	0	15	$-5\sqrt{3}$	21	$\sqrt{3}$	$12-2\sqrt{3}$	12	$12-2\sqrt{3}$	54	0	$21-\sqrt{3}$	24	15	$5\sqrt{3}$	12	$2\sqrt{3}$
0	24	$5\sqrt{3}$	$15-\sqrt{3}$	21	21	$2\sqrt{3}$	12	$2\sqrt{3}$	0	54	$\sqrt{3}$	21	$-5\sqrt{3}$	15	$-2\sqrt{3}$	12
36	$4\sqrt{3}$	30	$-6\sqrt{3}$	21	$3\sqrt{3}$	$24-2\sqrt{3}$	24	$2\sqrt{3}$	21	$\sqrt{3}$	42	0	15	$9\sqrt{3}$	12	$4\sqrt{3}$
$-4\sqrt{3}$	36	$6\sqrt{3}$	$30-3\sqrt{3}$	30	21	$2\sqrt{3}$	24	$2\sqrt{3}$	24	21	0	42	$-9\sqrt{3}$	15	$-4\sqrt{3}$	12
36	$-20\sqrt{3}$	3	$-15\sqrt{3}$	30	$-6\sqrt{3}$	$6-8\sqrt{3}$	6	$6-8\sqrt{3}$	15	$-5\sqrt{3}$	15	$-9\sqrt{3}$	78	0	36	$-2\sqrt{3}$
$20\sqrt{3}$	36	$15\sqrt{3}$	3	$6\sqrt{3}$	30	$8\sqrt{3}$	6	$5\sqrt{3}$	15	$9\sqrt{3}$	15	15	0	78	$2\sqrt{3}$	36
24	$-8\sqrt{3}$	6	$-8\sqrt{3}$	24	$-2\sqrt{3}$	$6-4\sqrt{3}$	6	$6-4\sqrt{3}$	12	$-2\sqrt{3}$	12	$-4\sqrt{3}$	36	$2\sqrt{3}$	60	0
$8\sqrt{3}$	24	$8\sqrt{3}$	6	$2\sqrt{3}$	24	$4\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	6	$2\sqrt{3}$	12	$4\sqrt{3}$	12	$-2\sqrt{3}$	36	0	60

$$(a^2)^{-1} = \frac{1}{180}$$

więc średnie błędy położenia poszczególnych punktów, wyrażone w przyjętej do rachunku jednostce — małym boku sieci — będą odpowiednio równe:

$$m_1 = m_o \sqrt{\frac{192}{180}} \quad m_2 = m_7 = m_o \sqrt{\frac{156}{180}} \quad m_3 = m_6 = m_o \sqrt{\frac{84}{180}}$$

$$m_4 = m_8 = m_o \sqrt{\frac{120}{180}}.$$

Pamiętając, że stosunek małego boku sieci do wielkiego wynosi 1 : 2, wyrazimy ostatecznie błędy średnie położenia punktów przez bok wielkiej sieci D następującymi wzorami:

$$m_1 = m_o D \sqrt{\frac{4}{15}} \quad m_2 = m_7 = m_o D \sqrt{\frac{13}{60}} \quad m_3 = m_6 = m_o D \sqrt{\frac{7}{60}}$$

$$m_4 = m_8 = m_o D \sqrt{\frac{1}{6}}$$

Mamy obecnie możność porównania dokładności wyznaczenia położenia punktu centralnego (1) w sieci okrażającej zbudowanej z trzech pojedynczych trójkątów z dokładnością wyznaczenia położenia punktu centralnego w sieci okrażającej zbudowanej z trzech czterotrójkątowych sieci elementarnych. W pierwszym wypadku mielibyśmy (por. str. 82):

$$m_1 = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3t}} = m_o D \sqrt{\frac{4}{9}} = m_o D \sqrt{\frac{20}{45}}$$

podczas gdy w przypadku drugim znaleźliśmy:

$$m_1 = m_o D \sqrt{\frac{4}{15}} = m_o D \sqrt{\frac{12}{45}}$$

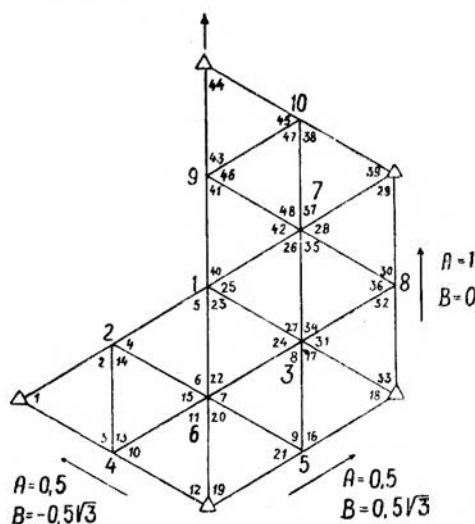
Znowu więc metoda najmniejszych kwadratów potwierdziła nasze przewidywania podane w części I, a dotyczące wzrostu dokładności wyznaczania położenia punktu w procesie zagęszczania sieci.

Jednocześnie konstatujemy zmniejszanie się błędu średniego średniego błędu. Przy trzech sieciach jednotrójkątowych mamy bowiem 7 spostrzeżeń nadliczbowych, podczas gdy przy trzech sieciach elementarnych czterotrójkątowych mielibyśmy ich 20. Odpowiednie błędy średnie średnich błędów będą więc:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{14}} = 0,27 \text{ m.} \quad m_m = \frac{m}{\sqrt{40}} = 0,16 \text{ m.}$$

d) Wyznaczenie z pięciu punktów obwodowych tj. z czterech sieci elementarnych

W dalszym etapie okrążania rozpatrzmy sieć przedstawioną na poniższym rysunku, z którego znów bez trudności natury pojęciowej zestawimy możemy układ równań błędów obserwacji kątowych, lub właściwie krakowian współczynnikowy tego układu równań. Na rysunku 26 podaliśmy wartości współczynników kierunkowych AB przy przyjęciu za jednostkę rachunku małego boku sieci.



Rys. 26

Pomijając znów szczegóły dotyczące zestawiania układu równań błędów sprowadzające się do zastosowania do każdego kąta obserwowanego w sieci równania błędów:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_c & dy_c \\ -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix} \dots = a$$

podajemy następnie krakowian współczynnikowy układu równań błędów sieci przedstawionej na rys. 26*).

Ponad tym krakowianem napisano symboliczne oznaczenie niewiadomych (wkładka E).

Kwadrat tego krakowianu, tj. krakowian współczynnikowy układu równań normalnych Gaussa — jak łatwo sprawdzić przez mnożenie krakowianowe — będzie miał postać (symbole niewiadomych piszemy znów nad krakowianem):

*) Zastosowana numeracja kątów pozwala na zmechanizowanie czynności układania równań błędów, choć na pierwszy rzut oka wydaje się nieco chaotyczna.

Numerację punktów zachowujemy tę samą w całym procesie okrążania. Pozwala to na częściowe wykorzystanie równań normalnych poprzednich układów.

	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	dx_5	dy_5	dx_6	dy_6	dx_7	dy_7	dx_8	dy_8	dx_9	dy_9	dx_{10}	dy_{10}
1			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5												
2			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5			0	1												
3				1			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5												
4	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5		1							- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
5	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								1								
6		1	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5							$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
7					$0,5\sqrt{3}$	- 0,5			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5		1								
8					- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				1	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
9						1			$0,5\sqrt{3}$	- 0,5	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
10							1				$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
11							$0,5\sqrt{3}$	- 0,5			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
12							- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5				1								
13				- 1			$0,5\sqrt{3}$	0,5			- $0,5\sqrt{3}$	0,5								
14			- $0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1			$0,5\sqrt{3}$	0,5								
15			$0,5\sqrt{3}$	0,5			- $0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1								
16						- 1			$0,5\sqrt{3}$	0,5										
17					- $0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1										
18					$0,5\sqrt{3}$	0,5			- $0,5\sqrt{3}$	0,5										
19									- $0,5\sqrt{3}$	0,5		- 1								
20									$0,5\sqrt{3}$	0,5	- $0,5\sqrt{3}$	0,5								
21									- 1		$0,5\sqrt{3}$	0,5								
22	0	- 1			- $0,5\sqrt{3}$	0,5					$0,5\sqrt{3}$	0,5								
23	- $0,5\sqrt{3}$	0,5			$0,5\sqrt{3}$	0,5						- 1								
24	$0,5\sqrt{3}$	0,5				- 1					- $0,5\sqrt{3}$	0,5								
25		1			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5					$0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
26	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5				1					- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5								
27	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5			$0,5\sqrt{3}$	0,5						1								
28												1	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5						
29											$0,5\sqrt{3}$	- 0,5		1						
30											- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5	$0,5\sqrt{3}$	- 0,5						
31						1							$0,5\sqrt{3}$	- 0,5						
32					$0,5\sqrt{3}$	- 0,5							- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5						
33					- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5								1						
34					$0,5\sqrt{3}$	0,5						- 1	- $0,5\sqrt{3}$	0,5						
35					- 1						- $0,5\sqrt{3}$	0,5	$0,5\sqrt{3}$	0,5						
36					$0,5\sqrt{3}$	0,5					$0,5\sqrt{3}$	0,5		- 1						
37											$0,5\sqrt{3}$	0,5							- 1	
38												- 1						- $0,5\sqrt{3}$	0,5	
39											- $0,5\sqrt{3}$	0,5						$0,5\sqrt{3}$	0,5	
40	$0,5\sqrt{3}$	0,5									- $0,5\sqrt{3}$	0,5					- 1			
41		- 1									$0,5\sqrt{3}$	0,5				- $0,5\sqrt{3}$	0,5			
42	- $0,5\sqrt{3}$	0,5										- 1				$0,5\sqrt{3}$	0,5			
43																$0,5\sqrt{3}$	0,5	- $0,5\sqrt{3}$	0,5	
44																	- 1	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
45																- $0,5\sqrt{3}$	0,5		- 1	
46											- $0,5\sqrt{3}$	0,5					1	$0,5\sqrt{3}$	0,5	
47												1				$0,5\sqrt{3}$	- 0,5	- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5	
48												$0,5\sqrt{3}$	- 0,5			- $0,5\sqrt{3}$	- 0,5		1	

$$\frac{3}{4}$$

dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	dx_5	dy_5	dx_6	dy_6	dx_7	dy_7	dx_8	dy_8	dx_9	dy_9	dx_{10}	dy_{10}
8	0	-1	$\sqrt{3}$	-2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	0	0	-1	$-\sqrt{3}$	0	0
0	8	$-\sqrt{3}$	-1	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	0	$\sqrt{3}$	-1	0	0
-1	$-\sqrt{3}$	6	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sqrt{3}$	-1	0	6	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	12	0	0	0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0
0	-2	0	0	0	12	0	0	0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	0	0	0
0	0	-2	0	0	0	6	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2	0	0	0	6	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-2	0	0	0	6	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-2	0	0	0	6	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	12	0	-2	0	-2	0	-2	0
0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	-2	0	6	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0
-1	$\sqrt{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0
$-\sqrt{3}$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	6	0	0	-2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	6	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	-2	0	6	0

Odwrotnością ostatniego krakowianu czyli krakowianem $\underline{Q} = (\underline{a}^2)^{-1}$ będzie — jak to można znów sprawdzić przez mnożenie krakowianowe — napisany poniżej krakowian (str. 93).

Wynika stąd, że błędy średnie położenia punktów wyznaczanych przez rozpatrywaną sieć, wyrażone w przyjętej w rachunku jednostce — małym boku sieci m_o — mieć będą postać:

$$\begin{aligned} m_1 = m_o \sqrt{\frac{11648}{16224}} &= m_o \sqrt{\frac{28}{39}} & m_2 = m_9 = m_o \sqrt{\frac{12610}{16224}} &= m_o \sqrt{\frac{485}{624}} \\ m_3 = m_o \sqrt{\frac{6370}{16224}} &= m_o \sqrt{\frac{245}{624}} & m_4 = m_{10} = m_o \sqrt{\frac{10374}{16224}} &= m_o \sqrt{\frac{133}{208}} \\ m_5 = m_8 = m_o \sqrt{\frac{9334}{16224}} &= m_o \sqrt{\frac{359}{624}} & m_6 = m_7 = m_o \sqrt{\frac{6760}{16224}} &= m_o \sqrt{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

Pamiętając, że stosunek małego boku sieci do wielkiego wynosi 1 : 2, możemy ostatecznie wyrazić błędy średnie położenia punktów przez bok wielkiej sieci D następującymi wzorami:

$m = m_o D \sqrt{\frac{7}{39}} \quad m_2 = m_9 = m_o D \sqrt{\frac{485}{2496}} \quad m_3 = m_o D \sqrt{\frac{245}{2496}}$
$m_4 = m_{10} = m_o D \sqrt{\frac{133}{832}} \quad m_5 = m_8 = m_o D \sqrt{\frac{359}{2496}} \quad m_6 = m_7 = m_o D \sqrt{\frac{5}{48}}$

Obecnie możemy porównać dokładność wyznaczenia położenia punktu centralnego (punkt 1) w sieci okrążającej zbudowanej z czterech pojedynczych trójkątów z dokładnością wyznaczenia położenia punktu centralnego w sieci okrążającej zbudowanej z czterech czterotrójkątowych sieci elementarnych. W pierwszym przypadku mielibyśmy (por. str. 82):

$$m'_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3t}} = m_o D \sqrt{\frac{4}{12}} = m_o D \sqrt{\frac{1}{3}} = m_o D \sqrt{\frac{13}{39}}$$

podczas gdy w przypadku drugim znaleźliśmy:

$$m_p = m_1 = m_o D \sqrt{\frac{7}{39}}$$

Znowu więc stwierdzamy wzrost dokładności wyznaczenia położenia punktu przy procesie zagęszczania sieci.

Skonstatujemy również zmniejszanie się błędu średniego średniego błędu, którego wartość dla przypadku pierwszego wyniosła by

$$m'_m = \frac{m}{\sqrt{10}} = 0,32 m,$$

5824	0	2184	-1248√3	2184	0	4456	-520√3	4456	-104√3	2184	-312√3	2184	312√3	4456	104√3	2184	1248√3	4456	520√3
0	5824	1248√3	2184	0	2184	520√3	4456	104√3	4456	312√3	2184	-312√3	2184	-104√3	4456	1248√3	2184	-520√3	4456
2184	1248√3	6305	0	1157	468√3	2860	117√3	1144	273√3	2275	351√3	715	585√3	624	351√3	65	936√3	260	507√3
-1248√3	2184	0	6305	-468√3	1157	-117√3	2860	-273√3	1144	-351√3	2275	-585√3	715	-351√3	624	-936√3	65	-507√3	260
2184	0	1157	468√3	3185	0	884	-195√3	1560	-39√3	1495	-117√3	1495	117√3	1560	39√3	1157	468√3	884	195√3
0	2184	468√3	1157	0	3185	195√3	884	39√3	1560	117√3	1495	-117√3	1495	-39√3	1560	-468√3	1157	-195√3	884
4456	520√3	2860	-117√3	884	195√3	5187	0	923	104√3	1885	117√3	559	273√3	481	156√3	260	507√3	273	260√3
-520√3	4456	117√3	2860	-195√3	884	0	5187	-104√3	923	-117√3	1885	-273√3	559	-156√3	481	-507√3	260	-260√3	273
4456	104√3	1144	-273√3	1560	39√3	923	-104√3	4667	0	1625	-39√3	819	117√3	793	52√3	624	351√3	481	561√3
-104√3	4456	273√3	1144	-39√3	1560	104√3	923	0	4667	39√3	1625	-117√3	819	-52√3	793	-351√3	624	-156√3	481
2184	312√3	2275	-351√3	1495	117√3	1885	-117√3	1625	39√3	3380	0	962	234√3	819	117√3	715	585√3	559	273√3
-312√3	2184	351√3	2275	-117√3	1495	117√3	1885	-39√3	1625	0	3380	-234√3	962	-117√3	819	-585√3	715	-273√3	559
2184	-312√3	715	-585√3	1495	-117√3	559	-273√3	819	-117√3	962	-234√3	3380	0	1625	-39√3	2275	351√3	1885	117√3
312√3	2184	585√3	715	117√3	1495	273√3	559	117√3	819	234√3	962	0	3380	39√3	1625	-351√3	2275	-117√3	1885
4456	-104√3	624	-351√3	1560	-39√3	481	-156√3	793	-52√3	819	-117√3	1625	39√3	4667	0	1144	27√3	923	104√3
104√3	4456	351√3	624	39√3	1560	156√3	481	52√3	793	117√3	819	-39√3	1625	0	4667	-273√3	1144	-104√3	923
2184	-1248√3	65	-936√3	1157	-468√3	260	-507√3	624	-351√3	715	-585√3	2275	-351√3	1144	-273√3	6305	0	2860	-117√3
1248√3	2184	936√3	65	468√3	1157	507√3	260	351√3	624	585√3	715	351√3	2275	273√3	1144	0	6305	117√3	2860
4456	-520√3	260	-507√3	884	-195√3	273	-260√3	481	-156√3	559	-273√3	1885	-117√3	923	-104√3	2860	117√3	5187	0
520√3	4456	507√3	260	195√3	884	260√3	273	156√3	481	273√3	559	117√3	1885	104√3	923	-117√3	2860	0	5187

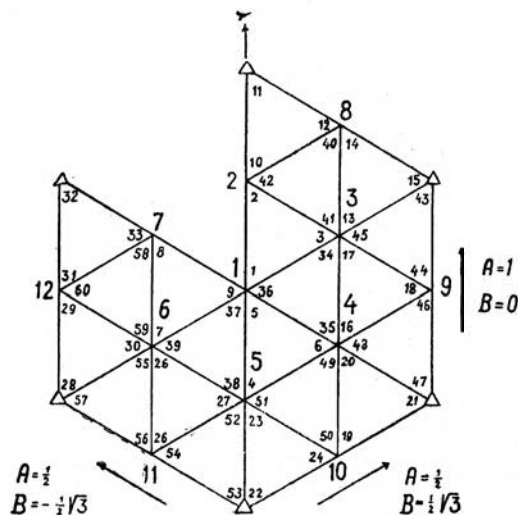
16224

podczas gdy dla przypadku drugiego wyniesie:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{30}} = 0,18 \text{ m.}$$

e) Wyznaczenie z sześciu punktów obwodowych z pięciu sieci elementarnych

Wyznaczenie to ilustruje rys. 27. Opierając się na przyjętych na tym rysunku oznaczeniach możemy znowu w myśl zasad ogólnych omówio-



Rys. 27

nym w rozdziale I zestawie układ równań błędów wszystkich obserwacji kątowych.

Przy przyjęciu za jednostkę rachunku długości małego boku sieci krakowian współczynnikowy tego układu równań błędów mieć będzie postać przedstawioną poniżej. Nad krakowianem umieściliśmy „wiersz nagłówkowy” w którym podano oznaczenia niewiadomych, przed krakowianem — „kolumną nagłówkową”, w której podano numery kolejne obserwacji zgodnie ze szkicem (wkładka F).

Podnosząc do kwadratu napisany na wkładce F krako-

wian współczynnikowy układu równań błędów a otrzymamy jak łatwo się przekonać napisany poniżej krakowian współczynnikowy układu równań normalnych Gaussa a^2 (str. 95).

Odwrotnością ostatniego krakowianu jest — co łatwo sprawdzić przez mnożenie — napisany poniżej krakowian $(a^2)^{-1}$ (str. 96).

Wynika stąd, że wielkości średnich błędów położenia punktu, wyrażone w przyjętej w rachunku naszym jednostce: długości małego boku sieci, wynosić będą dla poszczególnych punktów sieci (rys. 27):

$$\begin{aligned} m_1 &= m_o \sqrt{\frac{13376}{24852}} = m_o \sqrt{\frac{176}{327}} & m_2 &= m_7 = m_o \sqrt{\frac{18100}{24852}} = m_o \sqrt{\frac{4325}{6213}}; \\ m_3 &= m_6 = m_o \sqrt{\frac{9700}{24852}} = m_o \sqrt{\frac{2425}{6213}} & m_4 &= m_5 = m_o \sqrt{\frac{9100}{24852}} = m_o \sqrt{\frac{2275}{6213}}; \\ m_{12} &= m_8 = m_o \sqrt{\frac{15516}{24852}} = m_o \sqrt{\frac{1293}{2071}} & m_9 &= m_{11} = m_o \sqrt{\frac{14016}{24852}} = m_o \sqrt{\frac{1168}{2071}}; \\ m_{10} &= m_o \sqrt{\frac{13916}{24852}} = m_o \sqrt{\frac{3479}{6213}}. \end{aligned}$$

6688	0	2508	1444√3	2508	380√3	2508	76√3	2508	-76√3	2508	-380√3	2508	-1444√3	1672	608√3	1672	152√3	1672	0	1672	-152√3	1672	-608√3
0	6688	1444√3	2508	-380√3	2508	-76√3	2508	76√3	2508	380√3	2508	1444√3	2508	-608√3	1672	-152√3	1672	0	1672	152√3	1672	608√3	1672
2508	1444√3	9050	0	3109	-399√3	1505	-513√3	1030	-570√3	734	-684√3	25	-1083√3	4053	-133√3	1538	-304√3	845	-361√3	588	-418√3	253	-589√3
1444√3	2508	0	9050	399√3	3109	513√3	1505	570√3	1030	684√3	734	1083√3	25	133√3	4053	304√3	1538	361√3	845	418√3	588	589√3	
2508	-380√3	3109	399√3	-4850	0	4984	-144√3	1205	-171√3	955	-285√3	734	-684√3	25	-1083√3	4053	-133√3	1538	-304√3	845	-361√3	588	
380√3	2508	-399√3	3109	0	4850	144√3	1984	4550	171√3	1205	285√3	955	684√3	734	-133√3	2653	38√3	2278	95√3	1063	152√3	563	
2508	-76√3	1505	513√3	1984	4550	0	1909	-571√3	1205	-171√3	1030	-570√3	1163	209√3	2178	38√3	2153	-19√3	1038	-76√3	745	-247√3	
76√3	2508	-513√3	1505	-144√3	1984	0	4550	571√3	1909	171√3	1205	570√3	1030	-209√3	1163	-38√3	2178	19√3	2153	76√3	1038	247√3	
2508	76√3	1030	570√3	1205	171√3	1909	571√3	4550	0	1984	-144√3	1505	-513√3	745	247√3	1038	76√3	2153	19√3	2178	-38√3	1163	
-76√3	2508	-570√3	1030	-171√3	1205	-571√3	1909	0	4550	114√3	1984	513√3	1505	-247√3	745	-76√3	1038	-19√3	2153	38√3	2178	209√3	
2508	380√3	734	684√3	955	285√3	1205	171√3	1984	114√3	4850	0	3109	-399√3	563	323√3	720	152√3	1063	95√3	2278	38√3	2653	
-380√3	2508	-684√3	734	-285√3	955	-171√3	1205	-114√3	1984	0	4850	399√3	3109	-323√3	563	-152√3	720	-95√3	1063	-38√3	2278	133√3	
2508	1444√3	25	1083√3	734	684√3	1030	570√3	1505	513√3	3109	399√3	9050	0	253	589√3	588	418√3	845	361√3	1538	304√3	4053	
-1444√3	2508	-1083√3	25	-684√3	734	-570√3	1030	-513√3	1505	-399√3	3109	0	9050	-589√3	253	-418√3	588	-361√3	845	-304√3	1538	-4053	
1672	-608√3	4053	133√3	2653	-133√3	1163	-209√3	745	247√3	563	-323√3	253	-589√3	7758	0	4272	-114√3	636	-152√3	436	-190√3	272	
608√3	1672	-133√3	4053	133√3	2653	209√3	1163	247√3	745	323√3	563	589√3	253	0	7758	114√3	1272	152√3	636	190√3	436	304√3	
1672	-152√3	1538	304√3	2278	38√3	2178	-38√3	1038	-76√3	720	-152√3	588	-418√3	1272	144√3	7008	0	1072	-38√3	586	-76√3	436	
152√3	1672	-304√3	1538	-38√3	2278	38√3	2178	76√3	1038	152√3	720	418√3	588	-114√3	1272	0	7008	38√3	1072	76√3	586	190√3	
1672	0	845	361√3	1063	95√3	2153	49√3	2153	-19√3	1063	-95√3	845	-361√3	636	152√3	1072	38√3	6958	0	1072	-38√3	636	
0	1672	-361√3	845	-95√3	1063	-19√3	2153	19√3	2153	95√3	1063	361√3	845	-152√3	636	-38√3	1072	0	6958	38√3	1072	152√3	
1672	152√3	588	418√3	720	152√3	1038	76√3	2178	38√3	2278	-38√3	1538	-304√3	436	190√3	586	76√3	1072	38√3	7008	0	1272	
-152√3	1672	-418√3	588	-152√3	720	-76√3	2178	-38√3	1038	-38√3	2178	38√3	304√3	1538	-190√3	436	-76√3	586	-38√3	1072	0	1272	
1672	608√3	253	589√3	563	323√3	745	247√3	1163	209√3	2653	133√3	4053	-133√3	272	304√3	436	190√3	636	152√3	1272	114√3	7758	
-608√3	1672	-589√3	253	-323√3	563	-247√3	745	-209√3	1163	-133√3	2653	133√3	4053	-304√3	272	-190√3	436	-152√3	636	-114√3	1272	0	

Pamiętając, że stosunek małego boku sieci do wielkiego wynosi 1 : 2, możemy ostatecznie wyrazić błędy średnie położenia punktów przez bok wielkiej sieci D następującymi wzorami:

$$\boxed{\begin{aligned} m_2 = m_o D \sqrt{\frac{44}{327}} \quad m_2 = m_7 = m_o D \sqrt{\frac{4325}{24852}} \quad m_3 = m_6 = m_o D \sqrt{\frac{2425}{24852}}; \\ m_4 = m_5 = m_o D \sqrt{\frac{2275}{24852}} \quad m_8 = m_{12} = m_o D \sqrt{\frac{1293}{8284}} \quad m_9 = m_{11} = m_o D \sqrt{\frac{292}{2071}}; \\ m_{10} = m_o D \sqrt{\frac{3479}{24852}} \end{aligned}}$$

Porównajmy teraz dokładność wyznaczenia położenia punktu centralnego (punkt 1) przez sieć okrążającą zbudowaną z pięciu pojedynczych trójkątów z dokładnością wyznaczenia położenia punktu centralnego przez rozpatrywaną ostatnio sieć zbudowaną z pięciu sieci elementarnych czterójkątowych. W pierwszym przypadku mielibyśmy:

$$m'_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3 \cdot 5}} = m_o D \sqrt{\frac{4}{15}} = m_o D \sqrt{\frac{436}{1635}}$$

podczas gdy w przypadku drugim znaleźliśmy:

$$m_1 = m_o D \sqrt{\frac{44}{327}} = m_o D \sqrt{\frac{220}{1635}}$$

Stwierdziliśmy więc znowu wzrost dokładności wyznaczenia położenia punktu przy procesie zagęszczania sieci.

Łatwo skonstatujemy również zmniejszanie się błędu średniego średniego błędu, którego wartość dla wypadku pierwszego wyniosła by:

$$m'_m = \frac{m}{\sqrt{26}} = 0,20 \text{ m},$$

podczas gdy dla przypadku drugiego wyniesie:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{72}} = 0,12 \text{ m}.$$

Ostatnio zbadana sieć wyznaczała położenie punktu centralnego z sześciu punktów obwodowych operując pięciu sieciami elementarnymi. Pozostaje jeszcze zbadać sieć całkowicie zamkniętą, tj. sieć wyznaczającą położenie punktu centralnego w oparciu o sześć punktów obwodowych przy operowaniu sześciu sieciami elementarnymi.

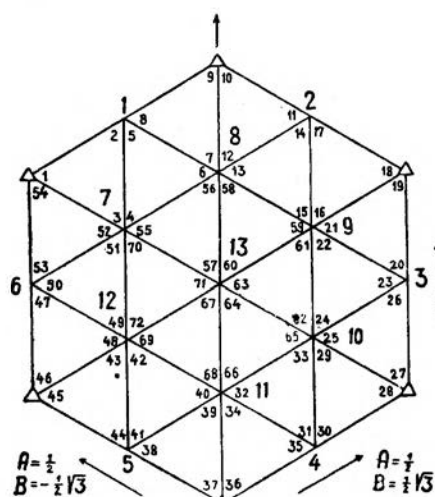
f) *Wyznaczenie z sieci zamkniętej (sześć trójkątów i sześć punktów oparcia)*

Wyznaczenie ilustruje rys. 28, na którym wpisano numerację punktów i kątów oraz wielkości współczynników kierunkowych przy obraniu za jednostkę rachunku małego boku sieci.

Krakowian współczynniki układu równań błędów $\underline{a}$ podajemy na wkladce G. W wierszu nagłówkowym wpisano symbole niewiadomych, w kolumnie nagłówkowej NN obserwacji.

Podnosząc krakowian $\underline{a}$ do kwadratu otrzymamy krakowian współczynniki układu równań normalnych Gaussa $\underline{a}^2$ który napisaliśmy na str. 99.

Łatwo sprawdzić, że odwrotnością krakowianu $\underline{a}^2$ jest napisany na str. 100 krakowian $(\underline{a}^2)^{-1}$.



Rys. 28

Określając z elementów przekątnych tego krakowianu wartości błędów średnich położenia punktów znajdziemy:

a) dla p-tów peryferyjnych (1, 2, 3, 4, 5, 6)

$$m_a = m_o \sqrt{\frac{296 \cdot 2}{1080}} = m_o \sqrt{\frac{8}{15}}$$

b) dla p-tów środkowych (7, 8, 9, 10, 11, 12)

$$m_b = m_o \sqrt{\frac{183 \cdot 2}{1080}} = m_o \sqrt{\frac{61}{180}}$$

c) dla p-tu centralnego (13)

$$m_c = m_o \sqrt{\frac{192 \cdot 2}{1080}} = m_o \sqrt{\frac{16}{45}}$$

Przechodząc od tych wartości wyrażonych w przyjętej w rachunkach jednostce — małym boku sieci — do dwukrotnie większej jednostki: boku dużego sieci D , otrzymamy:

a) punkty peryferyjne	b) punkty środkowe
$m_a = m_o D \sqrt{\frac{2}{15}} = 0,37 m_o D$	$m_b = m_o D \sqrt{\frac{61}{720}} = 0,29 m_o D$
c) punkt centralny	
$m_c = m_o D \sqrt{\frac{4}{45}} = 0,30 m_o D.$	

Błąd średni punktu centralnego w sieci analogicznej zbudowanej z sieci elementarnych jednotrójkątowych wyniosłby:

$$m_c' = \frac{2 m D}{\sqrt{3 \cdot 6}} = m_o D \sqrt{\frac{10}{45}},$$

to znaczy byłby, jak zawsze większy.

[illegible]

4. Twierdzenia uogólniające dotyczące sieci okrężających budowanych z czterotrójkątowych sieci elementarnych

Ponieważ dokładność wyznaczenia położenia punktu najbardziej odległego od podstawy sieci elementarnej przez tę sieć nie jest zależna od ilości n^2 trójkątów w sieci elementarnej ($n = 1, 2, 3, 4$), więc dokładność wyznaczenia położenia punktu centralnego w sieci okrężającej, tzn. w sieci składającej się z 2 do 6 sieci elementarnych opartych o wierzchołki sześcioboku foremnego musi wzrastać:

- ze wzrostem ilości sieci elementarnych użytych do konstrukcji,
- ze wzrostem ilości trójkątów w sieciach elementarnych.

Jedyną bowiem przyczynę powodującą zmianę dokładności wyznaczenia położenia punktu przy przejściu od pojedynczej sieci elementarnej do zespołu sieci elementarnych wzajemnie związanych stanowi występowanie dodatkowych warunków wymagających identyczności punktów wyznaczanych przez różne sieci zespołu. Ilość zaś takich punktów „łączących“, narzucających dodatkowe warunki, to znaczy zwiększających ilość obserwacji nadliczbowych w układzie, wzrastać będzie zarówno ze wzrostem ilości sieci elementarnych użytych do wyznaczenia, tzn. ze wzrostem procesu „okrężania“, jak i ze wzrostem ilości trójkątów w sieciach elementarnych, tzn. ze wzrostem procesu „zagęszczania“.

Liczbowym wyrazem tego wzrostu dokładności wyznaczenia położenia punktu w miarę okrężania i zagęszczania może być poniższa tabelka, w której podano wartości błędu średniego położenia punktu centralnego w sześcioboku foremnym przy wyznaczaniu go z jednej do sześciu sieci elementarnych jednotrójkątowych (wiersz górny), oraz przy wyznaczaniu go z jednej do sześciu sieci elementarnych czterotrójkątowych (wiersz dolny).

Błąd średni położenia punktu centralnego	Ilość sieci elementarnych użytych do wyznaczenia (por. odpowiednie rysunki)					
	1	2	3	4	5	6
Sieci elementarne jednotrójkątowe	$m_o D \sqrt{\frac{4}{3}}$	$m_o D \sqrt{\frac{22}{33}}$	$m_o D \sqrt{\frac{20}{45}}$	$m_o D \sqrt{\frac{13}{39}}$	$m_o D \sqrt{\frac{436}{1635}}$	$m_o D \sqrt{\frac{10}{45}}$
Sieci elementarne czterotrójkątowe	$m_o D \sqrt{\frac{4}{3}}$	$m_o D \sqrt{\frac{16}{33}}$	$m_o D \sqrt{\frac{12}{45}}$	$m_o D \sqrt{\frac{7}{39}}$	$m_o D \sqrt{\frac{220}{1635}}$	$m_o D \sqrt{\frac{4}{45}}$

Bardziej przemawiający do wyobraźni obraz tej zmienności podaje wykres na rys. 37, ilustrujący zagadnienie w oparciu o pojęcie elipsy błędu.

Związek między wielkością średniego błędu położenia punktu centralnego m_p a ilością sieci elementarnych czterotrójkątowych t w danej sieci

okrążającej podany tu pod postacią tabeli (wiersz drugi) można też wyrazić wzorem algebraicznym. Będzie więc np.:

$$m_p = m_o D \sqrt{\frac{16}{3} \cdot \frac{11}{5t^2 + 68t - 29}} \quad \text{dla nieparzystych wartości } t$$

$$m_p = m_o D \sqrt{\frac{16}{3} \cdot \frac{56}{81t^2 + 38t + 216}} \quad \text{dla parzystych wartości } t$$

Rozdział IX

Pojęcie elipsy błędu i zastosowanie tego pojęcia do ilustrowania wyników analiz dokładnościowych sieci triangulacyjnych

WSTĘP

Znajomość wartości średnich błędów położenia punktów wyznaczanych przez sieć triangulacyjną nie daje nam odpowiedzi na pytanie: w jakim kierunku oczekiwać możemy najdokładniejszego a w jakim najmniej dokładnego określenia położenia punktu. Nie udziela ona również odpowiedzi na pytanie: jakie jest prawdopodobieństwo, że wyznaczany punkt znajduje się w pewnym określonym ściśle obszarze otaczającym punkt P_{min} który metoda najmniejszych kwadratów uznała za najprawdopodobniejszy. Wreszcie — co dla analiz jest bardzo istotne — znajomość wartości średnich błędów położenia punktów wyznaczonych przez sieć nie pozwala nam na wyrobienie sobie poglądu na całość, nie umożliwiając ilustracji graficznej obrazującej wahania w położeniu punktów dla wszystkich punktów sieci łącznie.

Wymienione braki i niedomówienia usuwa pojęcie „elipsy błędu“, z którym zapoznam się w niniejszym rozdziale. Ponieważ przy tym pojęcie elipsy błędu w naszej literaturze geodezyjnej bądź to zupełnie bywa pomijane, bądź też naświetlane jest w sposób daleki od wyczerpania (pomija się np. zagadnienie wyznaczenia elipsy błędu w układach wielopunktowych, wyznacza się elementy elipsy błędu średniego nie poruszając zupełnie zagadnienia jakie jest prawdopodobieństwo, że wyznaczany punkt znajduje się wewnątrz konturu wyznaczonego przez tę elipsę itp.) pozwolimy sobie pojęcie elipsy błędu nieco obszerniej omówić i naświetlić.

W wykładzie pojęć podstawowych wzorować się będziemy na opracowaniu Eggerta w nowszych wydaniach „Handbuch der Vermessungskunde“ (Stuttgart 1948).

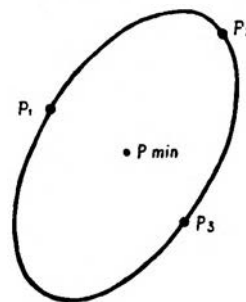
Wykład Eggerta jest niewątpliwie frapująco krótki i przekonywujący, aczkolwiek jest bardzo możliwe, że z punktu widzenia nowoczesnego wykładu teorii prawdopodobieństwa zarzucono by mu pewne braki (choćby np. pominięcie pojęcia „gęstości prawdopodobieństwa“, którym operują

prace nowoczesne z teorii błędów pisane przez matematyków, jak np. „Zarys rachunku prawdopodobieństwa i teorii błędów“ W. Pogorzelskiego). Ponieważ pojęcie elipsy błędu wprowadzone zostało do nauki przez geodezję, wydaje się, że w pracy poświęconej analizie sieci trygonometrycznych, usprawnione będzie gdy w wykładzie wzorować się będziemy na pracy jednego z najwybitniejszych geodetów bieżącego stulecia, jakim był niewątpliwie zmarły niedawno prof. Eggert, nawet gdyby ujęcie to przedstawiało pewne braki formalno matematyczne.

Strona rachunkowa zagadnienia elipsy błędów została w niniejszej pracy ujęta w symbolikę rachunku krakowianowego Banachiewicza. Różnica między ujęciem klasycznym a krakowianowym jest zresztą dość istotna i powoduje, że zagadnienie wyznaczenia elementów elips błędów w układach wielopunktowych staje się w ujęciu krakowianowym — w przeciwieństwie do ujęcia klasycznego — zagadnieniem rozwiązywalnym praktycznie. Po zapoznaniu się z pojęciami dotyczącymi elips błędów, zilustrowanymi przykładami liczbowymi, stosujemy te pojęcia do ilustracji wyników badań nad sieciami triangulacyjnymi, ułatwiającej syntetyczne naświetlenie tematu i uwidoczniającej zalety sieci małopółkątowych.

1. Elipsa błędu punktu wyznaczanego pojedynczo

W pewnych — rzadkich zresztą — wypadkach scharakteryzowanie dokładności wyznaczenia położenia punktu geodezyjnego przez podanie średnich błędów m_x m_y jego współrzędnych nie jest wystarczające, jako nie dające wyraźnej odpowiedzi na pytanie: w którym kierunku liczyć się należy z mniejszą a w którym z większą dokładnością wyznaczenia położenia punktu? W przypadkach takich staramy się wykreślić wokół punktu o najprawdopodobniejszym położeniu tj. wokół punktu P_{min} — wyznaczonego w oparciu o warunek minimum — krzywą zamkniętą posiadającą tę właściwość, że z równym prawdopodobieństwem będziemy mogli twierdzić o każdym punkcie położonym na tej krzywej, że jest on identyczny z punktem poszukiwanym.



Rys. 29

Krzywych takich może być oczywiście nieskończenie wiele. W każdym bowiem punkcie płaszczyzny odniesienia może się znajdować punkt wyznaczany, chociaż jest najbardziej prawdopodobne, że znajduje on się w punkcie P_{min} . Wyjaśnienia te ilustruje zamieszczony rys. 29, na którym P_{min} oznacza najprawdopodobniejsze położenie punktu, zaś punkty P_1 P_2 P_3 są trzema punktami o których z równym prawdopodobieństwem twierdzić możemy, że są identyczne z punktem poszukiwanym. Jak wynika stąd suma kwadratów poprawek jakie należało by przyporządkować obserwacjom geodezyjnym, dokonany dla wyznaczenia po-

łożenia punktu P poszukiwanego w zadaniu, jeżeli założyć że punktem poszukiwanym jest punkt P_1 , jest taka sama jak suma kwadratów poprawek jakie należało by przyporządkować tym obserwacjom, jeżeli założyć że punktem poszukiwanym jest punkt P_2 lub punkt P_3 (zakładamy obserwacje w układzie były jednakowodokładne). Wyznaczenie pewnej krzywej stałego prawdopodobieństwa nie wyczerpuje zagadnienia. Musimy jeszcze ustalić z jakim prawdopodobieństwem twierdzić można, że wyznaczany punkt położony jest w obszarze zamkniętym przez tę krzywą, lub inaczej się wyrażając: z jakim prawdopodobieństwem twierdzić można, że wyznaczany punkt jest identyczny z którymkolwiek punktem położonym w obszarze zamkniętym przez tę krzywą?

Wykażemy, że omawiana krzywa jest elipsą i znajdziemy sposoby wyznaczania jej elementów: półosi A i B oraz orientacji, to jest wielkości kąta prawoskrętnego φ , jaki z osią odciętych układu w którym przeprowadzono wyrównanie tworzy oś A naszej elipsy (nie przesądzamy, czy oś A jest „mała“, czy „wielka“).

Jest intuicyjnie zrozumiałe, że orientacja zależy tu będzie od cech geometrycznych układu wyrównawczego, zaś wielkości półosi elipsy zależne będą ponadto od błędu średniego pojedynczej obserwacji, oraz od założenia takiego czy innego prawdopodobieństwa, że punkt położony jest wewnątrz obszaru wyznaczonego przez obraną elipsę.

Przechodzimy do zagadnienia wyznaczenia elementów elipsy błędu pojedynczego punktu, którego położenie najprawdopodobniejsze P_{min} usta-

łone zostało przez wykonanie jakiegokolwiek znanej konstrukcji geodezyjnej (np. wcięcie wprzód, wcięcie wstecz, czy wcięcie skombinowane itp.).

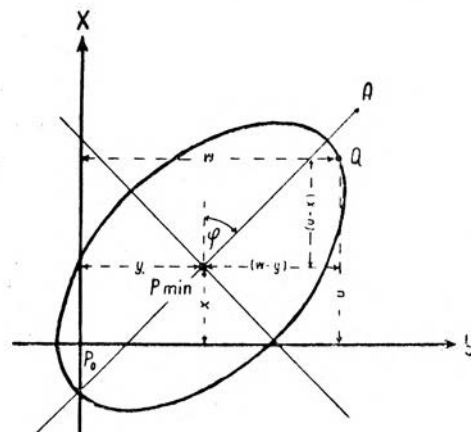
Jeżeli oznaczymy przez x i y współrzędne prostokątne punktu P_{min} odniesione do osi, równoległych do osi układu głównego, przeprowadzonych przez punkt P_0 obrany za „punkt przybliżony“ w procesie wyrównania zespołu obserwacyjnego, wówczas wartości poprawek wyrównawczych obserwacji dokonanych w danym zespole wyrażą „równania błędów“:

$$v_i = a_i x + b_i y + l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

zaś układ równań normalnych Gaussa, wyznaczających najprawdopodobniejsze położenie punktu (P_{min} będzie miał postać:

$$[aa] x + [ab] y + [al] = 0$$

$$[aa] x + [bb] y + [bl] = 0$$



Rys. 30

lub — pod przydatniejszą w naszym przypadku formą:

$$[av] = 0 \quad [bv] = 0.$$

Rozważajmy teraz punkt Q różny od punktu P i niech jego współrzędne prostokątne odniesione do tegoż układu co i poprzednio (z punktem zerowym P_0) wynoszą odpowiednio u (odcięta) oraz w (rzędna). Jeżeli założymy, że punkt Q jest identyczny z wyznaczanym w zagadnieniu punktem, wówczas wartości błędów prawdziwych v'_i dokonanych w układzie obserwacyjnym będą:

$$v'_i = a_i u + b_i w + l_i \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Uwzględniając, że $v_i = a_i x + b_i y + l_i$

napisać możemy błędy prawdziwe obserwacji pod postacią:

$$v'_i = a_i (u - x) + b_i (w - y) + v_i.$$

Obliczmy teraz sumę kwadratów tych błędów prawdziwych, to znaczy sumę kwadratów błędów którymi były by obciążone obserwacje, gdyby punkt Q był identyczny z punktem poszukiwanym. Otrzymamy:

$$[v'_i v'_i] = [aa] (u - x)^2 + 2[ab] (u - x)(w - y) + [bb] (w - y)^2 + 2[av] (u - x) + 2[bv] (w - y) + [vv].$$

Pamiętając że $[av] = 0$ oraz $[bv] = 0$ możemy ostatecznie napisać sumę kwadratów błędów prawdziwych jakimi obciążone są obserwacje, jeżeli punkt Q jest identyczny z punktem poszukiwanym, pod postacią:

$$[v''_i v'_i] = [v_i v_i] + [aa] (u - x)^2 + 2[ab] (u - x)(w - y) + [bb] (w - y)^2 \quad (\text{IX. 1})$$

Prawdopodobieństwo, że znajdzie układ błędów prawdziwych v , a więc prawdopodobieństwo, że punkt Q jest identyczny z punktem poszukiwanym, będzie na zasadzie prawa Gaussa - Laplace'a proporcjonalne do wielkości:

$$- h^2 [v' v']$$

gdzie h jest „miarą dokładności“, związaną z błędem średnim obserwacji m znanym związkiem $h^2 m^2 = \frac{1}{2}$. Prawdopodobieństwo bowiem zbiegu błędów

$$v'_1 \ v'_2 \ . \ . \ . \ v'_n$$

wyrażać się będzie — na zasadzie twierdzenia o mnożeniu prawdopodobieństw — przez iloczyn:

$$\frac{h}{V\pi} e^{-h^2 v'^2_1} dv \cdot \frac{h}{V\pi} e^{-h^2 v'^2_2} dv \cdot \dots \cdot \frac{h}{V\pi} e^{-h^2 v'^2_n} dv$$

(gdzie dv wyraża wielkość przedziału w którego granicach uważamy błąd, zawarty między v i $v + dv$ za równy błędowi v), co można napisać pod postacią:

$$K \cdot e^{-h^2 [v' v']}$$

przy czym czynnik proporcjonalności równa się iloczynowi: $K = \left(\frac{h}{V\pi} \right)^n$

Przy zmianie położenia punktu Q na płaszczyźnie, tzn. przy nadawaniu współrzędnym u i w coraz to innych wartości omawiane prawdopodobieństwo zbiegu błędów v'_i będzie się — na ogół biorąc — zmieniać. Ponieważ przy tym wobec, ustalenia w naszym rozumowaniu położenia punktu P_{min} wartość $[vv]$ a więc wartość:

$$- h^2 [vv]$$

jest wartością stałą, możemy więc równie dobrze przyjąć prawdopodobieństwo wystąpienia szeregu błędów prawdziwych $v'_1 v'_2 \dots v'_n$ za proporcjonalne do wielkości:

$$- h^2 ([v'v'] - [vv])$$

Jeżeli jeszcze oznaczymy przez s^2 dodatnią zawsze wielkość iloczynu kwadratu miary dokładności przez różnicę kwadratów błędów v' i v , czyli gdy położymy:

$$s^2 = h^2 ([v'v'] - [vv]) = \frac{[v'v'] - [vv]}{2 m^2}$$

prawdopodobieństwo popelnienia układu błędów $v'_1 v'_2 v'_3 \dots v'_n$ będzie proporcjonalne do wielkości:

$$\boxed{e^{-s^2}} \quad (\text{IX. 2})$$

Podstawiając znaną poprzednio wartość różnicy kwadratów $[v'v'] - [vv]$

$$[v'v'] - [vv] = [aa](u-x)^2 + 2[ab](u-x)(w-y) + [bb](w-y)^2$$

do określenia parametru s^2 , grającego doniosłą rolę w teorii elips błędów, otrzymamy:

$$s^2 = \frac{[aa](u-x)^2 + 2[ab](u-x)(w-y) + [bb](w-y)^2}{2 m^2}$$

Jeżeli wartości współrzędnych u i w punktu Q będą się zmieniać, jednak w ten sposób, że wartość parametru s^2 pozostawać będzie bez zmiany, wówczas punkt Q będzie się poruszał po krzywej stanowiącej miejsce geometryczne punktów których identyczność z punktem poszukiwanym jest jednakowo prawdopodobna. Prawdopodobieństwo bowiem występowania odnośnych układów błędów, jako proporcjonalne do wielkości:

$$e^{-s^2}$$

będzie stale takie samo. Równanie miejsca geometrycznego punktów, których identyczność z punktem poszukiwanym jest jednakowo prawdopodobna czyli równanie krzywej, którą nazwać by można „warstwicą prawdopodobieństwa“ otrzymamy więc zakładając stałość parametru s^2 .

Równanie to można tedy napisać pod postacią:

$$[aa](u-x)^2 + 2[ab](u-x)(w-y) + [bb](w-y)^2 = 2 m^2 s^2 = \text{constans.} \quad (\text{IX. 4. 1})$$

Można też, oznaczając przez δx i δy współrzędne prostokątne punktu na krzywej odniesione do punktu wyrównanego metodą najmniejszych

kwadratów jako do zera układu napisać powyższe równanie „warstwicy prawdopodobieństwa“ pod łatwiejszą nieco do zapamiętania postacią:

$$\left\{ \begin{array}{c} [aa] \\ 2 [ab] \\ [bb] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \delta x^2 \\ \delta x \cdot \delta y \\ \delta y^2 \end{array} \right\} = 2 m^2 \cdot s^2 = \text{constans.} \quad (\text{IX. 4. 2})$$

2. Wyznaczenie wielkości półoś błędów oraz jej orientacji.

Z otrzymanego równania warstwicy prawdopodobieństwa widać od razu, że jest ona elipsą. Przy tym, zgodnie z naszymi przewidywaniami, jest z tego równania widoczne: że 1^o orientacja elipsy zależy będzie do cech geometrycznych układu wyrównawczego, gdyż w lewej części równania, zawierającej zmienne, figurują zależne od tych cech współczynniki układu równań normalnych Gaussa, natomiast 2^o wielkości półoś zależne będą ponadto od dokładności obserwacji oraz od wielkości prawdopodobieństwa z jakim punkt położony jest na danej elipsie, względnie — co jest praktycznie istotniejsze — od wielkości prawdopodobieństwa z jakim punkt znajdzie się wewnątrz konturu wyznaczonego przez elipsę. Figurujący bowiem z prawej strony równania wyraz wolny będzie wielkością znaną, gdy znana jest dokładność obserwacji (m^2) oraz parametr (s^2), zależny od prawdopodobieństwa położenia punktu na elipsie. Warstwice prawdopodobieństwa będziemy dalej — zgodnie z utartym zwyczajem — nazywali „elipsą błędu“, pamiętając przy tym że — dopóki nie zdecydujemy się na obranie takiej czy innej wartości liczbowej dla parametru s^2 — jest to właściwie nie elipsa lecz rodzina elips. Jakkolwiek nie ustaliliśmy jeszcze postaci związku między wielkością parametru s^2 a prawdopodobieństwem położenia punktu wewnątrz odpowiadającej elipsy błędu, rozumiemy już — przypominając sobie określenie parametru s^2 podane uprzednio — jaka będzie rola tego parametru: prawdopodobieństwu położenia punktu w pobliżu punktu P_{min} będą odpowiadały małe wartości s^2 , zaś prawdopodobieństwu położenia punktu daleko od punktu P_{min} odpowiadać będą wielkie wartości s^2 .

Przystępujemy do wyznaczenia elementów elipsy błędu: orientacji i półoś A i B . Pozwoli nam to z jednej strony w prosty sposób wykreślić elipsę błędu odpowiadającą określonej wartości parametru s^2 (kreślenie elipsy przez kartowanie kolejnych punktów krzywej w oparciu o ustalony powyżej związek było by bardzo uciążliwe), z drugiej strony pozwoli nam na wyznaczenie związku między wielkością parametru s^2 i prawdopodobieństwem W położenia punktu wewnątrz elipsy błędu.

Dla wyznaczenia orientacji i półoś elipsy wystarczy obrócić osie prostokątnego układu współrzędnych ($u - x$) ($w - y$), którego początek znajduje się w punkcie P_{min} (rys. 30) o taki kąt φ aby oś ($u - x$) „starego układu“ pokryła oś x' „nowego układu“ na której elipsa odcina półoś A , lub, co na jedno wychodzi aby oś ($w - y$) „starego układu“ po-

kryła oś y' , „nowego układu“, na której elipsa odcina pólś B . Kąt obrotu φ musi być więc tak obrany aby równanie krzywej w „nowym układzie“ nie zawierało iloczynu współrzędnych, tzn. aby współczynnik przy iloczynie $x'y'$ był zerem.

Przekształcenie współrzędnych „starych“ ($u - x$) ($w - y$) na współrzędne „nowe“ x' y' określają znane wzory:

$$(u - x) = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \quad \text{oraz} \quad (w - y) = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

Podstawiając wartości ($u - x$) oraz ($w - y$) wyznaczone tymi wzorami do równania elipsy błędu otrzymamy:

$$2 m^2 s^2 = [aa](x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + 2 [ab](x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + [bb](x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2$$

Dla usystematyzowania rachunków wprowadzimy krakowian:

$$\left\{ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} [aa] \\ [ab] \\ [bb] \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi \end{matrix} \right\} \quad (\text{IX. 5})$$

Łatwo zauważyć, że przy przyjętych oznaczeniach równanie elipsy błędu przybierze postać (grupujemy wyrazy według potęg x'^2 y'^2 $x'y'$):

$$2 m^2 s^2 = t_1 x'^2 + t_2 y'^2 + x' y' (-[aa] \cos \varphi \sin \varphi + [ab](\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + [bb] \sin \varphi \cos \varphi).$$

Aby współczynnik przy iloczynie zmiennych był zerem, kąt φ spełnić musi, jak widać, następujący warunek:

$$([aa] - [bb] \sin \varphi \cos \varphi = [ab](\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

który, pamiętając że $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2 \varphi$ oraz że $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2 \varphi$, napisać możemy pod postacią:

$$\frac{\frac{1}{2} \sin 2 \varphi}{\cos 2 \varphi} = \frac{[ab]}{[aa] - [bb]}.$$

Stąd otrzymujemy wzór na wyznaczenie orientacji elipsy błędu:

$$\boxed{\tan 2 \varphi = \frac{2 [ab]}{[aa] - [bb]}} \quad (\text{IX. 6})$$

Równanie elipsy błędu odniesione do osi obróconych o kąt φ mieć będzie postać:

$$2 m^2 s^2 = t_1 x'^2 + t_2 y'^2$$

lub po doprowadzeniu do postaci kanonicznej:

$$\frac{x'^2}{\frac{2m^2s^2}{t_1}} + \frac{y'^2}{\frac{2m^2s^2}{t_2}} = 1$$

Wynikają stąd wzory na kwadraty półosi elipsy błędu:

$$\boxed{A = \frac{2m^2s^2}{t_1} \quad B^2 = \frac{2m^2s^2}{t_2}}$$

jak również wzory bezpośrednie na wielkości półosi A i B elipsy błędu:

$$A = \frac{m}{\sqrt{t_1}} \sqrt{2} \cdot s \quad B = \frac{m}{\sqrt{t_2}} \sqrt{2} \cdot s \quad (\text{IX. } 7)$$

Zauważymy przy okazji że jeżeli wartość parametru s^2 uczynić równą $\frac{1}{2}$, wówczas wielkości półosi elipsy, które oznaczmy dla tego przypadku A_{sr} i B_{sr} , wyrażać się będą przez wzory:

$$A_{sr} = \frac{m}{\sqrt{t_1}} \quad B_{sr} = \frac{m}{\sqrt{t_2}} \quad (\text{IX. } 8)$$

Elipsa taka nosi nazwę „elipsy błędu średniego“ i jest bardzo rozpowszechniona.

3. Wyznaczenie związku między wielkością parametru s^2 i prawdopodobieństwem W położenia punktu wewnątrz elipsy błędu

Rozważajmy elipsę błędu o półosiach A i B i odpowiadającej tym półosiom wielkości s^2 . Jeżeli wielkości s nadamy przyrost różniczkowy ds , wówczas wielkości półosi ulegną zmianie przybierając przyrosty różniczkowe dA i dB . Otrzymamy nową elipsę, współśrodkową z daną, co zilustrowano na rys. 31. Wyznamy prawdopodobieństwo P , że punkt położony jest wewnątrz pierścienia eliptycznego ograniczonego przez obie elipsy: elipsę o osiach A i B oraz elipsę o osiach $A + dA$ i $B + dB$.

Ustaliliśmy uprzednio, że prawdopodobieństwo położenia punktu na elipsie o parametrze s^2 jest proporcjonalne do e^{-s^2} .

Z uwagi na małą wielkość przyrostu ds uważać możemy, że prawdopodobieństwo położenia punktu gdziekolwiek wewnątrz pierścienia eliptycznego również będzie proporcjonalne do tej wielkości. Ponieważ prawdopodobieństwo położenia punktu wewnątrz pierścienia — przy małej szerokości tego pierścienia — musi być proporcjonalne do jego pola, możemy napisać:

$$P = ke^{-s^2}df$$

gdzie przez df oznaczyliśmy pole pierścienia eliptycznego, a przez k czynnik proporcjonalności. Ponieważ pole elipsy $f = \pi AB$, po podstawieniu

wartości półośi odpowiadających wartości s^2 , wyrażać się będzie jako:

$$j = \pi A B = \pi \frac{m^2}{\sqrt{t_1 t_2}} 2s^2$$

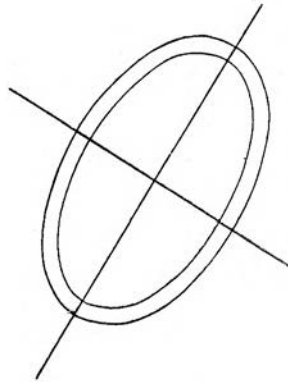
otrzymamy po zróżniczkowaniu:

$$dj = \frac{\pi m^2}{\sqrt{t_1 t_2}} 2s ds,$$

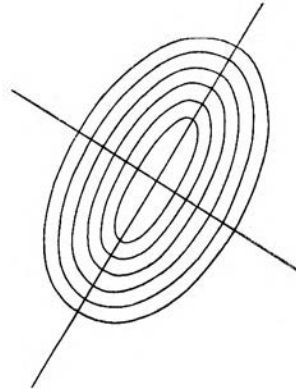
Podstawiając to do wzoru wyrażającego prawdopodobieństwo P znajdziemy:

$$P = \frac{2k m^2}{\sqrt{t_1 t_2}} e^{-s^2} 2s ds = C e^{-s^2} 2s ds.$$

Oznaczyliśmy tu przez C wielkość stałą dla danego (dostatecznie wąskiego) pierścienia eliptycznego. Rozważajmy teraz rodzinę elips współśrodkowych o środku w punkcie $P_{\min}$ wypełniających całą płaszczyznę i tworzących nieskończony układ pierścieni eliptycznych, co ma uzmysłowić rysunek 32. Odpowiada to zmienności parametru od $s = 0$ do $s = \infty$. Ponieważ prawdopodobieństwo położenia punktu wyznaczanego gdziekol-



Rys. 31



Rys. 32

wiek na całej płaszczyźnie będzie sumą prawdopodobieństw położenia tego punktu na którymkolwiek z nieskończenie wielu pierścieni eliptycznych na które podzieliśmy całą płaszczyznę, a suma ta, jako pewność, musi być równa 1, mamy:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} P = C \int_{s=0}^{s=\infty} e^{-s^2} 2s ds = 1.$$

To równanie pozwala obliczyć stałą C . Mamy mianowicie:

$$\int_{s=0}^{s=\infty} e^{-s^2} 2s ds = \left| -e^{-s^2} \right|_0^{\infty} = -e^{-\infty} - (-e^0) = 1.$$

Skąd zaraz wynika $C = 1$ i wzór na prawdopodobieństwo położenia punktu na pierścieniu eliptycznym przybiera postać:

$$\boxed{P = e^{-s^2} 2s ds.} \quad (\text{IX } 9)$$

Przechodzimy do wyznaczenia prawdopodobieństwa W , że punkt wyznaczany znajduje się wewnątrz elipsy błędu o parametrze s^2 . Prawdopodobieństwo to będzie równe sumie prawdopodobieństw położenia punktu na którymkolwiek z pierścieni eliptycznych zawartych między punktem $P_{\min}$ a obwodem elipsy o parametrze s^2 . Wynika stąd, że wartość poszukiwanego prawdopodobieństwa W znajdziemy sumując prawdopodobieństwa P przy zmianie wartości parametru od $s = 0$ do $s = s$.

$$W = \sum_{s=0}^s P = \int_{s=0}^{s=s} e^{-s^2} 2s ds = \left| -e^{-s^2} \right|_0^s = 1 - e^{-s^2}$$

Skąd ostatecznie wzór na prawdopodobieństwo, że punkt wyznaczany znajduje się wewnątrz obwodu wykreślonego przez elipsę błędu o parametrze s^2 ma postać:

$$\boxed{W = 1 - e^{-s^2}} \quad (\text{IX } 10)$$

4. Elipsy błędów rozpowszechnione w praktyce geodezyjnej

Nie ulega wątpliwości, że najbardziej wyczerpującą ilustracją osiągniętej, czy też zamierzonej dokładności jest wykreślenie elipsy błędów o tak obranych półosiach A i B aby prawdopodobieństwo położenia punktu wyznaczanego wewnątrz tej elipsy równe było założonemu przez charakter i cel pracy, bliskiemu do pewności, prawdopodobieństwu (np. 0,9 względnie 0,99 itp.).

Rozwiązanie zagadnienia w oparciu o takie założenie nie przedstawia zresztą żadnych trudności z chwilą gdy znamy związek między prawdopodobieństwem W i parametrem S^2 .

W praktyce geodezyjnej ustaliło się jednak kilka typowych elips błędów, to znaczy elips dla których wykreślenia ustalono z góry wartość parametru s^2 , czy to nadając temu parametrowi okrągłą wartość, czy też obierając wartość parametru tak, aby odpowiadała ona pewnej sztywnej, tj. obranej z góry, niezależnie od charakteru zagadnienia, wartości prawdopodobieństwa.

Są to elipsy noszące nazwy: 1) elipsy błędu średniego, 2) elipsy prawdopodobnej, oraz 3) elipsy Andrae'go. Jak zobaczymy z tych trzech elips jedynie ostatnia spełnia wymaganie, które logika techniczna stawiać musi wszelkiej ilustracji graficznej procesów dokładnościowych: wymaganie aby bardziej prawdopodobne było położenie wyznaczanego punktu wewnątrz wykreślonego konturu możliwego błędu niżeli po za tym konturem. Niespełnienie tego wymagania stawia pod znakiem zapytania celowość ilustracji graficznej.

Jeżeli bowiem prawdopodobniejsze jest, że poszukiwany punkt położony jest po za wykreśloną elipsą błędu, aniżeli że położony jest wewnątrz tej elipsy, nie jest dla fachowca ani tymbardziej dla laika korzystającego z ilustracji zrozumiałe dlaczego wykreślono tę właśnie elipsę i co ma ona z punktu widzenia charakterystyki dokładnościowej zilustrować.

Wyjątek stanowią tu analizy porównawcze, którym zresztą poświęcona jest niniejsza praca. W ilustracjach tego rodzaju analiz nie chodzi bowiem o stwierdzenie jaki obszar pokrywa elipsa błędu, lecz o porównanie czy elipsa jaką otrzymuje się w wyniku zastosowania jednej konstrukcji geodezyjnej jest większa czy mniejsza i w jakim stosunku do elipsy jaką otrzyma się w wyniku zastosowania innej konstrukcji geodezyjnej. Byłoby więc wartość parametru s^2 zastosowana do obliczenia jednej elipsy była taka sama jak wartość tego parametru zastosowana do obliczenia drugiej, porównywanej z pierwszą elipsą, wszelka ilustracja — niezależnie od obrania wartości s^2 — spełni swe zadanie.

Jak widzimy w pracach naszych obranie takiej czy innej wartości s^2 niema wielkiego znaczenia, moglibyśmy więc nie zatrzymywać się nad zagadnieniem różnych typów elips, zrobimy to jednak, już choćby dlatego, że zagadnienie to, jak się zdaje, nie było w literaturze polskiej naświetlane.

Przechodzimy do omówienia tych „standaryzowanych elips”.

a) *Elipsa błędu średniego*

Jest to elipsa o wartości parametru $s^2 = \frac{1}{2}$.

Wzory na obliczenie jej elementów są najprostsze:

$$A = \frac{m}{\sqrt{t_1}} \quad B = \frac{m}{\sqrt{t_2}} \quad (\text{IX. 11})$$

gdzie t_1 i t_2 mają znaczenie omówione już uprzednio. Prawdopodobieństwo iż punkt wyznaczany znajduje się wewnątrz elipsy błędu średniego znajdziemy rozwiązując równanie:

$$W = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2.71828}} = 0,3935.$$

Prawdopodobieństwo znajdowania się punktu wewnątrz elipsy błędu średniego jest więc dużo mniejsze od połowy, czyli jest dużo prawdopodobniejsze, że obszar wyznaczony przez tę elipsę nie zawiera w sobie wyznaczanego punktu. Z tego względu ilustracja dokładności w znaczeniu bezwzględny przez wykreślenie elipsy błędu średniego nie wydaje się cenna, jakkolwiek stosowanie tej elipsy jest bardzo rozpowszechnione.

Nazwę elipsy błędu średniego nadano elipsie o parametrze $s^2 = \frac{1}{2}$ z tego względu, że suma kwadratów półośi tej elipsy równa jest sumie kwadratów średnich błędów współrzędnych, to znaczy, że jest ona kwadratem błędu położenia punktu:

$$A_{sr}^2 + B_{sr}^2 = m_x^2 + m_y^2 = m_p^2$$

Ta właściwość — której dowód podamy w innym miejscu — nie jest zresztą specjalnie interesującą i podaje się ją chyba przez pietyzm dla pojęcia „krzywej średniego błędu“, które uważać by należało już za pojęcie historyczne.

Nazwa elipsy średniego błędu wydaje się dość niefortunna. Sugeruje ona często osobom posiłkującym się pojęciem elipsy średniego błędu, że elipsa ta ogranicza obszar wewnątrz którego punkt znajduje się z prawdopodobieństwem nieprzekroczenia średniego błędu (0,68). Jak łatwo obliczyć chcąc uzyskać tego rodzaju elipsę należałoby zwiększyć półosi elipsy średniego błędu w stosunku 1,515.

b) *Elipsa prawdopodobna*

jest to elipsa o wartości parametru s^2 tak dobranej, aby położenie punktu wyznaczanego wewnątrz elipsy było równie prawdopodobne jak zewnątrz. Mamy więc do rozwiązania równanie:

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-s^2} \text{ lub } \frac{1}{2} = e^{-s^2}$$

Logarytmując to równanie przy podstawie 10 otrzymamy:

$$\lg \frac{1}{2} = -s^2 \lg e, \text{ skąd } s = \sqrt{\frac{-\lg 0,5}{\lg 2,718...}} = 0,8325.$$

Wynika stąd, że półosi elipsy prawdopodobnej wyrażać będą wzory:

$$A_{\text{prawd}} = 1,177 \frac{m}{\sqrt{t_1}} \quad B_{\text{prawd}} = 1,177 \frac{m}{\sqrt{t_2}} \quad (\text{IX. 12})$$

Mamy bowiem $0,8325 \sqrt{2} = 1,177$. Elipsa prawdopodobna również nie nadaje się do zilustrowania badań dokładnościowych: wykreślamy tu kontur umiając o nim powiedzieć tyle, że jest równie prawdopodobne jak nieprawdopodobne by wyznaczany punkt znalazł się w tym konturze.

e) *Elipsa Andrae'go*,

użyta przez geodetę duńskiego Andrae przy pracach triangulacyjnych w Danii, jest to elipsa błędu o wartości parametru $s^2 = 1$. Wynika stąd, że półosi elipsy Andrae'go wyrażać będą wzory:

$$A_{\text{Andr}} = 1,414 \frac{m}{\sqrt{t_1}} \quad B_{\text{Andr}} = 1,414 \frac{m}{\sqrt{t_2}} \quad (\text{IX. 13})$$

bowiem $\sqrt{2} = 1,414$. Prawdopodobieństwo, że punkt wyznaczany znajdzie się wewnątrz elipsy Andrae'go znajdziemy rozwiązując równanie:

$$W = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2,71828} = 0,6321.$$

Prawdopodobieństwo, że punkt wyznaczany położony jest wewnątrz elipsy Andrae'go jest więc nieco większe od połowy, czyli prawdopodobniejsze jest, że punkt znajduje się w tej elipsie aniżeli, że znajduje się poza nią.

Z pośród omówionych trzech „standaryzowanych“ elips należało być więc uznać elipsę Andrae’go za najbardziej nadającą się do ilustracji, jeżeli przy wykresie pomija się omówienie prawdopodobieństwa, co z reguły ma miejsce.

Tablica współczynników do mnożenia półosi błędu średniego dla otrzymania półosi elipsy wewnątrz której punkt wyznaczany znajduje się z założonym prawdopodobieństwem W

W związku z rozpowszechnieniem pojęcia elipsy błędu średniego celowe jest stabelaryzowanie wartości współczynników F przez które należy mnożyć półosi elipsy błędu średniego A_{sr} B_{sr} dla otrzymania półosi elipsy błędu, wewnątrz której punkt wyznaczany znajduje się z zadaniem, dostatecznie dla konkretnego celu wielkim, prawdopodobieństwem W .

Podajemy poniżej tego rodzaju tablicę, umieszczając jednocześnie przy niej podstawowe wzory służące do rachunku elementów elips błędu, zarówno te, które już zostały podane i uzasadnione w tekście, jak i te które podane i uzasadnione będą dalej.

Prawdopodobieństwo położenia punktu wewnątrz elipsy błędu W	Współczynnik F przez który należy mnożyć półosi elipsy błędu średniego A_{sr} B_{sr} dla obliczenia półosi elipsy wewnątrz której punkt położony jest z prawdopodobieństwem W F	Wzory rozwiązujące zadanie wyznaczenia półosi elipsy błędu średniego A_{sr} B_{sr} oraz orientacji elipsy błędu to znaczy kąta prawoskrętnego φ między osią główną układu OX i osią A elipsy błędu.
0,393 (el:bl:sr)	1,000	$\tan 2\varphi = \frac{2ab}{aa - bb}$
0,40	1,011	
0,50 (el:prowdop)	1,177	$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa \\ 2ab \\ bb \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi \end{Bmatrix}$
0,60	1,354	
0,6321 (el:Andrae)	1,414	$A_{sr} = \frac{m_o}{\sqrt{t_1}} \quad B_{sr} = \frac{m_o}{\sqrt{t_2}}$
0,70	1,552	
0,80	1,794	Znaczenie symboli aa ab bb w przypadku ogólnym wyjaśnia równanie: $\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}^{-1} \left[\begin{Bmatrix} g_i & g_k \end{Bmatrix}^2 \right]^{-1}$
0,90	2,146	
0,99	3,035	
0,999	3,717	
0,9999	4,292	
0,99999	4,799	
0,999999	5,257	
1	∞	

przy czym Q_{rs} oznacza element odwrotności krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych Gaussa, położony w r -tej kolumnie i s -tym wierszu tego krakowianu g_i g_k oznacza i -tą oraz k -tą kolumną odwrotności pierwiastka krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych Gaussa, zaś odcięta wyznaczanego punktu jest i -tą a rzędna k -tą niewiadomą układu. Wielkość m_o jest średnim błędem spostrzeżenia o jednostkowej wadze.

W przypadku szczególnym — wyznaczenia pojedynczego punktu — wielkości aa ab bb są odpowiednimi współczynnikami układu równań normalnych Gaussa, to znaczy:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{Bmatrix} \quad \text{względnie:} \quad \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [paa] & [pab] \\ [pab] & [pbb] \end{Bmatrix}$$

Kontrola rachunku

Rachunek można kontrolować wzorami: $t_1 + t_2 = aa + bb$ $t_1 t_2 = \Delta$

$$\text{gdzie } \Delta = \begin{vmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{vmatrix} \quad \text{Winno też być: } A_{\hat{s}r}^2 + B_{\hat{s}r}^2 = m_x^2 + m_y^2 = m_p^2.$$

Wzory kontrolujące dla wielkości t_1 t_2 . Własność elipsy błędu średniego

Udowodnimy że między wielkościami t_1 t_2 których używaliśmy do wyznaczania elementów elipsy błędu a elementami tabeli wyznacznika:

$$D = \begin{vmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{vmatrix} = aa \, bb - ab \, ab$$

zachodzą następujące związki, pozwalające na kontrolę w czasie rachunku:

$$t_1 + t_2 = aa + bb \quad \text{oraz} \quad t_1 t_2 = D$$

Z określenia mamy:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa \\ 2ab \\ bb \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \sin^2 \varphi \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie } \tan 2\varphi = \frac{2ab}{aa - bb}.$$

Słuszność pierwszego z udowodnianych związków jest od razu widoczna. Sumując wielkości t_1 i t_2 mamy bowiem:

$$t_1 + t_2 = (aa)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + (bb)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = aa + bb.$$

Dla udowodnienia słuszności drugiego związku obliczymy najpierw różnicę $t_1 - t_2$ a następnie znajdziemy iloczyn $t_1 t_2$ jako czwartą część różnicy między kwadratem sumy $(t_1 + t_2)^2 = (aa + bb)^2$ a kwadratem różnicy $(t_1 - t_2)^2$.

Rachunek daje:

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= aa(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 4ab \sin \varphi \cos \varphi - bb(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \\ &= (aa - bb) \cos 2\varphi + 2ab \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś:

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} \quad \sin 2\varphi = \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}}$$

więc będzie:

$$t_1 - t_2 = \frac{(aa - bb) + 2ab \tan 2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} = \frac{\frac{(aa - bb)}{1} + \frac{2ab \tan 2\varphi}{aa - bb}}{\sqrt{1 + \frac{2ab \tan 2\varphi}{(aa - bb)(aa - bb)}}}$$

$$\text{czyli } t_1 - t_2 = \frac{(aa - bb)^2 + 4(ab)^2}{\sqrt{(aa - bb)^2 + 4(ab)^2}} \quad \text{skąd } (t_1 - t_2)^2 = (aa - bb)^2 + 4(ab)^2.$$

Odejmując to od kwadratu sumy: $(t_1 + t_2)^2 = (aa + bb)^2$
 znajdziemy: $4 t_1 t_2 = 4 (aa) (bb) - 4 (ab)^2$
 a więc: $t_1 t_2 = aa bb - ab ab = D$ cnd.

Wykażemy teraz że dla elipsy błędu średniego zachodzi związek $A_{sr}^2 + B_{sr}^2 = m_p^2$ o istnieniu którego już nadmienialiśmy. Sumując kwadraty półosi elipsy błędu średniego otrzymamy:

$$A_{sr}^2 + B_{sr}^2 = \frac{m^2}{t_1} + \frac{m^2}{t_2} = m^2 \left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} \right) = m^2 \frac{(aa + bb)}{D}$$

Ponieważ zaś $m_p^2 = m_x^2 = m_y^2 = m^2 \frac{bb}{D} + m^2 \frac{aa}{D} = m^2 \frac{(aa + bb)}{D}$
 widzimy że istotnie: $A_{sr}^2 + B_{sr}^2 = m_p^2$ cnd.

5. Przypadek spostrzeżeń niejednakowodokładnych

wymaga oczywiście do obliczenia elementów elipsy błędu zastosowania zupełnie analogicznego postępowania rachunkowego jakie stosujemy w przypadku spostrzeżeń jednakowo dokładnych.

Zamiast elementów $[aa]$ $[ab]$ $[bb]$ układu równań normalnych Gaussa odnoszących się do układu spostrzeżeń jednakowodokładnych występować będą elementy $[paa]$ $[pab]$ $[pbb]$ układu równań normalnych dla spostrzeżeń niejednakowych.

Błąd średni pojedynczego spostrzeżenia m zamieni się na błąd średni spostrzeżenia o jednostkowej wadze m_0 . Można to wysłowić mówiąc, że użyte przez nas symbole aa ab bb mieć będą następujące znaczenie:

a) w przypadku spostrzeżeń jednakowodokładnych

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{Bmatrix}$$

m_0 — błąd średni pojedynczego spostrzeżenia

b) w przypadku spostrzeżeń niejednakowodokładnych

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [paa] & [pab] \\ [pab] & [pbb] \end{Bmatrix}$$

m_0 — błąd średni pojedynczego spostrzeżenia o wadze jedność.

Wynika to bezpośrednio z równoważności układu obserwacyjnego scharakteryzowanego przez układ równań błędów:

$$a_i x + b_i y + c_i z + \dots + l_i = v_i \text{ o wadze } p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$$

z układem fikcyjnym spostrzeżeń jednakowodokładnych scharakteryzowanym przez układ równań błędów:

$$\sqrt{p_i} a_i x + \sqrt{p_i} b_i y + \sqrt{p_i} c_i z + \dots + \sqrt{p_i} l_i = w_i = \sqrt{p_i} v_i$$

na której to równoważności opieramy zawsze operacje rachunkowe w procesie wyrównania, zamieniając układ nierównowagowy na układ równowagowy w drodze mnożenia każdego równania błędu przez pierwiastek z odpowiadającej wagi.

Przykład liczbowy

$$\begin{aligned} \text{Mając dany układ równań normalnych } 46478 \, dx + 6896 \, dy &= 2952 \\ 6896 \, dx + 51634 \, dy &= -986 \end{aligned}$$

oraz błąd średni pojedynczego spostrzeżenia (względnie błąd średni spostrzeżenia o wadze jedność) równy $m_0 = 7'',2$ wyznaczmy elementy elipsy błędu, wewnątrz której znajduje się punkt wyznaczany przez dany układ z prawdopodobieństwem $W = 0,9$.

Rachunek daje:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{13792}{-5156} = -2,6749 \quad 2\varphi = 110^\circ 30', \varphi = 55^\circ 15'$$

$$\text{skł 1: } \cos \varphi = 0,5700, \quad \sin \varphi = 0,8216.$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46478 \\ 13792 \\ 51634 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,3249 & 0,6750 \\ 0,4683 & -0,4683 \\ 0,6750 & 0,3249 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 56412 \\ 41690 \end{Bmatrix}$$

Kontrola:

$$t_1 + t_2 = 98102 \quad (98112)$$

$$t_1 \, t_2 = 23518 \cdot 10^5 \quad (23523 \cdot 10^5)$$

Półosie elipsy błędu średniego wyniosą:

$$A_{sr} = \frac{7,2}{\sqrt{56412}} = 0,0301 \quad B_{sr} = \frac{7,2}{\sqrt{41690}} = 0,0351$$

Dla przejścia od półosi elipsy błędu średniego do półosi elipsy błędu odpowiadającej prawdopodobieństwu 0,9 pomnożymy półosi elipsy błędu średniego przez współczynnik 2,146 odszukany w tablicy na str. Otrzymamy:

$$A_{0,9} = 2,146 \cdot 0,0301 = 0,065 \quad B_{0,9} = 2,146 \cdot 0,0351 = 0,075.$$

6. Wyznaczanie elips błędów w układach wielopunktowych

Za elipsę błędu punkt P_{ik} którego odcięta jest i -tą rzędną k -tą niewiadomą w układzie równań normalnych Gaussa, wyznaczającym dowolny układ punktów geodezyjnych, uważa się elipsę błędu punktu wyznaczonego jako punkt pojedynczy z takiego układu równań normalnych Gaussa o dwóch niewiadomych, z którego wyznaczone średnie błędy współrzędnych tego punktu będą takie same jak średnie błędy współrzędnych punktu P_{ik} wyznaczone z danego układu równań normalnych — oczywiście przy założeniu, że błędy średnie pojedynczych obserwacji o jednostkowej wadze są w obu układach identyczne.

Z tego klasycznego określenia wynika zaraz prosty, lecz bardzo nieekonomiczny rachunkowo sposób wyznaczania elementów elipsy błędu dowolnego punktu w układzie wielopunktowym, cytowany w podręcznikach operujących algorytmem Gaussa.

Wystarczy mianowicie, poszukując elipsy błędu punktu którego odcięta jest i -tą a rzędną k -tą niewiadomą w danym układzie, tak przegrupować

niewiadome aby $x_i y_k$ znalazły się na końcu układu, po czym wyeliminować poprzedzające niewiadome stosując metodę stopniowej eliminacji. W wyniku tego postępowania otrzymamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi $x_i y_k$ spełniający postawione założenie: wyznaczone bowiem z niego niewiadome $x_i y_k$ oraz ich błędy średnie $m_x m_y$ będą równe odnośnym wielkościom wyznaczonym z całego układu rozwiązanego w jakikolwiek sposób — ciągle przy założeniu identyczności błędu średniego pojedynczej obserwacji w obu układach. Prostota pojęciowa nie idzie tu jednak w parze z prostotą rachunkową. Gdybyśmy zechcieli wyznaczać w myśl tego przepisu elipsy błędów wielu punktów z dużego układu rachunek pochłoniął by niesłychanie wiele czasu (np. w przypadku 50 niewiadomych musielibyśmy 25 razy rozwiązywać algorytm eliminacji 48 niewiadomych). Rachunek krakowianowy daje tu rozwiązanie bardzo proste i przejrzyste zarówno pod względem pojęciowym jak i rachunkowym.

Z założenia wynika że poszukujemy tu takiego krakowianu współczynnika nieznanego układu równań normalnych Gaussa o dwóch niewiadomych:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix}$$

aby wyznaczone z niego błędy średnie pierwszej i drugiej niewiadomej, równe jak wiadomo:

$$m_x = \sqrt{\frac{bb}{aa\ bb - ab\ ab}} m_o \quad m_y = \sqrt{\frac{aa}{aa\ bb - ab\ ab}} m_o$$

gdzie m_o błąd średni pojedynczego spostrzeżenia o jednostce wagi, były odpowiednio równe średnim błędom i -tej i k -tej niewiadomej wyznaczonym z pełnego układu równań normalnych Gaussa danego w zagadnieniu, w którym średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi jest równy m_o .

Te ostatnie błędy jednak — oznaczmy je dla odróżnienia przez m'_x i m'_y — przy oznaczeniu przez Q odwrotności krakowianu współczynnika nieznanego układu równań normalnych wyrażają jak to już wiemy wzory:

$$m'_x = m_o \sqrt{Q_{ii}} \quad m'_y = m_o \sqrt{Q_{kk}}$$

Jak zawsze przez Q_{rs} oznaczamy element krakowianu Q położony w r -tej kolumnie i s -tym wierszu tego krakowianu. Przyrównując m_x i m'_x oraz m_y i m'_y otrzymamy zaraz warunki które muszą być spełnione przez poszukiwane wielkości $aa\ ab\ bb$. Ma być mianowicie:

$$Q_{ii} = \frac{bb}{aa\ bb - ab\ ab} \quad Q_{kk} = \frac{aa}{aa\ bb - ab\ ab}$$

Zauważymy od razu że oba te warunki będą spełnione jeżeli tak dobierzemy nieznany krakowian:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix}$$

aby krakowian ten i znany nam krakowian

$$\begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}$$

były wzajemnie odwrotne, tzn. aby zachodził między nimi związek:

$$\begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \tau \text{ czyli: } \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix}^{-1}$$

Ostatnie równanie krakowianowe zawiera bowiem w sobie, co widać od razu, z obliczenia odwrotności w oparciu o pojęcie tabeli minorów, oba równania algebraiczne:

$$Q_{ii} = \frac{bb}{aa \, bb - ab \, ab} \quad \text{oraz:} \quad Q_{kk} = \frac{aa}{aa \, bb - ab \, ab}$$

Wynika stąd następująca prosta zasada pozwalająca przeprowadzić rachunek elementów elipsy błędu dla dowolnego punktu w układzie wielopunktowym:

Dla wyznaczenia elementów elipsy błędu punktu, którego odcięta jest i -tą zaś rzędna k -tą niewiadomą w układzie równań normalnych Gaussa, którego krakowian współczynnikowy posiada odwrotność Q , wystarczy zestawić czteroelementowy kwadrasty krakowian z elementami tej odwrotności:

$$\begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}$$

po czym obliczyć jego odwrotność:

$$\begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix}$$

i zastosować do otrzymanej tabeli takie samo postępowanie, jakie stosuje się do tabeli współczynnikowej układu równań normalnych Gaussa dla dwóch niewiadomych przy wyznaczeniu elementów elipsy błędu pojedynczego punktu:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab}{aa - bb} \quad \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa \\ 2ab \\ bb \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{Bmatrix}$$

$$A_{sr} = \frac{m_o}{\sqrt{t_1}} \quad B_{sr} = \frac{m_o}{\sqrt{t_2}} \quad A = A_{sr} F \quad B = B_{sr} F$$

Przykład liczbowy

(Układ równań wzięty z „Handbuch der Vermessungskunde“ Jordana-Eggerta, Bd I 435/465 wyd. 1948, gdzie przeprowadzono rachunek elipsy błędu średniego posługując się algorytmem Gaussa).

Dany jest układ równań normalnych Gaussa względem zmiennych dx_1 , dy_1 , dx_2 , dy_2 o tabeli współczynnikowej:

$$\begin{pmatrix} 277 & 100 & -90 & -28 \\ 100 & 362 & -1 & -15 \\ -90 & -1 & 231 & -80 \\ -28 & -15 & -80 & 287 \end{pmatrix}$$

oraz wielkość błędu średniego pojedynczej obserwacji $m_0 = \pm 2,1$

Należy wyznaczyć elementy elips błędu średniego dla obydwu punktów scharakteryzowanych przez dany układ.

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, odwrotnością tabeli współczynnikowej jest:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,493 & -0,131 & 0,228 & 0,105 \\ -0,131 & 0,312 & -0,054 & -0,012 \\ 0,228 & -0,054 & 0,585 & 0,183 \\ 0,105 & -0,012 & 0,183 & 0,409 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 100 \end{matrix}$$

przeto posługując się przyjętą i wyjaśnioną w tekście symboliką mieć będziemy:

1) dla punktu pierwszego:

$$\begin{pmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,493 & -0,131 \\ -0,131 & 0,312 \end{pmatrix}^{-1} \cdot 100 = \begin{pmatrix} 228,3 & 95,8 \\ 95,8 & 360,7 \end{pmatrix}$$

oraz

2) dla punktu drugiego:

$$\begin{pmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,585 & 0,183 \\ 0,183 & 0,409 \end{pmatrix}^{-1} \cdot 100 = \begin{pmatrix} 198,7 & -88,9 \\ -88,9 & 284,3 \end{pmatrix}$$

Obliczenie orientacji i pól elips błędu średniego daje:

1) dla punktu pierwszego:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{191,6}{-132,4} = -1,447. \text{ Przyjmując } 2\varphi = 124^\circ 16' \text{ tj. } \varphi = 62^\circ 08' \text{ mamy:}$$

$$\cos^2\varphi = 0,218 \quad \cos\varphi \cdot \sin\varphi = 0,413 \quad \sin^2\varphi = 0,781,$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 228,3 \\ 191,6 \\ 360,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,218 & 0,781 \\ 0,413 & -0,413 \\ 0,781 & 0,218 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410,6 \\ 177,8 \end{pmatrix} \text{ wreszcie: } \begin{matrix} A_{sr} = \frac{2,1}{\sqrt{410,6}} = 0,103 \\ B_{sr} = \frac{2,1}{\sqrt{177,8}} = 0,157 \end{matrix}$$

2) dla punktu drugiego:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-177,8}{-85,6} = 2,077. \text{ Przyjmując } 2\varphi = 64^\circ 18' \text{ tj. } \varphi = 32^\circ 09' \text{ mamy:}$$

$$\cos^2\varphi = 0,717 \quad \cos\varphi \cdot \sin\varphi = 0,451 \quad \sin^2\varphi = 0,283,$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 198,7 \\ -177,8 \\ 284,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,717 & 0,283 \\ 0,451 & -0,451 \\ 0,283 & 0,717 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142,7 \\ 340,3 \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{matrix} A_{sr} = \frac{2,1}{\sqrt{142,7}} = 0,176 \\ B_{sr} = \frac{2,1}{\sqrt{340,3}} = 0,113 \end{matrix}$$

Elementy liniowe wyrażone są tu w przyjętych u Jordana-Eggerta jednostkach rachunku: decymetrach.

7. Wyznaczanie elementów elips błędu z odwrotności pierwiastka krakowianowego

Jeżeli w toku rachunku obliczona została cała odwrotność krakowianu współczynnika układu równań normalnych Gaussa, to znaczy cały krakowian $(\underline{a}^2)^{-1} = \underline{Q}$ wówczas rachunek potrzebnego do obliczania elementów elipsy błędu punktu P_{ik} krakowianu:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ik} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}^{-1}$$

ogranicza się do zastosowania zwykłych reguł obliczenia odwrotności kwadratowego krakowianu o czterech elementach (najprościej w oparciu o pojęcie tabeli minorów).

Jeżeli, co często ma miejsce, w toku rachunku nie liczono wszystkich elementów odwrotności krakowianu współczynnika układu równań normalnych Gaussa, to znaczy jeżeli wartości liczbowe elementów krakowianu $\underline{Q}$ nie są znane, wówczas można obliczyć tylko potrzebne do rachunku elementy Q_{ii} Q_{ik} Q_{kk} wykorzystując znajomość odwrotności pierwiastka krakowianowego. Dla znalezienia poszukiwanych elementów wykorzystujemy tylko definicję mnożenia krakowianowego, w myśl której dla znalezienia elementu iloczynu dwóch krakowianów położonego w r -tej kolumnie i s -tym wierszu iloczynu należy pomnożyć r -tą kolumnę pierwszego czynnika przez s -tą kolumnę drugiego czynnika. (Ta definicja mnożenia jest jak wiadomo myślą przewodnią całego rachunku krakowianowego).

Ponieważ spierwiastkowanie krakowianu współczynnika układu równań normalnych, tj. krakowianu $(\underline{a}^2)$, gdzie $\underline{a}$ jest krakowianem współczynnika układu równań błędów, sprowadza się do znalezienia dwóch równych sobie czynników elementarnych w myśl równania:

$$\underline{a}^2 = \underline{r} \underline{r}$$

gdzie przez $\underline{r}$ oznaczono pierwiastek krakowianowy, zaś iloczyn odwrotności równa się odwrotności iloczynu, mamy:

$$(\underline{a}^2)^{-1} = \underline{r}^{-1} \underline{r}^{-1}$$

lub gdy, jak to się przyjęło w rachunku krakowianowym, oznaczyć przez $\underline{Q}$ odwrotność krakowianu współczynnika układu równań normalnych, zaś przez $\underline{q}$ odwrotność pierwiastka krakowianowego (nazywają ją często „półodwrotnością“,

$$\underline{Q} = \underline{q} \underline{q} = \underline{q}^2.$$

Ponieważ w myśl definicji mnożenia element krakowianu $\underline{Q}$ położony w i -tej kolumnie i i -tym wierszu powstanie z pomnożenia i -tej kolumny krakowianu $\underline{q}$ przez i -tą kolumnę drugiego czynnika, tj. tegoż krakowianu $\underline{q}$, dalej ponieważ element krakowianu $\underline{Q}$ położony w i -tej kolumnie i k -tym wierszu powstanie z pomnożenia i -tej kolumny krakowianu $\underline{q}$ przez jego k -tą kolumnę, wreszcie ponieważ element krakowianu $\underline{Q}$ po-

łożony w jego k -tej kolumnie i k -tym wierszu powstanie z pomnożenia k -tej kolumny krakowianu q przez k -tą, przeto poszukiwany zespół elementów krakowianu Q wyznaczyć można z równania:

$$\begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix} = \{ \underline{q}_i \quad \underline{q}_k \}^2$$

przy czym przez $\underline{q}_i$ oznaczono i -tą, zaś przez $\underline{q}_k$ oznaczono k -tą kolumnę krakowianu $\underline{q}$. Ostatecznie więc napisać możemy:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \left\{ (\underline{q}_i \quad \underline{q}_k)^2 \right\}^{-1}$$

8. **Związek między wielkością pola obszaru wewnątrz którego punkt wyznaczany znajduje się z założonym prawdopodobieństwem W , a wielkością prawdopodobieństwa**

W badaniach dokładnościowych częstokroć zależeć nam może nie tyle na ścisłym określeniu kształtu elipsy błędu — która w układach foremnych z reguły mało różni się od koła — ile na szybkim obliczeniu pola obszaru wewnątrz którego wyznaczany punkt znajduje się z założonym, przeważnie bliskim jedności, prawdopodobieństwem W . Jeżeli wielkość prawdopodobieństwa jest ułamkiem dziesiętnym składającym się wyłącznie z dziewiątek, a więc np. 0,9 0,99, 0,999 itp. co się zazwyczaj w pracach o wyższej dokładności zakłada, wówczas pole szukanego obszaru wyrazić można prostym wzorem:

$$f = \frac{14,47 \, dz}{\sqrt{\Delta}} m_0^2,$$

w którym symbol dz oznacza ilość dziewiątek w ułamku (zakładamy że zaczynają się one na pierwszym miejscu dziesiętnym oraz sąsiadują ze sobą), m_0 oznacza średni błąd spostrzeżenia o jednostkowej wadze, zaś Δ jest wyznacznikiem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] \\ [pab] & [pbb] \end{vmatrix} \text{ lub, w wypadku ogólnym } \Delta = \begin{vmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{vmatrix}$$

Tak np. mając układ równań normalnych Gaussa:

$$\begin{aligned} 46478 \, dx + 6896 \, dy &= \dots \\ 6896 \, dx + 51634 \, dy &= \dots \end{aligned} \quad \text{przy } m_0 = 7,2$$

wyznamy pole obszaru wewnątrz którego wyznaczany punkt położony jest z prawdopodobieństwem 0,99 wykonując prosty rachunek:

$$f = \frac{14,47 \cdot 2}{\sqrt{235229 \cdot 10^4}} \cdot 7,2^2 = \frac{1500}{48500} = 0,0309$$

to znaczy, ponieważ rachunek w danym układzie prowadzono przyjmując za jednostkę 1 metr, z prawdopodobieństwem 0,99 punkt wyznaczany nie

wykracza poza obszar $0,0309 \text{ m}^2$, lub 309 cm^2 . To samo znaleźlibyśmy wyznaczając pólisie elipsy błędu średniego, przeliczając je dla prawdopodobieństwa 0,99 i obliczając pole elipsy wzorem $f = \pi \cdot AB$.

Słuszność wzoru skróconego wynika oczywiście z obliczenia pola elipsy błędu średniego z wzorów na pólisie A i B . Mamy mianowicie:

$$f = \pi \cdot AB = \frac{\pi \cdot m^2}{\sqrt{t_1 t_2}} 2 \cdot s^2 = \text{Ponieważ zaś ze związku } W = 1 - e^{-s^2}$$

wynika: $-s^2 \log_{10} e = \lg_{10}(1 - W)$, czyli $s^2 = \frac{-\lg_{10}(1 - W)}{0,43429}$, będzie:

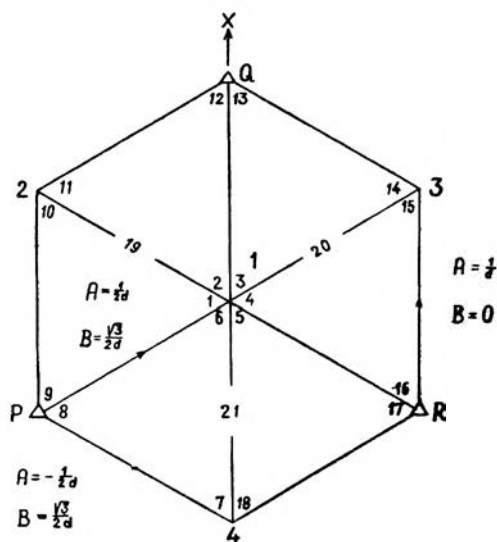
$$f = \frac{-m^2 3,14159 \cdot 2}{\sqrt{\Delta} \cdot 0,43429} \lg(1 - W) = \frac{-14,74}{\sqrt{\Delta}} m^2 \lg(1 - W)$$

Jeżeli ograniczyć prawdopodobieństwa W do liczb dziesiętnych typu 0,9 0,99.... itd., wówczas wielkości $(1 - W)$ będą liczbami typu 0,1 0,01..., a więc ich logarytmy dziesiętne zawierać będą po tyle ujemnych jednostek, ile dziewiątek zawierają liczby 0,9 0,99.... Oznaczając przez dz tę ilość dziewiątek otrzymamy więc ostatecznie:

$$f = \frac{14,47 dz}{\sqrt{\Delta}} m^2$$

9. Przykład — wpływ nadliczbowych pomiarów liniowych

Jako przykład zastosowania pojęcia elipsy błędu rozpatrzmy jeszcze następujące zadanie. Wyznamy elipsy błędu punktów wyznaczanych przez sieć przedstawioną na rysunku przy następujących założeniach:



Rys. 33

a) w trójkątach pomierzono wszystkie kąty z błędem średnim pomiaru kąta

$$m_o$$

b) w trójkątach pomierzono wszystkie kąty z błędem średnim pomiaru kąta

$$m_o$$

oraz długości 1-2 1-3 1-4 z błędami średnimi pomiaru boku równymi

$$\frac{m_o d}{3}$$

Zakładamy więc tutaj, że błąd względny pomiaru boku jest trzykrotnie mniejszy od błędu radialnego pomiaru kąta. Odpowiadało by to więc np. pomiarowi kątowemu z dokładnością 0,5'' i pomiarowi boku z błędem względnym ok. 1/1 200 000.

a) W przypadku pierwszym mieć będziemy 18 równań błędów obserwacji kątowych:

$$v = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix} \cdot \dots$$

znanych nam z rozdziału I. Jeżeli oznaczymy przez d bok sieci oraz skierujemy oś główną układu OX zgodnie z kierunkiem odcinka 4-1, wówczas zważywszy że:

$$\begin{aligned} A_{P2} &= \frac{1}{d} = \frac{2}{2d} & A_{P1} &= \frac{1}{2d} & A_{P4} &= \frac{-1}{2d} \\ B_{P2} &= 0 & B_{P1} &= \frac{\sqrt{3}}{2d} & B_{P4} &= \frac{\sqrt{3}}{2d} \end{aligned}$$

oraz że współczynniki kierunkowe pozostałych kierunków w sieci dadzą się bez trudności wyrazić przez współczynniki kierunkowe powyżej napisane, napisać możemy wszystkie 18 równań błędów. Tak np. dla kąta 1 będzie:

$$v_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_2 & dy_2 \\ -1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 \\ +2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \dots$$

czyli pod postacią algebraiczną:

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2d} dx_2 + \frac{1}{2d} dy_2 - \frac{2}{2d} dy_1 \quad \dots$$

gdzie, jak zawsze, nie piszemy wartości wyrazów obserwacyjnych — nieznanymi i dla analizy ogólnej nieistotnymi. Krakowian współczynniki układu równań błędów mieć tu będzie postać (piszemy ponad nim symbole niewiadomych):

$$a = \begin{pmatrix} dx_1 & dy_1 & dx_2 & dy_2 & dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 \\ 0 & -\frac{2}{2d} & \frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & & & \\ \frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & -\frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & & & \\ \frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & & -\frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & \\ 0 & \frac{2}{2d} & & & \frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & \\ -\frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & & & & 0 & -\frac{2}{2d} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & & & & 0 & \frac{2}{2d} \\ 0 & \frac{2}{2d} & & & & & \frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} \\ \frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & & & & -\frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & 0 & -\frac{2}{2d} & & & & \\ \frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & -\frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & & & \\ -\frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & 0 & -\frac{2}{2d} & & & & \\ 0 & \frac{2}{2d} & \frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & & & \\ 0 & -\frac{2}{2d} & & & \frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & \\ -\frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & & 0 & -\frac{2}{2d} & & \\ \frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & & -\frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & \\ -\frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{1}{2d} & & & 0 & \frac{2}{2d} & & \\ \frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} & & & & & -\frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} \\ 0 & -\frac{2}{2d} & & & & & \frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2d} \end{pmatrix}$$

Dopiszemy pod współczynnikami tego układu jeszcze współczynniki trzech równań obserwacji liniowych, które będą nam w następstwie potrzebne i których znaczenie wyjaśnimy dalej:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & & & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & & & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & \\ \frac{2}{2} & 0 & & & & & -\frac{2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Podnosząc krakowian współczynnikowy układu równań błędów $\underline{a}$ do kwadratu otrzymamy krakowian współczynnikowy układu równań normalnych Gaussa $\underline{a^2}$.

$$\underline{a^2} = \frac{1}{d^2} \left\{ \begin{array}{cccccccc} \frac{36}{4} & 0 & \frac{-6}{4} & 0 & \frac{-6}{4} & 0 & \frac{-6}{4} & 0 \\ 0 & \frac{36}{4} & 0 & \frac{-6}{4} & 0 & \frac{-6}{4} & 0 & \frac{-6}{4} \\ \frac{-6}{4} & 0 & \frac{12}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{4} & 0 & \frac{12}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-6}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{4} \end{array} \right\}$$

Dla ułatwienia rachunku odwrotności napiszemy ten krakowian pod prostszą postacią wynosząc przed krakowian czynnik $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Otrzymamy wówczas:

$$\underline{a^2} = \frac{3}{2d^2} \left\{ \begin{array}{cccccccc} 6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right\}$$

Łatwo sprawdzić na drodze mnożenia krakowianowego, że odwrotnością tego krakowianu będzie napisany poniżej krakowian $(\underline{a^2})^{-1}$

$$\left(\underline{a^2}^{-1} \right) = \frac{d^2}{27} \left\{ \begin{array}{cccccccc} 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{array} \right\}$$

Obecnie mamy już materiał pozwalający na obliczenie elementów elips błędu wszystkich punktów wyznaczonych przez sieć. Będziemy mianowicie mieli:

$$\text{dla punktu 1} \quad \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4d^2}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4d^2}{27} \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{27}{4d^2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4d^2} \end{Bmatrix}$$

$$1 \text{ dla pozostałych punktów: } \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{10d^2}{27} & 0 \\ 0 & \frac{10d^2}{27} \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{27}{10d^2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{10d^2} \end{Bmatrix}$$

Ponieważ w obydwóch przypadkach będziemy oczywiście mieli $\tan 2\varphi = 0$, przeto osie elipsy błędu będą się pokrywać z osiami układu (zajdzie to zawsze w wypadku gdy $ab = 0$). Ponadto — ponieważ $aa = bb$ — półosie elipsy będą sobie równe, a więc elipsy będą kołami. Oznaczając przez R promienie tych kół otrzymamy:

dla punktu 1

$$R = A = B = \frac{m_o}{\sqrt{t_1}} = \frac{m_o}{\sqrt{\frac{27}{4}d^2}} = \frac{m_o d}{\sqrt{\frac{27}{4}}} = m_o d \sqrt{\frac{4}{27}} = 0,3849 m_o d.$$

dla pozostałych punktów (2, 3, 4)

$$R = A = B = \frac{m_o}{\sqrt{t_1}} = \frac{m_o}{\sqrt{\frac{27}{10}d^2}} = \frac{m_o d}{\sqrt{\frac{27}{10}}} = m_o d \sqrt{\frac{10}{27}} = 0,6086 m_o d.$$

b) W przypadku drugim

oprócz 18 równań błędów obserwacji kątowych mieć będziemy jeszcze 3 równania błędów obserwacji liniowych. Szczegóły dotyczące równań obserwacji liniowych znajdują się w części III. Równania te mają postać:

$$v = \begin{vmatrix} dx_i & dy_i & dx_k & dy_k \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}_2 \cdot \dots \cdot \dots$$

przy czym φ jest kątem osiowym odcinka łączącego punkt początkowy linii (i -ty) z punktem końcowym (k -tym), zaś znaczenie nieużywanego jeszcze przez nas dotychczas symbolu pomocniczego 2 wyjaśnia równanie:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_2 = ac + bd \text{ np } \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}_2 = 2 \cdot 1 + 5(-6) = -28 \text{ itp.}$$

Zestawienie równań obserwacji liniowych tj. dziewiętnastej, dwudziestej i dwudziestepierwszej obserwacji w układzie daje:

$$v_{19} = \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_2 & dy_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \text{ tj. } v_{19} = -\frac{1}{2} dx_1 +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} dy_1 + \frac{1}{2} dx_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} dy_2, \cdot \cdot \cdot$$

$$v_{20} = \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_3 & dy_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \text{ tj. } v_{20} = -\frac{1}{2} dx_1 -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} dy_1 + \frac{1}{2} dx_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} dy_3, \cdot \cdot \cdot$$

$$v_{21} = \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_4 & dy_4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \text{ tj. } v_{21} = dx_1 - dx_4 =$$

$$= \frac{2}{2} dx_1 - \frac{2}{2} dx_4 \cdot \cdot \cdot$$

Tabelę współczynnিকową tych równań którą napiszemy wyraźnie pod postacią:

dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
$\frac{2}{2}$						$-\frac{2}{2}$	

podpisaliśmy na str. 125 pod tabelą współczynnিকową układu równań błędów obserwacji kątowych dla rozpatrywanej sieci. Dla przejścia do układu równań normalnych należy teraz „zrównoważyć“ obserwacje kątowe i liniowe, to znaczy podzielić każde równanie błędów przez odpowiadający błąd średni, po czym od tego „zrównoważonego“ układu równań błędów przejść na zwykłej drodze do równań normalnych Gaussa. Można to osiągnąć dzieląc kwadrat krakowianu współczynnিকowego układu równań błędów obserwacji liniowych, który już obliczyliśmy, przez m_o^2 i dodając do niego kwadrat krakowianu współczynnিকowego układu równań błędów obserwacji liniowych podzielony przez $(3m_o d)$ t. przez $9 m_o^2 d^2$. Pierwszego z tych krakowianów nie będziemy tu pisać, gdyż otrzymuje-

my go od razu z krakowianu $\underline{a}_2$ ze str. 126 pisząc w mianowniku $d^2 m_o^2$ zamiast d^2 . Drugi krakowian — oznaczmy go $\underline{b}$ — będzie miał postać:

$$\underline{b} = \frac{1}{d^2 m_o^2} \left\{ \begin{array}{cccccccc} \frac{6}{36} & 0 & \frac{-1}{36} & \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{-1}{36} & \frac{-\sqrt{3}}{36} & \frac{-4}{36} & 0 \\ 0 & \frac{6}{36} & \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{-3}{36} & \frac{-\sqrt{3}}{36} & \frac{-3}{36} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{36} & \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{1}{36} & \frac{-\sqrt{3}}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{-3}{36} & \frac{-\sqrt{3}}{36} & \frac{3}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{36} & \frac{-\sqrt{3}}{36} & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{\sqrt{3}}{36} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{36} & \frac{-3}{36} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{3}{36} & 0 & 0 \\ \frac{-4}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Sumując krakowiany $\underline{a}^2 \cdot \frac{1}{m_o^2}$ ze str. 126 i napisany ostatnio krakowian $\underline{b}$ otrzymamy krakowian współczynnikowy układu równań normalnych zrównoważonego zawierającego równania kątowe i liniowe łącznie. Oznaczmy ten krakowian dla odróżnienia przez $\underline{a}'^2$. Będzie on równy:

$$\underline{a}'^2 = \frac{1}{36 m_o^2 d^2} \left\{ \begin{array}{cccccccc} 330 & 0 & -55 & \sqrt{3} & -55 & -\sqrt{3} & -58 & 0 \\ 0 & 330 & \sqrt{3} & -57 & -\sqrt{3} & -57 & 0 & -54 \\ -55 & \sqrt{3} & 109 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -57 & -\sqrt{3} & 111 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -55 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 109 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -57 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 111 & 0 & 0 \\ -58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112 & 0 \\ 0 & -54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \end{array} \right\}$$

Po wyrażeniu wielkości liczbowych w ułamkach dziesiętnych otrzymamy:

$$\underline{a}'^2 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 9,1666 & 0 & -1,5278 & +0,0481 & -1,5278 & -0,0481 & -1,6111 & 0 \\ 0 & 9,1666 & 0,0481 & -1,5833 & -0,0481 & -1,5833 & 0 & -1,5000 \\ -1,5278 & 0,0481 & 3,0278 & -0,0481 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0481 & -1,5833 & -0,0481 & 3,0833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5278 & -0,0481 & 0 & 0 & 3,0278 & 0,0481 & 0 & 0 \\ -0,0481 & -1,5833 & 0 & 0 & 0,0481 & 3,0833 & 0 & 0 \\ -1,6111 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,1111 & 0 \\ 0 & -1,5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,0000 \end{array} \right\} \frac{1}{m_o^2 d^2}$$

Można sprawdzić na drodze mnożenia że odwrotnością tego krakowianu jest napisany poniżej krakowian $(a')^{-1} = \underline{Q}$.

$$\underline{Q} = \begin{Bmatrix} 0,14727 & 0 & 0,07429 & -0,00114 & 0,07429 & 0,00114 & 0,07627 & 0 \\ 0 & 0,14727 & -0,00114 & 0,07561 & 0,00114 & 0,07561 & 0 & 0,07364 \\ 0,07429 & -0,00114 & 0,36784 & 0,00400 & 0,03747 & 0 & 0,03847 & -0,00057 \\ -0,00114 & 0,07561 & 0,00400 & 0,36323 & 0 & 0,03881 & -0,00059 & 0,03780 \\ 0,07429 & 0,00114 & 0,03747 & 0 & 0,36784 & -0,00400 & 0,03847 & 0,00057 \\ 0,00114 & 0,07561 & 0 & 0,03881 & -0,00400 & 0,36323 & 0,00059 & 0,03780 \\ 0,07627 & 0 & 0,03847 & -0,00059 & 0,03847 & 0,00059 & 0,36092 & 0 \\ 0 & 0,07364 & -0,00057 & 0,03780 & 0,00057 & 0,03780 & 0 & 0,37015 \end{Bmatrix} m_0^2 d^2$$

(Rachunek odwrotności $\underline{a} \underline{Q} = \underline{1}$ zgodny w czwartych cyfrach za przecinkiem). Obliczenie elementów elips błędu średniego daje:

Dla punktu 1.

$$A_{sr} = B_{sr} = m_x = m_y = m_o d \sqrt{0,14727} = 0,3838 m_o d$$

Dla punktu 2.

$$\text{Mamy: } \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,36784 & 0,00400 \\ 0,00400 & 0,36323 \end{Bmatrix} m_0^2 d^2 \begin{Bmatrix} 2,7189 & -0,0299 \\ -0,0299 & 2,7533 \end{Bmatrix} \frac{1}{m_0^2 d^2}$$

Obliczając orientację znajdujemy:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-0,0598}{-0,0344} = 1,74 \quad 2\varphi = 60^\circ, \quad \varphi = 30^\circ$$

$$\text{tj. } \cos^2 \varphi = 0,7500 \quad \sin^2 \varphi = 0,2500 \quad \cos \varphi \sin \varphi = 0,4330$$

Rachunek krakowianu $\underline{t}$ daje:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,7189 \\ -0,0598 \\ 2,7533 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,7500 & 0,2500 \\ 0,4330 & -0,4330 \\ 0,2500 & 0,7500 \end{Bmatrix} \frac{1}{m_0^2 d^2}$$

$$\text{Skąd } t_1 = 2,7016 : m_0^2 d^2 \text{ oraz } t_2 = 2,7706 : m_0^2 d^2.$$

Wielkości półośi błędu średniego wyniosą:

$$A_{sr} = \frac{1}{\sqrt{2,7016/m_0^2 d^2}} = \frac{m_o d}{\sqrt{2,7016}} = 0,6084 m_o d$$

$$B_{sr} = \frac{1}{\sqrt{2,7706/m_0^2 d^2}} = \frac{m_o d}{\sqrt{2,7706}} = 0,6008 m_o d \quad \varphi = 30^\circ$$

Dla punktu 3

$$\text{Mamy: } \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,36784 & -0,00400 \\ -0,00400 & 0,36323 \end{Bmatrix} m_0^2 d^2 \begin{Bmatrix} 2,7189 & 0,0299 \\ 0,0299 & 2,7533 \end{Bmatrix} \frac{1}{m_0^2 d^2}$$

Obliczenie orientacji daje:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{0,0598}{0,0344} = -1,74 \quad 2\varphi = -60^\circ, \quad \varphi = -30^\circ$$

a więc $\cos^2\varphi = 0,75$ $\sin^2\varphi = 0,25$ $\cos\varphi \sin\varphi = -0,4330$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,7189 \\ 0,0598 \\ 2,7533 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7500 & 0,2500 \\ -0,4330 & 0,4330 \\ 0,2500 & 0,7500 \end{pmatrix} \frac{1}{m_0^2 d^2} = \begin{pmatrix} 2,7016 \\ 2,7706 \end{pmatrix} \frac{1}{m_0^2 d^2}$$

Otrzymamy więc takie same wartości półośi elipsy błędu jak dla punktu 2, co zresztą było do przewidzenia z uwagi na symetrię. Będzie tedy ostatecznie dla punktu 3:

$$\begin{aligned} A_{sr} &= 0,6084 m_0 d \\ B_{sr} &= 0,6008 m_0 d \quad \varphi = -30^\circ \end{aligned}$$

Dla punktu 4.

$$\text{Mamy: } \begin{pmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,36092 & 0 \\ 0 & 0,37015 \end{pmatrix} m_0^2 d^2 \begin{pmatrix} 2,7707 & 0 \\ 0 & 2,7016 \end{pmatrix} \frac{1}{m_0^2 d^2}$$

Ponieważ $\tan 2\varphi = 0$, $2\varphi = 0$, $\varphi = 0$ otrzymamy elipsę o półośi A skierowanej zgodnie z osią OX układu. Wielkość jej będzie równa błędowi średniemu m_x , wielkość półośi B równa będzie błędowi średniemu m_y . Mamy więc dla punktu 4

$$\begin{aligned} A_{sr} &= m_x = m_0 d \sqrt{0,36092} = 0,6008 m_0 d \\ B_{sr} &= m_y = m_0 d \sqrt{0,37015} = 0,6084 m_0 d. \end{aligned}$$

Z badania jest widoczne, że pomiar liniowy bardzo nieznacznie zwiększył dokładność wyznaczenia położenia punktów. Elipsy błędów, które dla sieci bez pomiarów liniowych były kołami, uległy drobnemu spłaszczeniu w kierunku pomiaru liniowego (punkty 2, 3, 4), bądź też zachowały kształt koła przy cokolwiek zmniejszonym promieniu (punkt 1). Uwidacznia to poniższe zestawienie:

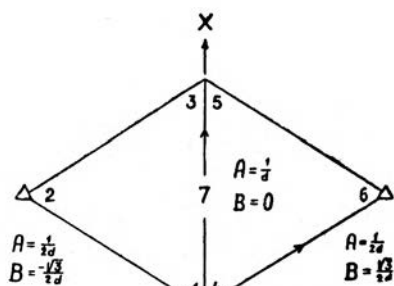
Sieć bez pomiarów liniowych	Sieć z pomiarami liniowymi	
$A = B = 0,3849 m_0 d$	$A = B = 0,3838 m_0 d$	punkt 1
$A = B = 0,6086 m_0 d$	$A = 0,6084 m_0 d \quad B = 0,6008 m_0 d$	punkt 2
$A = B = 0,6086 m_0 d$	$A = 0,6084 m_0 d \quad B = 0,6008 m_0 d$	punkt 3
$A = B = 0,6086 m_0 d$	$A = 0,6008 m_0 d \quad B = 0,6084 m_0 d$	punkt 4

Z badania można by wyciągnąć wniosek, że dokonywanie pomiarów liniowych w sieciach kątowych bogatych w obserwacje nadliczbowe, nie jest celowe jako przynoszące minimalny wzrost dokładności. Ponieważ jednak w triangulacjach łączy się częstokroć punkty wyższego rzędu różnych sieci — niekiedy posługujących się cokolwiek inną jednostką długości (jak to np. miało miejsce w sieciach niemieckich) — należy raczej być ostrożnym w opiniowaniu o zbędności pomiarów liniowych i analizować zagadnienie indywidualnie.

Uwaga: W prostych sieciach można wprowadzić w analizie jako parametr stosunek względnego błędu średniego długości do błędu radialnego pomiaru kąta. Oznaczając ten stosunek przez k tj. kładąc:

$$k = \frac{m_d}{dm_o} \quad \text{t. zn. } m_d = km_o d$$

mielibyśmy np. w sieci przedstawionej na rys. 34, w której dokonano sześć obserwacji kątowych o błędzie średnim m_o oraz jedną obserwację liniową o błędzie średnim m_d następujący krakowian współczynnikowy zrównoważonego układu równań błędów:



Rys. 34

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_o d} \\ \frac{\sqrt{3}}{2 m_o d} & -\frac{1}{2 m_o d} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2 m_o d} & -\frac{1}{2 m_o d} \\ 0 & -\frac{1}{m_m d} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2 m_o d} & \frac{1}{2 m_o d} \\ \frac{\sqrt{3}}{2 m_o d} & \frac{1}{2 m_o d} \\ \frac{1}{km_o d} & 0 \end{pmatrix}$$

Podnosząc ten krakowian do kwadratu otrzymamy:

$$\underline{a}^2 = \frac{1}{m_o^2 d^2} \begin{pmatrix} \left(3 + \frac{1}{k^2}\right) & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Odwrotnością tego krakowianu będzie następujący krakowian $(\underline{a}^2)^{-1} = \underline{Q}$.

$$\underline{Q} = \frac{m_o^2 d^2}{9 + \frac{3}{k^2}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \left(3 + \frac{1}{k^2}\right) \end{pmatrix}$$

Stąd wynika że błędy średnie współrzędnych — równe z uwagi na zerowość wyrazów ab półosiom elipsy błędu średniego — będą się w rozpatrywanej sieci wyrażały przez następujące równania:

$$A_{sr} = m_x = \frac{m_0 d}{\sqrt{3 + \frac{1}{k^2}}} \quad B_{sr} = m_y = \frac{m_0 d}{\sqrt{3}}$$

Stosunek półosi elipsy błędu $S = \frac{A}{B}$ wyniesie, jak widać:

$$S = \frac{A}{B} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{3k^2}}}$$

Podstawiając np. $k = \frac{1}{3}$, jak to przyjmowaliśmy w poprzednim przykładzie, otrzymalibyśmy dla stosunku półosi wyrażenie:

$$S = \frac{A}{B} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{3}}} = \frac{1}{2}$$

Splaszczenie elipsy, która w wypadku nieistnienia pomiarów liniowych jest w rozpatrywanej sieci kołem, jest więc dość znaczne.

Rozdział X

Ilustracje graficzne badań

WSTĘP

Badanie typowych sieci triangulacyjnych, zarówno tych jakie już przeprowadziliśmy jak i innych, dostarcza bardzo dużo materiału cyfrowego który dopiero po zilustrowaniu graficznym pozwala na natychmiastowe wniknięcie w istotną treść wniosków badania. Pewne cechy badanej sieci, trudno odczytywalne z zespołu danych cyfrowych jakiego dostarcza badanie, stają się bez trudu dostrzegalne na przejrzystym wykresie syntetyzującym te dane cyfrowe. Ma to miejsce dlatego że oko jednocześnie lub niemal jednocześnie widzi szczegóły ilustracji graficznej i natychmiast je porównuje. Z tej szybkości reakcji zapewne wynika i ta właściwość ilustracji graficznych że są one nierównie trwalej przyswajalne od

ilustracji cyfrowych. Niniejszy rozdział poświęcony będzie ilustracjom graficznym badań sieci triangulacyjnych w oparciu o te kryteria, które przyjęliśmy na początku pracy i na których opieraliśmy się przy dotychczasowych badaniach.

Przypominamy pokrótce, że kryteriami tymi były:

- a) wielkości błędów średnich położenia punktów wyznaczanych, rozszerzone w sensie geometrycznym przez pojęcie elipsy błędu,
- b) wielkość błędu średniego błędu,
- c) wielkości wpływów błędów nieprzypadkowych na funkcje obserwacji, a w szczególności na współrzędne wyznaczanych punktów,
- d) zmniejszanie się kwadratu średniego błędu obserwacji na skutek procesu wyrównania metodą najmniejszych kwadratów (kryterium Otrębskiego).

Stosowanie kryteriów b) oraz d) jest bardzo mało kłopotliwe. W pracach geodezyjnych nie mogą one jednak w żadnym razie udzielić dostatecznej odpowiedzi w analizie porównawczej. Stanowią one natomiast bardzo cenne uzupełnienie kryterium pierwszego, w przypadku gdy zastosowanie jego nie daje zdecydowanych wyników. Stosowanie kryteriów a) oraz c) jest rachunkowo bardzo uciążliwe, o czym już mieliśmy okazję się przekonać. Wymagają one oba rachunku odwrotności krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych Gaussa, której obliczenie jest dla dużych układów ciężkim problemem rachunkowym. (Jeżeli badamy wyłącznie błędy średnie współrzędnych, to znaczy gdy abstrahujemy od błędów średnich funkcji tych współrzędnych, można wprowadzić obejść się bez pojęcia odwrotności poprzestając na obliczeniu odwrotności pierwiastka, jednak obliczenie całej odwrotności daje tak przejrzystą kontrolę pod postacią równania $\underline{x} \underline{x}^{-1} = \underline{\tau}$, że stosowaliśmy je we wszystkich niemal analizach).

Graficzna ilustracja kryterium a) sprowadza się do wykreślenia elips błędów wszystkich wyznaczanych punktów w porównywanych sieciach. Jest przy tym zasadniczo obojętne czy posługujemy się elipsą błędu średniego, czy inną, gdyż zależy nam tylko na porównaniu efektu dokładnościowego obu sieci.

Graficzna ilustracja kryterium b) sprowadza się do wykreślenia oprócz obranej elipsy (np. elipsy błędu średniego) dwóch równoległych elips charakteryzujących granice zmienności wymiarów elipsy w obu sieciach przy tym samym prawdopodobieństwie tej granicy zmienności. Graficzna ilustracja kryterium c) może polegać na wykreśleniu wektorów przesunięć punktów pod wpływem takiej samej zmiany obserwacji dla obu sieci. Ilustracja graficzna kryterium d) jest zbędna.

Wykres I (rys. 35).

Wykres 1 przedstawia elipsy błędu punktów wyznaczanych przez sieci elementarne o 1, 4, 9, 16 trójkątach. Elipsy te wykreślono dla każdego punktu trzykrotnie przyjmując: raz założoną wartość błędu średniego, raz dolną granicę tej wartości i raz górną granicę tej wartości, w założeniu, że błąd średni zmienia się od $m_o - m_{m_o}$ do $m_o + m_{m_o}$, gdzie m_o błąd średni, zaś m_{m_o} jego średni błąd.

Z wykresu jest odrazu widoczne, że pomimo jednakowej wartości błędu położenia punktu najbardziej odległego od podstawy we wszystkich sieciach elementarnych (jednakowe wartości elips środkowych we wszystkich sieciach), sieci małopółkowe wyznaczają położenie punktu wiarygodniej od sieci wielopółkowych, bowiem osi elips zewnętrznych są dla sieci małopółkowych mniejsze.

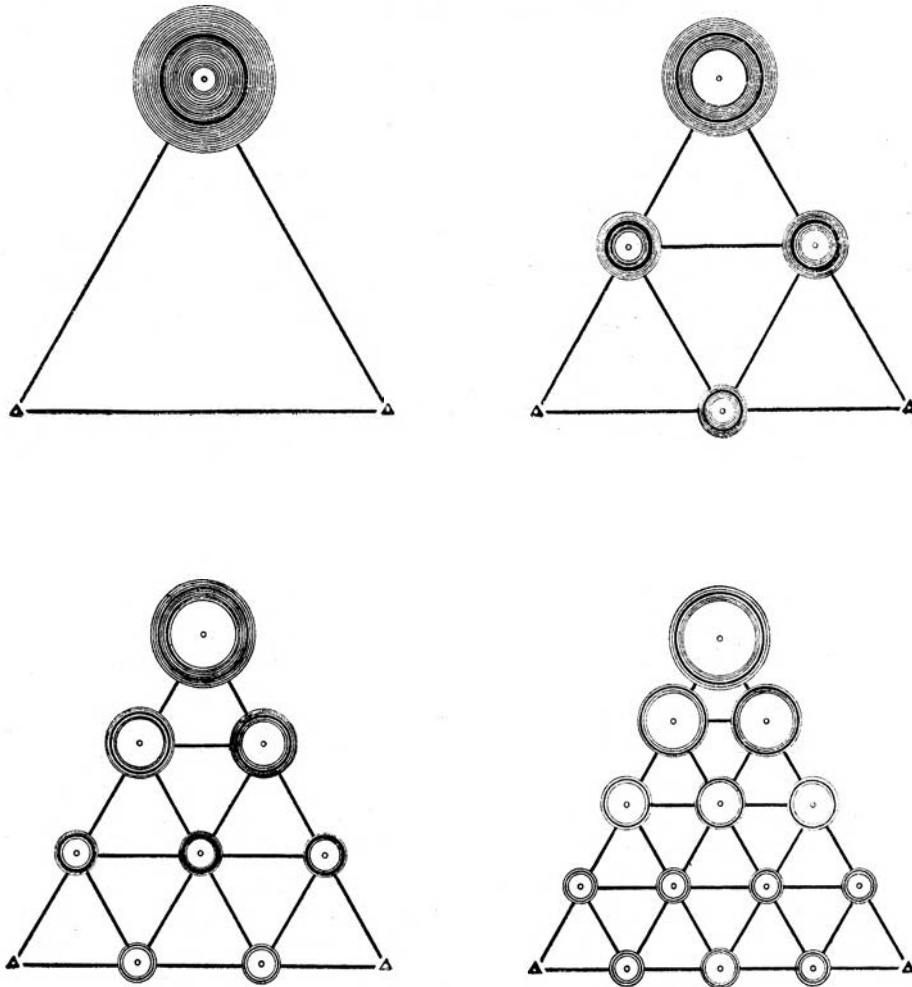
Wykreślenie elips — które są tu zresztą kołami — oparte jest na materiale obliczeń rozdziału I, IV oraz V.

Poniżej przytoczona tabelka, z której układu widoczne są proste rachunki, jakie należało wykonać dla wykorzystania cytowanego materiału do sporządzenia wykresu, wyjaśnień nie wymaga.

T a b e l k a d a n y c h c y f r o w y c h						
Ilość trójkątów w sieci elementar. n^2	NN punktów	Błąd położenia punktu m_p	Półś elipsy bł: śr: $A = B =$ $= m_x = m_y$	Promienie kół na wykresie uzyskane w drodze mnożenia A przez		
				1,707	1,000	0,293 dla $n=1$
				1,353	1,000	0,647 $n=2$
				1,213	1,000	0,787 $n=3$
				1,151	1,000	0,849 $n=4$
1	1	1,155 $m_o D$	0,82 $m_o D$	1,39 $m_o D$	0,82 $m_o D$	0,24 $m_o D$
4	1	1,155 $m_o D$	0,82 $m_o D$	1,10 $m_o D$	0,82 $m_o D$	0,53 $m_o D$
	2,3	0,645 $m_o D$	0,46 $m_o D$	0,62 $m_o D$	0,46 $m_o D$	0,30 $m_o D$
	4	0,500 $m_o D$	0,35 $m_o D$	0,43 $m_o D$	0,35 $m_o D$	0,23 $m_o D$
9	1	1,155 $m_o D$	0,82 $m_o D$	0,99 $m_o D$	0,82 $m_o D$	0,64 $m_o D$
	2,3	0,764 $m_o D$	0,54 $m_o D$	0,66 $m_o D$	0,54 $m_o D$	0,42 $m_o D$
	4,6	0,489 $m_o D$	0,35 $m_o D$	0,42 $m_o D$	0,35 $m_o D$	0,27 $m_o D$
	5	0,497 $m_o D$	0,35 $m_o D$	0,43 $m_o D$	0,35 $m_o D$	0,28 $m_o D$
	7,9	0,435 $m_o D$	0,31 $m_o D$	0,37 $m_o D$	0,31 $m_o D$	0,24 $m_o D$
16	1	1,155 $m_o D$	0,82 $m_o D$	0,94 $m_o D$	0,82 $m_o D$	0,69 $m_o D$
	2,3	0,838 $m_o D$	0,59 $m_o D$	0,68 $m_o D$	0,59 $m_o D$	0,50 $m_o D$
	4,6	0,615 $m_o D$	0,43 $m_o D$	0,50 $m_o D$	0,43 $m_o D$	0,37 $m_o D$
	5	0,585 $m_o D$	0,41 $m_o D$	0,48 $m_o D$	0,41 $m_o D$	0,35 $m_o D$
	7,10	0,401 $m_o D$	0,28 $m_o D$	0,33 $m_o D$	0,28 $m_o D$	0,24 $m_o D$
	8,9	0,443 $m_o D$	0,31 $m_o D$	0,36 $m_o D$	0,31 $m_o D$	0,27 $m_o D$
	11,13	0,374 $m_o D$	0,26 $m_o D$	0,30 $m_o D$	0,26 $m_o D$	0,22 $m_o D$
	12	0,460 $m_o D$	0,33 $m_o D$	0,37 $m_o D$	0,34 $m_o D$	0,28 $m_o D$

Porównując dane cyfrowe zauważymy że z r ó w n y m p r a w d o p o d ó b i e ń s t w e m w sieci jednotrójkątowej wielkość promienia elipsy (koła) błędu średniego dojść może do $1,39 m_0D$, jak w sieci szesnastotrójkątowej do $0,94 m_0D$.

Opracowanie graficzne wykresu wykonał inż. Wojciech Janusz.



Rys. 35

Wykres 2 (rys. 36).

Wykres ilustruje zmiany położenia punktów w sieci wyrównanej metodą najmniejszych kwadratów, jeśli nadamy obserwacji kąta przy podstawie (we wszystkich sieciach elementarnych oznaczyliśmy tę obserwację $N 2$), oznaczonego na rysunku punktem, przyrostek dl i ponownie wyrównamy sieć metodą najmniejszych kwadratów.

Z wykresu jest widoczne, że takie przesunięcie punktów w sieciach małopółtrójkątowych jest dużo mniejsze niż w sieciach wielkopółtrójkątowych.

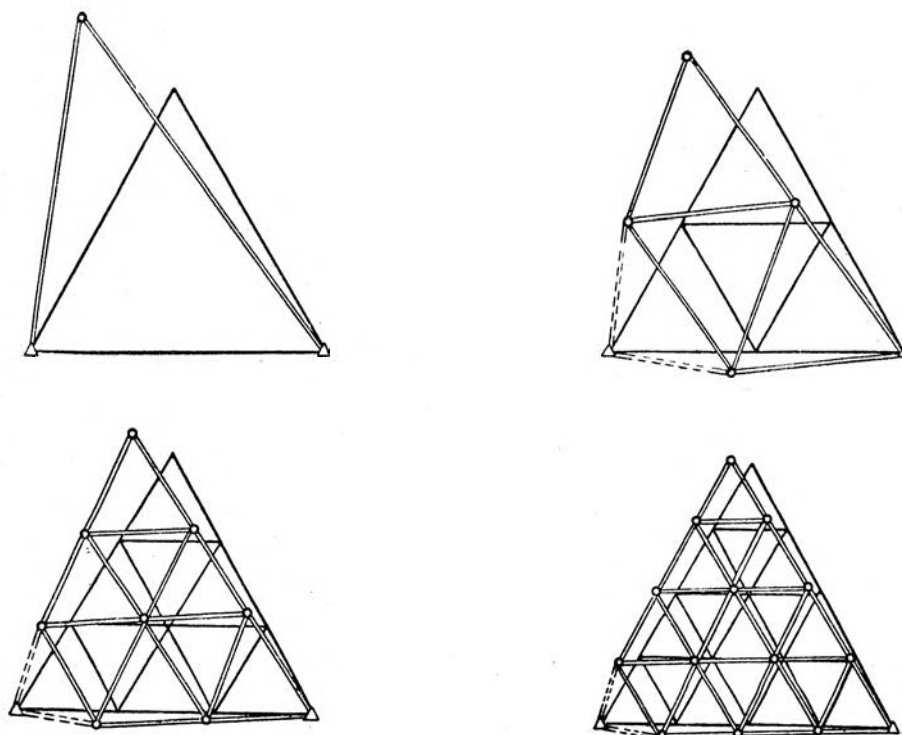
Tabela danych cyfrowych

Ilość tr: w sieci n^2	NN punktów	Przesunięcie odciętej f_x	Przesunięcie rzędnej f_y
1	1	$\frac{1}{3} dl D = 0,33 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} dl D = -0,58 dl D$
4	1	$\frac{1}{6} dl D = 0,17 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} dl D = -0,29 dl D$
	2	0	$-\frac{\sqrt{3}}{6} dl D = -0,29 dl D$
	3	$\frac{1}{12} dl D = 0,08 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{12} dl D = -0,14 dl D$
	4	$-\frac{1}{12} dl D = -0,08 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{12} dl D = -0,14 dl D$
9	1	$\frac{1}{9} dl D = 0,11 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{9} dl D = -0,19 dl D$
	2	$\frac{1}{27} dl D = 0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{9} dl D = -0,19 dl D$
	3	$\frac{2}{27} dl D = 0,07 dl D$	$-\frac{2\sqrt{3}}{27} dl D = -0,13 dl D$
	4	$-\frac{1}{27} dl D = -0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{9} dl D = -0,19 dl D$
	5	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{27} dl D = -0,13 dl D$
	6	$\frac{1}{27} dl D = -0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{27} dl D = -0,06 dl D$
	7	$-\frac{2}{27} dl D = -0,07 dl D$	$-\frac{2\sqrt{3}}{27} dl D = -0,13 dl D$
	8	$-\frac{1}{27} dl D = -0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{27} dl D = -0,06 dl D$
16	1	$\frac{1}{12} dl D = 0,08 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{12} dl D = -0,16 dl D$
	2	$\frac{1}{24} dl D = 0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{12} dl D = -0,14 dl D$
	3	$\frac{1}{16} dl D = 0,06 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{16} dl D = -0,11 dl D$
	4	0	$-\frac{\sqrt{3}}{12} dl D = -0,14 dl D$
	5	$\frac{1}{48} dl D = 0,02 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{16} dl D = -0,11 dl D$
	6	$\frac{1}{24} dl D = 0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{24} dl D = -0,07 dl D$
	7	$-\frac{1}{24} dl D = -0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{12} dl D = -0,14 dl D$

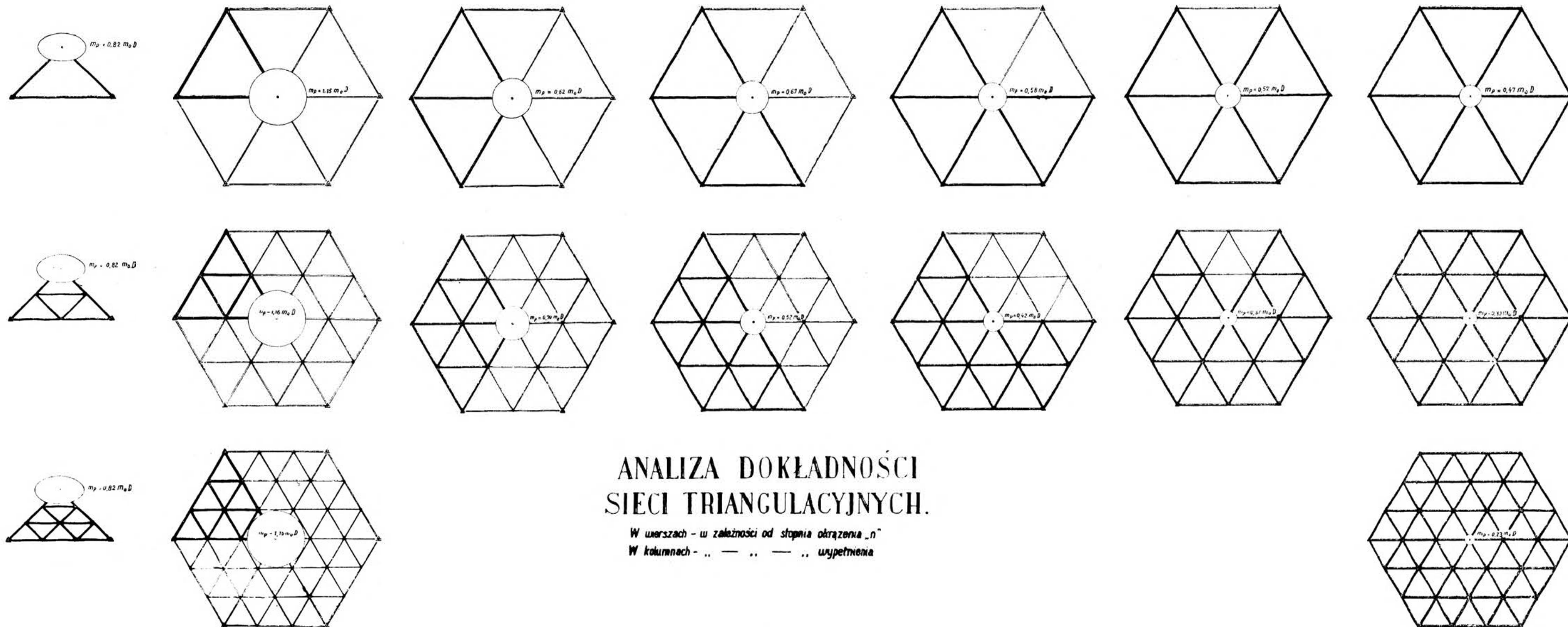
Tabela danych cyfrowych

Ilość tr: w sieci n^2	NN punktów	Przesunięcie odciętej f_x	Przesunięcie rzędnej f_y
	8	$-\frac{1}{48} dl D = -0,02 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{16} dl D = -0,11 dl D$
	9	0	$-\frac{\sqrt{3}}{24} dl D = -0,07 dl D$
	10	$\frac{1}{48} dl D = +0,02 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{48} dl D = -0,04 dl D$
	11	$-\frac{1}{16} dl D = -0,06 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{16} dl D = -0,11 dl D$
	12	$-\frac{1}{24} dl D = -0,04 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{24} dl D = -0,07 dl D$
	13	$-\frac{1}{48} dl D = -0,02 dl D$	$-\frac{\sqrt{3}}{48} dl D = -0,04 dl D$

Dla obliczenia liczb podanych w tabelce realizowano wzór podany na str. 55 tzn. mnożono wiersz 2 obserwacji przez kolejne wiersze odwrotności krakowianów współczynnikowych układów równań normalnych Gaussa. Następnie wyrażono wszystkie odpowiedzi w jednostce D (wielki bok sieci).



Rys. 36



ANALIZA DOKŁADNOŚCI SIECI TRIANGULACYJNYCH.

W wierszach - w zależności od stopnia okrycia „n”
W kolumnach - .. — .. — .. wypełnienia

Wykres 3 (rys. 37).

Wykres trzeci ilustruje wzrost dokładności wyznaczenia położenia punktu centralnego, określonego z punktów obwodowych, zarówno na skutek procesu „okrażania“ punktu wyznaczanego, jak i na skutek procesu „zagęszczania“ sieci, tzn. budowania jej z coraz to mniejszych trójkątów. Pierwsze zjawisko: wzrostu dokładności przy okrażaniu punktu wyznaczanego obserwujemy dla sieci jednotrójkątowych w pierwszym wierszu wykresu, dla sieci czterotrójkątowych w drugim wierszu wykresu, oraz (częściowo) dla sieci dziewięciotrójkątowych w trzecim wierszu wykresu. Zjawisko wzrastania dokładności w miarę potęgującego się okrażania jest jak widać wydatniejsze dla sieci małowielokątowych niż dla sieci wielotrójkątowych. Obrazują to wielkości elips błędów, przy których napisano też wielkości błędów średnich położenia punktu wyrażone przez wielką podstawę sieci D . Tak np. przy przejściu od wyznaczenia punktu z jednego trójkąta (w lewej części rysunku) do wyznaczenia punktu z wszystkich sześciu punktów obwodowych błąd średni położenia punktu maleje od $1,15 m_o D$ do:

- a) $0,47 m_o D$ w sieciach elementarnych jednotrójkątowych,
- b) $0,30 m_o D$ w sieciach elementarnych czterotrójkątowych,
- c) $0,23 m_o D$ w sieciach elementarnych dziewięciotrójkątowych.

Zjawisko wzrostu dokładności przy zagęszczaniu sieci obserwujemy w sąsiadujących kolumnach: w pierwszej kolumnie jest widoczne, że zjawisko wzrostu dokładności dla pojedynczych sieci elementarnych nie zachodzi, w drugiej kolumnie widzimy, że dla układów złożonych z dwóch sieci elementarnych zagęszczenie powoduje już wzrost dokładności (od $0,82 m_o D$ do $0,70 m_o D$). W następnych kolumnach widzimy ten wzrost dokładności przy sieciach okrażających opartych o trzy, cztery pięć i sześć punktów. W ostatniej kolumnie mamy możliwość obserwować wzrost dokładności przy wyznaczaniu z sześciu punktów obwodowych: przy sieciach elementarnych jednotrójkątowych mamy błąd położenia punktu równy $0,47 m_o D$, przy sieciach elementarnych czterotrójkątowych $0,30 m_o D$ wreszcie przy sieciach elementarnych dziewięciotrójkątowych $0,23 m_o D$.

Wykres 3 stanowi wymowną ilustrację zalet graficznego obrazowania wyników żmudnych badań rachunkowych: celowo skomponowany wykres pozwala tu od jednego rzutu oka wzdłuż wierszy i wzdłuż kolumn zauważyć związek między dokładnością wyznaczenia położenia punktu w wyniku okrażania i zagęszczania, którego opis — dużo mniej przejrzysty — wymagałby kilkunastu zdań.

Warto może zwrócić też uwagę na różnicę w dokładności wyznaczenia położenia punktu: najbardziej prymitywnego (z jednego trójkąta) i najcelowszego geodezyjnie w zakresie przeprowadzanego porównania (z sieci ostatniej na rysunku).

Błąd średni maleje od $1,15 m_o D$ do $0,23 m_o D$, to znaczy pięciokrotnie.

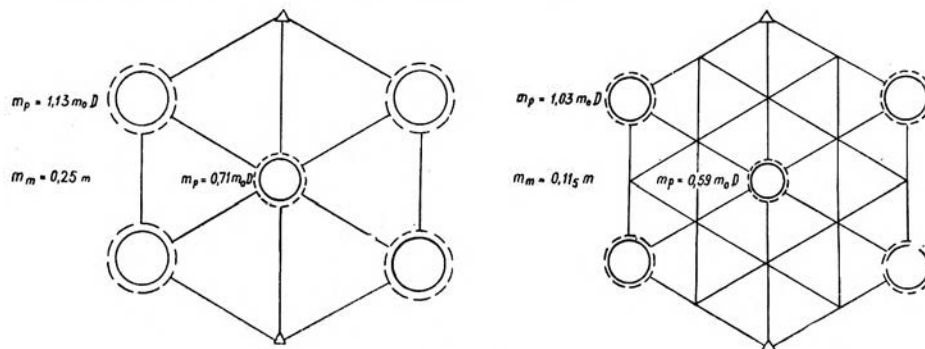
Jeżeli dodamy, że błąd średni średniego błędu maleje to od 0,71 m do 0,08 m zrozumiemy celowość zakładania sieci powierzchniowych (proces okrażania) i celowość posługiwania się sieciami małowzrostowymi (proces zagęszczania).

Tabela danych cyfrowych, z uwagi na umieszczenie na rysunku wielkości liczbowych średnich błędów położenia punktów, nie umieszczamy. Obliczenie wykonano w toku analiz. W lewej stronie wykresu znajduje się rysunek przedstawiający elipsy błędów w sieciach elementarnych zbudowanych z trójkątów prostokątnych.

Wykres zaprojektował i sporządził inż. Wojciech Janusz.

Wykres 4 (rys. 38).

Na wykresie 4 zobrazowano dwie sieci okrażające łączące dwa przeciwległe wierzchołki sześcioboku foremnego. W górnej części rysunku sieć zbudowana została z sieci elementarnych jednowzrostowych, w dolnej części rysunku — z sieci elementarnych czterowzrostowych. Z wykreślonych elips błędów (koła rysowane liniami pełnymi) jest widoczne, że punkty wyznaczone bądź przez jedną bądź przez drugą sieć są obciążone mniejszym błędem położenia, gdy wyznacza je sieć małowzrostowa. Wielkości średniego błędu położenia punktu dla wszystkich wspólnych dla obu sieci punktów zostały cyfrowo uwidocznione na rysunku. Z uwagi na symetrię układu nie powtarzano wartości błędów przy każdym z punktów. Wielkości błędów średnich położenia punktów wyznaczonych tylko przez sieć małowzrostową na wykresie pominięto, aby nie odwracać uwagi od szczegółów dla porównania nieistotnych. Wartości tych błędów znajdują się natomiast w tabelce liczbowej podanej poniżej.



Rys. 38

Oprócz porównania wielkości błędów położenia punktów, ułatwionego przez wykreślenie elips błędów, porównano też wartości średniego błędu położenia — zarówno przez podanie wartości tych błędów obok sieci (m_m), jak i przez wykreślenie dodatkowych elips (koła narysowane liniami przerywanymi), odpowiadających założeniu, że błąd średni równy jest sumie $m + m_m$.

Przewaga sieci małopółkątowej nad wielopółkątową jest i tutaj widoczna.

Poniżej podajemy wielkości średnich błędów położenia punktu w obu sieciach.

Tabela danych cyfrowych

Opis położenia punktu w sieci	Błędy średnie położenia p-ktu	
	w sieci małopółkątowej	w sieci wielopółkątowej
Punkty położone na osi łączącej p-ty stałe	0	0
	$0,50 m_o D$	—
	$0,59 m_o D$	$0,71 m_o D$
	$0,50 m_o D$	—
	0	0
Punkty położone na osiach równoległych sąsiadujących z osią łączącą p-ty stałe	$0,65 m_o D$	—
	$0,67 m_o D$	—
	$0,67 m_o D$	—
	$0,65 m_o D$	—
Punkty położone na osiach skrajnych	$1,03 m_o D$	$1,13 m_o D$
	$1,00 m_o D$	—
równoległych do osi łączącej p-ty stałe	$1,03 m_o D$	$1,13 m_o D$

Przez m_o oznaczono jak zawsze błąd średni pomiaru kąta w sieci, przez D długość boku wielkiego trójkąta sieci.

Wykres 5 (rys. 39).

Ilustruje dokładność wyznaczania punktów przez sieci centralne oparte o trzy punkty stałe niesąsiadujące ze sobą i położone na obwodzie.

Pierwsza sieć zbudowana jest z sieci elementarnych jednopółkątowych, druga z sieci elementarnych czteropółkątowych, trzecia z sieci elementarnych dziewięciopółkątowych. Elipsy błędów punktów wyznaczanych przez wszystkie rozpatrywane sieci oznaczono wyraźniej, co ułatwia porównanie efektu dokładnościowego.

Wartości błędów średnich położenia punktów centralnych oraz peryferyjnych wspólnych dla wszystkich sieci podano liczbowo na rysunku. Wartości błędów średnich położenia wszystkich punktów podano w tabelce danych cyfrowych. Elipsy błędów są wszędzie kołami. Obliczenie osi elips błędów średniego wyrażać więc będzie stałe wzór:

$$A = B = m_x = m_y = \frac{m_p}{\sqrt{2}} = 0,71 m_p.$$

Zmniejszanie się błędów średnich położenia punktu w miarę zagęszczania sieci ($0,54 m_o D$ $0,39 m_o D$ $0,34 m_o D$ dla punktu centralnego, oraz $0,86 m_o D$ $0,71 m_o D$ $0,67 m_o D$ dla punktów peryferyjnych) przemawia wyraźnie

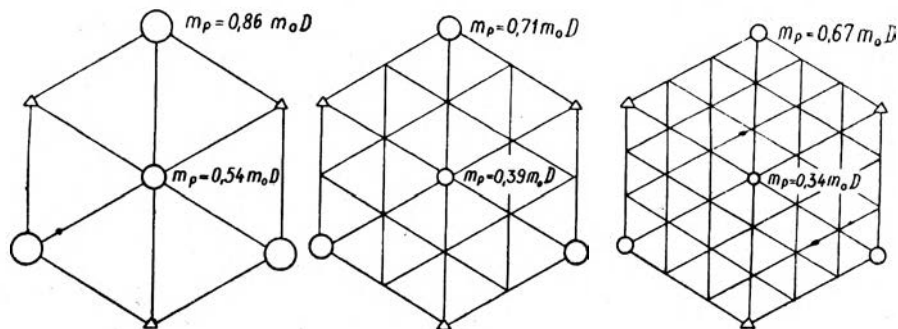
za słuszością koncepcji sieci małopółkątowych. Również kryterium błęd średniego błęd zupełnie zdecydowanie przemawia za sieciami małopółkątowymi.

Błędy średnie średnich błędów będą bowiem równe: 0,22 m, 0,11 m, 0,07m. Rachunki przeprowadzili: inż. Gombrych i inż. Panasiuk.

Czytelnik zechce uprzytomnić sobie, że analiza sieci zbudowanej z sieci elementarnych dziewięciopółkątowych wymaga rachunków w układzie 68 równań liniowych.

Tabela danych cyfrowych

Opis położenia punktu w sieci	Błędy średnie położenia punktów w sieciach		
	a) sieć zbudowana z sieci elementar: jednopółkątowych	b) sieć zbudowana z sieci elementar: czteropółkątowych	c) sieć zbudowana z sieci elementar: dziewięciopółkątowych
Punkty na osi głównej	0,86 $m_o D$	0,71 $m_o D$	0,67 $m_o D$
		0,43	0,43
	0,54 $m_o D$	0,39	0,35
		0,37	0,34
	0	0	0,33
Punkty na osi sąsiadującej z osią główną	—	0,52 $m_o D$	0,29
	—		0
	—	0,37 $m_o D$	0,43
	—		0,36
	—	0,43	0,38
Punkty na osi sąsiadującej z poprzednią lecz nie krańcowej			0,52
Punkty na osi krańcowej		0,38 $m_o D$	0,29
		0,71	0,28
	0,86 $m_o D$		0,43
			0,54
			0,67



Rys. 39

Wykres 6 (rys. 40).

Wykres 6 ilustruje średnie błędy tych samych funkcji obliczonych po wyrównaniu z trzech sieci opartych o te same punkty stałe, lecz budowanych z sieci elementarnych o różnej ilości trójkątów. Porównuje się tu te same sieci, dla których błędy średnie położenia punktów zostały przedstawione na wykresie 5. Znając wielkości błędów średnich położenia punktów można było oczywiście przewidzieć, że obecnie rozpatrywany wykres wykaże również przewagę sieci małopółkątowych. Jak widać błędy względne (tak chętnie używane jako kryterium w literaturze) wyniosą tu:

- 1) dla boków położonych na obwodzie:
 - w sieciach jednopółkątowych $0,61 m_o$
 - „ „ czteropółkątowych $0,50 m_o$
 - „ „ dziewięciopółkątowych $0,47 m_o$
- 2) dla boków centralnych opartych o punkty stałe:
 - w sieciach jednopółkątowych $0,38 m_o$
 - „ „ czteropółkątowych $0,28 m_o$
 - „ „ dziewięciopółkątowych $0,24 m_o$
- 3) dla boków centralnych nieopartych o punkty stałe:
 - w sieciach jednopółkątowych $0,61 m_o$
 - „ „ czteropółkątowych $0,45 m_o$
 - „ „ dziewięciopółkątowych $0,40 m_o$

Można powiedzieć, że dokładność wyznaczenia długości wzrasta tu przy przejściu od sieci jednopółkątowych do sieci dziewięciopółkątowych przeciętnie o około 30%.

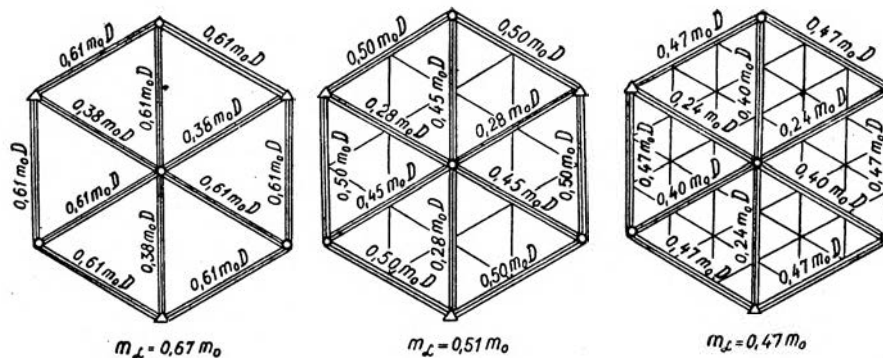
Średnie błędy kątów po wyrównaniu są dla każdego kąta sześcioboku takie same. Wynoszą one:

- w sieciach jednopółkątowych $0,67 m_o$
- „ „ czteropółkątowych $0,51 m_o$
- „ „ dziewięciopółkątowych $0,47 m_o$

Liczby te dają odpowiedź (oczywiście w stosunku do rozpatrywanego układu sieci) na pytanie czy korzystniej jest zmierzyć kąty wielopółkątowej sieci, czy obliczyć wartości tych kątów z sieci małopółkątowej.

Widzimy tu wyraźnie, że przeprowadzając pomiar z sieci wielopółkątowej (pierwszej na rysunku) z błędem średnim obserwacji kątowej m_o , otrzymamy w wyniku wyrównania ścisłego kąty obciążone błędami średnimi $0,68 m_o$.

Natomiast przeprowadzając pomiar w sieci małopółkątowej (trzeciej na rysunku) z błędem średnim obserwacji kątowej m_o , otrzymamy w wyniku wyrównania ścisłego te same kąty sieci wielkiej obciążone błędami średnimi $0,47 m_o$. Otrzymana różnica w dokładności jest rzędu około 30%.

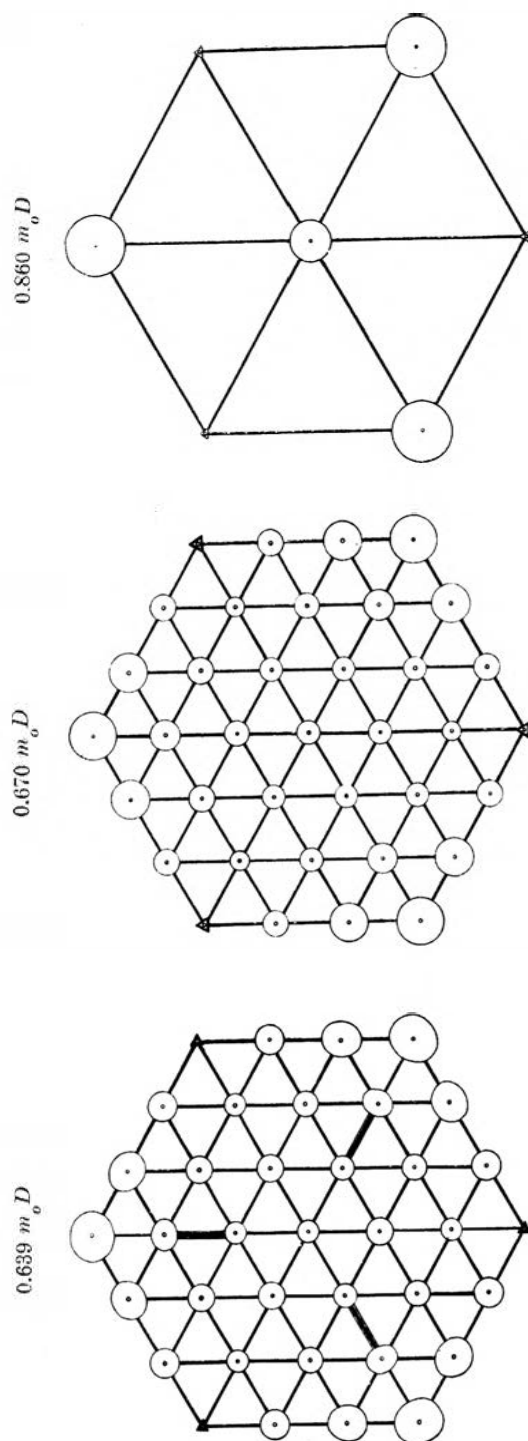


Rys. 40

Wykres 7 (rys. 41).

Wykres 7 ilustruje wpływ pomiarów liniowych na wzrost dokładności wyznaczenia położenia punktów w sieci centralnej. Badaniu podlegała sieć centralna oparta o trzy punkty stałe zbudowana z sieci elementarnych dziewięciotrójkątowych. W sieci tej założono raz tylko pomiary kątowe z błędem średnim m_0 (rys. b), zaś drugi raz oprócz tego trzy pomiary liniowe na odcinkach środkowych promieni nie opartych o punkty stałe. Średni błąd względny pomiaru liniowego przyjęto równy $\frac{1}{3} m_0$. Założenie takie wydaje się najlepiej odpowiadać obecnym dokładnościom pomiarów w sieciach triangulacyjnych (np. przy błędzie względnym pomiaru liniowego 1 : 1 000 000 i błędzie średnim pomiaru kąтового $m_0^c = 2$ tzn. $m_0 = 0,000\,003\,14$ byłoby $\frac{m_d}{d} = \frac{100}{314} m_0 = \frac{1}{3} m_0$).

Z analizy wynika, że wpływ pomiarów liniowych na dokładność wyznaczenia położenia punktów jest (w badanej sieci) zupełnie znikomy. Elipsy błędów położone na promieniach wzdłuż których przeprowadzono pomiar liniowy uległy nieznacznemu spłaszczeniu w kierunku pomiaru — zgodnie z tym co narzuca nam intuicja geometryczna — zaś wielkości błędów średnich położenia punktu niemal się nie zmieniły. Dla punktu centralnego sieci błąd średni położenia punktu pod wpływem pomiarów liniowych zmalał od $0,335 m_0 D$ do $0,334 m_0 D$. Dla najgorzej wyznaczonych punktów peryferyjnych w narożach błąd położenia zmalał od $0,670 m_0 D$ do $0,639 m_0 D$, a więc nierównie więcej jak dla punktu centralnego, trudno jednak przypisywać tej zmianie znaczenie praktyczne. W świetle przeprowadzonej tu analizy można by powiedzieć, że stosowana w naszych sieciach wypełniających „oszczędność“ w pomiarach liniowych jest naogół biorąc usprawiedliwiona. Mówimy tu „na ogół biorąc“ rozumiejąc przez to że w pomiarach łączących różne sieci triangulacyjne pomiary bazowe zawsze są celowe. Ich rola nie sprowadza się bowiem wówczas do podniesienia dokładności w układzie spostrzeżeń obciążonych błędami przypadkowymi — co zakłada analiza — ale ma raczej na celu zabezpieczenie się od deformacji układu przez zmniejszenie roli błędów stałych.



Rys. 41

Analiza porównawcza sieci centralnych opartych o trzy punkty stałe

a) sieć maotrójkątowa z pomiarami liniowymi, b) sieć maotrójkątowa bez pomiarów liniowych c) sieć wielotrójkątowa

m_0 = błąd średni pomiaru kąтового

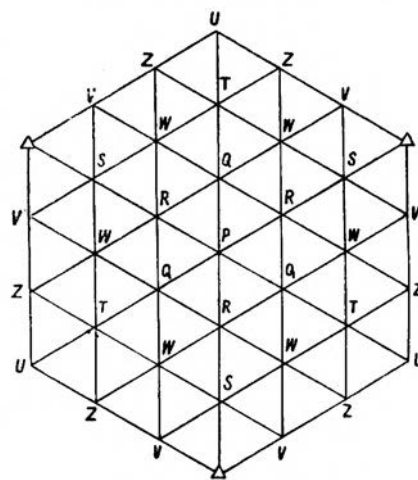
$\frac{1}{3} m_j$ = błąd średni względny pomiaru liniowego

D = długość boku wielkiego sieci.

Trzeci rysunek na wykresie (c) przedstawia sieć badaną realizowaną przez sieci elementarne jednotrójkątowe, którą zresztą już poznaliśmy.

Tabela danych cyfrowych

Oznaczenie punktu (szkic)	Błędy średnie położenia p-tów	
	a) z pomiarami liniowymi	b) bez pomiarów liniowych
P	0,334 $m_0 D$	0,335 $m_0 D$
Q	0,347	0,349
R	0,331	0,333
S	0,288	0,291
T	0,401	0,430
U	0,639	0,670
W	0,354	0,361
V	0,377	0,384
Z	0,517	0,538



Rys. 42

Wykres 8 (rys. 43).

Na wykresie ósmym porównuje się dokładność wyznaczenia położenia punktów najbardziej oddalonych od podstawy określanych z sieci centralnych opartych o dwa punkty położone na obwodzie sześciokąta foremnego.

Pierwsza sieć (widoczna na górnej części wykresu) zbudowana jest z sieci elementarnych jednotrójkątowych; druga sieć (widoczna w dolnej części wykresu) zbudowana jest z sieci elementarnych czterotrójkątowych.

Błędy średnie położenia punktów najbardziej oddalonych od podstawy są tu dla sieci małopółkątowej niższe o około 10% niż dla sieci wielkopółkątowej. Wynoszą one odpowiednio: dla sieci wielkopółkątowej 2,3 $m_0 D$, dla sieci małopółkątowej 2,1 $m_0 D$. Jakkolwiek różnica nie jest duża — jednak przemawia ona za siecią małopółkątową. Jeżeli zwrócimy się do kryterium błędu średniego średniego błędu, skonstatujemy bardzo dużą przewagę sieci małopółkątowej. W sieci wielkopółkątowej mamy tu bowiem spostrzeżeń nadliczbowych 18 — 10 = 8, natomiast w sieci małopółkątowej ilość spostrzeżeń nadliczbowych wyniesie 72 — 34 = 38. Błędy średnie średniego błędu wyniosą tedy:

$$\text{dla sieci wielkopółkątowej } m_m = \frac{m}{\sqrt{16}} = 0,25 \text{ m}$$

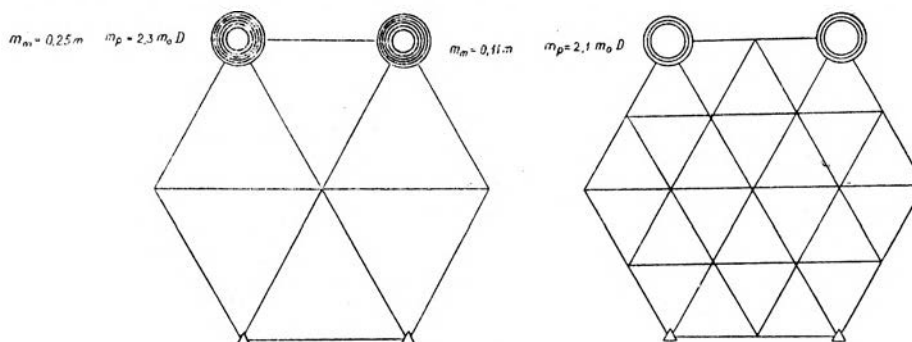
$$\text{dla sieci małopółkątowej } m_m = \frac{m}{\sqrt{76}} = 0,11 \text{ m.}$$

Na wykresie zilustrowano to przez wykreślenie elips błędów punktów najbardziej oddalonych od podstawy przyjmując promienie (elipsy błędów)

są tu kołami) proporcjonalne 1) do wartości średniego błędu m , 2) do wartości górnej granicy średniego błędu $m + m_m$ oraz 3) do wartości dolnej granicy średniego błędu $m - m_m$. Powstałe w ten sposób pierścienie pozwalają od jednego rzutu oka ocenić obie omówione zalety sieci małopółkątowej: większą dokładność wyznaczenia położenia punktu oraz większą pewność charakterystyki dokładności.

Stosując kryterium Otrębskiego również skonstatowaliśmy przewagę sieci małopółkątowej. Przeciętne zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji spowodowane przez wyrównanie wyniesie tu bowiem: dla sieci wielopółkątowej 20/36, zaś dla sieci małopółkątowej 17/36.

Warto może też zauważyć — czego na wykresie nie zilustrowano — że dokładność wyznaczenia położenia punktu centralnego jest dla sieci małopółkątowej wyższa niż dla sieci wielopółkątowej nie o około 10%, jak dla punktów peryferyjnych, lecz o około 20%.



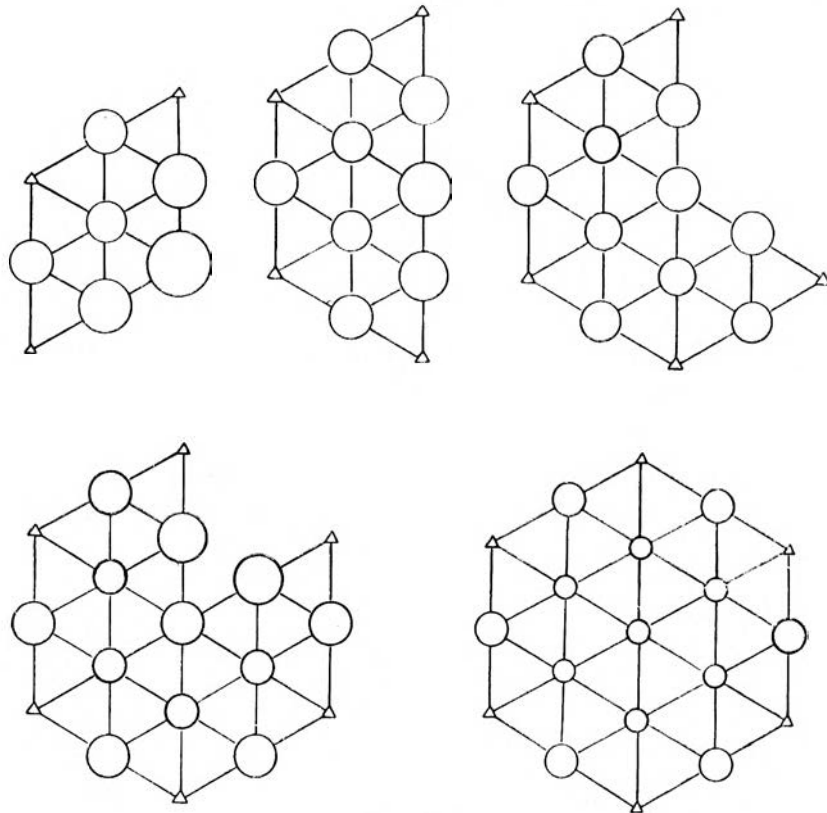
Rys. 43

Wykres 9 (rys. 44).

Na wykresie 9 zilustrowano zmniejszanie się zarówno błędów średnich położenia punktów, jak i średnich błędów błędu średniego w sieciach okrężających budowanych z sieci elementarnych czteropółkątowych, w miarę wzrostu procesu „okrężania”. Przy każdym wyznaczanym punkcie wykreślono elipsę błędu (która dla każdego punktu sieci jest kołem), przyjmując promień elipsy raz równy (w jednakowej dla całego rysunku skali) wielkości średniego błędu, raz równy wielkości średniego błędu zwiększonego o błąd średni średniego błędu, wreszcie raz równy wielkości średniego błędu zmniejszonego o błąd średni średniego błędu. Koło wykreślone promieniem równym średniemu błędowi, czyli właściwą (dla ustalonej skali) elipsę błędu, wyrysowano grubszą linią.

Wahania wymiarów elipsy spowodowane przez wahanie wartości błędu średniego od $m - m_m$ do $m + m_m$ są więc dla każdego punktu uzmysłowione przez szerokości widocznych na rysunku pierścieni. Wykres pozwala od jednego rzutu oka zauważyć proces zmniejszania się średniego błędu położenia punktu i wzrostu „wiarygodności” wyznaczenia punktu dla wszystkich punktów określanych przez sieć.

Wykres pozwala jednocześnie zaobserwować celowość tworzenia przy wyrównaniu grup wielopunktowych obejmujących duże ilości punktów. Przy wyrównaniu grupy sześciu wyznaczanych punktów, widocznych na pierwszym rysunku, otrzymamy jak widać wybitnie gorszy dokładnościowo efekt wyrównania, niż w razie dołączenia do grupy jeszcze dwóch punktów i łącznego wyrównania grupy przedstawionej na drugim rysunku, obejmującej osiem punktów. Dołączanie dalszych punktów do grupy zilustrowane przez następne rysunki, wpływać będzie dalej na wzrost dokładności wyznaczenia rozważanej grupy sześciu punktów. Przekonywu-



Rys. 44

jącą ilustrację zagadnienia uzyskuje się zasłaniając na wszystkich rysunkach części sieci nieobejmujące sześciu punktów występujących w sieci pierwszej. Widoczny jest wówczas wyłącznie efekt wyrównania tych samych punktów w razie zakładania różnych grup wyrównawczych. Omówienie tej ilustracji zdaje się o tyle zasługiwać na podkreślenie, że niezrozumienie korzyści płynących z daleko pósuniętego wyrównania grupowego jest jednak bardzo rozpowszechnione.

Zamiast jednoczesnego wyrównania dużego układu obserwacyjnego przeprowadza się aż nazbyt często wyrównanie fragmentu tego układu,

aby następnie, przyjmując uzyskane w wyniku wyrównania dane geodezyjne czy ich funkcje (współrzędne) za bezbłędne, „dopasowywać“ do nich dalszy fragment układu obserwacyjnego itd. itd. itd. Podobnie zamiast jednoczesnego wyrównania grupy kilku punktów wyznacza się te punkty pojedynczo — wielokrotnym wcięciem wprzód — uzyskując drobne pozycje zysku w czasie rachunku, a obniżając wartość techniczną materiału, który ma służyć w następstwie innym celom a okazuje się niejednokrotnie niedostatecznie dokładny wyłącznie na skutek takiego „bezceremonialnego“ wyrównania pozornie przeprowadzanego przytym metodą najmniejszych kwadratów.

Wykres wykonano opierając się na materiale podanym w poprzednim rozdziale (str. 83, 89, 93).

Uwaga dotycząca elips błędu na wykresach

Jak to czytelnik miał możność zauważyć nie poruszałimy nigdzie przy omawianiu wykresów zagadnienia użycia takiej czy innej elipsy błędu (np. elipsa błędu średniego, elipsa Andrae'go, elipsa prawdopodobna itp.), ani też — co zresztą na jedno wychodzi — nie mówiliśmy nigdzie o takiej czy innej skali rysunku elips. Uważaliśmy te pojęcia za zbędne z uwagi na porównawczy charakter badań. Nie chodziło nam bowiem przy ilustracji o to, jakie są konkretnie wymiary elipsy błędu dla sieci małopiękątowej, a jakie dla sieci wielokątowej, lecz wyłącznie o to czy wymiary te są większe dla jednej czy dla drugiej z porównywanych sieci — przy przyjęciu założenia, że dla obu sieci rozpatrujemy elipsę błędu wewnątrz której punkt wyznaczany znajduje się z takim samym prawdopodobieństwem. Wystarczało więc wykreślanie elips przy obraniu jakiegokolwiek byle jednakowej dla obu elips skali i przyjęciu jakiegokolwiek, byle jednakowego dla obu elips, typu elipsy (to znaczy wartości współczynnika F którego znaczenie omawialiśmy szczegółowo na str. 109 — 115).

Gdyby zresztą czytelnik pragnął „konkretyzować“ omawiane elipsy, tzn. gdyby pragnął on ustalić jakie byłyby wymiary liniowe półosi elipsy dla pewnego interesującego go przypadku przy przyjęciu założenia, że punkt poszukiwany ma znajdować się wewnątrz elipsy z określonym prawdopodobieństwem W , nie napotka on na żadne trudności gdyż wartości błędów średnich podawaliśmy liczbowo, zaś elipsy w sieciach foremnych są kołami, tzn. mamy:

$$A_{sr} = B_{sr} = m_x = m_y = \frac{m_p}{\sqrt{2}} = 0,707 m_p.$$

Przejście od elipsy błędu średniego do elipsy, wewnątrz której punkt szukany położony jest z prawdopodobieństwem W dokonuje się — przypomina — na drodze pomnożenia półosi elipsy błędu średniego przez czynnik $F(W)$ odszukany dla danego prawdopodobieństwa W z tabelki funkcyjnej na str. 91.

Tak np. chcąc określić wymiary pólasi AB elipsy błędu dla punktu centralnego w sieci okrężającej pełnej zbudowanej z sieci elementarnych dziewięciotrójkątowych (ostatnia sieć na rys. 37) przy założeniu, że poszukiwany punkt ma znajdować się wewnątrz elipsy z prawdopodobieństwem 0,99 mielibyśmy:

$$A_{sr} = B_{sr} = 0,707 m_p = 0,707 \cdot 0,23 m_o D = 0,16 m_o D.$$

Ponieważ z tabelki na str. 114 dla $W = 0,99$ mamy $F = 3,035$, będzie $A = B = 3,035 \cdot 0,16 m_o D = 0,49 m_o D$. Jeżeli więc np. podstawa sieci $D = 30$ km zaś $m_o'' = 1''$ tj. $m_o = 0,0000048$, otrzymamy: $A = B = 0,07$ metra = 7 cm.

Przy tych samych założeniach dla punktu wyznaczonego w ten sam sposób przy pomocy sieci elementarnych jednotrójkątowych (pierwszy rysunek w ostatniej kolumnie rys. 37) otrzymalibyśmy

$$A_{sr} = B_{sr} = 0,707 \cdot 0,47 m_o D = 0,332 m_o D, \text{ oraz } A = B = 3,035 \cdot 0,332 = 1,008 m_o D = 0,145 \text{ metra} = 14,5 \text{ cm.}$$

Rozdział XI

Podsumowanie wyników badania porównawczego sieci mało i wielkotrójkątowych i nawiązanie do literatury fachowej

Wspominaliśmy już we wstępie, że porównywanie sieci mało i wielkotrójkątowych w formie zupełnie ogólnej nie doprowadziło by nas do konkretnych wniosków.

Poddaliśmy tedy badaniu dokładnościowemu kilka wybranych sieci stanowiących pewną, jakby można powiedzieć, „idealizację“ sieci spotykanych w praktyce i, po stwierdzeniu że w zakresie przeprowadzonego porównania sieci małopółkątowe są z punktu widzenia analizy dokładnościowej korzystniejsze od sieci wielkotrójkątowych, wypowiadamy pogląd że zakładanie sieci trygonometrycznych małopółkątowych uważać należy za celowsze od zakładania sieci wielkotrójkątowych.

Wypowiadając ten pogląd przyjmujemy oczywiście milcząco, że chodzi tu o sieci zbliżone pod względem konstrukcji do sieci badanych. Ponieważ przytym metody badania dokładnościowego podaliśmy dla sieci z zupełnie dowolnych pod względem konfiguracji, uważać możemy postawione zadanie za rozwiązane. W wypadku bowiem zaistnienia wątpliwości czy w pewnym konkretnym wypadku lepsze będzie takie czy inne rozwiązanie — czytelnik ma możliwość przeprowadzenia badania dokładnościowego stosując omówioną metodą badania. Może to zachodzić np. w wypadku gdy mieć będziemy tylko możliwość wyboru między dwiema bardzo nieforemnymi sieciami, z których jedna będzie siecią mało- a druga wielkotrójkątową.

Nie znając kształtu sieci nie można tu przewidzieć czy korzyści ogólne jakie wynikają ze stosowania konstrukcji małopółkątowych (np. zmniejszenie błędu średniego błędu) będą tu w stanie zrekomensować straty dokładności jakie spowodowane będą przez wadliwy kształt trójkątów w projektowanej sieci małopółkątowej. Wypadki takie należy zresztą uważać za wysoce wyjątkowe — poprawnie bowiem zakładane sieci są przeważnie bardzo zbliżone do typowych sieci tworzących z trójkątów foremnych, rozpatrzonych w naszych analizach.

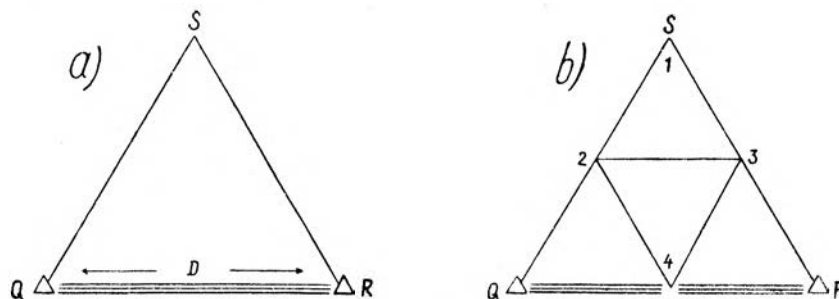
Gdy chodzi o rozważania spotykane w literaturze geodezyjnej stawia się tam zresztą również założenie foremności trójkątów składających się na sieć i nie posuwa się badań tak daleko jak je w niniejszej pracy posunięto.

Ponieważ w kołach fachowych wygłasza się często pogląd — na niczym nie oparty — że operowanie sieciami małopółkątowymi jest z punktu widzenia dokładności nieprawidłowe, i że należy dla osiągnięcia najwyższej dokładności zakładać sieci wielkopółkątowe w które następnie wplata się sieci małopółkątowe, celowe może będzie poświęcić tu nieco miejsca temu pogładowi i przypomnieć, że nawet w literaturze klasycznej nie był on właściwie wypowiedzany. Całe nieporozumienie wynika jak się zdaje stąd, że dyskutanci tak *śluszną w dziedzinie organizacji pracy zasadę „od ogółu do szczegółu“ przenoszą w dziedzinę rozważań dokładnościowych opartych na metodzie najmniejszych kwadratów, gdzie tego rodzaju „zasada“ nie obowiązuje*. Nie będziemy tu cytowali ślusznych poglądów prof. Bastla, który był inicjatorem triangulacji precyzyjnej i wypowiedział energiczną walkę klasycznemu schematowi sieci triangulacyjnych (Reformierungs vorschläge zur Triangulation Brno 1931), lecz przypomnimy typowo klasyczną pracę a mianowicie Handbuch der Vermessungskunde Jordana, gdzie stwierdza się *wyższość sieci małopółkątowych nad sieciami wielkopółkątowymi*, choć nie wyciąga się z analizy ostatecznych wniosków. Omówimy obszerniej odnośny fragment Handbuch (por. np. wyd. Stuttgart 1948 III Bd I HB str. 193), gdyż pozwoli to z jednej strony stwierdzić że literatura klasyczna wysokiej klasy bynajmniej nie wypowiadała poglądów na temat wyższości sieci wielkopółkątowych z punktu widzenia dokładności, co się jej sugeruje, z drugiej zaś strony pozwoli nam to zrozumieć dlaczego pojęcie wyższości sieci małopółkątowych się nie przyjęło. Zobaczymy mianowicie że analiza nie była doprowadzona tak daleko aby pozwoliło to w całości wykazać korzyści sieci małopółkątowych. Wydaje się, że przyczyną tej niekompletności analizy można by upatrywać w zastosowaniu do analizy metody pośredzeń z warunkowanych, prowadzącej w wypadku skomplikowanych sieci do bardzo uciążliwych rachunków.

U Jordana zagadnienie porównania sieci małopół- i wielkopółkątowej rozpatrzono w stosunku do sieci elementarnych, przytym w sposób nieco korzystniejszy dla sieci małopółkątowych. Porównuje się tam mianowicie

średni błąd względny boku QS (zachowujemy nasze oznaczenia przyjęte w rozdziale I, przypominając rysunek), wyznaczonego z jednego trójkąta ze średnim błędem względnym boku QS wyznaczonego z czterech trójkątów.

Przyjmuje się jednak założenie, że w sieci czterotrójkątowej mamy nie jedną bezbłędną długość wyjściową lecz dwie $Q4$ i $4R$ (ob. rys. 45).



Rys. 45

Zakłada się więc że — przy przyjęciu iż kierunek QR pokrywa się z kierunkiem osi rzędnych — rzędna punktu 4 jest bezbłędna a rezultaty pomiaru wyrównywanego decydują tylko o wielkości odciętej tego punktu. Układ spostrzeżeń kątowych dokonanych w sieci czterotrójkątowej wyznacza tedy przy założeniu Jordana nie 8 lecz tylko 7 niewiadomych współrzędnych. Inaczej mówiąc w sieci wielkotrójkątowej oparto tu pomiar na dwóch wielkościach znanych, zaś w sieci małotrójkątowej na trzech wielkościach znanych. To uprzywilejowanie w założeniu sieci małotrójkątowej spowodować musi oczywiście pewien wzrost dokładności wyznaczenia czy to współrzędnych punktu S czy ich funkcji.

Istotnie w wyniku rachunku przeprowadzonego u Jordana otrzymuje się następujące błędy względne boków sieci (QS lub RS):

$$\text{w sieci jednotrójkątowej } \frac{m_D}{D} = 0,00000\ 396\ m''_0$$

$$\text{w sieci czterotrójkątowej } \frac{m_D}{D} = 0,00000\ 379\ m''_0$$

gdzie m''_0 oznacza błąd średni pomiaru kąta w sieci wyrażony w sekundach kątowych.

Identyczne oczywiście wynik otrzymamy stosując do analizy używaną przez nas metodę spostrzeżeń pośredniczących. Znajdziemy mianowicie:

$$\text{w sieci jednotrójkątowej } \frac{m_D}{D} = m_0 \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,00000\ 396\ m''_0$$

$$\text{w sieci czterotrójkątowej } = m_0 \frac{m_D}{D} \sqrt{\frac{11}{18}} = 0,00000\ 379\ m''_0$$

Dla wyczerpującego naświetlenia tematu podajemy przebieg rachunku metodą spostrzeżeń pośredniczących, przenosząc ten rachunek do odsyłacza*).

*) Błąd względny boku wyznaczonego przez sieć jednotrójkątową obliczyliśmy już w rozdziale II, str. 40 otrzymując $M = m_o \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Dla obliczenia błędu względnego boku wyznaczonego przez sieć czterotrójkątową zbudowaną tak jak przyjęto u Jordana, rozpocząć musimy od zestawienia krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych dla tej sieci. Otrzymamy ten krakowian przez skreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w krakowianie równań normalnych na str. 25. Obserwacje bowiem pozostają w układzie Jordana bez zmian, a ostatnia niewiadoma — poprawka rzędnej czwartego punktu — staje się zerem.

Mamy więc krakowian $\underline{a}^2$ przy czym piszemy niżej jego odwrotność $\underline{Q} = (\underline{a}^2)^{-1}$

$$\frac{3}{4} \left\{ \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ +\sqrt{3} & -1 & 0 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & -2 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 6 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 192 & 0 & 72 & -24\sqrt{3} & 72 & 24\sqrt{3} & 48 \\ 0 & 128 & 16\sqrt{3} & 32 & -16\sqrt{3} & 32 & 0 \\ 72 & 16\sqrt{3} & 57 & -5\sqrt{3} & 33 & 13\sqrt{3} & 30 \\ -24\sqrt{3} & 32 & -5\sqrt{3} & 35 & -13\sqrt{3} & 5 & -6\sqrt{3} \\ 72 & -16\sqrt{3} & 33 & -13\sqrt{3} & 57 & 5\sqrt{3} & 30 \\ 24\sqrt{3} & 32 & 13\sqrt{3} & 5 & 5\sqrt{3} & 35 & 6\sqrt{3} \\ 48 & 0 & 30 & -6\sqrt{3} & 20 & 6\sqrt{3} & 36 \end{array} \right\} \frac{1}{72}$$

Obliczenie błędu średniego długości boku łączącego punkt stały Q z punktem 1 wymagać będzie jak wiemy zastosowania wzoru na błąd średni funkcji niewiadomych wyznaczonych z układu równań normalnych Gaussa. Ponieważ funkcja ma postać:

$$F = \sqrt{(x_1 - x_Q)^2 + (y_1 - y_Q)^2} \quad \text{przeto będzie} \quad \frac{dF}{dx_1} = \cos 30^\circ = 0,5 \sqrt{3}$$

czyli $\frac{dF}{dy_1} = \sin 60^\circ = 0,5$ (patrz rysunek 8). Krakowian $\underline{f}$ wzoru ogólnego na

błąd funkcji: $m_F = m_o \sqrt{\underline{f}(\underline{a}^2)^{-1} \underline{f}}$ ma tedy pierwszy element $0,5 \sqrt{3}$ drugi 0,5 zaś pozostałe jego pięć elementów są zerami. Wynika stąd:

$$\underline{f}(\underline{a}^2)^{-1} \underline{f} = \left\{ \begin{array}{c} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \\ . \\ . \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{192}{72} & . & . & . \\ . & \frac{128}{72} & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \\ . \\ . \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ \frac{8}{9} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \frac{21}{9}$$

Różnica między dokładnością wyznaczenia boku z sieci jednotrójkątowej i z sieci czterotrójkątowej jest jak widzimy niewielka, jednakże przemawiająca na korzyść koncepcji sieci małopółkątowych. Badanie porównawcze sieci małopół- i wielkopółkątowych u Jordana ogranicza się do rozpatzonego przykładu. *Nie rozważono tam zagadnienia które w zdecydowany sposób przemawia za sieciami małopółkątowymi: zagadnienia wiązania sieci elementarnych w zespoły.* Nie stosowano również innych kryteriów porównawczych, a w szczególności wpływu błędów nieprzypadkowych. Wymagało by to bardzo skomplikowanych obliczeń które stały się proste i przejrzyste w ujęciu krakowianowym, zwłaszcza gdy zrezygnowaliśmy z ujęcia zadań przez teorię spostrzeżeń zawarunkowanych i rozpatrzyli je w ujęciu teorii spostrzeżeń pośredniczących.

Być może zresztą, że przyczyny które spowodowały niekompletność analizy porównawczej sieci małopół- i wielkopółkątowych u Jordana były inne niż tu przypuszczamy. Tak czy inaczej stwierdzić jednak należy że w tej pięknej pracy, słusznie uważanej za „klasyczną“ — w najlepszym znaczeniu tego wyrazu — pracę geodezyjną, zagadnienie analizy porównawczej sieci małopół- i wielkopółkątowych wyczerpane nie zostało.

C z ę ś ć III

Teoria wyrównania sieci kątowno liniowej i wynik badania dokładnościowego sieci eksperymentalnej Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego

Rozdział XII

Podstawy teoretyczne wyrównania sieci triangulacyjnej dowiązanej do punktów „stałych” o znanych błędach średnich, w której mierzono elementy kątowe i elementy liniowe

WSTĘP

Wyrównanie sieci triangulacyjnych nawiązanych do punktów „stałych” przeprowadza się z reguły zakładając niezmiennosć współrzędnych tych że punktów „stałych” — będziemy je nazywali dalej punktami nawiązania — wychodząc z założenia że błędy połączenia tych punktów są znikome w porównaniu z błędami położenia punktów wyznaczanych przez sieć.

Przy obranej jednostce rachunku: małym boku sieci błąd średni boku $Q1 = QS$ wyrazi się więc wzorem:

$$m_{QS} = m_o \sqrt{\frac{22}{9}}$$

Wyrażając tę wielkość w metrach otrzymalibyśmy: $m_{QS} = m_o d \sqrt{\frac{22}{9}}$.

Przechodząc do boku wielkiego sieci $QS = D$ otrzymamy z uwagi na związek $d = D : 2$

$$m_{QS} = m_o D \sqrt{\frac{22}{9 \cdot 4}} = m_o^{QS} \sqrt{\frac{11}{18}}$$

Skąd błąd względny

$$M = \frac{m_{QS}}{QS} = m_o \sqrt{\frac{11}{18}}$$

Dopóki to założenie daje się utrzymać, dopóty będzie usprawiedliwione względami techniczno rachunkowymi przyjmowanie stałości punktów nawiązania w procesie wyrównania sieci opartej o te punkty. Ma to miejsce w wypadku, gdy dokładność obserwacji na sieci wyższej jest znacznie większa od dokładności obserwacji na sieci wyrównywanej i jednocześnie zachodzi pewność że punkty nawiązania nie podległy w międzyczasie przesunięciom. Jeżeli bądź to dokładność obserwacji na sieci wyrównywanej była wyższa lub równorzędna dokładności obserwacji na sieci pierwotnej, bądź też jeżeli punkty nawiązania mogły w międzyczasie ulec drobnym przesunięciom o charakterze przypadkowym, to znaczy przesunięciom nie dającym się ściśle określić co do wielkości i kierunku, bądź wreszcie gdy zachodzą obie wymienione okoliczności, wówczas postawienie założenia niezmienności punktów nawiązania w procesie wyrównawczym usprawiedliwić się nie daje. Utrzymanie tego założenia powoduje w konsekwencji deformowanie materiału obserwacyjnego i niepotrzebne obniżanie poziomu technicznego pracy przez wyrównanie pozornie tylko zgodne z metodą najmniejszych kwadratów.

Opisane zjawisko obniżania wartości technicznej sieci przez „wtłaczanie” dobrego materiału obserwacyjnego w ramy wyznaczone przez punkty o mało dokładnych współrzędnych jest ogólnie znane i proponuje się dla unieszkodliwienia go różne środki zaradcze. Jednym z tych środków jest wyrównanie niezależne układu obserwacyjnego dostarczonego przez sieć nawiązywaną i uzgodnienie otrzymanego w wyniku tego wyrównania układu punktów, noszącego charakter sieci lokalnej, z punktami nawiązania przez zastosowanie procesu rachunkowego zwanego „dopasowaniem”. W procesie dopasowania stawia się następujące założenia:

- a) długości sieci dopasowywanej podlegają wydłużeniu (względnie skróceniu) proporcjonalnemu do długości,
- b) sieć dopasowywana zostaje jako całość skręcona o stały kąt skrzywienia,
- c) współrzędne punktów nawiązania zostają przesunięte tak aby suma kwadratów przesunięć liniowych była minimum.

Te założenia — postawione po raz pierwszy jak się zdaje przez Hristowa, a realizowane w polskich sieciach wypełniających z dobrym naogół skutkiem przez dr T. Klusa — nie zniekształcają jak widać kątów sieci nawiązującej wyrównanej lokalnie. Można jednak postawić im zarzut natury dość zasadniczej: oto założenia te, narzucając stałość skrzywienia i jednoznaczność wydłużenia, abstrahują właściwie od przypadkowości stanowiącej przecież istotne założenie każdego procesu wyrównawczego. Można by też powiedzieć, że metoda dopasowania realizuje warunek minimum stopniowo: najpierw stawia się go w stosunku do obserwacji geodezyjnych przeprowadzonych w sieci nawiązywanej, przeprowadzając jej wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów, a następnie dopiero zakłada się warunek minimum sumy kwadratów przesunięć liniowych punk-

tów nawiązania, wymagając dodatkowo ażeby wyrównane już w sieci kąty nie uległy zmianie.

Wydaje się, że zagadnienie uzgodnienia pomiarów nowych z pomiarami starymi — do czego właściwie sprawa się tu sprowadza — słuszniej jest przeprowadzić odrazu nie stawiając przytym żadnych założeń niezgodnych z metodą najmniejszych kwadratów. Tak też przeprowadziliśmy wyrównanie w sieci, której omówienie stanowi istotę niniejszej części pracy. Zakładamy więc jedynie, że: układ wielkości geodezyjnych na który składają się:

- a) kąty sieci obserwowane z błędami średnimi obserwacji równymi m_k
 - b) długości sieci obserwowane z błędami średnimi obserwacji m_d
 - c) współrzędne punktów nawiązania znane z błędami średnimi m_x m_y
- ma być wyrównany tak, aby suma kwadratów poprawek wielkości wyrównywanych dzielonych przez kwadraty ich średnich błędów była najmniejszą:

$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum}.$$

Takie wyrównanie sprowadza się do zestawienia równań błędów dla wielkości:

- a) kątów:

$$v_k = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix} + k_{prz} - k_{obs}$$

- b) długości:

$$v_d = \begin{vmatrix} dx_i & dy_i \\ -\cos IK & -\sin IK \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_k & dy_k \\ \cos IK & \sin IK \end{vmatrix} + d_{prz} - d_{obs}$$

- c) współrzędnych:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= dx_i & \text{przyczym } v_k \text{ oznacza poprawkę kąta,} \\ v_{y_i} &= dy_i & v_d \text{ oznacza poprawkę długości,} \\ & & v_x \text{ oznacza poprawkę odciętej punktów nawiąza} \\ & & v_y \text{ oznacza poprawkę rzędnej} \end{aligned}$$

zaś symbole $_1$ i $_2$ mają znaczenie wyjaśnione przez poniższe równania:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a_1 d_1 - c_1 b_1 + a_2 d_2 - c_2 b_2 \cdot \cdot \cdot$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2$$

k_{prz} k_{obs} oznaczają wartości kąta: obliczoną z przybliżonych współrzędnych oraz zaobserwowaną,
 d_{prz} d_{obs} oznaczają wartość długości: obliczoną z przybliżonych współrzędnych oraz zaobserwowaną.

Po zestawieniu równań błędów dzieli się każde równanie przez odpowiadający mu błąd średni i od takiego „zrównoważonego“ układu równań błędów przechodzi się na drogę ogólnie znanego postępowania do układu równań normalnych Gaussa.

1. Pomocnicze symbole rachunkowe

Przed ustaleniem wzoru ogólnego na równanie błędu i jego realizację dla poszczególnych przypadków: równań obserwacji liniowych, kątowych i równań współrzędnych, wprowadzimy kilka oznaczeń pomocniczych systematyzujących rachunki.

Te oznaczenia mają na celu zastąpienie schematów rachunkowych w zwykłym znaczeniu tego wyrazu przez proste wzory operacyjne o ustalonym raz na zawsze znaczeniu. Rozważajmy w tym celu zespół czteroelementowych tabel liczbowych, który nazwiemy „formą rachunkową“ i oznaczmy przez F lub f np:

$$f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \quad f = \begin{vmatrix} \cos K & \sin K \\ x & y \end{vmatrix} \quad f = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \text{ itp.}$$

Sumę wyznaczników sąsiadujących w zespole tabel nazwiemy „iloczynem wyznacznikowym“ formy rachunkowej i oznaczać będziemy stawiając wskaźnik $_1$ u dołu formy lub u dołu jej skróconego oznaczenia. Będzie więc np.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}_1 = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 4 + 0(-4) - 6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 = -8$$

$$F = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}_1 = 36, \text{ co można też napisać } F_1 = 36 \text{ gdzie } F = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Sumę iloczynów elementów tabeli położonych w tych samych kolumnach nazwiemy „iloczynem kolumnowym“ formy rachunkowej i oznaczać będziemy stawiając wskaźnik $_2$ u dołu formy lub u dołu jej skróconego oznaczenia. Będzie więc np.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}_2 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 6(-4) + 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}_2 = 78, \text{ co można też napisać } F_2 = 78 \text{ gdzie } F = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Obydwa omówione działania: obliczanie iloczynu wyznacznikowego i obliczanie iloczynu kolumnowego są arytmometryczne, to znaczy dają się zrealizować na maszynie do rachowania bez kasowania licznika rezultatu i bez zapisywania pośrednich faz rachunku (zapisy w przykładach miały znaczenie wyjaśniające).

Stosunek iloczynu wyznacznikowego do iloczynu kolumnowego formy nazwiemy „ilorazem wewnętrznym“ formy i oznaczać będziemy stawiając

wskaźnik $_0$ u dołu formy lub u dołu jej skróconego oznaczenia. Będzie więc np.:

$$\left| \begin{array}{cc} 12 & 6 \\ 4 & 5 \end{array} \right|_0 = \frac{36}{78} = 0,4615.. \text{ co można też napisać } f_0 = \frac{36}{78} \text{ gdzie } f = \left| \begin{array}{cc} 12 & 6 \\ 4 & 5 \end{array} \right|.$$

Stosunek iloczynu wyznacznikowego do sumy elementów dolnego wiersza oznaczać będziemy przez $f_{(1)}$, stosunek iloczynu wyznacznikowego do sumy kwadratów elementów dolnego wiersza oznaczać będziemy przez $f_{\underline{1}}$ (przy oznaczeniu formy f).

Analogicznie stosunek iloczynu kolumnowego do sumy elementów dolnego wiersza oznaczmy przez $f_{(2)}$, zaś stosunek iloczynu kolumnowego do sumy kwadratów elementów dolnego wiersza oznaczmy przez $f_{\underline{2}}$ (przy oznaczeniu formy przez f).

$$\text{Będzie więc np. } \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|_{(1)} = \frac{ad - bc}{c + d} \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|_{(2)} = \frac{ac + bd}{c + d} = f_{(2)} \text{ itp.}$$

$$\text{Również: } \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|_{\underline{1}} = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|_{\underline{2}} = \frac{ac + bd}{c^2 + b^2} \text{ itp.}$$

Poniżej podajemy parę przykładów uzasadniających celowość wprowadzenia omówionych pojęć.

Rachunek kątów (rys. 46)

Jeżeli oznaczyć przez $\Delta x_L \Delta y_L$ przyrosty wzdłuż lewego ramienia kąta k , przez $\Delta x_P \Delta y_P$ przyrosty wzdłuż prawego ramienia tego kąta, tzn. wyrażnie:

$$\Delta x_L = x_L - x_C \quad \Delta y_L = y_L - y_C \quad \Delta x_P = x_P - x_C \quad \Delta y_P = y_P - y_C$$

wówczas wartość kąta obliczyć można wzorem:

$$\text{tang } k = \left| \begin{array}{cc} \Delta x_L & \Delta y_L \\ \Delta x_P & \Delta y_P \end{array} \right|_0 \quad \text{czyli } k = \text{arc tang } \left| \begin{array}{cc} \Delta x_L & \Delta y_L \\ \Delta x_P & \Delta y_P \end{array} \right|_0$$

Zespół elementów formy rachunkowej najprędzej zestawia się na podwójnym arytmetrze wprowadzając jednocześnie obie współrzędne punktu centralnego ruchem lewoobrotowym korby, a następnie obie współrzędne punktu lewego (względnie prawego) ruchem prawoobrotowym korby.

Wcięcie w przód (rys. 47)

Jeżeli oznaczyć przez AB podstawę wcięcia zaś przez C punkt wyznaczony, przyczym obieg ABC jest prawoskrętny, oraz przez A kąt zmierzony na punkcie A i przez B kąt zmierzony na punkcie B , wówczas współrzędne xy wyznaczanego punktu określi równanie:

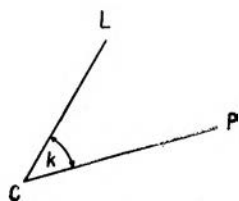
$$x = f_{(1)} \quad y = f_{(2)} \quad \text{gdzie } f = \left| \begin{array}{cc} X_A & Y_A \\ -1 & \text{ctg } B \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} X_B & Y_B \\ 1 & \text{ctg } A \end{array} \right|$$

Niezależną kontrolę rachunku stanowi obliczenie wartości kąta C na punkcie wyznaczonym, które można przeprowadzić pierwszym wzorem.

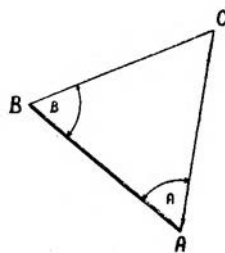
Wcięcie wstecz („zadanie Pothenota“) (rys. 48)

Znając współrzędne prostokątne punktów 012, oraz wartości kątów $\alpha_1 \alpha_2$ pod którymi z poszukiwanego punktu C widoczne są odcinki 01 i 02 (ob. rys.), możemy obliczyć współrzędne xy wyznaczanego punktu C znajdując przyrosty $\Delta x_{OC} \Delta y_{OC}$ wzorami:

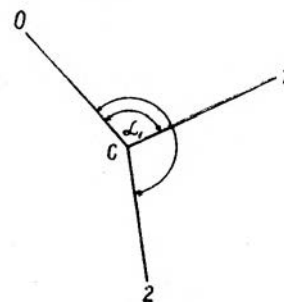
$$F = (f \cdot \varphi) = \begin{vmatrix} \Delta x_{01} & \Delta y_{01} \\ \text{ctg } \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{02} & \Delta y_{02} \\ -\text{ctg } \alpha_2 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta x_{OC} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ F_0 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{|1|} \quad \Delta y_{OC} = -F_0 \Delta x$$



Rys. 46



Rys. 47



Rys. 48

Forma rachunkowa F jest tu formą podwójną składającą się z formy f (pierwsza tabela czteroelementowa, oraz formy φ (druga tabela cztero-elementowa).

Ponieważ w toku rachunku potrzebne są zarówno iloczyny pierwszej z tych form $f_1 f_2$ jak i iloczyny całej formy $F_1 F_2$ (dla obliczenia F_0), trzeba tu w czasie obliczania iloczynów $F_1 F_2$ przepisać z licznika rezultatu maszyn wartości $f_1 f_2$.

Niezależną kontrolę rozwiązania stanowi obliczenie wartości kąta 1C2 znanym wzorem. Jeżeli zarówno licznik jak i mianownik F_0 są bliskie zera (a w skrajnym wypadku równe zero), wówczas wcięcie jest wadliwe (w skrajnym wypadku nieoznaczone — tzw. „punkt na kole niebezpiecznym“).

U w a g a. Pracując na arytmetrze podwójnym rachujemy oba iloczyny: wyznacznikowy i kolumnowy łącznie. Ustawia się w tym celu elementy górnego wiersza na licznikach nastawień w kolejności zapisu i nadaje obroty dla wymnożenia obu liczb przez prawy element dolnego wiersza. Następnie — nie kasując liczników rezultatowych — zmieniamy kolejność liczb na licznikach nastawień, po czym przesuwamy hebeleki nadający lewej maszynie bieg przeciwny i nadajemy obroty dla wymnożenia obu liczb przez lewy element dolnego wiersza i odczytujemy: iloczyn wyznacznikowy na lewej a kolumnowy na prawej maszynie. Jeżeli która z wielkości nastawianych na liczniku nastawień jest ujemna — należy nastawić jej uzupełnienie dziesiętne. Obroty nadajemy zawsze tak jak dyktują to znaki czynników.

Zmiana różniczkowa kąta pod wpływem zmian
różniczkowych współrzędnych punktów
wyznaczających kąt

Wiemy już z części I (str. 20) jak wyraża się przyrost wartości kąta $d\alpha$ spowodowany przez nadanie współrzędnym punktu położonego na lewym ramieniu kąta drobnych przyrostów dx_L, dy_L , współrzędnym punktu położonego na prawym ramieniu kąta drobnych przyrostów dx_P, dy_P oraz współrzędnym punktu położonego w centrum kąta drobnych przyrostów dx_C, dy_C . Wyrażaliśmy przyrost wartości kąta jako sumę trzech wyznaczników. Stosując przyjętą obecnie symbolikę nazwiemy ten przyrost iloczynem wyznacznikowym i napiszemy pod postacią:

$$d\alpha = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix}_1$$

przy czym wartości „współczynników kierunkowych“ AB określają równania:

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\cos \varphi}{d} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\sin \varphi}{d}.$$

W sieciach trygonometrycznych wyrównywanych liczbowo wygodniej jest wyrażać wielkości katowe nie w mierze radialnej, jak to robiliśmy we wszystkich analizach, lecz w mierze praktycznej kąta, a więc w sekundach katowych, lub — dla prac nowszych — w setnych centrygrada tj. w cc. Dla otrzymania przyrostu kąta w mierze praktycznej należy więc zdefiniować współczynniki kierunkowe j. n.

$$\begin{aligned} A'' &= \frac{206265'' \Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} & B'' &= \frac{206265'' \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ \text{lub} \quad A^{cc} &= \frac{636620^{cc} \Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} & B^{cc} &= \frac{636620^{cc} \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

Do obliczenia współczynników kierunkowych stosuje się różne pomoce rachunkowe.

Zmiana różniczkowa długości pod wpływem
zmian różniczkowych współrzędnych punktów
wyznaczających długość

Przyrost długości dd spowodowany przez nadanie współrzędnym punktu położonego „na początku“ długości drobnych przyrostów dx_i, dy_i , oraz współrzędnym punktu położonego „na końcu“ długości drobnych przyrostów dx_k, dy_k wyrazi wzór:

$$dd = \begin{vmatrix} dx_i & dy_i \\ -\cos \varphi_{ik} & -\sin \varphi_{ik} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_k & dy_k \\ \cos \varphi_{ik} & \sin \varphi_{ik} \end{vmatrix}_2$$

w którym φ oznacza kąt kierunkowy odcinka łączącego punkt „początkowy“ z punktem „końcowym“. Pojęcie początku i końca odcinka jest tu oczywiście dowolne — byle by jednolite w całym rachunku.

O słuszności wzoru łatwo się przekonać różniczkując związek:

$$d^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2$$

względem poszczególnych zmiennych i obliczając różniczkę zupełną*).

2. Postać ogólna równania błędu obserwacji geodezyjnej

Niech e będzie elementem geodezyjnym którego wartość obserwowana przeniesiona na płaszczyznę odwzorowania wynosi e_{obs} zaś wartość obliczona z przybliżonych współrzędnych wynosi e_{prz} . Zakładamy przy tym, jak się to zawsze robi w procesach wyrównawczych, że wartości przybliżonych współrzędnych xy dowolnego z wyznaczanych punktów sieci geodezyjnej tak są bliskie wartości najprawdopodobniejszych współrzędnych tegoż punktu $x + dx$ $y + dy$, iż wyższe ponad pierwszą potęgę przyrostków dx dy jakie w wyniku wyrównania zostaną dodane do współrzędnych przybliżonych dla ich zamiany na współrzędne najprawdopodobniejsze są wielkościami zaniedbywalnymi. Ponieważ wartość wyrównaną elementu geodezyjnego możemy określić bądź to jako sumę jego wartości zaobserwowanej e_{obs} i poprawki wyrównawczej v spełniającej warunek minimum, bądź też jako sumę wartości tegoż elementu obliczonej z przybliżonych współrzędnych e_{prz} i przyrostu de jakiego dozna element obliczony z przybliżonych współrzędnych gdy współrzędnym wyznaczających go punktów nadamy przyrostki, zamieniające te współrzędne na współrzędne najprawdopodobniejsze, przeto słuszne jest równanie:

$$e_{\text{obs}} + v = e_{\text{prz}} + de.$$

Wynika stąd zaraz że ogólna postać równania błędu dla obserwacji nad elementem e ma postać:

$$v = de + e_{\text{prz}} - e_{\text{obs}}.$$

Podstawiając na miejsce de e_{prz} e_{obs} odpowiednie wartości otrzymywać będziemy równania błędów dla różnego rodzaju obserwacji geodezyjnych.

Równanie błędu obserwacji kątowej

Równanie błędu obserwacji kątowej — znane nam zresztą z badania dokładnościowego — otrzymamy po podstawieniu na miejsce de przyrostu wartości kąta obliczonego ostatnio. Otrzymujemy:

$$v = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dx_C & dy_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{\text{prz}} - \alpha_{\text{obs}}$$

*) Mamy: $2d \cdot dd = -2(x_k - x_i) dx_i$ $2d \cdot dd = -2(y_k - y_i) dy_i$ tzn. $\frac{dx_i}{dd} = \frac{-(x_k - x_i)}{d} = -\cos \varphi$ oraz $\frac{dy_i}{dd} = \frac{-(y_k - y_i)}{d} = -\sin \varphi$. Analogicznie znajdziemy: $\frac{dx_k}{dd} = \cos \varphi$ $\frac{dy_k}{dd} = \sin \varphi$. Stąd wynika: $dd = -\cos \varphi dx_i - \sin \varphi dy_i + \cos \varphi dx_k + \sin \varphi dy_k$, co napisaliśmy we wzorze pod postacią iloczynu kolumnowego.

Równanie błędu obserwacji liniowej

otrzymamy po podstawieniu do równania ogólnego na miejsce de przyrostu długości obliczonego uprzednio. Otrzymujemy:

$$v = \left| \begin{array}{cc} dx_i & dy_i \\ -\cos \varphi_{ik} & -\sin \varphi_{ik} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_k & dy_k \\ \cos \varphi_{ik} & \sin \varphi_{ik} \end{array} \right|_2 + d_{1rz} - d_{obs}$$

Równanie błędu obserwacji współrzędnej

Gdyby wielkości współrzędnych punktów nawiazania wyznaczone zostały przez pomiar bezpośredni współrzędnej x z błędem średnim m_x oraz pomiar bezpośredni współrzędnej y z błędem średnim m_y , wówczas — zważywszy że przy przyjęciu wartości zaobserwowanej elementu za wartość przybliżoną ostatnie dwa wyrazy w równaniu ogólnym odpadną — otrzymalibyśmy następujące „równania błędów obserwacji współrzędnych“:

$$v_x = dx \text{ o błędzie średnim } m_x \quad v_y = dy \text{ o błędzie średnim } m_y$$

gdzie v_x i dx oznacza poprawkę odciętej, zaś v_y i dy poprawkę rzędnej.

W rzeczywistości wielkości współrzędnych punktów nawiazania nie zostały wyznaczone przez pomiar bezpośredni z błędami m_x i m_y , lecz ustalone zostały w wyniku pewnych operacji rachunkowych, a więc na drodze pośredniej, w oparciu o cały układ obserwacyjny, zaś wielkości ich błędów średnich m_x i m_y zostały z tegoż układu wydedukowane. Gdybyśmy więc chcieli rozwiązać zadanie w zupełnej zgodzie z założeniami metody najmniejszych kwadratów należało by rozważać łącznie oba istotne dla zagadnienia układy obserwacyjne: a) układ obserwacyjny z którego określono wartości współrzędnych punktów nawiazania, oraz b) układ obserwacyjny wyrównywanej triangulacji. Łączne wyrównanie tych układów przy postawieniu warunku najmniejszości sumy kwadratów poprawek obserwacji dzielonych przez kwadraty odpowiadających błędów średnich tych obserwacji dostarczyło by nam najprawdopodobniejsze wartości obserwacji w obu układach, przy czym zakłada się milcząco że położenie punktów nawiazania w okresie czasu który upłynął między pomiarem pierwotnym a pomiarem nawiązującym żadnej zmiany nie uległo. Tego rodzaju rozszerzenie materiału obserwacyjnego podlegającego wyrównaniu w żadnym razie nie może być brane pod uwagę. Z jednej strony uniemożliwione to jest przez ogrom materiału który musiał, by podlegać łącznemu wyrównaniu, z drugiej strony materiał ten w całości rzadko jest znany. Ponadto nie bez znaczenia jest okoliczność, że między pomiarem pierwotnym a pomiarem nawiązującym z reguły upływa kilka czy kilkanaście lat (niekiedy nawet kilkadziesiąt), i założenie nieruchomości punktów nawiazania staje się częstokroć zupełną fikcją.

Skoro jednak łączne wyrównanie układu pierwotnego i nawiązanego jest i niewykonalne i w założeniu niesłuszne (z uwagi na ruch punktów nawiazania), nie pozostaje nic innego jak: abstrahowanie od danych ob-

serwacyjnych pierwotnego układu, potraktowanie dostarczonych przez ten układ współrzędnych tak jakby to były wielkości zmierzone bezpośrednio z określonymi a priori błędami średnimi, i łączne wyrównanie a) obserwacji dokonanych w układzie nawiązanym i b) współrzędnych punktów nawiązania, pod warunkiem doprowadzenia do minimum sumy kwadratów poprawek dzielonych przez kwadraty średnich błędów. Takie postępowanie — warto może zauważyć — jest identyczne z założeniem stałości układu osiowego XOY i przypisaniem wszystkim występującym w zagadnieniu elementom geodezyjnym charakteru obserwacji, mających określać położenie punktów w stosunku do tego układu.

Uwagi dotyczące „wagowania” obserwacji w układzie

Wyrównanie układu obserwacyjnego przy zachowaniu warunku $\left[\frac{vv}{mm} \right]$ = minimum wymaga przyporządkowania każdej obserwacji odpowiadającego błędu średniego. Ta czynność, zwana często „wagowaniem” układu, nie może oczywiście mieć charakteru spekulacyjnego, lecz winna opierać się na doświadczeniu. Jeżeli chodzi o błąd średni kąta w sieci — sprawa jest bardzo prosta gdyż możemy zastosować tzw. „wzór Ferrero”, to znaczy obliczyć aprioryczną wartość średniego błędu kąta w sieci z błędów prawdziwych zamknięcia trójkątów. Bogactwo materiału liczbowego powoduje że charakterystyka ta okazuje się zawsze trafna (przy uniezależnieniu się od błędów stałych położenia punktów nawiązania wartość aprioryczna błędu powinna być równa wartości błędu obliczonej po wyrównaniu).

Błędy bezpośrednich pomiarów liniowych w sieci są też z reguły znane przy znajomości metody i narzędzia pomiaru. [Określanie wartości średniego błędu pomiaru konkretnej długości w oparciu o rozbieżności otrzymane z dwukrotnego pomiaru tej właśnie długości nie jest słuszne, jako oparte na bardzo ubogim materiale nadliczbowym. W braku innych danych można takie określenie apriorycznej wartości błędu średniego pomiaru liniowego z rozbieżności zaobserwowanych przy dwukrotnym pomiarze również tolerować].

Wyznaczenie błędów średnich współrzędnych punktów nawiązania dokonane było zazwyczaj przy wyrównaniu sieci wyznaczającej punkty oparcia. Jeżeli to nie zachodzi — trzeba oczywiście generalizować, przyjmując za średnie błędy współrzędnych punktów nawiązania wartości średnich błędów położenia punktu *przeciętne* dla sieci danego typu. (W Handbuch der Vermessungskunde Jordana-Eggerta podaje się np. jako przeciętną wartość średniego błędu położenia punktu w niemieckich sieciach podstawowych 55 milimetrów).

Jeżeli zachodzi podejrzenie ruchu punktów nawiązania, czy to z uwagi na charakter terenu, czy na długi okres czasu między operacjami wy-

równawczymi w sieci pierwotnej i w sieci nawiązywanej — wówczas należy starać się o uzyskanie danych dotyczących wielkości średniego błędu położenia punktu w sieci na drodze rozważań specjalnych (w wypadku posiadania starego materiału obserwacyjnego może być czasem możliwe nawet dokładne ustalenie co do wielkości i kierunku przesunięcia pewnego punktu czyniące zbędnym zakładanie przypadkowości w ruchu tego punktu — są to jednak raczej wypadki wyjątkowe).

W przypadkach wątpliwych należy przyjąć za zasadę raczej za wysokie jak za niskie szacowanie wielkości błędu średniego położenia punktu. Jeżeli bowiem punkt uległ przesunięciu, zaś założymy w jego położeniu mały błąd średni, wówczas metoda najmniejszych kwadratów mało zniekształci współrzędne punktu, zniekształcając wzajemnie układ obserwacyjny wbrew istotnej przyczynie niezgodności. Jeżeli natomiast przyporządkujemy duże błędy średnie współrzędnym, wówczas, w wypadku przesunięcia punktu, w procesie wyrównania układ obserwacyjny w małym stopniu zostanie zdeformowany a współrzędne otrzymają słusznie duże poprawki wyrównawcze; zaś w wypadku gdy punkt przesunięciu nie uległ, a więc w wypadku gdy rozbieżności między układem obserwacyjnym a współrzędnymi punktu nie wystąpią, przyporządkowanie dużych błędów średnich współrzędnym i tak nie będzie w skutkach szkodliwe gdyż poprawki współrzędnych i tak będą znikome.

W rozpatrywanej dalej sieci eksperymentalnej punktami nawiązania były punkty triangulacji polskiej zakładane nie dawniej jak 15 lat przed okresem pomiaru sieci nawiązującej, bardzo pewnie stabilizowane i położone na terenach nizinnych. W związku z tym założono przy wyrównaniu średnie błędy współrzędnych punktów nawiązania równe 5 cm, co odpowiada średniemu błędowi położenia punktu 7 cm, a więc raczej przeszacowano jak niedoszacowano wartości błędów położenia punktów nawiązania. Postąpiono tak zresztą częściowo i dlatego że przeszacowano nieco — dla ułatwienia rachunku — błąd średni pomiaru kąтового przyjmując go równy $3,18''$ zamiast obliczonego z wzoru Ferrero $2,7''$. Oszacowanie wzajemne błędów okazało się zresztą trafne. Średni błąd bowiem obliczony z błędów pomiarowych dla obserwacji kątowych wyniósł $2,7''$, zaś największa poprawka wyrównawcza współrzędnej punktu nawiązania nie osiągnęła 6 cm. Jedyna uczestnicząca w procesie wyrównania długość otrzymała poprawkę 2 milimetry.

Elizsze szczegóły dotyczące przebiegu i efektu wyrównania sieci eksperymentalnej podane będą w rozdziale następnym.

3. Rozwiązanie zagadnienia wyrównawczego

Po zestawieniu wszystkich równań błędów obserwacji kątowych i liniowych, rozwinięciu umownych symboli, czyli doprowadzeniu tych równań do postaci algebraicznej, oraz dopisaniu równań współrzędnych do

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1x + b_1y + c_1z & . & . & . & + l_1 & = & v_1 & \text{ o b\k{l}ędzie } & \text{śr\k{e}dnim } & m_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & . & . & . & + l_2 & = & v_2 & ,, & ,, & m_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_nx + b_ny + c_nz & . & . & . & + l_n & = & v_n & ,, & ,, & m_n \end{array}$$
$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum}$$

a) Dzielimy każde równanie przez odpowiadający mu błąd średni, otrzymując układ:

$$\begin{array}{rcl} \frac{a_1}{m_1}x + \frac{b_1}{m_1}y + \frac{c_1}{m_1}z + \dots + \frac{l_1}{m_1} & = & \frac{v_1}{m_1} \\ \frac{a_2}{m_2}x + \frac{b_2}{m_2}y + \frac{c_2}{m_2}z + \dots + \frac{l_2}{m_2} & = & \frac{v_2}{m_2} \\ \dots & & \dots \\ \frac{a_n}{m_n}x + \frac{b_n}{m_n}y + \frac{c_n}{m_n}z + \dots + \frac{l_n}{m_n} & = & \frac{v_n}{m_n} \end{array}$$

[illegible]
$$\begin{aligned} [AA]x + [AB]y + [AC]z + \dots + [AL] &= 0 \\ [AB]x + [BB]y + [BC]z + \dots + [BL] &= 0 \\ [AC]x + [BC]y + [CC]z + \dots + [CL] &= 0 \end{aligned}$$

166

wek współrzędnych: zarówno poprawek współrzędnych punktów wyznaczanych, jak i poprawek współrzędnych punktów nawiazania. Przez dodanie tych poprawek do wartości przybliżonych współrzędnych otrzymamy ich wartości wyrównane.

c) Podstawiamy wartości znalezionych niewiadomych do zrównoważonego układu równań błędów, otrzymując w wyniku tego podstawienia wartości „poprawek względnych“, jak nazwaliśmy stosunki poprawek obserwacyjnych do odpowiadających błędów średnich:

$$w_i = \frac{v_i}{m_i} = A_i x + B_i y + C_i z \dots + l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pierwiastek z sumy kwadratów poprawek względnych podzielonej przez ilość spostrzeżeń nadliczbowych n_n , tj. przez różnicę między ilością spostrzeżeń bezpośrednich a podwójną ilością wyznaczanych punktów, wyznaczy błąd średni pojedynczej obserwacji m_o .

$$m_o = \sqrt{\frac{[ww]}{n_n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n_n}}.$$

Dla obliczenia wartości poprawek obserwacyjnych $v_1 v_2 \dots v_n$ wystarczy mnożyć poprawki względne przez odpowiadające błędy średnie:

$$v_i = w_i \cdot m_i$$

Poprawki v można by oczywiście znaleźć i bezpośrednio, tj. podstawiając niewiadome do pierwotnych (niezrównoważonych) równań błędów:

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z \dots + l_i$$

Ponieważ jednak poprawki względne i tak muszą być obliczone postępowanie takie było by mniej celowe.

d) Po obliczeniu poprawek v poprawiamy wartości obserwowane elementów geodezyjnych (rozumiemy je oczywiście ciągle jako przeniesione na płaszczyznę odwzorowania) i sprawdzamy czy są one zgodne z wartościami odnośnych elementów obliczonymi z wyrównanych współrzędnych.

e) Obliczamy średnie błędy współrzędnych — zarówno punktów wyznaczanych, jak i punktów nawiazania — oraz, o ile zachodzi potrzeba, średnie błędy interesujących nas funkcji tych współrzędnych.

Przy oznaczeniu przez $\underline{A}$ krakowianu współczynnikowego zrównoważonego układu równań błędów, a więc przez $\underline{A}^2$ krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych Gaussa, rachunek błędów średnich: błędu średniego m_i współrzędnej która jest i -tą niewiadomą w układzie, i błędu średniego m funkcji $F(x, y, z, \dots)$ wyrażą znane nam już z części I wzory ogólne:

$$m_i = m_o \sqrt{(\underline{A}^2)_{ii}^{-1}} \quad m_F = m_o \sqrt{\underline{f} \cdot (\underline{A}^2)^{-1} \underline{f}}$$

Przypominamy że krakowian f jest kolumną pochodnych funkcji F względem kolejnych niewiadomych układu równań normalnych, to zna-
czy wyrażnie:

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial x} \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial y} \quad f_3 = \frac{\partial F}{\partial z} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Rozdział XIII

Sieć eksperymentalna Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego

WSTĘP

Wspominaliśmy już we wstępie do pracy, że zakończenie jej stanowiło przeprowadzenie wyrównania i analizy dokładnościowej na jednej z polskich sieci triangulacyjnych, stanowiącej fragment prowadzonych u nas prac geodezyjnych, zwanych „triangulacją wypełniającą”. Wyrównana i zanalizowana pod względem dokładnościowym sieć, zwana dalej „siecią eksperymentalną GINB”, nie została założona w celach badawczych i przy zakładaniu jej nie były prowadzone żadne konsultacje przedsiębiorstwa wykonywującego pracę z Geodezyjnym Instytutem Naukowo-Badawczym, ani też z jakąkolwiek inną placówką naukową. Podkreślamy tę okoliczność z dwóch względów. Po pierwsze nie chcemy aby czytelnik sądził że sieć ta daleko odbiegająca co do kształtu od wskazań nauki została w trakcie jej konstruowania zaaprobowana przez instytucję naukową. Po drugie chcemy zwrócić uwagę że badana sieć jest taką konstrukcją jakiej dostarcza nam produkcja geodezyjna w toku normalnej swej pracy. Sieć eksperymentalna pokrywająca obszar około 180 000 ha oparta była na 6 punktach nawiązania triangulacji WIG.

Ilość punktów w sieci wynosiła 52, łącznie z punktami nawiązania. Przy omówionej w poprzednim rozdziale metodzie wyrównania rachunek sieci wymagał zestawienia 249 równań obserwacyjnych, w czym 236 równań kątowych, 1 równanie długościowe, oraz 12 równań współrzędnych punktów nawiązania. Równania te doprowadziły do 104 równań normalnych Gaussa. Z uwagi na badawczy charakter pracy nie ograniczono się do rozwiązania tych równań lecz przeprowadzono całkowity rachunek odwrotności krakowianu współczynnika układu równań normalnych. Pozwoliło to z jednej strony obliczyć błędy średnie położenia wszystkich punktów sieci oraz wyznaczyć elementy elips błędów tych punktów, z drugiej strony umożliwiło zbadanie wpływu błędów nieprzypadkowych oraz obliczanie średnich błędów funkcji niewiadomych wyznaczonych z równań normalnych.

Ponieważ jedna z publikacji Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego, opracowana przez mgr. inż. S. Kasperka i M. Pietrzykowskie-

go którzy przeprowadzili wyrównanie sieci eksperymentalnej, szczegółowo opisuje zarówno efekt wyrównania tej sieci jak i przebieg rachunku, ograniczymy się tutaj do podania paru wykresów ilustrujących analizę dokładnościową sieci, oraz do podkreślenia tego, co dla wyniku badania wydaje nam się najistotniejsze.

Jest to *nieznieskształcenie układu obserwacyjnego przez warunki nawiązania przy jednoczesnym nieznieskształceniu punktów nawiązania* (zmiany w granicach średniego błędu). Błąd średni obserwacji kątowej obliczony przed wyrównaniem z wzoru Ferrero jest *taki sam* jak błąd średni obserwacji kątowej obliczony po wyrównaniu z błędów pozornych ($2,6''$ i $2,7''$), maksymalne przesunięcie współrzędnej punktu nawiązania wynosi 4,9 cm. Dowodzi to — w znaczeniu praktycznym — zarówno *ślusznosci koncepcji jednoczesnego wyrównania kątów i współrzędnych punktów nawiązania*, jako też i *upewnia nas o wysokiej wartości sieci do której pomiar został nawiązany*.

Wykresy ilustrujące badanie dokładnościowe sieci eksperymentalnej GINB

Wykres I (rys. 49).

Na wykresie I przedstawiono całość sieci eksperymentalnej w skali przybliżonej 1 : 200 000 i zespół elips błędów wszystkich punktów (jeżeli uważać je za elipsy błędu średniego — przybliżona skala wykresu elips będzie 1 : 5).

Rzut oka na rysunek pozwala odrazu zauważyć zalety i wady sieci. Widzimy mianowicie że zgrupowanie pomiaru bazowego i $2/3$ punktów nawiązania na małej stosunkowo części obszaru sieci (lewa dolna część rysunku) miało za skutek małą równomierność w dokładności wyznaczenia położenia punktów. Elipsy błędów punktów położonych w pobliżu bazy i wymienionych czterech punktów nawiązania są pomimo bliskości granicy sieci stosunkowo małe. Również stosunkowo małe są elipsy w środkowej części sieci, co cechuje jak już widzieliśmy, sieci centralne oparte na punktach peryferyjnych. Największe elipsy błędu — zgodnie z przewidywaniem dyktowanym przez intuicję geometryczną — występują w pobliżu granicy obszaru, zwłaszcza tam gdzie wyznaczane punkty wykraczają poza linie łączące punkty nawiązania. Jeżeli wyłączyć z rozważań punkty położone poza liniami łączącymi punkty nawiązania, wówczas pozostanie w zespole trzydzieści kilka punktów wyznaczonych z bardzo wysoką i niemal równomierną dokładnością.

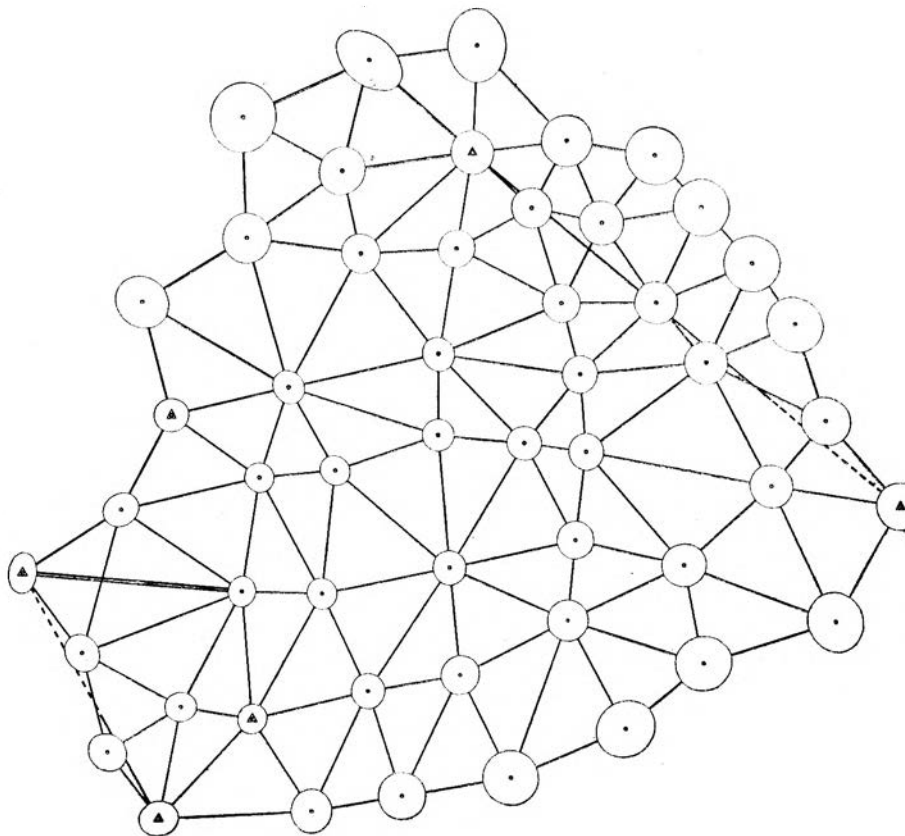
Elipsy błędów średnich punktów należących do tego zespołu będą w przybliżeniu kołami o promieniach od 2 do 4 centymetrów. Przyjmując że są to koła o promieniu 3 centymetrów moglibyśmy powiedzieć z prawdopodobieństwem 0,99 wychodzącym niemal na pewno, że dowolny punkt tego zespołu położony jest wewnątrz koła zatoczonego promieniem 9,1 cm z punktu, którego współrzędne prostokątne wyznaczyła metoda najmniejszych kwadratów, jako ze środka.

Punkty położone na peryferiach sieci poza liniami łączącymi punkty nawiązania wyznaczone są jak widać dużo mniej dokładnie. Półosie elipsy błędu średniego są tu wielkościami rzędu około 4 — 5 centymetrów a w skrajnych wypadkach długości ich dochodzą do 6 centymetrów. Gdybyśmy znowu generalizowali, uważając elipsy punktów tej grupy za koła o promieniu 5 centymetrów, moglibyśmy powiedzieć z tym samym co poprzednio prawdopodobieństwem 0,99, wychodzącym niemal na pew-

SZKIC

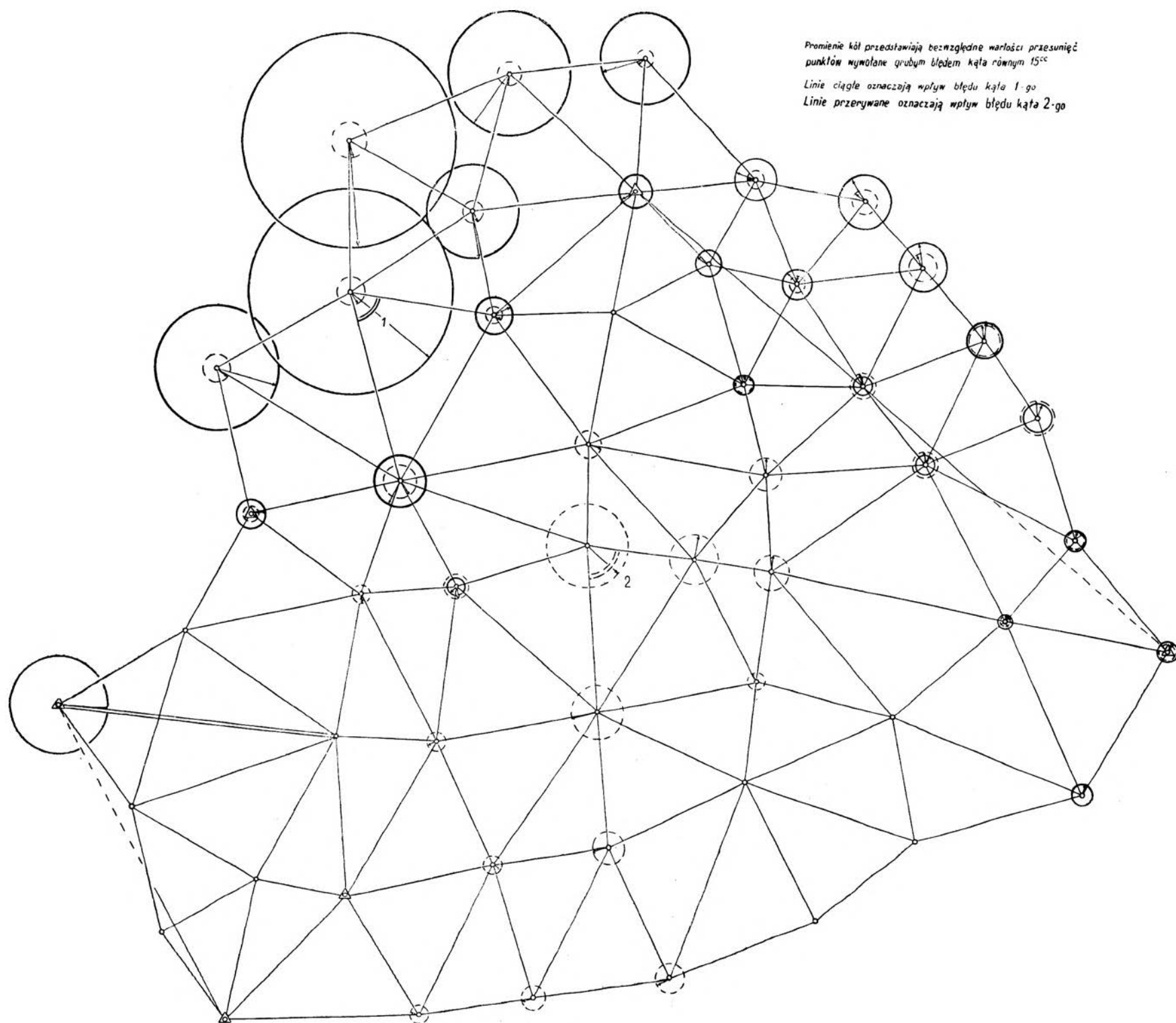
ANALIZY DOKŁADNOŚCI

SIECI TRIANGULACJI WYPEŁNIAJACEJ



Rys. 49

ność, że dowolny punkt tej grupy położony jest wewnątrz koła zatoczonego promieniem 15,2 centymetrów z punktu, którego współrzędne prostokątne wyznaczyła metoda najmniejszych kwadratów, jako ze środka.



Rys. 50 Wyrównanie eksperymentalnej sieci triangulacyjnej GINB

Warto też zauważyć że błąd średni średniego błędu jest dla rozpatrywanej sieci wielkością zupełnie znikomą. Wynosi on mianowicie zaledwie 0,06 m.

Wszystko to upewnia nas o dużej dokładności i zarazem pewności otrzymanych w wyniku przeprowadzonego wyrównania współrzędnych punktów sieci eksperymentalnej i wyklucza obawę „niespodzianek“ przy nawiązywaniu innych pomiarów geodezyjnych do opracowanej sieci.

Przeciętna wartość błędu średniego położenia punktu na obszarze sieci wynosi 5,1 centymetra, o czym zresztą wspominaliśmy już w innym miejscu, i co pozwala nam pomimo wadliwości kształtu geometrycznego sieci uważać ją za wysokowartościową.

Wykres II (rys. 50)

Wykres II ilustruje wpływ błędów nieprzypadkowych na przebieg procesu wyrównania sieci metodą najmniejszych kwadratów. Przypominamy, że jeżeli w układzie spostrzeżeń wyrównanym metodą najmniejszych kwadratów zmienimy wartość k -tej obserwacji nadając jej niewielki przyrostek dl_k , po czym zmieniony tak układ obserwacyjny znów wyrównamy metodą najmniejszych kwadratów, wówczas i -ta niewiadoma w układzie równań normalnych Gaussa dozna przyrostu którego wielkość wyraża się jako iloczyn k -tego wiersza krakowianu współczynnikowego układu równań obserwacyjnych (równań błędów) przez i -ty wiersz odwrotności krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych, pomnożony przez przyrost wartości obserwacji:

$$dx_i = dl_k \cdot a_{(k)} \cdot (a^2)_{(i)}^{-1}.$$

Ten prosty związek, który omawialiśmy i uzasadnialiśmy w rozdziale I (str. 38), pozwala na drodze nieskomplikowanego rachunku (zakładamy że odwrotność $(a^2)^{-1}$ obliczono w toku równania) odpowiedzieć na pytanie: jak zmieniają się w danej sieci wartości współrzędnych jeżeli popełnimy błąd — oczywiście niewielki) w pewnej obranej obserwacji. Badanie sieci eksperymentalnej na taki „wpływ błędów nieprzypadkowych“ ograniczono do założenia popełnienia błędu raz w kącie peryferyjnym (oznaczono na szkicu 1), a drugi raz w kącie centralnym (oznaczono na szkicu 2). Po zrealizowaniu napisanego wyżej wzoru dla wszystkich wierszy odwrotności otrzymano składowe po osiach dla wszystkich wektorów przesunięć punktów w sieci, po czym wykreślono te wektory, przyjmując wartość błędu równą $15''$. Oprócz wektorów, które przy założeniu błędu w punkcie 1 wyrysowane są kolorem czerwonym, zaś przy założeniu błędu w punkcie 2 wyrysowane są kolorem niebieskim, wykreślono z każdego punktu koło o promieniu równym długości wektora, zachowując te same kolory. Koła ilustrują więc granice których nie przekroczy ruch punktu przy założeniu popełnienia określonego błędu. Wykreślenie samych tylko wektorów, udzielające w zasadzie wyczerpującą odpowiedź na posta-

wione pytanie, wydało się niedostatecznie przemawiające do wyobraźni geometrycznej.

Ponieważ sporządzony rysunek został w następstwie przy fotografii pomniejszony ca 5 krotnie, widoczne na obok zamieszczonym rysunku wektory przesunięć są ca pięciokrotnie mniejsze od swej naturalnej wielkości odpowiadającej założeniu błędu o wielkości $15''$.

Jak widać z wykresu — w zupełnej zgodzie z intuicją geometryczną — *popętnienie błędu w pobliżu środka sieci jest dużo mniej szkodliwe od popętnienia błędu na peryferii*. W pierwszym wypadku maksymalna wartość przesunięcia wyniesie około 3 centymetrów, w drugim około 10 centymetrów. Ponadto w pierwszym wypadku praktycznie ulegnie zniekształceniu tylko położenia punktu na którym popełniono błąd kątowy, w drugim i położeniu punktów pobliskich.

Uwagi końcowe dotyczące środków rachunkowych przy wyrównaniu wielkich sieci triangulacyjnych

Przewaga dokładnościowa sieci małopółkątowych nad sieciami wielkopółkątowymi powinna by skłonić geodezję do operowania raczej sieciami małopółkątowymi, tymbardziej, że rozwiązania nie wymagające budowy wielkich wież obserwacyjnych są i ekonomicznie dużo celowsze. Cokolwiek kosztowniejszy staje się natomiast sam proces wyrównania, w którym operuje się większymi układami równań liniowych. Jeżeli jednak uprzytomnimy sobie że budowa jednej wieży obserwacyjnej w triangulacji pierwszego rzędu jest co do kosztu równoważna kilkuletniej pracy wykwalifikowanego rachmistrza, dojdziemy łatwo do wniosku, że zwiększenie ilości pracy rachunkowej przy przejściu do triangulacji o bokach kilkakrotnie krótszych w ogólnym bilansie korzyści związanych z triangulacją małopółkąową będzie bez znaczenia. Jest to zresztą właściwie raczej przesunięcie terminu pracy która i tak musi być kiedyś dokonana. Nikt nie poprzestaje bowiem na założeniu triangulacji wyższej rzędu, która przecież stanowi tylko podstawę na której muszą być rozwijane rzędy niższe. Cała korzyść w dziedzinie rachunkowej wynikająca z wielorzędowości triangulacji sprowadza się więc w istocie rzeczy do tego że przy tej samej ilości niewiadomych możemy operować większą ilością układów równań. Korzyść ta była bardzo istotna w czasach gdy geodezja nie rozporządzała jeszcze nowoczesnymi pomocami rachunkowymi, i być może ona właśnie stała się przyczyną powstania triangulacji wielorzędowej, a w konsekwencji i źródłem legendy o „zasadzie naczelnej przechodzenia od ogółu do szczegółu“, obowiązującej jakoby w całej geodezji.

Przy dzisiejszych możliwościach techniki rachunkowej zagadnienie rozwiązania układu równań liniowych o kilkudziesięciu niewiadomymi nie stanowi żadnego problemu. Stosowanie pięknej metody Pranis-Praniewicza pozwala nam na racjonalne zorganizowanie pracy zespołowej przez rozbięcie zagadnienia o wielkiej ilości równań liniowych na kilka zagad-

nień o mniejszych ilościach tych równań. Również metody iteracyjne nowocześnie ujęte (np. metoda pomocniczej niewiadomej Banachiewicza), jak i rachunek na zestawach zwykłych maszyn liczących w oparciu o rachunek krakowianowy, pozwalają na tak wydatne przyspieszenie tempa pracy, że i układy o kilkuset niewiadomych nie stają się dla racjonalnie pracujących zakładów straszne. Wydaje się zresztą, że już bardzo niedaleki jest czas gdy geodezja powierzać będzie swe rachunki wielkich układów równań liniowych maszynom elektronowym. Państwowy Instytut Matematyczny w Warszawie w przyszłym już roku będzie rozporządzał tego rodzaju maszyną, której konstruktor, mgr inż. R. Marczyński, przewiduje już opracowanie programu rozwiązania typowych dla geodezji układów równań symetrycznych o ilości 100 niewiadomych. Zagadnienia o większej ilości niewiadomych możnaby na razie w ten czy inny sposób przekształcać sprowadzając do zagadnień o mniejszej ilości niewiadomych. Jedną z możliwych dróg byłoby np. stosowanie wzoru Banachiewicza na przekształcenie odwrotności.

STEFAN HAUSBRANDT

**ANALIZA PORÓWNAWCZA DOKŁADNOŚCI WIELKOTRÓJKĄTO-
WYCH I MAŁOTRÓJKĄTOWYCH SIECI TRIANGULACYJNYCH NA-
WIĄZANA DO PRAC GEODEZYJNYCH W POLSCE**

STRESZCZENIE

§ 1) W pracy podaje się ogólną metodę przeprowadzania analizy dokładności sieci triangulacyjnych w oparciu o teorię spostrzeżeń pośrednich, jak również ogólną metodę wyrównania błędów przypadkowych pomiaru w sieciach triangulacyjnych z pomiarami liniowymi i kątowymi przy zarzuceniu założenia bezbłędności punktów oparcia. W szczególności rozważa się zagadnienie: czy z punktu widzenia dokładności rezultatów słuszniej jest wyznaczać zespół punktów geodezyjnych budując sieci z trójkątów foremnych o krótkich czy też o długich bokach, tzn. czy zakładając „sieci małotrójkątowe“, czy też zakładając „sieci wielkotrójkątowe“. Omawia się również pobieżnie efekt wyrównania i analizy dokładności pewnej sieci triangulacyjnej na obszarze Polski.

Wymienione problemy ogólne rozważa się wyłącznie z punktu widzenia rachunku wyrównawczego w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów. Nie omawia się więc wcale zagadnień luźno związanych z tematem jak np. zagadnienia przeliczania układów obserwacyjnych z geoidy na elipsoidę, zastosowania takiej czy innej elipsoidy, przyjęcia takiego czy innego odwzorowania kartograficznego przy przeniesieniu zadania wyrównawczego na płaszczyznę itp. itp.

Niniejsze streszczenie ma na celu umożliwić czytelnikowi nie tylko zaznajomienie się z wynikami badań szczegółowych ale i wniknięcie w treść i metodę pracy.

Przy przeprowadzaniu dowodów oraz formułowaniu wzorów w pracy niniejszej posługiwano się liczbami zespolonymi zwanymi krakowianami, których twórcą jest polski astronom i matematyk, Tadeusz Banachiewicz. Wybrano krakowiany a nie pokrewne im macierze Cayley'a-Hamiltona, używane w matematyce abstrakcyjnej, zarówno z uwagi na ich

większą przydatność praktyczną (mnożenie liczb zespolonych rzędami równoległymi a nie prostopadłymi), jak i na większe dotychczasowe osiągnięcia krakowianów niż macierzy w metodzie najmniejszych kwadratów. Dla ułatwienia czytelnikowi posługującemu się macierzami zapoznania się z niniejszą pracą, podajemy poniżej w skróceniu najistotniejsze cechy odróżniające krakowiany od macierzy: W symbolice krakowianów i -tą kolumnę liczby zespolonej oznaczonej przez $\underline{a}$ oznacza się przez $\underline{a}_i$ natomiast i -ty wiersz tej liczby przez $\underline{a}_{(i)}$. Element położony w i -tej kolumnie i j -tym wierszu liczby zespolonej (krakowianu) oznaczonej przez $\underline{a}$ oznacza się $\underline{a}_{ij}$.

Definicja dodawania i definicja liczby jednostkowej jest w krakowianach analogiczna jak w macierzach. Liczbę jednostkową, zwaną krakowianem tau, oznacza się przez $\underline{\tau}$, przy czym symbol τ (bez podkreślenia) jest symbolem funkcyjnym oznaczającym transponowanie liczby zespolonej, a więc np. $\tau \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$ oznacza krakowian $\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}$ itp.

Definicję mnożenia krakowianu $\underline{a}$ przez krakowian $\underline{b}$ wyraża równanie:

$$\underline{a} \underline{b} = \underline{c} \text{ gdy } \underline{a}_i \underline{b}_j = c_{ij} = \sum a_{ik} b_{jk}$$

skutkujące nieistnieniem w iloczynie krakowianowym przemienności ani łączności w zwykłym znaczeniu tych pojęć. Zastępują je związki podstawowe: $\underline{a} \underline{b} = \tau(\underline{b} \underline{a})$ oraz $\underline{a} \underline{b} \underline{c} = (\underline{a} \underline{b}) \underline{c} = \underline{a} (\underline{c} \cdot \tau \underline{b})$

zwane twierdzeniem: permutacyjnym i asocjatywnym.

Z ostatniego związku wynika $\underline{a} (\underline{b} \underline{c}) = \underline{a} \cdot \tau \underline{c} \cdot \underline{b}$ (twierdzenie dysocjatywne).

Dla mnożeń przez liczbę jednostkową mamy:

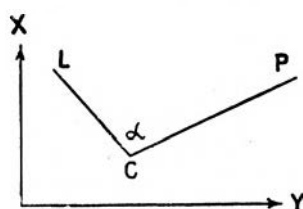
$$\underline{a} \cdot \underline{\tau} = \underline{a} \text{ lecz } \underline{\tau} \cdot \underline{a} = \tau \underline{a}.$$

Definicja odwrotności $\underline{a}^{-1}$ analogicznie jak w macierzach:

$$\underline{a} \underline{a}^{-1} = \underline{a}^{-1} \underline{a} = \underline{\tau}.$$

Teorię i osiągnięcia krakowianów podają prace Banachiewicza i Kochmańskiego.

§ 2) Rozważajmy dowolny kąt α (niech będzie to np. kąt w sieci triangulacyjnej) wyznaczony przez: punkt L położony na lewym ramieniu tego kąta, punkt P położony na jego ramieniu prawym, oraz punkt C położony w centrum kąta. Zakładamy przy tym, że przybliżone wartości współrzędnych prostokątnych punktów LPC w dowolnym układzie są nam znane. Łatwo wykazać, że jeżeli współrzędnym punktów LPC nadamy drobne przyrostki, które oznaczmy



Rys. 51

odpowiednio przez $dx_L, dy_L, dx_P, dy_P, dx_C, dy_C$ wówczas kąt α otrzyma przyrost $d\alpha$, którego wielkość przy założeniu pomijalności wyższych ponad pierwszą potęgę przyrostów dx, dy wyrazi następujący wzór:

$$d\alpha = \left| \frac{dx_L}{A_L} \quad \frac{dy_L}{B_L} \right| + \left| \frac{dx_P}{-A_P} \quad \frac{dy_P}{-B_P} \right| + \left| \frac{dx_C}{-(A_L - A_P)} \quad \frac{dy_C}{-(B_L - B_P)} \right| \quad (1).$$

We wzorze tym wielkość A_L oznacza iloraz z podzielenia rzutu lewego ramienia kąta, tj. rzutu odcinka CL , na oś odciętych przez kwadrat długości lewego ramienia kąta, wielkość B_L oznacza iloraz z podzielenia rzutu lewego ramienia kąta na oś rzędnych przez kwadrat długości lewego ramienia kąta. Analogicznie wielkość A_P oznacza iloraz z podzielenia rzutu prawego ramienia kąta, tj. rzutu odcinka CP , na oś odciętych przez kwadrat długości prawego ramienia kąta, zaś wielkość B_P oznacza iloraz z podzielenia rzutu prawego ramienia kąta na oś rzędnych przez kwadrat długości prawego ramienia kąta. Wartości tych „współczynników kierunkowych“ są tu więc zdefiniowane odmiennie jak to się przyjmuje zazwyczaj: A jest proporcjonalne do Δx , zaś B do Δy , zgodnie z porządkiem leksykograficznym, znaki współczynników są zgodne ze znakami przyrostów. Ta definicja współczynników kierunkowych, którą krótko wyrażają równania:

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\cos \varphi}{d} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\sin \varphi}{d}$$

okazała się i w praktyce i przy formowaniu wzorów wygodniejsza od klasycznej.

Oznaczmy przez α_{prz} wartość kąta α w sieci triangulacyjnej obliczoną z przybliżonych współrzędnych, przez α_{obs} wartość tegoż kąta uzyskaną z obserwacji, oraz przez v poprawkę jaką należy algebraicznie dodać do wartości zaobserwowanej kąta dla uzyskania jej wartości najprawdopodobniejszej, tzn. spełniającej warunek $[vv] = \text{minimum}$. Niech dalej $dx \ dy$ (porównaj § 2) będą poprawkami które dodane algebraicznie do wartości przybliżonych współrzędnych mają je zamienić na wartości najprawdopodobniejsze. Z określeń tych wynika że słuszne jest równanie:

$$\alpha_{prz} + d\alpha = \alpha_{obs} + v$$

powstające przez przyrównanie tej samej wielkości: wartości najprawdopodobniejszej kąta wyrażonej dwukrotnie przez inne wielkości. Podstawienie na miejsce $d\alpha$ wartości podanej w § 1 pozwoli nam napisać związek między poprawką obserwacji a pośredniczącymi w wyrównaniu niewiadomymi $dx \ dy$, czyli tzw. „równanie błędu“ obserwacji katowej, lub słuszniej jej „równanie obserwacyjne“.

Ma ono postać:

$$\left| \frac{dx_L}{A_L} \quad \frac{dy_L}{B_L} \right| + \left| \frac{dx_P}{-A_P} \quad \frac{dy_P}{-B_P} \right| + \left| \frac{dx_C}{-(A_L - A_P)} \quad \frac{dy_C}{-(B_L - B_P)} \right| + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v.$$

Jeżeli umówimy się nadto, że napisany szeregowo zespół czteroelementowych tabel kwadratowych zakończony wskaźnikiem oznacza sumą wyznaczników tych tabel, tj.

ogólnie:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} = \Sigma a_i d_i - \Sigma b_i c_i \quad (i=1, 2 \dots n)$$

a w szczególności np.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 5 + 30 = 35$$

albo też:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = x_1 + 2 y_1 - 5 x_2 - 3 y_2 \quad \text{itp. itp.}$$

wówczas możemy napisać równanie błędu obserwacji kątowej pod następującą postacią, z której dalej będziemy stale korzystać:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} - (A_L - A_P) \begin{vmatrix} dx_C & dy_P \\ (P_L - B_P) \end{vmatrix} + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v \quad (2)$$

§ 3) Napiszmy dla każdego kąta obserwowanego, lub mającego być obserwowanym, w sieci triangulacyjnej równanie błędu (2) wstawiając na miejsce symboli $dx_L, dy_L, dx_P, dy_P, dy_C$ symbole aktualnych dla danego kąta poprawek przybliżonych współrzędnych punktów wyznaczających ten kąt. W ogólnym wypadku będą to symbole dx_i, dy_i gdzie i oznacza numer punktu w sieci trygonometrycznej przyporządkowany temu punktowi na czas rachunku. W szczególnym wypadku, gdy który z punktów wyznaczających kąt jest w procesie wyrównania punktem stałym, na miejsce symboli dx, dy podstawić należy oczywiście zera.

Po wykonaniu mnożeń wyznacznikowych otrzymamy układ równań liniowych względem niewiadomych w zagadnieniu poprawek przybliżonych współrzędnych punktów wyznaczanych w procesie wyrównania, napisany pod zwykłą przyjętą w algebrze postacią.

W tym układzie równań który zgodnie z panującym w rachunku wyrównawczym zwyczajem zasymbolizujemy jak następuje:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z \dots + 1_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \dots + 1_2 &= v_2 \quad (n \text{ równań} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \quad r \text{ niewiadomych}) \\ a_n x + b_n y + c_n z \dots + 1_n &= v_n \end{aligned}$$

wielkości współczynników przy niewiadomych są zawsze w zagadnieniu znane, natomiast wielkości wyrazów wolnych są znane w wypadku wyrównywania sieci, zaś nieznane w wypadku przeprowadzania analizy dokładnościowej sieci, której kształt i skala są dane, lecz w której pomiarów geodezyjnych nie przeprowadzono.

Krakowian współczynników przy niewiadomych tego układu równań błędów oznaczać będziemy przez a . Będzie więc — gdy napisać to zupełnie wyraźnie:

$$a = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & r_n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

Zestawienie krakowianu $\underline{a}$ jest czynnością podstawową dla analizy dokładnościowej. Znając ten krakowian i zakładając że obserwacje kątowe w sieci przeprowadzone zostaną z błędem średnim pojedynczej obserwacji m_o , możemy już — posługując się wyłącznie algebrą krakowianową — na drodze realizacji paru prostych wzorów przeprowadzić analizę dokładnościową dowolnej sieci opartą na metodzie najmniejszych kwadratów.

§ 4) Za zasadnicze kryteria charakteryzujące sieć triangulacyjną pod względem dokładnościowym będziemy uważać:

1) *Wielkość błędu średniego położenia punktu.* Wielkość tę dla punktu którego odcięta jest i -tą zaś rzędna k -tą niewiadomą w układzie równań błędów wyraża wzór:

$$m_p = m_o \sqrt{(a^2)_{ii}^{-1} + (a^2)_{kk}^{-1}} \quad (4)$$

2) *Wielkość wpływu błędów nieprzypadkowych, tzn. wielkość zmiany dx_i jakiej dozna i -ta niewiadoma w układzie wyrównanym metodą najmniejszych kwadratów, jeżeli zmienimy k -tą obserwację nadając jej przyrostek dl_k i ponownie wyrównany układ metodą najmniejszych kwadratów. Wielkość tej zmiany wyraża wzór*):*

$$dx_i = dl_k \cdot a_{(k)} \wedge (a^2)_{(i)}^{-1} \quad (5)$$

Pierwsze kryterium jest ogólnie znane i omówień nie wymaga. Drugie pozwala wyznaczyć deformację sieci w wypadku popełnienia w obserwacji błędu nieprzypadkowego. Wprowadzenie tego kryterium wydaje się o tyle celowe, że w układach wyrównywanych metodą najmniejszych kwadratów niezawsze mamy pewność, iż rozkład błędów zgodny jest z prawem Gaussa-Laplace'a, zaś wyrównanie przeprowadzamy przy przyjęciu tego założenia. Słuszne więc będzie w wypadku gdy dwie sieci triangulacyjne wyznaczają położenie pewnego punktu z takim samym błędem średnim, uznać za lepszą do wyznaczenia danego punktu tę sieć, która mniej zdeformuje położenie punktu w wypadku istnienia w układzie obserwacji obciążonej „pechowym“ błędem nieprzypadkowym.

Za dalsze kryteria, nie wymagające już znajomości krakowianu $\underline{a}$, a charakteryzujące sieć pod względem dokładnościowym w wyłącznym oparciu o parametry n (ilość obserwacji) i p (ilość wyznaczanych punktów, przy czym $2p = r$) przyjmiemy:

3) *Wielkość średniego błędu błędów średniego, określona przez znany już od czasów Gaussa wzór ogólny $m_m = m : \sqrt{2n_n}$, w którym n_n oznacza ilość spostrzeżeń nadliczbowych w układzie, a który dla wypadku*

*) Symbol $\wedge$ jest oznaczeniem mnożenia wierszowego. Wzór (5) mówi więc po prostu, że zmiana niewiadomej równa jest zmianie obserwacji pomnożonej przez iloczyn wiersza krakowianu $(a^2)^{-1}$, odpowiadającego kolejnością niewiadomej, przez wiersz krakowianu $\underline{a}$, odpowiadający kolejnością obserwacji.

sieci triangulacyjnej wyznaczającej p punktów z n obserwacji kątowych przybierze postać:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n - 4p}} \quad (6)$$

4) Wartość przeciętną stosunku kwadratu błędu średniego obserwacji po wyrównaniu do kwadratu błędu średniego obserwacji przed wyrównaniem.

Tę wielkość — oznaczmy ją symbolem μ^2 — równą, jak to wykazał ostatnio w rachunku krakowianowym A. Otrębski, stosunkowi ilości obserwacji niezbędnych do wyznaczenia układu do ilości wszystkich obserwacji dokonanych w układzie, dla wypadku sieci triangulacyjnej wyznaczającej p punktów z n obserwacji wyrazi wzór:

$$\mu^2 = \frac{2p}{n} \quad (7)$$

Najbardziej istotne z uwagi na cel prac triangulacyjnych jest oczywiście kryterium pierwsze. Stosowanie go jednak w oderwaniu od kryterium drugiego i trzeciego może naprowadzić na błędne drogi. Ogólnie powiedzieć by można, że kryterium pierwsze dotyczy dokładności rezultatów, zaś drugie i trzecie ich „realności” czy też „pewności”. Kryterium czwarte ma charakter statystyczny: opiniuje ono, nie wdając się w szczegóły, w jakim stopniu dany układ obserwacyjny spełnia zasadniczy cel wszelkiego wyrównania: zmniejszenie błędów obserwacyjnych.

§ 5) Jakkolwiek znajomość błędów średnich położenia punktów m_p wyczerpująco charakteryzuje sieć pod względem dokładności, jednak w literaturze chętniej rozważa się naogół błędy średnie bardziej skomplikowanych funkcji obserwacji wyrównanych metodą najmniejszych kwadratów, a w szczególności błędy średnie długości czy też kątów. Błędy te mogą być uważane za błędy funkcji niewiadomych $xyz...$ i obliczone z wzoru ogólnego na błąd funkcji $F(x, y, z...)$ podany w prostej postaci krakowianowej przez Banachiewicza w r. 1936. Wzór ten przy oznaczeniu przez f kolumny pochodnych funkcji F względem kolejnych niewiadomych, tzn. wyrażnie: $f = \tau \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \dots \right)$ ma postać:

$$m_F = m_o \sqrt{f (a^2)^{-1} f}$$

W badaniu sieci triangulacyjnych można by też posiłkować się przeciętną wartością kwadratu błędu położenia punktu w całej sieci. Wielkość tę, którą oznaczmy przez M^2 i która stanowi w pewnym znaczeniu analogię kryterium statystycznego Otrębskiego o którym mówiliśmy powyżej, można obliczyć następującym wzorem:

$$M^2 = m_o^2 \frac{\sum (a^2)_{ii}^{-1}}{p}$$

gdzie przez $\Sigma (a^2)^{-1}_{ii}$ oznaczyliśmy sumę elementów przekątnych w krakowianie $(a^2)^{-1}$. Wielkość tę można by, zapożyczając terminu z algebry macierzy, nazwać „śladem“ krakowianu (ros. sled, niem. Spur, franc. trace).

§ 6) Przykład liczbowy

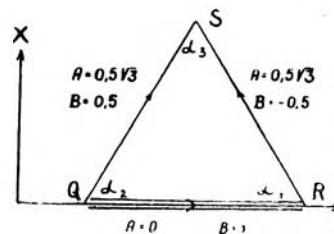
Zilustrujemy stosowanie podanych wzorów na prostym przykładzie analizy sieci powstającej przez pomiar trzech kątów w trójkącie foremnym, którego podstawa QR przyjęta jest za bezbłędną. Jeżeli oś główną układu OX obrać prostopadłe do tej podstawy, zaś za jednostkę długości w rachunku przyjąć bok trójkąta, wówczas wartości współczynników kierunkowych wyniosą:

(dla boku QR) $A = 0, B = 1$, (dla boku

QS) $A = 0,5\sqrt{3}, B = 0,5$

(dla boku RS) $A = 0,5\sqrt{3}, B = -0,5$.

Te wartości wpisaliśmy przy bokach na załączonym rysunku, oznaczając kierunki boków strzałkami. Równania błędów poszczególnych kątów, napisane w postaci tabelarycznej (2) będą:



Rys. 52

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & dy \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} + \alpha_{1prz} - \alpha_{1obs} = v_1$$

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} + \alpha_{2prz} - \alpha_{2obs} = v_2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & dy \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \alpha_{3prz} - \alpha_{3obs} = v_3$$

Realizując mnożenia wyznacznikowe napiszemy układ równań błędów pod wyraźną postacią:

$$\begin{aligned} 0,5 \, dx + 0,5\sqrt{3} \, dy + \dots &= v_1 \\ 0,5 \, dx - 0,5\sqrt{3} \, dy + \dots &= v_2 \\ -1 \, dx + \dots &= v_3 \end{aligned}$$

gdzie opuszczamy nieznane i nieistotne dla analizy wartości wyrazów wolnych.

Możemy już obecnie napisać krakowian $\underline{a}$, zestawić jego kwadrat $\underline{a}^2$, oraz odwrotność tego kwadratu tj. krakowian $(\underline{a}^2)^{-1}$. Łatwo sprawdzić że są one dobrze zestawione stwierdzając przez mnożenie że: $\underline{a} \cdot \underline{a} = \underline{a}^2$ oraz $\underline{a}^2 \cdot (\underline{a}^2)^{-1} = \underline{\tau}$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \quad (\underline{a}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1) Wynika stąd w myśl wzoru (4) że błąd średni położenia punktu S wyniesie:

$$m_p = m_o \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = \frac{2m_o}{\sqrt{3}}$$

przy czym błąd ten wyrażony jest w obranej do rachunku jednostce: małym boku sieci. Chcąc wyrazić go w metrach, napiszemy ostatecznie — przy oznaczeniu przez D długości boku sieci wyrażonej w metrach:

$$m_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$$

2) Dla zbadania jak wpłynie zmiana wartości kąta α_2 o dl na wartości współrzędnych, pomnożymy wiersz pierwszy krakowianu a przez kolejne wiersze krakowianu $(a^2)^{-1}$ znajdując odpowiednio: $dx = -\frac{1}{3} dl$ $dy = \frac{1}{3} \sqrt{3} dl$ skąd $f = \frac{2}{3} dl$, gdzie oznaczyliśmy f przesunięcie liniowe punktu spowodowane przez przesunięcie odciętej o $\frac{1}{3} dl$ i przesunięcie rzędnej o $\frac{1}{3} \sqrt{3} dl$. Wyrażając wielkość przesunięcia liniowego w metrach otrzymamy:

$$f_1 = \frac{2}{3} D \cdot dl$$

przy czym wskaźnik $_1$ ma przypomnieć nam że przesunięcie to spowodowane jest zmianą wartości kąta α_1 o dl .

Dla zbadania jak wpłynie zmiana wartości kąta α_2 o dl na wartości współrzędnych pomnożymy wiersz drugi krakowianu a przez kolejne wiersze krakowianu $(a^2)^{-1}$, znajdując, w myśl wzoru (5), zmianę pierwszej niewiadomej dx i zmianę drugiej niewiadomej dy . Mamy: $dx = -\frac{1}{3} dl$ oraz $dy = -\frac{1}{3} \sqrt{3} dl$.

Przesunięcie na osi odciętych jest jak widać takie same jak poprzednio, przesunięcie na osi rzędnych — takie same co do wielkości lecz przeciwne co do kierunku. Wielkość przesunięcia liniowego — oznaczmy je teraz przez f_2 — będzie więc, podobnie jak poprzednio, $f_2 = \frac{2}{3} D dl$.

Badając tak samo wpływ zmiany wartości kąta α_3 znajdziemy w drodze mnożenia trzeciego wiersza krakowianu a przez kolejne wiersze krakowianu $(a^2)^{-1}$, następujące wartości przesunięć: $dx = -\frac{2}{3} dl$ oraz $dy = 0$. Wielkość przesunięcia liniowego spowodowanego przez błąd w kącie α_3 wyniesie więc, jak poprzednio $f_3 = \frac{2}{3} D dl$. Przy $dl'' = 2''$ tj. $dl = 0,00001$ i $D = 30$ klm wyniosło by to 30 cm.

3) Błąd średni średniego błędu w badanej sieci wyniesie:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{6-4}} = 0,71 \text{ m}$$

(por. wzór (6)), co jest oczywiście wielkością stosunkowo bardzo dużą i co,

łącznie z znaczną wielkością wpływu błędów nieprzypadkowych, dyskwalifikuje tego rodzaju konstrukcje geodezyjne, niestety dopuszczane przez niektóre przepisy pomiarowe.

4) Zastosowanie czwartego kryterium (7) poinformuje nas że w badanej sieci przeciętna wartość zmniejszenia kwadratu błędu średniego obserwacji spowodowanego przez proces wyrównania metodą najmniejszych kwadratów wyniesie $2/3$.

Jako ilustrację zastosowania wzoru ogólnego na błąd funkcji niewiadomych układu równań błędów, podanego w § 5 obliczymy błąd średni boku QS . Mamy:

$$F = QS = \sqrt{(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2} \quad \text{skąd} \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \cos QS = 0,5\sqrt{3} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sin QS = 0,5 \end{aligned}$$

Będzie więc: $\underline{f} = \begin{Bmatrix} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \end{Bmatrix}$ oraz $\underline{f} (a^2)^{-1} \underline{f} = \begin{Bmatrix} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2/3 & 0,5\sqrt{3} \\ 2/3 & 0,5 \end{Bmatrix} =$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}$$

Ostatecznie otrzymamy: $m_F = m_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$, albo, wyrażając błąd średni boku w metrach:

$$m_F = m_0 D \sqrt{2/3}.$$

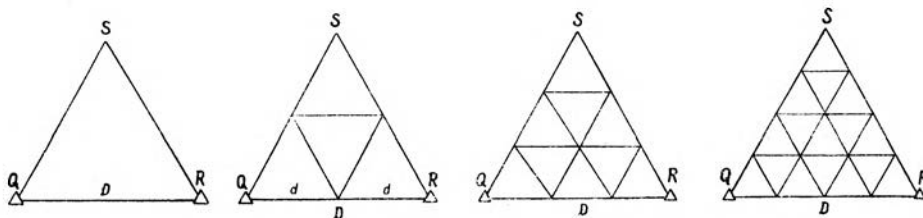
Przeciętną wartość kwadratu błędu położenia punktu w sieci w myśl wzoru podanego w § 5 obliczymy znajdując ślad krakowianu $(a^2)^{-1}$ równy $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, dzieląc go przez ilość punktów w sieci równą 1, i mnożąc przez kwadrat błędu średniego pojedynczej obserwacji. Otrzymamy więc $M^2 = m_0^2 \cdot \frac{4}{3}$, lub, przechodząc do jednostek metrycznych: $M^2 = (m_0 D)^2 \cdot \frac{4}{3}$. Wynik ten zresztą w wypadku naszej sieci, wyznaczającej jeden tylko punkt, był zgóry znany po obliczeniu wartości średniego błędu położenia tego punktu, równego $\frac{2m_0 D}{\sqrt{3}}$.

Analizy sieci większych są oczywiście z punktu widzenia techniki rachunkowej nierównie uciążliwsze w wykonaniu. Zwłaszcza żmudny jest dla wielkich krakowianów rachunek odwrotności, który w obranym przykładzie był bardzo prosty.

Natomiast jasność myśli przewodniej w analizie, spowodowana przejrzystością wysłowienia krakowianowego, stanowi cechę charakterystyczną wszystkich analiz.

§ 7) Rozważajmy sieci które wyznaczają położenie wierzchołka trójkąta foremnego QRS o znanej bezbłędnej podstawie $QR = D$ przez po-

mierzenie ze średnim błędem m_0 wszystkich kątów w n^2 trójkątach foremnych wypełniających trójkąt QRS . Zastosowanie kryteriów (4, 5, 6, 7) do tych sieci, dla $n = 1, 2, 3, 4$, które nazwiemy sieciami elementarnymi, a które przedstawia schematycznie poniższy rysunek, wykazuje że:



Rys. 53

1) Błąd średni położenia punktu najbardziej odległego od podstawy jest dla sieci elementarnych wielkością stałą, tzn. jest niezależny od ilości trójkątów n^2 ($n = 1, 2, 3, 4$) z których zbudowano sieć. Wartość tego błędu wynosi:

$$m_p = \frac{2m_0D}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

Wynika stąd że i błędy średnie elementów wielkiego trójkąta sieci, tzn. błąd średni boku QS lub RS oraz błąd średni kąta Q , S lub R nie są zależne od ilości trójkątów w sieci. Wartość średniego błędu względnego boku wielkiego sieci, jak również wartość średniego błędu kąta w sieci wielkiej wynosi $m_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$,

Błędy średnie innych punktów wyznaczanych jednocześnie przez sieć zbudowaną z trójkątów wielkich i sieć zbudowaną z trójkątów małych są w sieci zbudowanej z trójkątów małych nieco mniejsze.

Wartość przeciętna kwadratu błędu położenia punktu jest w sieci zbudowanej z małych trójkątów mniejsza niż w sieci zbudowanej z trójkątów wielkich.

2) Wpływ błędu nieprzypadkowego, czyli zmiany wartości jednej z obserwacji o wielkość dl , na deformację sieci jest dla sieci małopółkątowych (tzn. zbudowanych z małych trójkątów) dużo mniejszy niż dla sieci wielkopółkątowych (tzn. zbudowanych z wielkich trójkątów). Zmiana taka skutkuje bowiem — przy wyrównaniu metodą najmniejszych kwadratów — przesunięcie liniowe punktu najbardziej odległego od podstawy o wielkość f równą:

$$f = \frac{2 \cdot dl \cdot D}{3n} = \frac{2}{3} \cdot d \cdot dl \quad (9)$$

czyli przesunięcie liniowe proporcjonalne do długości małego boku sieci.

3) Wielkość błędu średniego średniego błędu jest w sieciach małopółk-

kątowych dużo mniejsza niż w sieciach wielkotrójkątowych. Wynosi ona mianowicie dla dowolnej sieci elementarnej, powstającej z podzielenia wielkiego boku sieci D na n odcinków (boków małych d):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{4n^2 - n + 4}} \quad (10)$$

a więc w szczególności dla

$$\begin{array}{cccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ m_m = & 0,707 \text{ m} & 0,353 \text{ m} & 0,213 \text{ m} & 0,151 \text{ m} & 0,116 \text{ m} \end{array}$$

Z wzoru (10) jest widoczne, że — przy stałej wartości błędu średniego pojedynczej obserwacji kątowej m_o — ze wzrostem ilości trójkątów w sieci elementarnej wielkość błędu średniego m_m dąży do zera.

To samo można by powiedzieć o wielkości przesunięcia liniowego punktu najbardziej odległego od podstawy spowodowanego przez popełnienie błędu nieprzypadkowego uogólniając wzór (9) dla dowolnej wartości n . Praktycznie oznacza to zdecydowaną przewagę sieci małopółkątowych nad sieciami wielkotrójkątowymi w dziedzinie „pewności“ czy „wiarygodności“ rezultatów osiągniętych w wyniku wyrównania sieci metodą najmniejszych kwadratów.

4) Przeciętną wartość stosunku kwadratu średniego błędu obserwacji po wyrównaniu do kwadratu średniego błędu obserwacji przed wyrównaniem wyraża — dla dowolnej sieci elementarnej powstającej z podzielenia wielkiego boku sieci D na n odcinków — wzór:

$$M^2 = \frac{n^2 + 3n - 2}{3n^2} \quad (11)$$

a więc w szczególności dla

$$\begin{array}{cccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ M^2 = & 0,667 & 0,667 & 0,593 & 0,542 & 0,507 \text{ itd.} \end{array}$$

Poczynając od wartości $n = 2$ wielkość M^2 jak widać stale maleje, dążąc do granicy równej $\frac{1}{3}$. Kryterium „statystyczne“ — jak je nazwaliśmy — przemawia więc, poczynając od $n = 2$, również za sieciami małopółkątowymi.

Ponieważ żaden argument nie przemawiał w przeprowadzonym badaniu sieci elementarnych za sieciami wielkotrójkątowymi, a odwrotnie, większość argumentów przekonywała nas o wyższości sieci małopółkątowych, uznać musimy ostatecznie sieci elementarne małopółkątowe za konstrukcję geodezyjną, z punktu widzenia metody najmniejszych kwadratów dokładniejszą od sieci elementarnych wielkotrójkątowych. Nie jest to zupełnie zgodne z tym co się zazwyczaj wypowiada w kołach fachowych, aczkolwiek stwierdzić należy że w literaturze fachowej wyższość sieci elementarnej czteropółkątowej przy dwóch pomiarach bazowych (tj. dwóch liniach bezbłędnych) nad siecią elementarną jednopółkątową

przy jednym pomiarze bazowym (tj. jednej linii bezbłędnej) była sygnalizowana już bardzo dawno (por. Jordan Handbuch der Vermessungskunde rp. 1916 III 156).

Nie rozważano tam jednak (1 cit) innych kryteriów po za średnim błędem względnym boku wielkiego sieci, który — z uwagi na przyjęte założenie większej ilości danych bezbłędnych w sieci czterotrójkątowej — okazał się dla sieci czterotrójkątowej mniejszy niż dla sieci jednotrójkatowej. Nie rozważano również u Jordana zagadnienia dokładności wyznaczania punktów przez zespoły sieci elementarnych, co rozważa się dalej w niniejszej pracy i co przemawia w sposób jeszcze dobitniejszy za sieciami małotrójkątowymi. Wydaje się prawdopodobne że przyczyną niewyczerpania zagadnienia u Jordana było posługiwanie się w analizie metodą spostrzeżeń zawarunkowanych, nie pozwalającą na przejrzyste ujęcie zadania w formie ogólnej.

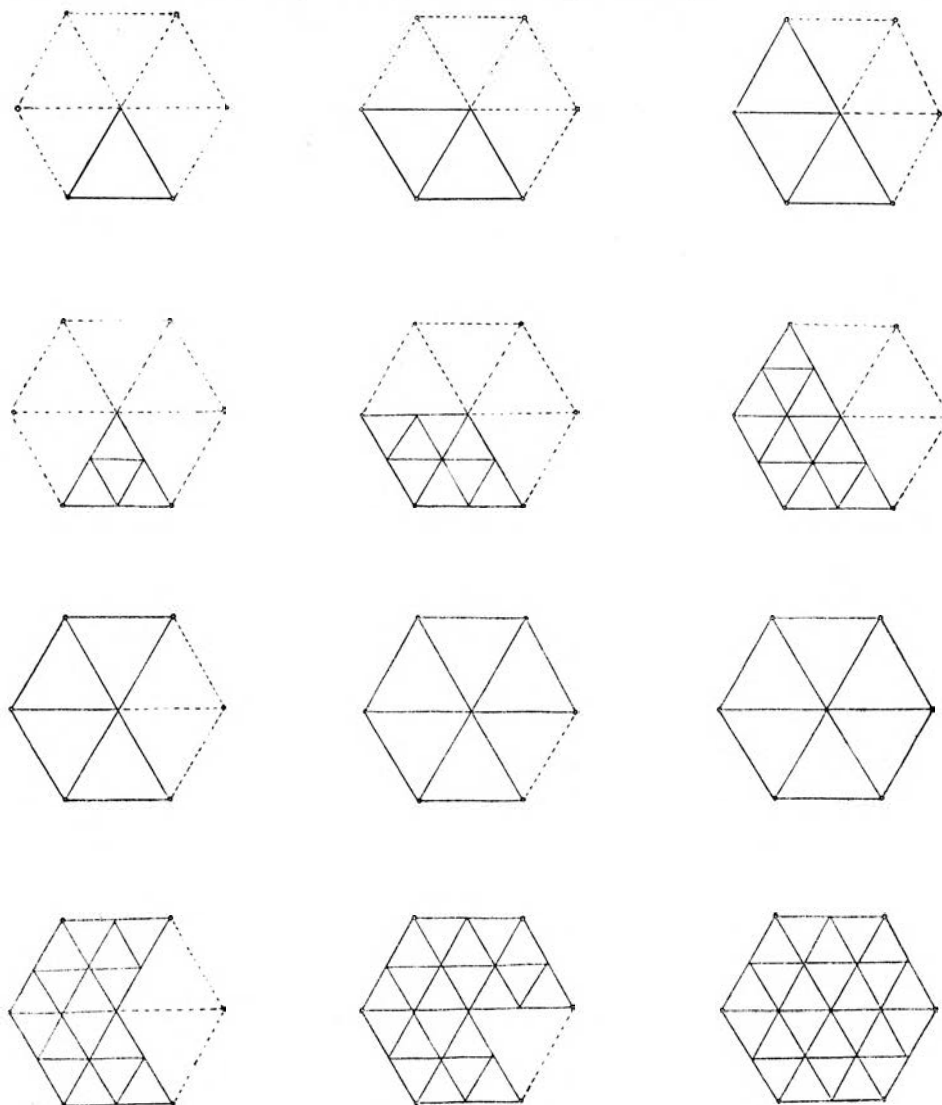
§ 8) Wyobraźmy sobie dalej, że z punktów stałych położonych na obwodzie sześciokąta foremnego wyznaczamy położenie punktu centralnego tego sześciokąta, posługując się coraz to większą ilością sąsiadujących podstaw. Powstaną w ten sposób sieci które nazwiemy sieciami „okrażającymi“ i które uważać można za zespoły sąsiadujących sieci elementarnych. Sieci okrażające zbudowane z 1-6 sieci elementarnych jednotrójkatowych, oraz sieci okrażające zbudowane z 1-6 sieci elementarnych czterotrójkątowych przedstawione są schematycznie na poniższym rysunku.

Opierając się na wyniku badania sieci elementarnych przewidzieć można że zarówno proces „okrażania“ sieci, tzn. proces opierania konstrukcji na coraz to większej ilości punktów obwodowych (widoczny przy porównaniu sieci sąsiadujących w wierszu pierwszym lub w wierszu drugim rysunku), jak i proces „zagęszczania“ sieci, tj. proces zwiększania ilości trójkątów w składowych sieciach elementarnych (widoczny przy porównaniu sieci sąsiadujących w poszczególnych kolumnach rysunku) będą zwiększać dokładność sieci. Jeżeli bowiem błąd średni położenia punktu najbardziej oddalonego od podstawy wyznaczanego z pojedynczej sieci elementarnej wynosi $\frac{2 m_0 D}{\sqrt{3}}$ tedy wyznaczając punkt centralny sześcioboku

niezależnie z dwóch (lub więcej) kolejnych sieci elementarnych, otrzymalibyśmy dwa równoważne dokładnościowo wyniki (lub większą od dwóch ilość wyników) wyznaczenia położenia punktu centralnego, z których każdy byłby dokładnościowo scharakteryzowany przez błąd średni położenia punktu równy $\frac{2 m_0 D}{\sqrt{3}}$ przy czym D oznacza długość promienia układu centralnego.

Wypośredkowując z tych różnych wyników (dwóch lub więcej) wartość najprawdopodobniejszą położenia punktu centralnego będziemy podnosić dokładność wyznaczenia go, przytym tym wydatniej: a) im więk-

szej ilości kolejnych sieci elementarnych użyjemy do wyznaczenia (proces okrążania), oraz b) im większe ilości punktów wspólnych, powodujących powstawanie w układzie spostrzeżeń nadliczbowych, znajdzie się na styku sieci tworzących zespół (proces zagęszczania).



Rys. 54

Badania przeprowadzone w opisany sposób całkowicie potwierdzają te przewidywania, wykazując np. że średni błąd położenia punktu centralnego sześcioboku będzie malał w procesie okrążania przybierając dla 1, 2, 3, 4, 5, 6 sieci elementarnych jednorójkowych (wiersz górny rysunku) wartości:

1,15 $m_o D$ 0,82 $m_o D$ 0,67 $m_o D$ 0,58 $m_o D$ 0,52 $m_o D$ 0,47 $m_o D$
 zaś dla 1, 2, 3, 4, 5, 6 sieci elementarnych czterotrójkątowych wartości:
 1,15 $m_o D$ 0,70 $m_o D$ 0,52 $m_o D$ 0,42 $m_o D$ 0,37 $m_o D$ 0,30 $m_o D$

Oznaczając przez t ilość wielkich trójkątów w sieci (tzn. ilość sieci elementarnych użytych do danej konstrukcji) można wielkość błędu średniego położenia punktu centralnego wyrazić przez następujące proste wzory:

$$\left[\begin{array}{l} \text{przy sieciach} \\ \text{jednotrójkątowych} \end{array} m_p = \frac{2 m_o D}{\sqrt{3t}} \quad \begin{array}{l} \text{przy sieciach} \\ \text{czterotrójkątowych} \end{array} m_p < \frac{2 m_o D}{\sqrt{4t}} (t > 1) \right] \quad (12)$$

Wobec stwierdzenia wybitnej przewagi sieci małopółkowych nad sieciami wielkopółkowymi w dokładności wyznaczenia położenia punktu centralnego w sieciach okrężających można by właściwie zaniechać tu stosowanie innych kryteriów, które — jak łatwo przewidzieć — również będą przemawiały za sieciami małopółkowymi. Podamy jednak zestawienie porównawcze wielkości średniego błędu dla sieci okrężających budowanych z 1, 2, 3, 4, 5, 6 sieci elementarnych. Wielkości średniego błędu wyniosą tu przy sieciach:

- a) jednotrójkątowych 0,71 m 0,35 m 0,27 m 0,22 m 0,20 m 0,18 m
- b) czterotrójkątowych 0,35 m 0,20 m 0,16 m 0,13 m 0,12 m 0,10 m
- c) dziewięciotrójkątowych 0,21 m 0,13 m 0,11 m 0,09 m 0,08 m 0,07 m

Przy okazji warto nadmienić że cecha zmniejszania się błędu średniego przy zagęszczaniu sieci jest cechą ogólną tzn. nie odnoszącą się specjalnie do typu sieci okrężających, budowanych z trójkątów foremnych, lub tp. Można mianowicie wykazać, że jeżeli jakkolwiek sieć wielkopółkową zamienimy na sieć małopółkową w drodze utworzenia w każdym trójkącie sieci wielkopółkowej nowych n^2 trójkątów przez dzielenie boków na n części, wówczas przyrost ilości spostrzeżeń nadliczbowych spowodowany przez zagęszczenie sieci nie może być mniejszy od wielkości $t(n-1)(2n-1)$, gdzie t ilość trójkątów w sieci wielkopółkowej. Ponieważ — jak widać z tego wzoru — przyrost ilości spostrzeżeń nadliczbowych przy zagęszczeniu sieci musi być liczbą dodatnią, błąd średni średniego błędu musi ulegać w tym procesie zmniejszeniu.

§ 9) Podobnie jak badaliśmy sieci składające się z zespołów sieci elementarnych opartych na wierzchołkach sześciokąta foremnego, można oczywiście badać i inne sieci „typowe“, tzn. sieci zbudowane z trójkątów foremnych przypominające spotykane w praktyce sieci geodezyjne. W pracy niniejszej bada się więc jeszcze sieci budowane z zespołów sieci elementarnych opartych o dwa punkty stałe, trzy punkty stałe tworzące trójkąt foremny itp. Badania te, jak również badania tu omówione, zilustrowane są przez wykresy elips błędów punktów wyznaczanych przez sieci.

Ponieważ wszystkie te badania wykazują przewagę sieci małopółkowych nad sieciami wielkopółkowymi, zaś ani o wyczerpaniu wszy-

stkich możliwych sieci w toku badania, ani też o ustaleniu wzoru ogólnego wyznaczającego błąd położenia dowolnego punktu mowy tu być nie może (przy założeniu przydatności praktycznej takiego wzoru), przeto poprzestaniemy na stwierdzeniu że w zakresie przeprowadzonych badań sieci małopółkątowe okazały się dokładniejsze od sieci wielopółkątowych, w związku z czym koncepcję zastępowania sieci wielopółkątowych przez sieci małopółkątowe realizowaną w geodezji polskiej od 1947 r. uznać należy z punktu widzenia analizy dokładnościowej za słuszną.

§ 10) Dla wyczerpania tematu w pracy przeprowadzono jeszcze wyrównanie i analizę dokładności dla jednej z polskich sieci triangulacyjnych powierzchniowych. Pomimo że: 1) sieć ta była daleka od poprawności kształtu (długości boków wahają się od 4 do 12 klm), 2) sieć nawiązana została do sześciu bardzo nierównomiernie rozłożonych punktów oparcia (obszar na którym położone są cztery punkty oparcia i jedyna zmierzona bezpośrednio długość stanowi około 1/8 całkowitego obszaru pokrytego przez sieć), 3) poziom obserwacji kątowych w sieci był gorszy od przeciętnego (błąd średni pomiaru kąta $2,7''$), jednak w wyniku wyrównania osiągnięto przeciętną wartość błędu średniego położenia punktu równą 5,1 cm, to znaczy nieco niższą od przeciętnej wartości błędu średniego położenia punktu 5,5 cm w niemieckich sieciach podstawowych, cytowanej w Handbuch der Vermessungskunde Jordana-Eggeria. W pracy podano wykres elips błędów dla wszystkich punktów sieci, oraz ilustrację wpływu błędów nieprzypadkowych.

Przy wyrównaniu sieci postawiono warunek minimum w postaci ogólniejszej niż to się zazwyczaj praktykuje. Założono mianowicie przyporządkowanie takich poprawek v :

- a) kątom zmierzonym w procesie obserwacji z błędem średnim m_a
- b) długościom zmierzonym w procesie obserwacji z błędem średnim m_d
- c) współrzędnym znanym z uprzedniego procesu wyrównawczego z błędami średnimi m_x m_y ,

aby suma kwadratów poprawek dzielonych przez kwadraty średnich błędów była najmniejszą:

$$\left[\frac{v}{m} \right] = \text{minimum.}$$

Tego rodzaju założenie nie narzuca więc współrzędnym punktów oparcia postulatu niezmienności w procesie wyrównania — zgodnie z niewątpliwym faktem, że współrzędne te nie są bezbłędne. Pozwala to z jednej strony uchronić dobry układ obserwacyjny od zniekształceń powodowanych przez sztuczne i niezgodne z metodą najmniejszych kwadratów założenie bezbłędności punktów nawiązania, z drugiej strony pozwala scharakteryzować dokładnościowo na zasadach ogólnych nie tylko współrzędne punktów wyznaczanych przez sieć ale, i współrzędne punktów oparcia.

Realizacja takiego założenia minimum w postaci uogólnionej wymaga:

1) Zestawienia dla każdej dokonanej w sieci obserwacji kątowej znającego nam już równania błędu obserwacji kątowej (2), które tu powtarzamy:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - B_P) & -(A_L - B_P) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v_a$$

o błędzie średnim m_a .

przy czym przez α_{obs} rozumie się zaobserwowaną wartość kąta poddaną redukcjom i przeniesioną na płaszczyznę odwzorowania.

2) Zestawienia dla każdej dokonanej w sieci obserwacji liniowej następującego równania błędu obserwacji liniowej:

$$\begin{vmatrix} dx_i & dy_i \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_k & dy_k \\ +\cos \varphi & +\sin \varphi \end{vmatrix}_2 + d_{prz} - d_{obs} = v_d$$

o błędzie średnim m_d

przyczym przez d_{obs} rozumie się zaobserwowaną długość poddaną redukcjom i przeniesioną na płaszczyznę odwzorowania, przez d_{prz} rozumie się długość obliczoną z przybliżonych współrzędnych, przez φ rozumie się kąt osiowy prostej łączącej obraz „początku” odcinka wzdłuż którego przeprowadzono pomiar tj. punkt i z obrazem „końca” tego odcinka tj. z punktem k , przez dx_i dy_i dx_k dy_k rozumie się poszukiwane poprawki współrzędnych przybliżonych, przez v_d — poprawkę obserwacyjną, wreszcie napisany szeregowo zespół czteroelementowych tabel kwadratowych zakończony wskaźnikiem $_2$ oznacza sumę iloczynów elementów położonych w tych samych kolumnach, tzn. ogólnie:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}_2 = \Sigma ac + \Sigma bd \text{ a w szczególności np. } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}_2 = 60 \text{ itp.}$$

3) Zestawienia dla każdego punktu nawiązania następujących równań błędów współrzędnych:

$$dx = v_x \text{ o błędzie średnim } m_x \quad dy = v_y \text{ o błędzie średnim } m_y$$

przyczym dx względnie v_x oznacza poszukiwaną poprawkę odciętej, zaś dy względnie v_y oznacza poszukiwaną poprawkę rzędnej punktu nawiązania.

Jeżeli błędy średnie m_x m_y dla poszczególnych punktów nawiązania nie były w sieci wyższorzędnej liczone, należy oczywiście generalizować przyjmując za m_x m_y przeciętne wartości błędów średnich współrzędnych w sieci podobnego typu.

Jeżeli istnieją obawy iż punkty geodezyjne w terenie uległy pewnym przesunięciom, zaś wielkości i kierunku tych przesunięć stwierdzić nie można, pozostaje również założyć przypadkowość tych przesunięć i przeprowadzić wyrównanie, zakładając raczej zaduże jak zamałe wielkości błędów średnich. Niema zresztą potrzeby operacji „wagowania”, tj. przypisywania a priori wielkościom wyrównywanym pewnych błędów średnich, przeprowadzać z nadmierną ostrożnością. W układzie o dużej ilości spostrzeżeń nadliczbowych operacja wagowania nie ma bowiem zbyt wiel-

kiego wpływu na efekt wyrównania: istotę wyrównania stanowi tu dobitniejsze zniekształcenie tych wielkości które sprzeczne są z układem obserwacyjnym jako całością.

4) Po zestawieniu wszystkich opisanych typów równań błędów doprowadzamy je do zwykłej przyjętej w algebrze postaci przez zrealizowanie umownych symboli (z wyjątkiem równań współrzędnych które będą już w tej postaci napisane), po czym dzielimy każde równanie przez odpowiadający błąd średni otrzymując w wyniku tej operacji „zrównoważony” układ równań błędów w typowej postaci:

$ax + by + cz + \dots + l = v$ o krakowianie współczynnikiem a od którego w ogólnie znany sposób przechodzimy do układu równań normalnych Gaussa:

$[aa]x + [ab]y + [ac]z + \dots + [al] = 0$, itd. itd. o krakowianie wsp: a^2 .

Po rozwiązaniu układu równań normalnych podstawiamy wartości niewiadomych do układu zrównoważonego równań błędów, znajdując w wyniku tego podstawienia stosunki szukanych poprawek v do odpowiadających błędów średnich m .

Suma kwadratów tych stosunków $\frac{v}{m}$ — możnaby je nazwać poprawkami względnymi — pozwoli nam wyznaczyć błąd średni jednostkowy

$m_0 = \sqrt{\left[\frac{vv}{mm} \right] : n_n}$, gdzie n_n ilość spostrzeżeń nadliczbowych w układzie

Mnożąc poprawki względne przez odpowiadające błędy średnie, wyznaczmy poprawki v i poprawimy obserwacje.

Wzory na błędy średnie niewiadomych zmianie formalnej nie ulegną.

§ 11) Czytelnikowi który zapoznał się wyłącznie z niniejszym streszczeniem wydać się może niezrozumiale dlaczego autor operuje w pracy pojęciem krakowianów, a mówiąc ogólniej pojęciem liczb zespolonych, podczas gdy treść istotnych dla zagadnienia wzorów wyrazić by przecież można w symbolice zwykłej algebry używając do tego np. wyznaczników a nawet symboli Gaussa tak rozpowszechnionych w rachunku wyrównawczym. Powodem, który skłonił autora do użycia liczb zespolonych, jest nieporównanie większa prostota dowodów słuszności używanych w pracy wzorów w oparciu o pojęcie liczb zespolonych aniżeli w oparciu o pojęcia algebry liczb pojedynczych. Aczkolwiek w tekście głównym pracy przeprowadzono dowody słuszności wzorów którymi się w pracy posługiwano, przeprowadzimy tu dowód słuszności wzoru (5) w oparciu o pojęcia rachunku krakowianowego podane na str. 147.

Pozwoli to — przy pewnym skupieniu uwagi — nawet czytelnikowi zupełnie nieobznajmionemu z algebrą liczb zespolonych ocenić korzyść stosowania tych liczb.

Przypominamy, że w zadaniu chodzi o wyznaczenie wielkości zmiany dx_i jakiej dozna i -ta niewiadoma jeżeli k -tej obserwacji nadamy przyrostek dl_k . Jeżeli kolumnę niewiadomych układu równań błędów ozna-

czyć przez $\underline{x}$, zaś kolumnę wyrazów obserwacyjnych tych równań oznaczyć przez $\underline{l}$, to znaczy założyć:

$$\underline{x} = \tau(\underline{x} \underline{y} \underline{z} \dots) = \tau(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_r) \quad \underline{l} = \tau(l_1 l_2 \dots l_k \dots l_n)$$

wówczas, jak łatwo sprawdzić w oparciu o definicję mnożenia krakowianów, układ równań normalnych Gaussa wyrazi równanie krakowianowe: $\underline{x} \underline{a}^2 = \underline{l} \underline{a}$ (wyrazy obserwacyjne rozumiemy ustawione po prawej stronie układu równań błędów). Mnożąc obie strony tego równania przez odwrotność symetrycznego krakowianu $\underline{a}^2$ która będzie również symetrycznym krakowianem $(\underline{a}^2)^{-1}$ otrzymamy: $\underline{x} \underline{a}^2 (\underline{a}^2)^{-1} = \underline{l} \underline{a} (\underline{a}^2)^{-1}$.

Po zastosowaniu do obu stron równania twierdzenia asocjatywnego będzie:

$$\underline{x}((\underline{a}^2)^{-1} \cdot \tau \underline{a}^2) = \underline{l}((\underline{a}^2)^{-1} \tau \underline{a}) = \underline{l} \underline{t} \text{ gdzie oznaczono } \underline{t} = (\underline{a}^2)^{-1} \cdot \tau \underline{a}.$$

Ponieważ z uwagi na symetrię krakowianu $\underline{a}^2$ będzie $\tau \underline{a}^2 = \underline{a}^2$ zaś iloczyn $(\underline{a}^2)^{-1} \underline{a}^2$ jest jednostką krakowianową która napisana za krakowianem nie zmienia jego wartości, otrzymamy ostatecznie $\underline{x} = \underline{l} \underline{t}$, lub, pisząc to wyraźniej:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & l_{i1} & \dots & l_{r1} \\ t_{12} & & t_{i2} & & t_{r2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t_{1k} & & t_{ik} & & t_{rk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & \dots & t_{in} & \dots & t_{rn} \end{pmatrix}$$

Mnożąc kolumnę wyrazów obserwacyjnych czyli krakowian $\underline{l}$ przez kolejne kolumny krakowianu $\underline{t}$ otrzymywać będziemy kolejne niewiadome jako funkcje liniowe wyrazów obserwacyjnych.

Wartość i -tej niewiadomej wyznaczmy tedy mnożąc kolumnę wyrazów obserwacyjnych przez i -tą kolumnę krakowianu $\underline{t}$. Wynika stąd zaraz, że jeśli nadamy k -temu wyrazowi obserwacyjnemu przyrostek dl_k wówczas i -ta niewiadoma otrzyma przyrostek $dl_k t_{ik}$. Pozostaje obliczyć wartość t_{ik} czyli wartość elementu położonego w i -tej kolumnie i k -tym wierszu krakowianu $\underline{t} = (\underline{a}^2)^{-1} \cdot \tau \underline{a}$. W myśl definicji mnożenia krakowianów będzie to jednak iloczyn i -tej kolumny krakowianu $(\underline{a}^2)^{-1}$ przez k -tą kolumnę krakowianu $\tau \underline{a}$. Ponieważ zaś elementy i -tej kolumny krakowianu $(\underline{a}^2)^{-1}$ są z uwagi na symetrię tego krakowianu, równe odpowiadającym elementom i -tego wiersza tego krakowianu, a elementy k -tej kolumny krakowianu $\tau \underline{a}$ są równe odpowiadającym elementom k -tego wiersza krakowianu $\underline{a}$, mamy ostatecznie $dx_i = dl_k (\underline{a}^2)^{-1}_{(i)} \cdot a_{(k)}$ gdzie symbol $\cdot$ oznacza mnożenie wierszowe.

Proponujemy czytelnikowi spróbować przeprowadzić dowód słuszności tego związku w oparciu o pojęcia algebry liczb pojedynczych.

„СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ ИЗ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ОТНЕСЕННЫЙ К ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ РАБОТАМ, ПРОВОДИМЫМ В ПОЛЬШЕ“. Стефан Хаусбрандт.

§ 1. В работе приводится общий метод проведения анализа точности триангуляционных сетей применительно к теории посредственных измерений, а также, отбрасывая положение о безошибочности опорных пунктов, приводится общий метод уравнивания триангуляционных сетей, в которых производились линейные и угловые измерения. В частности разбирается вопрос: что правильнее с точки зрения точности результатов — определение комплекса геодезических пунктов посредством построения сетей, состоящих из равносторонних треугольников с длинными или же короткими сторонами. Разбирается также бегло эффект уравнивания и анализа точности некоторой триангуляционной сети на территории Польши.

Перечисленные выше общие проблемы рассматриваются исключительно с точки зрения уравнивательных вычислений применительно к способу наименьших квадратов. Итак, не рассматриваются вообще вопросы перевычисления системы наблюдений с геоида на эллипсоид, применения того или другого эллипсоида, применения той или другой картографической проекции при перенесении задачи уравнивания на плоскость и т. п.

Настоящее резюме имеет целью дать возможность читателю не только ознакомиться с результатами подробных исследований, но и вникнуть в содержание и метод работы.

При проведении доказательств и построении формул в настоящей работе применялись матрицы в виде так нзв. краковянов, создателем которых является польский астроном и математик Банахович Тадеуш. Избрание краковянов вместо родственных им матриц Кели-Гамильтона, применяемых в абстрактной математике обусловлено их большей пригодностью в практике (умножение матриц параллельными рядами вместо умножения перпендикулярными) и тем, что до сих пор применение в способе наименьших квадратов краковянов пользуется большими

успехами чем применение матриц. С целью облегчить читателю, пользующемуся матрицами, ознакомиться с настоящей работой, ниже приводятся в сокращённом виде характерные особенности, отличающие краковяны от матриц: В символике краковянов i -тый столбец краковяна $\underline{a}$ обозначается символом $\underline{a}_i$, i -тую строку — $\underline{a}_{ij}$. Элемент расположенный в i -том столбце и j -той строке краковяна обозначается $\underline{a}_{ij}$.

Определение суммы и единичного краковяна аналогично как в матрицах. Единичный краковян, званый краковяном тау обозначается символом τ , при чём символ τ (без чёрточки) есть функциональный символ, означающий транспонирование краковяна. Так нпр. $\tau \begin{Bmatrix} 3 & 4 \end{Bmatrix}$ означает краковян $\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$ и т. п.

Определение произведения краковянов $\underline{a}$ на $\underline{b}$ выражается уравнением: $\underline{a}\underline{b} = \underline{c}$, где $\underline{a}_i\underline{b}_j = c_{ij} = \sum \underline{a}_{ik}\underline{b}_{jk}$.

В обычном понимании законы перестановочный и коммутативный в произведении краковянов места не имеют. Их заменяют пермутативный и ассоциативный законы: $\underline{a}\underline{b} = \tau(\underline{b}\underline{a})$ и $\underline{a}\underline{b}\underline{c} = (\underline{a}\underline{b})\underline{c} = \underline{a}(\underline{c}\tau\underline{b})$. Из последнего вытекает зависимость $\underline{a}(\underline{b}\underline{c}) = \underline{a}\tau\underline{c}\underline{b}$ (диссоциативный закон).

Для умножения на единичный краковян имеем зависимость:

$$\underline{a}\tau = \underline{a} \text{ но } \tau\underline{a} = \tau\underline{a}.$$

Определение обратного краковяна аналогично как в матрицах:

$$\underline{a}\underline{a}^{-1} = \underline{a}^{-1}\underline{a} = \tau$$

Теория краковянов и достижения применения их даны в работах Банахевича и Кохманьского.

§ 2. Возьмём произвольный угол (пусть это будет нпр. угол триангуляционной сети), определяемый точками L на левой стороне, P на правой стороне и C в вершине угла. Положим при этом, что приближённые значения прямоугольных координат точек L, P, C в произвольной системе нам известны.

Легко доказать, что если к координатам x и y точек L, P, C прибавить дифференциальные приращения $dx_L, dy_L, dx_P, dy_P, dx_C, dy_C$, то тогда угол α получит приращение $d\alpha$, так что отбросив величины 2-го порядка малости, будем иметь:

$$d\alpha = \left| \begin{matrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} dx_C & dy_C \\ (-A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{matrix} \right| \quad (1)$$

В формуле этой величина A_L означает результат деления проекции на ось абсцисс левой стороны угла (проекция отрезка CL) на квадрат

длины левой стороны угла, величина B_L — результат деления проекции на ось ординат левой стороны угла (проекция отрезка CL) на квадрат длины левой стороны угла.

По аналогии величина A_p означает результат деления проекции на ось абсцисс правой стороны угла (проекция отрезка CP) на квадрат длины правой стороны угла, величина B_p — результат деления проекции на ось ординат правой стороны угла на квадрат длины правой стороны угла.

Значения этих коэффициентов здесь дефинируются иначе, чем это принято обычно: A — пропорционально Δx , B — пропорционально Δy согласно с лексикографическим порядком. Знаки коэффициентов согласны знакам приращений.

Эта дефиниция направляющих коэффициентов, которую кратко выражают формулы:

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\cos \varphi}{d} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\sin \varphi}{d}$$

оказалась в практике и при построении формул более выгодной чем классическая.

Обозначим через α_{prz} значение угла α в триангуляционной сети, вычисленное из приближённых координат, через α_{obs} — значение этого угла, полученное из наблюдений, через v — поправку, которую нужно алгебраически прибавить к наблюденному значению угла, чтобы получить его вероятнейшее значение, т. е. удовлетворяющее условие $(vv) = \text{minimum}$.

Пусть далее dx , dy (ср. § 1) являются поправками, которые будучи алгебраически сложены со значениями приближённых координат дадут их вероятнейшие значения. С этих определений вытекает правильность уравнения:

$$\alpha_{prz} + d\alpha = \alpha_{obs} + v$$

которое получается из сравнения той же самой величины: вероятнейшего значения угла, выраженного двукратно через разные величины.

Подстановка вместо $d\alpha$ значения приведенного в § 2 позволяет написать зависимость между поправкой наблюдения и участвующими в уравнивании неизвестными dx , dy , т. е. так изв. „уравнение ошибки“ углового наблюдения или правильнее говоря его „уравнение наблюдения“. Уравнение это имеет вид:

$$\left| \begin{array}{cc} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} dx_c & dy_c \\ -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{array} \right| + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = V$$

Если кроме того положить, что ряд четырёх элементарных квадратных таблиц с индексом 1 означает сумму определителей этих таблиц, т. е. в общем виде:

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{cc} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{array} \right| = \Sigma (a_i d_i - b_i c_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и в частности нпр. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 5 + 30 = 35$

или же: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}_1 = x_1 + 2y_1 - 5x_2 - 3y_2$ и т. п.

тогда можем написать уравнение ошибки углового наблюдения в следующем виде, которым в дальнейшем будем постоянно пользоваться:

$$\left| \begin{array}{cc|cc} dx_L & dy_L & dx_p & dy_p \\ A_L & B_L & -A_p & -B_p \end{array} \right| - (A_L - A_p) - (B_L - B_p) \Big|_1 \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v \quad (2)$$

§ 3. Напишем для каждого наблюдаемого угла, или угла, который должен быть наблюдаемым в триангуляционной сети уравнение погрешности (2) подставляя вместо символов $dx_L, dy_L, dx_p, dy_p, dx_c, dy_c$ символы актуальных для данного угла поправок приближенных координат определяющих этот угол. В общем случае это будут символы dx_i, dy_i , в которых индекс i означает номер пункта триангуляционной сети, присвоенной ему на время вычислений. В частном случае, когда какойлибо из пунктов, определяющих угол, является в процессе уравнивания опорным пунктом, следует, конечно, вместо символов dx, dy подставить нуль.

После развития определителей мы получим систему линейных уравнений неизвестных поправок к приближённым координатам пунктов, определяемых в процессе уравнивания, записанную в обще принятом в алгебре виде.

Эту систему уравнений запишем в обще принятом в уравнительных вычислениях виде:

[illegible]

Величины коэффициентов при неизвестных всегда известны, величины же свободных членов известны в случае уравнивания сети и неизвестны в случае проведения анализа точности сети, форма и масштаб которой известны, но в которой не производились геодезические измерения.

Будем обозначать символом $\underline{a}$ краевые коэффициенты при неизвестных этой системы уравнений ошибок.

Таким образом будет:

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{rn} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Составление краковяна $\underline{a}$ является основным действием при анализе точности. Зная этот краковян и полагая, что угловые наблюдения в сети будут производиться со ср. кв. ошибкой одного наблюдения m_o , можно уже — пользуясь исключительно алгеброй краковянов — путём решения нескольких простых формул произвести анализ точности любой сети, опираясь на способе наименьших квадратов.

§ 4. В качестве основного критерия, характеризующего по отношению точности триангуляционную сеть будем считать:

1) Величину ср. кв. ошибки положения пункта. Величину эту для пункта, которого абсцисса является i -той и ордината k -той неизвестными в системе уравнений ошибок выражает формула:

$$m_p = m_o \sqrt{(a^2)_{ii}^{-1} + (a^2)_{kk}^{-1}} \quad (4)$$

2) Величина влияния ошибок неслучайных, т. е. величина изменения dx_i которому подвергнется i -тая неизвестная в системе, уравненной по способу наименьших квадратов, если изменить k -тое наблюдение, прибавив к нему приращение dl_k и повторно произвести уравнивание системы по способу наименьших квадратов. Величину этого изменения выражает формула*)

$$dx_i = dl_k \cdot \underline{a}_{(k)}^w (a^2)_{(i)}^{-1} \quad (5)$$

Первый критерий общеизвестен и разбора не требует. Второй позволяет определить деформацию сети в случае допущения в наблюдениях ошибки неслучайной.

Введение этого критерия кажется быть целесообразным постолько, поскольку при уравнивании систем по способу наименьших квадратов мы не всегда уверены в том, что распределение ошибок согласуется с законом Гауса-Лапласа, в то время, когда уравнивание производим полагая этот закон в основу.

Итак, когда положение некоторого пункта определяется из двух триангуляционных сетей с такой же самой ср. кв. ошибкой, правильным будет считать лучшей для определения данного пункта ту сеть, которая меньше деформирует положение пункта, в случае наличия в системе наблюдения, обременённого неслучайной ошибкой.

В качестве дальнейших критериев, не требующих уже знания краковяна $\underline{a}$, а характеризующих сеть по отношению точности, примем, опираясь исключительно на параметры n (количество наблюдений) и p (количество определяемых пунктов, при чём $2p = r$):

*) Символ w означает умножение строк. Формула (5) говорит таким образом, что изменение неизвестной равно изменению наблюдения умноженному на произведение строки краковяна $(a^2)^{-1}$, соответствующей неизвестной на строку краковяна $\underline{a}_i$ соответствующей наблюдению.

3) Величину средней ошибки ср. кв. ошибки, определяемую известной со времени Гаусса общей формулой $m_m = m : \sqrt{2n_n}$, в которой n_n есть количество избыточных наблюдений в системе. В случае триангуляционной сети, определяющей p пунктов из n угловых наблюдений имеем:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n - 4p}} \quad (6)$$

4) Среднее значение отношения квадратов ср. кв. ошибок наблюдения после и до уравнивания.

Величину эту — обозначим её символом μ^2 — равную, как это доказал А. Отрембски, отношению количества наблюдений необходимых для определения системы к количеству всех наблюдений произведенных в системе, для случая триангуляционной сети, определяющей p пунктов из n наблюдений, выражает формула:

$$\mu^2 = \frac{2p}{n} \quad (7)$$

С точки зрения целей триангуляционных работ наиболее существенным является, конечно, первый критерий. Однако, применение его в отрыве от второго и третьего критериев может привести к ошибочным понятиям.

В общем можно сказать, что первый критерий касается точности результатов, второй и третий их „реальности“ или же „уверенности“. Критерий четвёртый носит статистический характер; он отвечает на вопрос, не вдаваясь в подробности, в какой мере данная система наблюдений удовлетворяет основную цель всякого уравнивания: уменьшение ошибок наблюдений.

§ 5. Несмотря на то, что знание ср. кв. ошибок положения пунктов исчерпывающе характеризует сеть по отношению точности, в литературе более охотно рассматриваются ср. кв. ошибки более сложных функций наблюдений, уравненных по способу наименьших квадратов, в частности ср. кв. ошибки длин или же углов. Ошибки эти можно считать ошибками функции неизвестных $x, y, z, \dots$ и вычислить из общей формулы средней ошибки функции $F(x, y, z, \dots)$, приведенной Банахевичем в 1936 г. в простом виде краковянов. Обозначая символом f столбец производных функций F по неизвестным последовательно, т. е.

$$f = \tau \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \dots \right)$$

можно эту формулу написать в следующем виде:

$$m_F = m_o \sqrt{f (a^2)^{-1} f}$$

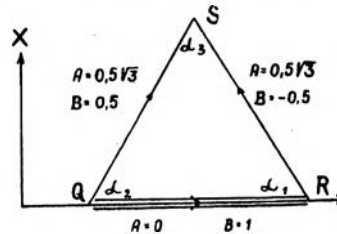
При исследовании триангуляционных сетей можно бы тоже пользоваться средним значением квадрата ошибки положения пункта в сети. Величину эту, которую обозначим через M^2 и которая в известном значении аналогична критерию Отрембского (о котором упоминалось выше), можно вычислить из следующей формулы:

$$M^2 = m_o^2 \frac{\Sigma (a^2)_{ii}^{-1}}{p}$$

в которой $\Sigma (a^2)_{ii}^{-1}$ есть сумма элементов по диагонали в краковяне $(a^2)^{-1}$. Величину эту, используя термин из алгебры матриц, можно бы назвать „следом“ краковяна..... (нем. Spur, франц. trace).

§ 6. Числовой пример

Применение приведенных формул проследим на простом примере анализа сети, возникающей из измерения трёх углов в равностороннем треугольнике, основание которого принято как свободное от ошибок. Если главную ось системы OX принять перпендикулярную к основанию треугольника, а за единицу длины принять сторону треугольника, то значения коэффициентов будут: (для стороны QR) $A = 0$, $B = 1$, (для стороны AS) $A = 0,5 \sqrt{3}$, $B = 0,5$ (для стороны RS) $A = 0,5 \sqrt{3}$, $B = -0,5$. Значения эти выписаны на сторонах треугольника на чертеже, направления сторон обозначены стрелками.



Уравнения ошибок отдельных углов, написанные в табличном виде (2) будут:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} + \alpha_{1prz} - \alpha_{1obs} = V_1$$

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} + \alpha_{2prz} - \alpha_{2obs} = V_2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & dy \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0 & -1 \end{vmatrix} + \alpha_{3prz} - \alpha_{3obs} = V_3$$

Решив определители напишем систему уравнений ошибок в виде:

$$\begin{aligned} 0,5 dx + 0,5 \sqrt{3} dy + \dots &= V_1 \\ 0,5 dx - 0,5 \sqrt{3} dy + \dots &= V_2 \\ -1 dx + \dots &= V_3 \end{aligned}$$

в системе опущены неизвестные и несущественные для анализа значения свободных членов.

Мы можем уже сейчас составить краковян $\underline{a}$, его квадрат $\underline{a^2}$ и обратный краковян $(\underline{a^2})^{-1}$. Легко проверить правильность их составления удостоверившись что:

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = \underline{a^2} \quad \text{и} \quad \underline{a^2} \cdot (\underline{a^2})^{-1} = \underline{e}$$

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} 0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ -1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{a^2} = \begin{Bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{Bmatrix} \quad (\underline{a^2})^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

1) Согласно формуле (4) отсюда вытекает, что ср. кв. ошибка положения пункта S есть:

$$m_p = m_o \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{2m_o}{\sqrt{3}} \quad \text{при чём ошибка эта выражена в принятой единице, т. е. в малой стороне сети.}$$

Желая выразить её в метрах напишем, обозначив через D длину стороны сети в метрах:

$$m_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$$

2) Для исследования влияния изменения значения угла α_1 на dl на значения координат, умножим первую строку краковяна $\underline{a}$ последовательно на строки краковяна $(\underline{a^2})^{-1}$ находя соответственно:

$dx = \frac{1}{3} dl, \quad dy = \frac{1}{3} \sqrt{3} dl.$ Отсюда $f = \frac{2}{3} dl$, где f есть линейное смещение пункта, вызванное смещением абсциссы на $\frac{1}{3} dl$ и ординаты на $\frac{1}{3} \sqrt{3} dl$. Выражая величину линейного смещения в метрах получим:

$$f_1 = \frac{2}{3} D \cdot dl,$$

причём индекс $_1$ должен напоминать, что смещение вызвано изменением значения угла α_1 на dl .

Для исследования влияния изменения значения угла α_2 на dl на значения координат умножим вторую строку краковяна $\underline{a}$ последовательно на строки краковяна $(\underline{a^2})^{-1}$, находя соответственно согласно формулы (5):

$$dx = \frac{1}{3} dl, \quad dy = -\frac{1}{3} \sqrt{3} dl.$$

Смещение по оси абсцисс такое же как предыдущее, смещение по оси ординат — такое же по величине и обратное по направлению. Величина линейного смещения f_2 будет как и предыдущее $f_2 = \frac{2}{3} D \cdot dl$.

Исследуя таким же образом влияние изменения значения угла α_3 найдём, путём умножения третьей строки краковяна $\underline{a}$ последовательно на строки краковяна $(\underline{a^2})^{-1}$ следующие значения смещений:

$dx = -\frac{2}{3} dl, \quad dy = 0.$ Величина линейного смещения, вызванного ошибкой в угле α_3 будет как и в предыдущем $f_3 = \frac{2}{3} dl$.

При $dl'' = 2''$ т. е. $dl = 0.00001$, $D = 30$ км. Смещение $f = 30$ см.

3) Средняя ошибка ср. кв. ошибки в исследуемой сети будет $M_m = \frac{m}{\sqrt{6-4}} = 0,71 \text{ м}$ (см. формулу (6), что является величиной относительно значительной и что вместе со значительным влиянием ошибок неслучайных дисквалифицирует такого рода геодезические построения, к сожалению, допускаемые некоторыми инструкциями.

4) Применение четвертого критерия (7) информирует нас о том, что в исследуемой сети среднее значение уменьшения квадрата ср. кв. ошибки наблюдения, вызванного процессом уравнивания по способу наименьших квадратов, будет $\frac{2}{3}$.

В качестве иллюстрации применения общей формулы ошибки функции неизвестных системы уравнений ошибок, приведенной в § 5 вычислим ср. кв. ошибку стороны QS . Имеем:

$$F = QS = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2} \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \cos QS = 0,5 \sqrt{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin QS = 0,5$$

Итак, будет:

$$\underline{f} = \left\{ \begin{matrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \end{matrix} \right\} \quad \text{и} \quad \underline{f} (a^2)^{-1} \underline{f} = \left\{ \begin{matrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2/3 \\ 2/3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{3}$$

Окончательно получим: $m_f = m_o \sqrt{\frac{2}{3}}$ или, выражая ср. кв. ошибку стороны в метрах

$$m_f = m_o \cdot D \sqrt{\frac{2}{3}}$$

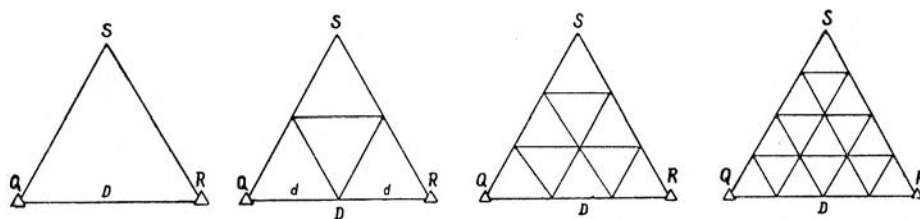
Среднее значение квадрата ошибки положения пункта в сети согласно с формулой, приведенной в § 5 вычислим, находя след краевая $(a^2)^{-1}$ равный $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, разделив его на количество пунктов в сети равное 1 и умножая на квадрат ср. кв. ошибки отдельного наблюдения. Итак получим $M^2 = m_o^2 \cdot \frac{4}{3}$ или, переходя к метрическим единицам $M^2 = (m_o D)^2 \frac{4}{3}$. Кстати, результат этот в случае нашей сети, определяющей только один пункт, был заранее известен после того как было вычислено значение ср. кв. ошибки положения этого пункта равное $\frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$.

Анализ больших сетей с точки зрения техники вычислений, конечно, является несравненно более трудоемким. Особенно трудоемким

является для больших краевых расчёт обратности, который в избранном примере был очень простым.

Следует, однако, подчеркнуть, что анализ, проводимый на основе краевых исчисления, во всех случаях отличается большой ясностью.

§ 7. Рассмотрим сети, определяющие положение вершины равно-
стороннего треугольника QRS , в котором известно безошибочное
основание $QR = D$. В сетях были измерены со ср. кв. ошибкой m_o
все углы n^2 равносоставленных треугольников, заполняющих треугольник
 QRS . Применение критериев (4, 5, 6, 7) при $n = 1, 2, 3, 4$ к этим
сетям, которые будем называть элементарными сетями (они схематично
представлены на чертеже), выказывает, что:



1) ср. кв. ошибка положения пункта наиболее удалённого от осно-
вания в элементарных сетях является величиной постоянной, неза-
висимой от количества треугольников n^2 ($n = 1, 2, 3, 4$), из которых
сеть построена.

Значение этой ошибки есть:

$$m_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

Отсюда следует, что и ср. кв. ошибки элементов большого треу-
гольника сети, т. е. ср. кв. ошибки стороны QS или RS , а также
ср. кв. ошибка угла QR или S не зависят от количества треугольни-
ков в сети. Значение средней относительной ошибки большой
стороны сети, а также ср. кв. ошибка угла в большой сети есть
 $m_o \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ср. кв. ошибки других пунктов, одновременно определяемых
сетями, построенными из малых и больших треугольников, несколько
меньше в первом случае. Среднее значение квадрата ошибки поло-
жения пункта в сети, построенной из малых треугольников, меньше
чем в сети, состоящей из больших треугольников.

2) Влияние неслучайной ошибки, т. е. изменения значения одного
из наблюдений на величину dl на деформацию сети, состоящей из
малых треугольников на много меньше чем в сетях, состоящих из

больших треугольников. При уравнивании по способу наименьших квадратов изменение такое вызывает линейное смещение пункта, наиболее удалённого от основания, на величину f равную:

$$f = \frac{2dlD}{3n} = \frac{2}{3} d dl \quad (9)$$

т. е. линейное смещение пропорционально длине малой стороны сети.

3) Величина средней ошибки ср. кв. ошибки в сетях построенных из малых треугольников на много меньше чем в сетях построенных из больших треугольников. Для любой элементарной сети, возникающей путём деления большой стороны сети D на n отрезков (малых сторон d) она имеет значение:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{4n^2 - 6n + 4}} \quad (10)$$

и следовательно для:

$n =$	1	2	3	4	5
$m_m =$	0,707 м	0,353 м	0,213 м	0,151 м	0,116 м

Из формулы (10) явствует, что — при постоянном значении ср. кв. ошибки отдельного углового наблюдения m_o — значение ср. кв. ошибки стремится к нулю с возрастанием количества треугольников в элементарной сети.

То же самое можно бы сказать о величине линейного смещения пункта, наиболее удалённого от основания, вызванного случайной ошибкой, обобщая формулу (9) для любого значения n . Практически это означает бесспорное преимущество сетей построенных из малых треугольников над сетями из больших треугольников, если речь идёт о „уверенности“ результатов, полученных в итоге уравнивания сети по способу наименьших квадратов.

4) Среднее значение отношения квадратов ср. кв. ошибок наблюдения после и до уравнивания в любой элементарной сети, возникшей путём деления большой стороны сети D на n отрезков, выражается формулой:

$$M^2 = \frac{n^2 + 3n - 2}{3n^2} \quad (11)$$

и следовательно для:

$n =$	1	2	3	4	5	
$M^2 =$	0,667	0,667	0,593	0,542	0,507	и т. д.

Как видно, начиная от $n = 2$ величина M^2 постоянно уменьшается стремясь к $\frac{1}{3}$. „Статистический“ критерий — как мы его назвали —

начиная с $n = 2$ то же говорит в пользу сетей, построенных из малых треугольников.

Поскольку в проведенном исследовании элементарных сетей ни один аргумент не выступал в пользу сетей состоящих из больших треугольников, а наоборот, большинство из них убеждало нас в преимуществе сетей построенных из малых треугольников, мы должны признать окончательно, что с точки зрения способа наименьших квадратов, элементарные сети малых треугольников являются геодезической конструкцией более совершенной.

Этот вывод не совсем согласуется с тем мнением, которое обычно принято в кругах специалистов, хотя надо подчеркнуть, что в специальной литературе преимущество элементарной сети, построенной из четырёх треугольников при двух базисных измерениях (т. е. при двух безошибочных линиях) над элементарной сетью, построенной из одинарного треугольника при одном базисном измерении (т. е. при одной безошибочной линии) сигнализировалось уже очень давно (см. Jordan: *Handbuch der Vermessungskunde* 1916 III 156).

Однако, там не рассматривалось других критериев кроме средней относительной ошибки большой стороны сети, которая, исходя из предпосылки большего количества безошибочных данных в четырёхугольной сети, оказалась меньше в четырёхугольной сети по сравнению с односторонней сетью. Не рассматривался так же у Иордана вопрос точности определения пунктов из комплексов элементарных сетей, который дальше разбирается в настоящей работе и который в ещё большей степени выступает в защиту сетей, построенных из малых треугольников.

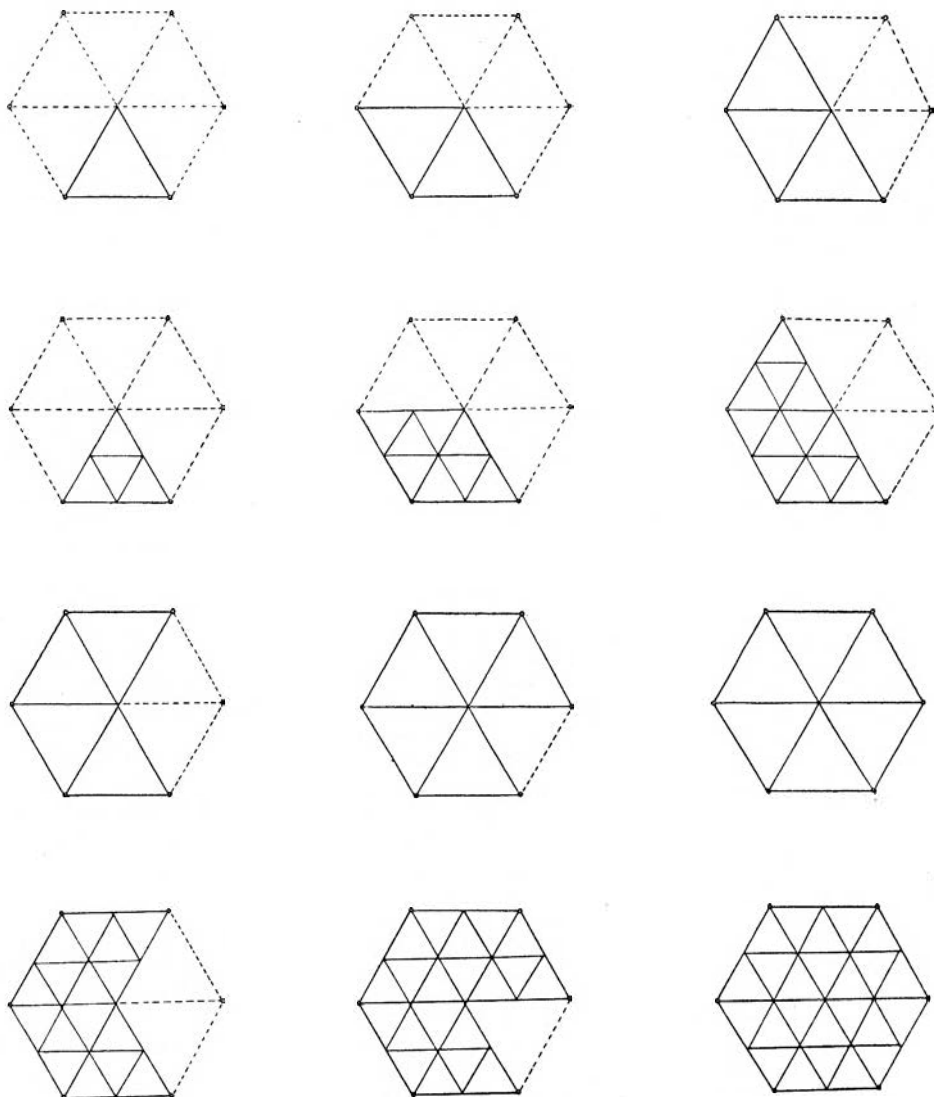
Кажется вероятным, что причиной не исчерпания вопроса у Иордана был факт применения при анализе метода условных измерений, не позволяющего достаточно ясно рассмотреть задачу в общем виде.

§ 8. Представим, что из твёрдых точек, лежащих на периметре правильного шестиугольника, определяем положение его центральной точки, пользуясь всё большим количеством смежных оснований. Таким образом возникнут сети, которые назовём „окаймляющими“ сетями и которые можно считать комплексами смежных элементарных сетей.

Окаймляющие сети, построенные из 1—6 элементарных односторонних сетей, а также окаймляющие сети, построенные из 1—6 элементарных четырёхугольных сетей представлены схематично на чертеже (54).

Опираясь на результаты исследования элементарных сетей можно предвидеть, что так процесс окаймления сети, т. е. — процесс базирования конструкции на возрастающее число точек лежащих на периметре (как это видно из сравнения смежных сетей в 1-м или 2-м ряду чертежа, как и процесс „сгущения“ сети, т. е. процесс увеличения количества треугольников в составляющих элементарных сетях (как

это видно из сравнения смежных сетей в отдельных столбцах чертежа) будут увеличивать точность сети. Ибо, если ср. кв. ошибка положения точки наиболее удалённой от основания и определяемой из одинар-



ной элементарной сеси есть $\frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$ то определяя центральную точку шестиугольника независимо из двух (или больше чем из двух) очеркдных элементарных сетей мы получили бы два (или больше двух) равносильных по точности результата определения центральной точки, каждый из которых был бы охарактеризован ср. кв. ошибкой поло-

жения точки равной $\frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$, причём D означает длину радиуса центральной системы.

Вероятнейшее значение положения центральной точки получается как среднее из отдельных определений (двух или больше), причём точность определения будет расти тем сильнее, чем:

- а) больше элементарных сетей будет использовано (процесс окаймления),
- в) больше общих точек, вызывающих в системе избыточные наблюдения, найдётся на стыке сетей, создающих комплекс (процесс сгущения).

Исследования, проведенные описанным способом, полностью подтверждают эти предвидения, доказуя напр. что ср. кв. ошибка положения центральной точки шестиугольника будет уменьшаться в процессе окаймления, принимая для 1, 2, 3, 4, 5, 6 элементарных сетей, состоящих из одинарных треугольников (верхний ряд чертежа) значение:

$$1,15 m_o D \quad 0,82 m_o D \quad 0,67 m_o D \quad 0,58 m_o D \quad 0,52 m_o D \quad 0,47 m_o D$$

а для 1, 2, 3, 4, 5, 6 элементарных сетей, состоящих из четырёх треугольников значение:

$$1,15 m_o D \quad 0,70 m_o D \quad 0,52 m_o D \quad 0,42 m_o D \quad 0,37 m_o D \quad 0,30 m_o D$$

Обозначив буквой t количество больших треугольников в сети (т. е. количество элементарных сетей, использованных для данной конструкции) можно выразить величину ср. кв. ошибки положения центральной точки следующими простыми формулами:

при одностреугольни- ковых сетях $m_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3t}}$ при четырёхугольни- ковых сетях $m_p < \frac{2m_o D}{\sqrt{4t}} (t > 1)$	(12)
--	------

В виду подтверждения выдающегося преимущества сетей, состоящих из малых треугольников над сетями построенными из больших треугольников по отношению точности определения центральной точки в окаймляющих сетях можно бы, собственно говоря, отказаться от применения других критериев, которые, как это не трудно предвидеть, тоже будут говорить в пользу сетей, построенных из 1, 2, 3, 4, 5 6 элементарных сетей. Величина средней ошибки будет здесь иметь значение соответственно:

- а) для одностреугольниковых сетей

$$0,71 \text{ м} \quad 0,35 \text{ м} \quad 0,27 \text{ м} \quad 0,22 \text{ м} \quad 0,20 \text{ м} \quad 0,18 \text{ м}$$

- б) для четырёхтреугольниковых сетей

$$0,35 \text{ м} \quad 0,20 \text{ м} \quad 0,16 \text{ м} \quad 0,13 \text{ м} \quad 0,12 \text{ м} \quad 0,10 \text{ м}$$

- в) для девятитреугольниковых сетей

$$0,21 \text{ м} \quad 0,13 \text{ м} \quad 0,11 \text{ м} \quad 0,09 \text{ м} \quad 0,08 \text{ м} \quad 0,07 \text{ м}$$

При случае стоит подчеркнуть, что уменьшение средней ошибки ср. кв. ошибки при сгущении сети является общим правилом, т. е. не относящимся специально к типу окаймляющей сети, построенной из правильных треугольников или т. п. Можно именно доказать, что если какую-либо сеть, состоящую из больших треугольников заменить сетью из малых треугольников путём разделения сторон треугольников на n частей и создания таким образом в каждом треугольнике n^2 новых треугольников, то приращение количества избыточных наблюдений, вызванное сгущением сети, не может быть меньше величины $t(n-1)(2n-1)$ где t — количество треугольников в первоначальной сети. Поскольку, как это видно из формулы, приращение количества избыточных наблюдений при сгущении сети обязательно является положительным числом, средняя ошибка ср. кв. ошибки непременно будет уменьшаться в этом процессе.

§ 9. Таким же образом, как мы исследовали сети, состоящие из комплексов элементарных сетей, опирающихся на вершины правильного шестиугольника, можно, конечно, исследовать и другие „типичные“ сети, т. е. сети построенные из правильных треугольников, напоминающие геодезические сети, встречаемые в практике. В настоящей работе исследуются ещё сети, построенные из комплексов элементарных сетей, опирающихся на две твёрдые точки, на три твёрдые точки (составляющих правильный треугольник) и т. п. Исследования эти, равно как те, которые здесь рассмотрены, иллюстрируются графиками эллипсов погрешности точек, определяемых сетями. Поскольку все эти исследования доказывают преимущество сетей состоящих из малых треугольников над сетями из больших треугольников, а об исчерпании всех возможных сетей, а также об установлении общей формулы, выражающей ошибку положения любой точки, и речи здесь быть не может (полагая практическую пригодность такой формулы), мы остановимся на утверждении, что в границах произведенных исследований сети, состоящие из малых треугольников оказались более точными, чем сети, построенные из больших треугольников. В связи с этим мысль о замене в сети больших треугольников малыми, реализуемую в польской геодезии с 1947 г., следует признать правильной с точки зрения анализа точности.

§ 10. Для исчерпания темы в работе произведено ещё уравнивание и анализ точности одной из польских площадных триангуляционных сетей. Несмотря на то, что: 1) сеть эта была далека от совершенства формы (длины сторон колеблются от 4 до 12 км), 2) сеть привязана к шести пунктам, очень неравномерно размещенным (площадь, на которой расположены четыре точки опоры и одна непосредственно измеренная сторона, является $1/8$ всей площади, покрываемой сетью), 3) уровень угловых наблюдений в сети ниже среднего (ср. кв. ошибка измеренного угла порядка $2,7''$), в результате уравнивания получено

среднее значение ср. кв. ошибки положения точки равное 5,1 см, т. е. несколько ниже среднего значения ср. кв. ошибки положения точки 5,5 см в немецких основных сетях, приведенной в *Handbuch der Vermessungskunde Jordan-Eggert*. В работе приводится график эллипсов ошибок всех пунктов сети, а также иллюстрацию влияния неслучайных ошибок.

При уравнивании сети условие минимум дано в более общем виде, чем это практикуется обычно, а именно положено в основу такие поправки v к:

- а) углам, измеренным в процессе наблюдения со ср. кв. ошибкой m_a ,
 - б) сторонам, измеренным в процессе наблюдения, со ср. кв. ошибкой m_d ,
 - в) координатам, известным из предыдущего процесса уравнивания со ср. кв. ошибками m_x m_y ,
- чтобы сумма квадратов поправок, разделенных на квадраты ср. кв. ошибок была минимум:

$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum}$$

Предпосылка такого рода не набрасывает координатам опорных пунктов постулата неизменности в процессе уравнивания, что согласуется с тем бесспорным фактом, что координаты эти не безошибочны. Оно позволяет с одной стороны сохранить хорошую систему наблюдений от деформации, вызываемой искусственным и несогласным со способом наименьших квадратов положением о безошибочности опорных точек и с другой стороны характеризовать на общепринятых основах не только координаты точек, определяемых сетью, но и координаты точек опоры.

Реализация такой предпосылки о минимум в общем виде требует:

- 1) Составления известного нам уравнения ошибки углового наблюдения для каждого произведенного в сети углового наблюдения: (2)

$$\left| \begin{array}{cc} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_c & dy_c \\ -(A_L - A) & -(B_L - B_p) \end{array} \right|_1 + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = V_a$$

со ср. кв. ошибки m_a

при чём через α_{obs} понимается наблюденное значение угла, исправленное за редукцию и приведенное на плоскость проекции.

- 2) Составления следующего уравнения ошибки линейного наблюдения для каждого произведенного в сети линейного наблюдения:

$$\left| \begin{array}{cc} dx_i & dy_i \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_k & dy_k \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{array} \right|_2 + d_{prz} - d_{obs} = v_d$$

со ср. кв. ошибкой m_d

при чём через d_{obs} — понимается наблюденное значение длины, исправленное за редукцию и приведенное на плоскость проекции,

- через d_{prz} — длина вычисления по приближенным координатам,
- через φ — осевой угол прямой, соединяющей изображение „начала“ отрезка, вдоль которого произведено измерение т. е. точку i с изображением „конца“ этого отрезка т. е. точкой k ,
- через dx_i, dy_i, dx_k, dy_k , — искомые поправки к приближенным значениям координат,
- через v_a — поправка наблюдения y , наконец записанный последовательно комплекс четырёхэлементных квадратных таблиц с индексом 2 означает сумму произведений элементов, лежащих в тех же столбцах т. е. в общем виде:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \Sigma ac + \Sigma bd \text{ и в частности нпр. } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 60$$

3) Составления для каждой опорной точки следующих уравнений ошибок координат:

$dx = v_x$ со ср. кв. ошибкой m_x $dy = v_y$ со ср. кв. ошибкой m_y
 при чём dx или v_x означает искомую поправку абсциссы,
 dy или v_y означает искомую поправку ординаты опорной точки.

Если ср. кв. ошибки m_x m_y опорных точек не были вычислены в сети высшего класса, следует, конечно, путём обобщения в качестве m_x и m_y принять средние значения ср. кв. ошибок координат из сети подобного типа.

Если существует основание считать, что геодезические пункты на местности подверглись некоторым смещениям, направления и величины которых установить нельзя, остаётся так же положить, что эти смещения носят случайный характер и произвести уравнивание, принимая скорее большие чем меньшие значения ср. кв. ошибок. Впрочем, нет необходимости операцию приписывания а priori уравниваемым величинам некоторых ср. кв. ошибок проводить с чрезмерной осторожностью, ибо в системе с большим количеством избыточных наблюдений это не имеет особого значения для эффекта уравнивания; сущность уравнивания составляет здесь крупная деформация тех величин, которые противоречат системе наблюдений как целости.

4) После составления всех описанных типов уравнений ошибок приводим их к принятому в алгебре виду путём развития условных символов 1 2 (за исключением уравнений координат, которые будут уже написаны в этом виде), разделяем каждое из уравнений на соответствующую ср. кв. ошибку получая таким образом „уравновешенную“ систему уравнений ошибок в типичном виде:

$$ax + by + cz + \dots + l = v \text{ с краевыми коэффициентами } a.$$

Далее общепринятым способом переходим к системе нормальных уравнений Гаусса: $[aa]x + [ab]y + [ab]z + \dots + [al] = 0$ и т. п. с краковяном коэффициентов $\underline{a}^2$.

Решив систему нормальных уравнений подставим значения неизвестных в систему уравновешенных уравнений ошибок, находя в итоге отношения искомых поправок v к соответствующим ср. кв. ошибкам m .

Сумма квадратов отношений $\frac{v}{m}$ (можно бы их назвать относительными поправками) позволит нам определить ср. кв. ошибку единицы веса

$$m_o = \sqrt{\left[\frac{vv}{mm} \right] : n_n}, \text{ где } n_n \text{ есть}$$

количество избыточных наблюдений в системе.

Умножая относительные поправки на соответствующие им ср. кв. ошибки мы определим поправки v и сможем исправить наблюдения. Формулы ср. кв. ошибок неизвестных формальным изменениям не подвергнутся.

§ 11. Читателю, ознакомившемуся только с настоящим резюме, может показаться не понятным почему автор пользуется в работе понятием краковянов (вообще говоря понятием матриц) в то время, когда содержание существенных для вопроса формул можно бы выразить символами обычной алгебры, используя для этой цели нпр. определители и даже символы Гаусса, так популярные в уравнительных вычислениях. Причиной является несравненно большая простота доказательства правильности использованных в работе формул, чем это имело бы место в случае применения аппарата алгебры чисел. Хотя в главном тексте работы приведены доказательства правильности использованных формул, приведём здесь доказательство формулы (5) на базе понятий о краковяновом исчислении, приведенным на стр. 191. Это позволит — при некотором сосредоточении внимания — читателю, даже совсем незнакомому с алгеброй краковянов оценить пользу их применения.

Напомним, что в данной задаче речь идёт об определении величины изменения dx_i , которому подвергнется i -тая неизвестная если, к k -му наблюдению прибавить приращение dl_k .

Если столбец неизвестных системы уравнений ошибок обозначить символом x и столбец свободных членов этих уравнений символом $\underline{l}$ т. е. положить: $x = \tau(xyz\dots) = \tau(x_1x_2\dots x_ix_r)$

$\underline{l} = \tau(l_1, l_2, l_k, l_n)$ тогда, как это легко проверить на базе определения умножения краковянов, систему нормальных уравнений Гаусса выразит уравнение $\underline{xa}^2 = \underline{la}$ (под свободными членами понимаем выражения по правой стороне системы уравнений ошибок).

Умножая обе стороны этого уравнения на обратность симметричного краковяна $\underline{a}^2$ т. е. симметричный краковян $(\underline{a}^2)^{-1}$ получим:

$$\underline{x}\underline{a}^2(\underline{a}^2)^{-1} = \underline{l}\underline{a}(\underline{a}^2)^{-1}.$$

Применив к обеим сторонам уравнения ассоциативный закон имеем:

$$\underline{x}[(\underline{a}^2)^{-1}\underline{a}^2] = \underline{l}[(\underline{a}^2)^{-1}\underline{a}^2] = \underline{l}\underline{t}$$

Поскольку в виду симметричности краковяна $\underline{a}^2$ имеет место $\underline{a}^2 = \underline{a}^2$ и произведение $(\underline{a}^2)^{-1}\underline{a}^2$ является единичным краковяном, который будучи записанным после краковяна не меняет его значения, мы получим окончательно $\underline{x} = \underline{l}\underline{t}$, или более четко:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_i \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{11} \cdot \cdot \cdot t_{12} \cdot \cdot \cdot t_{r1} \\ t_{12} \cdot \cdot \cdot t_{1i} \cdot \cdot \cdot t_{r2} \\ \vdots \\ t_{1k} \cdot \cdot \cdot t_{ik} \cdot \cdot \cdot t_{rk} \\ \vdots \\ \vdots \\ t_{1n} \cdot \cdot \cdot t_{in} \cdot \cdot \cdot t_{rn} \end{Bmatrix}$$

Умножая столбец свободных членов или краковян $\underline{l}$ последовательно на столбцы краковяна $\underline{t}$ будем получать последовательно неизвестные как линейные функции свободных членов.

Значение i -т-й неизвестной определим тогда умножая столбец свободных членов на i -тый столбец краковяна $\underline{t}$. Отсюда следует, что если к k -му свободному члену прибавить приращение dl_k то i -тая неизвестная получит приращение $dl_k t_{ik}$. Остается вычислить значение t_{ik} т. е. значение элемента, лежащего в i -том столбце и k -той строке краковяна $\underline{t} = (\underline{a}^2)^{-1} \cdot \underline{a}$. Согласно определению умножения краковянов это будет, однако, произведение i -того столбца краковяна $(\underline{a}^2)^{-1}$ на k -тый столбец краковяна $\underline{a}$. Поскольку элементы i -того столбца краковяна $(\underline{a}^2)^{-1}$ являются, в виде его симметричности, равными соответствующим элементам i -той строки этого краковяна и элементы k -того столбца краковяна $\underline{a}$ равными соответствующим элементам k -той строки краковяна $\underline{a}$, имеем окончательно

$$dx_i = dl_k (\underline{a}^2)^{-1}_{(i)} \cdot a_{(k)},$$

где символ $\cdot$ означает множение строк.

Предлагаем читателю попытаться произвести доказательство правильности этой зависимости на базе понятий простой алгебры, без применения краковянов.

**A COMPARATIVE ANALYSIS OF THE ACCOURACY OF LARGE-
TRIANGLE AND SMALL-TRIANGLE TRIANGULATION NETS,
CONNECTED WITH SURVEYING IN POLAND
By STEFAN HAUSBRANDT**

S u m m a r y

§ 1) The work presents a general method of analyzing the accuracy of triangulations nets, based upon the theory of indirect observations as well as a general method of compensating accidental errors of measurements in triangulation nets with linear and angular measurements with no assumption of the errorlessness of the junction points. In particular the question is considered whether, from the point of view of the accuracy of the results, it is more legitimate to determine the group of geodetic points by forming nets of regular triangles of short or long sides, that is to say, by assuming „small-triangle“ or „large-triangle“ nets. Cursorily discussed is also the compensation and analysis of the accuracy of a certain triangulation net in Poland.

The above general problem are considered only from the point of view of compensating computation based upon the method of least squares. Thus the problems loosely connected with the subject are not discussed at all; e. g., that of the transformation of observation systems from a geoid to an ellipsoid, that of applying some ellipsoid or other, that of accepting some map projection or other for the transfer of a compensation problem upon a plane, etc., etc.

The present summary aims at enabling the reader not only to become acquainted with the results of a detailed investigation but also grasp the essence and method of it.

For the demonstration and the deduction of formulae in the present work group numbers called cracovians were used whose author is a Polish astronomer and mathematician Tadeusz Banachiewicz. Cracovians were given preference to matrices of Cayley-Hamilton's, applied in abstract mathematics, both for their greater practical suitability (the multiplication of group numbers in parallel and not vertical rows) and for

their hitherto greater achievements in the method of least squares. To help the reader familiar with matrices become acquainted with the present work we summarize here the most essential features with which cracovians differ from matrices. In cracovians the i -th column of a group number denoted by $\underline{a}$ is denoted by $\underline{a}_i$, while the i -th row of this number by $\underline{a}_i$. The element situated in the i -th column and in the j -th row of a group number (of a cracovian) denoted by $\underline{a}$ is denoted by $\underline{a}_{ij}$. The definition of addition and that of an individual number are in cracovians like those in matrices. The individual number called the cracovian tau is denoted by $\underline{\tau}$, the symbol τ (not underlined) is a functional symbol standing for the transposition of a group number, e.g., $\tau\{3\ 4\}$ denotes the cracovian $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ etc. The definition of the multiplication of the cracovian $\underline{a}$ by the cracovian $\underline{b}$ is expressed by the equation.

$$\underline{a} \underline{b} = \underline{c}$$

$$\text{when } \underline{a}_i \underline{b}_j = c_{ij} = \sum a_{ik} b_{jk}$$

effecting the non-existence in the cracovian product of commutativity and associativity in the ordinary sense of these terms. They are replaced by basic relations

$$\underline{ab} = \tau(\underline{ba}) \text{ and } \underline{abc} = (\underline{ab}) \underline{c} = \underline{a}(\underline{c} \cdot \underline{\tau b})$$

called a permutation theorem and an associative theorem respectively.

It follows from the latter relation that

$$\underline{a}(\underline{bc}) = \underline{a} \cdot \underline{\tau c} \cdot \underline{b}$$

(a dissociative theorem). For multiplications by a group number we have

$$\underline{a} \cdot \underline{\tau} = \underline{a}$$

but

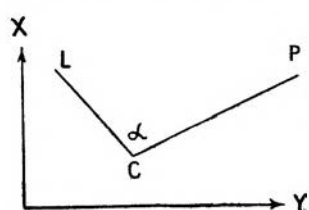
$$\underline{\tau} \cdot \underline{a} = \underline{\tau a}.$$

The definition of the inverse $\underline{a}^{-1}$ is like that in matrices

$$\underline{a} \underline{a}^{-1} = \underline{a}^{-1} \underline{a} = \underline{\tau}.$$

The theory and the achievements of cracovians are presented in the works of Banachiewicz and Kochmański.

§ 2) Let us consider any angle Δ (e. g., an angle in a triangulation net) determined by point L situated on its left side, point P situated on



its right side and point C situated in the vertex of the angle. We assume here that we know the approximate values of the rectangular coordinates of points LPS in any system. It is easy to demonstrate that if points LPC are given slight increases denoted by $dx_L dy_L dx_P dy_P dx_C dy_C$ respectively, the angle α will acquire an increase of $d\alpha$ the amount of which — the powers

higher than the first of the increases dx dy being disregarded — will be expressed by the following formula

$$d\alpha = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -(A_L A_P) - (B_L B_P) \\ dx_C & dy_C \end{vmatrix} \quad (1)$$

In this formula the quantity A_L denotes the quotient from the division of the projection of the left side of the angle, i. e., the projection of CL on the axis of abscissae by the square of the length of the left side of the angle; the quantity B_L denotes the quotient from the division of the projection of the left side of the angle on the axis of ordinates by the square of the length of the left side of the angle. Similarly the quantity A_P denotes the quotient from the division of the projection of the right side of the angle, i. e., the projection of CP on the axis of abscissae by the square of the length of the right side of the angle, while the quantity B_P denotes the quotient from the projection of the right side of the angle on the axis of ordinates by the square of the length of the right side of the angle. Thus the values of these „directional coefficients“ are defined here in a way different from what is generally accepted: A is proportional to Δx , and B to Δy in accordance with lexicographical order, the signs of the coefficients agreeing with those of the increases. This definition of directional coefficients, briefly stated in the equations

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\cos \varphi}{d} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\sin \varphi}{d}$$

has proved both in practice and for the deduction of formulae more convenient than the classical definition.

Let us denote by α_{prz} the value of the angle α in a triangulation net as ascertained from the approximate coordinates, by α_{obs} its value as obtained from observation, and by v the correction to be added algebraically to the value of the angle as observed in order to obtain its most probable value, i. e., one satisfying the condition $[vv] = \text{the minimum}$. Also let dx and dy (cf. § 2) be corrections which, added algebraically to the approximate values of the coordinates, are to convert them into the most probable values. It follows from these definitions that the equation

$$\alpha_{prz} + d\alpha = \alpha_{obs} + v,$$

formed by equating the same value: the most probable value of the angle expressed twice by different quantities, is valid. The substitution of the value given in § 1 for $d\alpha$ will enable us to lay down the relation between the correction of observation and the unknowns dx and dy mediating in the compensation, or the so-called „equation of error“ for angular observation, or, more aptly, its „equation of observation“. The following is its representation

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) - (B_L - B_P) \end{vmatrix} + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v$$

Moreover, if we accept that a group of square tables of four elements each, terminated in the subindex i , denotes the sum of determinants of these tables, that is to say, generally

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}_i = \sum a_i d_i - \sum b_i c_i$$

($i = 1, 2 \dots n$)

and in a particular case, e. g.,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}_1 = 5 + 30 = 35,$$

or also

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}_1 = x_1 + 2y_1 - 5x_2 - 3y_2 \text{ etc., etc.,}$$

we can then write the equation of error for angular observation in the following form

$$\begin{vmatrix} dx_L & dn_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ (A_L - A_P) & (B_L - B_P) \end{vmatrix}_1 + \text{prz} + \text{obs} = v \quad (2)$$

which we shall always use from now on.

§ 3) Let us write an equation of error (2) for any angle observed or to be observed in a triangulation net replacing $dx_L dy_L dx_P dy_P dx_C dy_C$ with the symbols of the correctoins corresponding to the given angle, of the approximate coordinates of the points determining this angle. Generally they will be the symbols $dx_b dy_b$, i denoting the number of a point in the triangulation net assigned to this point within the computation. In a particular case when any of the points determining the angle is constant in the process of compensation, zeroes should, of course, be substituted for $dx dy$. The multiplication of the determinants carried through, we obtain a system of linear equations in respect of the corrections, unknown in the problem, of the approximate coordinates of the points determined in the process of compensation. The system will be written in the form generally received in algebra.

In accordance with the custom well-established in the compensating computation we symbolize this system of equations as follows

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z \dots + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \dots + l_2 &= v_2 \\ \dots &\dots \\ a_n x + b_n y + c_n z \dots + l_n &= v_n \end{aligned}$$

(n equations, r unknown quantities).

In the system the amounts of the coefficients by the unknowns are always known in the problem, whereas the values of the free terms are known in case of the adjustment of the net and unknown in case of analyzing the accuracy of a net the form and the scale of which are given without the net itself having been surveyed.

We shall denote by $\underline{a}$ the cracovian of the coefficient by the unknowns of this system of equations of error. Thus, to write it quite clearly.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot & \cdot & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & r_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot & \cdot & r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & \cdot & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdot & \cdot & a_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdot & \cdot & a_{rn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

The composition of the cracovian $\underline{a}$ is a fundamental operation for an analysis of accuracy. If we know this cracovian, and angular observations in the net are made with the mean error of a single observation m_0 , we can — by applying the algebra of cracovians only — make an analysis of accuracy, based on the method of least squares, of an arbitrary net by means of realizing a few simple formulae.

§ 4) As basic criteria characterizing triangulation net in respect of accuracy we shall consider:

1) Value of the mean error of the position of a point.

For a point whose abscissa and ordinate are, respectively, the i -th and the k -th unknowns in the system of equations of error this value is expressed by the formula

$$m_p = m_0 \sqrt{(\underline{a}^2)^{-1}_{ii} + (\underline{a}^2)^{-1}_{kk}} \quad (4)$$

2) Value of the effect of non-accidental errors, i.e., the value of the change dx_i to be undergone by the i -th unknown quantity in a system adjusted by the method of least squares, if we change the k -th observation by giving it the suffix dl and again adjust the system by the method of least squares. The value of this change is expressed by the formula*).

$$dx_i = dl_k \cdot \underline{a}_{(i)} \wedge (\underline{a})^{-1}_{(i)} \quad (5)$$

The first criterion is generally known and needs no discussion. The other makes it possible to determine the deformation of the net if an accidental error of observation is involved. To introduce this criterion seems to be appropriate inasmuch as in the system adjusted by the method of least squares we cannot always be sure that the distribution of errors agrees with Gauss and Laplace's law, and we make our adjustment on this assumption. If, therefore, two triangulation nets determine the position of a point with the same mean error, it is right to prefer, in order to determine the given point, one that will deform the position of the point less if there is an observation burdened with an „unlucky“ non-accidental error in the system.

*) The symbol $\wedge$ denotes linear multiplication. So the formula (5) simply states that a change in the unknown is equal to one in observation multiplied by the product of the row of the cracovian $(\underline{a}^2)^{-1}$ corresponding in succession to the unknown by the row of the cracovian $\underline{a}$ corresponding in succession to the observation.

As other criteria which require no knowledge of the cracovian a , but characterize the net in respect of accuracy exclusively on the basis of the parameters n (number of observations) and p (number of points determined $2p$ being equal to r), we shall accept.

3) Value of the mean error of mean error, defined by the general formula

$$m_m = m : \sqrt{2n_n}$$

known already since the time of Gauss, in which n_n denotes the number of supernumerary observations in the system, and which in the case of a triangulation net determining p points from n angular observations will assume the form

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n - 4p}} \quad (6)$$

4) Average value of the relation of the square of the mean error of observation after adjustment to the square of the mean error of observation before adjustment.

In the case of the triangulation net determining p points from n observations, this quantity — let us denote it by the symbol M^2 — equal, as it has been recently demonstrated in the cracovian calculus by A. Otrębski, to the relation of the number of observations indispensable for the determination of the system to the number of all observations made in the system, will be expressed by the formula

$$M^2 = \frac{2p}{n}. \quad (7)$$

From the point of view of the object of triangulation work the first criterion is the most important. To apply it, however, detached from the second and the third criteria may be misleading. It may be stated in general terms that the first criterion concerns the accuracy of the results, while the others their „actuality“ or „reliableness“. The fourth criterion is of statistical character: without going into details it states to what degree the given system of observations achieves the principal end of all adjustment: the reduction of errors of observation.

§ 5) Although the knowledge of the mean errors of the position of the points m characterizes a net in terms of accuracy in an exhaustive manner, the discussion of the mean errors of the more complicated functions of observations adjusted by the method of least squares, and of the mean errors of the length or angles is on the whole given preference in literature. These errors may be considered as those of the functions of the unknowns $xyz...$ and calculated by means of the general formula of the error of the function $F(x, y, z...)$, presented in a simple cracovian form by Banachiewicz in 1936. The column of the deri-

vative F in relation to successive unknowns being denoted by $\underline{f}$, i. e., clearly,

$$\underline{f} = \tau \left(\frac{\alpha F}{ax}, \frac{\alpha F}{ay}, \frac{\alpha F}{az} \dots \right),$$

this formula has the form

$$m_F = m_o \sqrt{\underline{f} (\underline{a^2})^{-1} \underline{f}}.$$

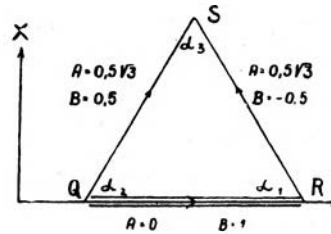
In examination of triangulation nets the average value of the square of the error of the position of a point in the whole net could also be made use of. This quantity, which we shall denote by M^2 , and which, in a sense, constitutes an analogy to Otrębski's statistical criterion mentioned above, may be calculated by means of the following formula

$$M^2 = M_o^2 \frac{\Sigma (\underline{a^2})_{ii}^{-1}}{P}$$

where we designate the sum of diagonal elements in the cracovian $(\underline{a^2})^{-1}$ by $\Sigma (\underline{a^2})_{ii}^{-1}$. Borrowing a term from the algebra of matrices we could call this quantity „the trace“ of the cracovian.

§ 6) Numerical example.

We illustrate the application of the formulae presented by a simple example of the analysis of a net found by measuring three angles in a regular triangle whose base QR is accepted as errorless. If the main axis of the system OX is drawn vertically to this base and a side of the triangle is accepted as the unit of length the values of the directional coefficients will amount to $A = 0, B = 1$ (for the side QR), $A = 0,5 \sqrt{3}, B = 0,5$ (for the side RS) and $A = 0,5 \sqrt{3}, B = -0,5$. These values we have written down by the sides in the figure above marking the directions of the sides with arrows. Here are the equations of error for the angles, written in a tabular form



$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} dx & dy \\ -0.5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1prz} - \alpha_{1obs} = v_1$
$\begin{vmatrix} dx & dy \\ 0.5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \alpha_{2prz} - \alpha_{2obs} = v_2$
$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} dx & dy \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \alpha_{3prz} - \alpha_{3obs} = v_3$

Realizing the multiplications of the determinants we write a system of equations of error in the clear form of

$$\begin{aligned} 0.5 \, dx + 0.5 \, 3 \, dy + \dots &= v_1 \\ 0.5 \, dx - 0.5 \, 3 \, dy + \dots &= v_2 \\ -1 \, dx + \dots &= v_3 \end{aligned}$$

where the values of the free terms, unknown and irrelevant to our analysis, are left out.

Now we can already write the cracovian $\underline{a}$, form its square $\underline{a}^2$ and the inverse of this square, i. e., the cracovian $(\underline{a}^2)^{-1}$. It is easy to verify that their formation is correct by stating that

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = \underline{a}^2 \quad \text{and} \quad \underline{a}^2 \cdot (\underline{a}^2)^{-1} = \underline{\tau}.$$

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ -1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{a}^2 = \begin{Bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{Bmatrix} \quad (\underline{a}^2)^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

1) Hence it follows according to formula (4) that the mean error of the position of point S will amount to

$$m_p = m_o \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{2m_o}{\sqrt{3}}$$

this error being expressed in the unit chosen for the computation the short side of the net. To express it in metres we write eventually

$$m_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}}$$

denoting by D the length of the side of the net, expressed in metres.

2) To examine how a change by dl in the value of the angle α_1 will effect the values of the coordinates let us multiply the first row of the cracovian $\underline{a}$ by the successive rows of the cracovian $(\underline{a}^2)^{-1}$ finding accordingly

$$dx = \frac{1}{3} d\alpha_1 \quad dy = \frac{1}{3} dl$$

whence

$$f = \frac{2}{3} dl,$$

where by f we have denoted the linear shift of the point, caused by the shifting of the abscissa and the ordinate by $\frac{1}{2} dl$ and by $\frac{1}{3} 3 dl$ respectively. Expressing the value of the linear shift in metres we obtain

$$j_1 = \frac{2}{3} D \cdot dl$$

the subindex $_1$ being meant to remind us of the shift having been caused by a change by dl in the value of angle α_1 .

To examine how a change by dl in the value of angle α_2 will effect the values of the coordinates let us multiply the second row of the cracovian $\underline{a}$ by the successive rows of the cracovian $(\underline{a}^2)^{-1}$, finding, according

to formula (5) the change in the first unknown quantity dx and that in the second unknown quantity dy . There are

$$dx = \frac{1}{3} dl \quad \text{and} \quad dy = -\frac{1}{3} \sqrt{3} dl.$$

The shift on the axis of abscissae is evidently the same as before, that on the axis of ordinates is the same in extent but opposite in direction. The extent of the linear shift — let us denote it now by f_2 — will therefore be

$$f_2 = \frac{2}{3} D dl$$

as before.

Examining the values of angle α , in the same way we find, by multiplying the third row of the cracovian a by the successive rows of the cracovian a by the successive rows of the cracovian $(a^2)^{-1}$, the following values of the shifts

$$dx = -\frac{2}{3} dl \quad \text{and} \quad dy = 0.$$

The linear shift caused by the error of angle α_3 will amount therefore to

$$f_3 = \frac{2}{3} D dl$$

as before. If $dl = „2“$, i. e. $dl = 0.00001$ and $D = 30$ km, it would amount to 30 cm.

3) The mean error of mean error in the net examined will amount to

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{6-4}} = 0,71 m$$

(cf. formula (5)), which, of course, is comparatively a very large value and together with the large value of the effect of the non-accidental errors disqualifies geodetic constructions of this kind, unfortunately allowed by some regulations on surveying.

4) The application of the fourth criterion (7) will inform us that in the net under examination the average value of the decrease in the square of the error of observation caused by the process of adjustment by the method of least squares will amount to $\frac{2}{3}$.

As an illustration of the application of the general formula of the functions of the unknowns of the system of equations of error, presented in § 5, we calculate the mean error of the side QS .

$$F = QS = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2}$$

whence

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos QS = 0,5 \sqrt{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin QS = 0,5$$

So

$$f = \begin{Bmatrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

and

$$\underline{f} \cdot (\underline{a}^2)^{-1} \cdot \underline{f} = \begin{Bmatrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,5 \sqrt{3} \\ 0,5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Eventually

$$m_F = m_o D \frac{2}{3},$$

or, to express the mean error of the side in metres,

$$m_F = m_o D \frac{3}{2}.$$

The average value of the square of the error of the position of a point in a net in accordance with the formula presented in § 5 will be calculated by finding the trace of the cracovian $(\underline{a}^2)^{-1}$ equal to $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, by dividing it by the number of points in the net equal to 1, and by multiplying by the square of the mean error of a single observation. The result will be

$$M^2 = m_o^2 \cdot \frac{4}{3},$$

or, switching off to metrical units,

$$M^2 = (m_o D)^2 \frac{4}{3}.$$

In the case of our net, which determines one point only, this result was anticipated when the value of the mean error of the position of this point, equal to

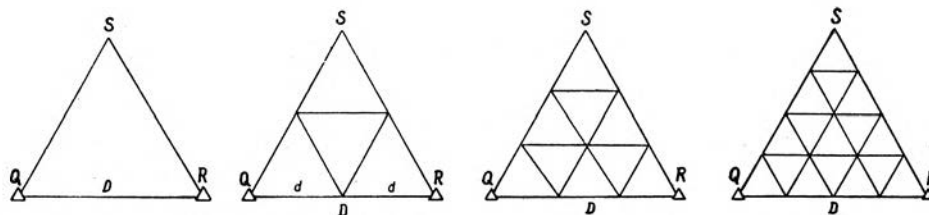
$$\frac{2 m_o D}{\sqrt{3}},$$

was calculated.

To analyze larger nets is of course incomparably more difficult from the point of view of the technique of the computation. Particularly unhandy for large cracovians is the computation of the inverse, which in our illustration was very simple, while the clarity of the guiding idea in the analysis due to the lucidity of cracovian expression is characteristic of all analyses.

§ 7) Let us consider the nets determining the position of the vertex of regular triangle QRS , of which errorless base $QR = D$ we know, by measuring, with the mean error m_o , all angles in n^2 regular triangles filling up triangle QRS . The application of criteria (4, 5, 6, 7) to these nets — n being equal to 1, 2, 3 and 4 respectively — which we shall call ele-

mentary nets, and which are presented schematically in the figure below, shows that.



1) The mean error of the position of the point most distant from the base is a constant in elementary nets, i. e., it does not depend on the number of triangles n^2 ($n = 1, 2, 3, 4$) of which the net is constructed. The value of this error amounts to

$$m_p = \frac{2m_o D}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

It follows hence that the mean errors of the large triangle of the net, i. e., the mean error of the side QS or RS and that of angle Q, S or R does not depend on the number of triangles in the net either. The value of the mean error of the long side of the net as well as that of the mean error of the angle in the large net amounts to

$$m_o \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

The mean errors of the other points determined at the same time by a net constructed of large triangles and one constructed of small triangles are somewhat smaller in a net constructed of small triangles.

The average value of the square of the error of the position of a point is smaller in a net constructed of small triangles than in one constructed of large triangles.

2) The effect of the non-accidental error, or of a change by the value dl in the value of one of the observations, upon the deformation of the net is much smaller in small-triangle nets (i. e., constructed of small triangles) than in large-triangle nets (i. e., constructed of large triangles), since such a change results — for adjustment by the method of least squares — in the linear shift of the point most distant from the base by the quantity f , equal to

$$f = \frac{2 \cdot dl \cdot D}{3n} = \frac{2}{3} \cdot d \cdot dl$$

that is to say, the linear shift proportional to the length of the short side of the net.

3) The value of the mean error of mean error is much smaller in small-triangle nets than in large-triangle nets, viz., in an arbitrary elementary net, formed by the division of the long side of the net D into n parts (short sides d), it amounts to

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{4n^2 - 6n + 4}}$$

so in particular

for $n =$	1	2	3	4	5
m_m	= 0.707 m	0.353 m	0.213 m	0.151 m	0.116 m.

It is obvious from formula (10) that, the value of the mean error of a single angular observation being constant, as the number of triangles in an elementary net grows, the value of the mean error tends to become zero.

The same may be said about the extent of the linear shift of the point most distant from the base, caused by a non-incidental error, generalizing formula (9) for an arbitrary value of n . Practically this means a decided superiority of small-triangle nets over large-triangle ones from the point of view of the „reliableness“ and „credibility“ of the results obtained from the adjustment of a net according of the method of least squares.

The average values of the relation of the square of the mean error of observation after adjustment to the square of the mean error before adjustment is expressed — for an arbitrary net formed by dividing the long side of the net D into n parts — by the formula

$$M^2 = \frac{n^2 + 3n - 2}{3n^2} \quad (11)$$

thus in particular

for $n =$	1	2	3	4	5	
M^2	= 0.667	0.667	0.593	0.542	0.507	etc.

Beginning with the value $n = 2$ the value of M^2 diminishes constantly tending to the limit equal to $\frac{1}{3}$. The statistical criterion — as we have called it — also supports, beginning with $n = 2$, small-triangle nets.

Since no argument in our examination of elementary nets has supported large-triangle nets, and, on the contrary, most arguments have convinced us of the superiority of small-triangle nets, we must ultimately and from the point of view of the method of least squares, regard elementary small-triangle nets as constructions geodetically more accurate than elementary large-triangle nets. This does not quite agree with what is usually maintained by experts although it must be said that in the literature on the subject the superiority of the elementary four-triangle net with two base measurements (i. e., two errorless lines) over the elementary one-triangle net with one base measurement (i. e., one

errorless line) was signalized long ago (cf. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, e. g., the 1916 edition, Vol. III, p. 156).

No more criteria were however discussed there (l. cit.) than the mean relative error of the long side of a net, which error — as more correct data were assumed in a four-triangle net — proved smaller in a four-triangle net than in a one-triangle one. Neither did Jordan discuss the problem of the accuracy of the determination of points by sets of elementary nets, which is discussed below and which supports small-triangle nets in a still more striking manner. Jordan seems not to have exhausted the problem because he used in his analysis the method of conditional observations, which admits no clear treatment of the problem in a general form.

§ 8). To continue our discussion let us imagine that from constant points situated on the circumference of a regular hexagon we fix the central point of this hexagon with the help of a growing number of neighbouring bases. Nets thus obtained which we shall call „encompassing“, can be regarded as sets of neighbouring elementary nets. Encompassing nets formed of 1 to 6 elementary one-triangle nets as well as those formed of 1 to 6 elementary four-triangle nets are schematically represented in the figure on page 222.

In the light of the findings of the examination of elementary nets it may be anticipated that both the process of „encompassing“ the net, i. e., that of basing the construction on a growing number of circumferential points (as it follows from a comparison of nets of the upper row with those facing them in the lower row in the figure above (and the process of the „inspissation“ of the net, i. e., that of increasing the number of triangles in the component elementary nets) as it follows from a comparison of the nets in every two neighbouring columns in the figure above will increase the accuracy of the net. For, if the mean error of the position of the point most distant from the base, determined from a single elementary net amounts to

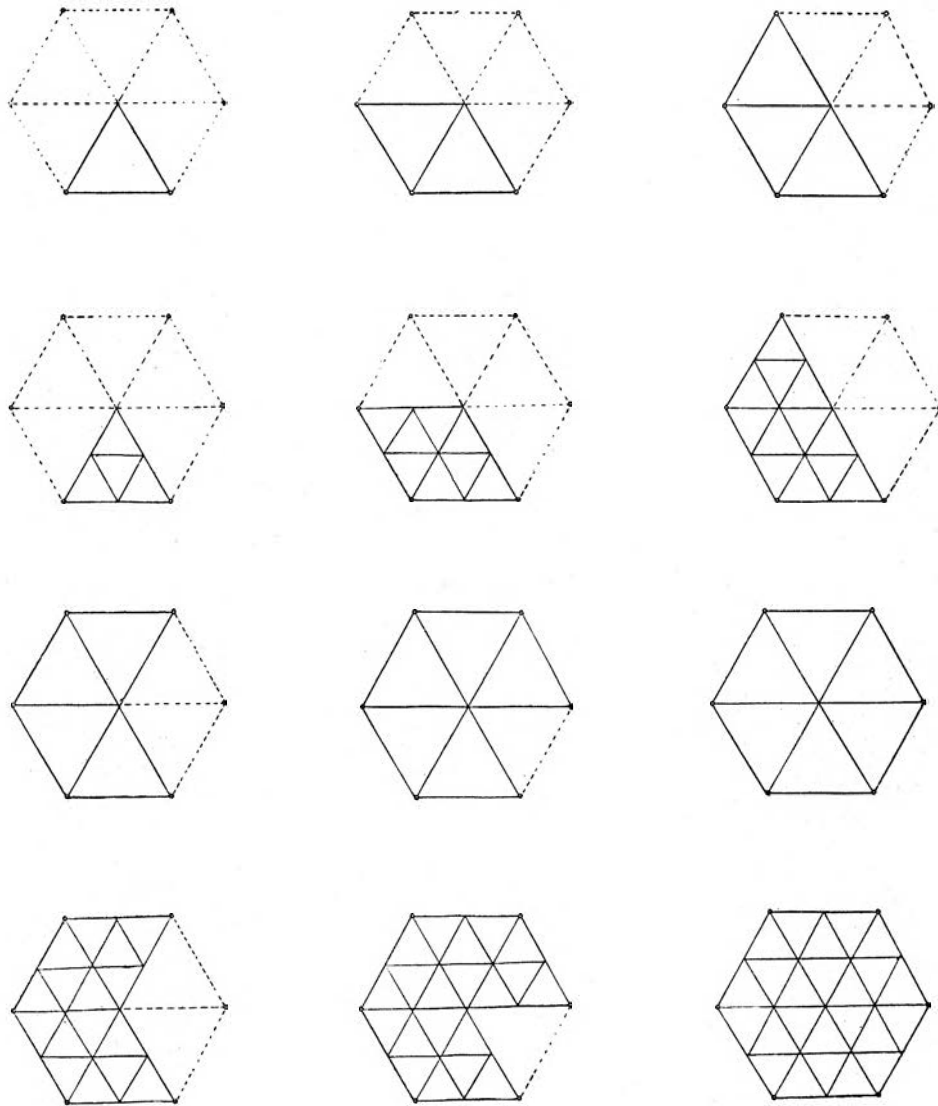
$$\frac{2 m_o D}{\sqrt{3}},$$

then, when fixing the central point of the hexagon independent from 2 (or more) successive elementary nets, we should obtain 2 (or more) of the fixing of the position of the central point, both (or all) equivalent in terms of accuracy, of which either would be characterized in the same terms by the mean error of the position of the point, equal to

$$\frac{2 m_o D}{\sqrt{3}},$$

D denoting the length of the radius of the central system.

By calculating from these (two or more) different results the most probable value of the position of the central point we shall increase the accuracy of its determination, and the more so a). the larger the number of successive elementary nets we shall use for the determination (the pro-



cess of encompassing), and, b). the larger the number of common points resulting in supernumerary observations in the system will be on the line of contact of the nets forming the system (the process of inspissation).

Examinations made according to the method described wholly confirm this anticipation, by proving, e. g., that the mean error of the position of the position of the central point of a hexameter will decrease in the process for 1, 2, 3, 4, 5, 6 elementary one-triangle nets (the upper row in the figure above) the values

$$1.15 m_o D \quad 0.82 m_o D \quad 0.67 m_o D \quad 0.58 m_o D \quad 0.52 m_o D \quad 0.47 m_o D$$

and for 1, 2, 3, 4, 5, 6 elementary four-triangle nets the values:

$$1.15 m_o D \quad 0.70 m_o D \quad 0.52 m_o D \quad 0.42 m_o D \quad 0.37 m_o D \quad 0.30 m_o D.$$

The number of large triangles of a net (i. e. the number of elementary nets used for the given construction) being denoted by t , we can express the value of the mean error of the position of the central point by the following simple formulae

$$\text{for one-triangle nets } m_p = \frac{2 m_o D}{3 t}$$

$$\text{for four-triangle nets } m_p < \frac{2 m_o D}{4 t}, (t < 1).$$

In view of the notable superiority we have stated of small-triangle nets over large-triangle ones for the accuracy of determination of the position of the central point in encompassing nets, we could in fact dispense with other criteria which, — it is easy to anticipate — will be in favor of small-triangle nets. We include however a comparative survey of the values of the mean error of mean error for encompassing nets formed of 1, 2, 3, 4, 5, 6 elementary nets. These will amount for

- a) one-triangle nets to 0,71 m 0,35 m 0,27 m 0,22 m 0,20 m 0,18 m
- b) four-triangle nets to 0,35 m 0,20 m 0,16 m 0,13 m 0,12 m 0,10 m
- c) nine-triangle nets to 0,21 m 0,13 m 0,11 m 0,09 m 0,08 m 0,07 m

It is worth noting at this juncture that the feature of the mean error of mean error decreasing with the inspissation of a net is general one, i. e., one which does not particularly refer to encompassing sets formed of regular triangles or the like. It is possible to show that if any large-triangle set is changed to a small-triangle one by means of forming in every triangle of the large-triangle net n^2 new triangles by dividing its sides into n parts, then the increase in the number of supernumerary observations due to the inspissation of the net cannot be smaller than

$$t(n-1)(2n-1),$$

t being the number of triangles in the large-triangle net. Since — as it follows from this formula — the increase in the number of supernumerary observations due to the inspissation of the net must be a positive number, the mean error must be on the wane here.

§ 9) In the way we have analyzed nets consisting of sets of elementary nets based on the vertices of a regular hexagon, other „typical“ nets, i. e.,

nets formed of regular triangles and similar to geodetic nets common in practice, can also be examined. Thus in the present work nets are also examined which are formed of sets of elementary nets based on two constant points, based on three constant points and forming a regular triangle etc. These examinations as well as those discussed here are illustrated with diagrams of the ellipses of the errors of points determined by the nets.

As all these examinations show the superiority of small-triangle nets over large-triangle ones, and both exhaustively to treat all possible nets within an analysis and to lay down a general formula determining the error of the position of an arbitrary point, the practical applicability of such a formula being assumed, is out of the question, we limit ourselves to the statement that to the extent of the analysis made small-triangle nets have proved more accurate than large-triangle ones, and the conception of substituting small-triangle nets for large-triangle ones, which has been being realized in surveying in Poland since 1947, should in this connection be recognized as right.

§ 10) To exhaust the subject the compensation and the analysis of the accuracy of one of triangulation surface nets in Poland has also been made. Although 1). the net was far from being correct in form (the length of sides vary from 4 to 12 km), 2). the net was connected with six very unevenly distributed junction points (the area within which 4 points and the only directly measured length are situated constitutes about one eighth of the whole of the area covered by the net), 3). the standard of angular observations in the net was poorer than average (the mean error of the measurement of the angle being $2,7''$), the compensation resulted in acquiring average value of the mean error of the position of the point equal to 5.1 cm, i. e., slightly lower than the average value of the mean error of the position of the point — 5.5 cm — in elementary nets in Germany, quoted in „Handbuch der Vermessungskunde“ by Jordan-Eggert. Our work contains a diagram of the ellipses of error for all points of the net as well as an illustration of the effect in the non-accidental error.

For the adjustment of the net the condition of the minimum was made in a form more general than usually practised and the assumption was made of the assignment of such corrections v

- a) to the angles measured in the process of observation with the mean error m_a ;
- b) to the length measured in the process of observation with the mean errors m_d ;
- c) to the coordinates known to the previous process of compensation with the mean errors m_x m_y ,

so that the sum of the squares of the corrections divided by the squares of the mean errors was as small as possible

$$\left[\frac{v v}{m m} \right] = \text{the minimum.}$$

To realize such an assumption of the minimum in a generalized form requires

1) the formation, for every angular observation made in the net, of an equation of error for angular observation (2), which we already know and adduce here again

$$\left| \begin{array}{cc|cc} dx_L & dy_L & dx_P & dy_P \\ A_L & B_L & -A_P & -B_P \end{array} \right| - (A_L - A_P) \frac{dx_C}{1} - (B_L - B_P) \frac{dy_C}{1} + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v_a$$

with the mean error m_a , by α_{obs} being understood the value of the angle subjected to reduction and transferred on the plane of projection;

2) the formation, for every linear observation made in the net, of the following equation of error for linear observation

$$\left| \begin{array}{cc|cc} dx_i & dy_i & dx_k & dy_k \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi \end{array} \right| + d_{prz} - d_{obs} = v_d$$

with the mean error m_d , by d_{obs} being understood the length observed, subjected to reduction and transferred on the plane of projection, by d_{prz} the length calculated from approximate coordinates, by φ the axial angle of the straight line connecting the image of the „beginning“ of the line along which the measurement was made, i. e., point i with the image of the „end“ of this line, i. e., point k, by dx_i dy_i dx_k dy_k the corrections to be determined of the approximate coordinates, by v_d the correction of observation, and finally the linearly written group of four-element square tables terminated in the subindex $_2$ denoting the sum of the products of the elements situated in the same columns, i. e., in general terms

$$\left| \begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 \end{array} \right|_2 = \Sigma ac + \Sigma bd,$$

and in a particular case, e. g.,

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \end{array} \right|_2 = 60 \text{ cc}.$$

3) The formation, for every point of connection, of the following equations of error for the coordinates

$$dx = v_x \text{ with the mean error } m_x$$

$$dy = v_y \text{ with the mean error } m_y$$

d_x or v_x denoting the correction to be determined of the abscissa, while d_y or v_y denotes the correction to be determined of the ordinate of the point of connection.

If the mean errors m_x m_y were not calculated in a net of higher order for every point of connection, generalizations should of course be

made and the average value of the mean errors of the coordinates in a net of a similar type should be assumed for m_x m_y .

If it may be feared that the actual geodetic points have suffered some displacement whose extent and direction cannot be found, it should also be assumed that this displacement is accidental and compensation ought to be made accepting rather too large values of the mean error than too small ones. There is besides no need to carry out the operation of „weighting“, i. e., of the assignment a priori to quantities being compensated of certain mean errors, with excessive care, since in a system of a great number of supernumerary observations the operation of weighting has no great effect on the result of compensation. The essence of compensation here lies in a more prominent deformation of the quantities contradictory to the system of observation as a whole.

4) The formation of all the types of equations described being completed, we bring them to a form generally accepted in algebra by realizing the conventional symbols x, y, z (except for the equations of the coordinates already written in this form), we then divide every equation by the corresponding mean error and obtain as the result of this operation a „weighted“ system of equations of errors in the typical form

$$ax + by + cz + \dots + 1 = v$$

with the coefficient cracovian a
from which we pass in a generally known manner to a system of normal Gaussian equations

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z + \dots + [al] = 0, \text{ etc., etc.}$$

with the coefficient cracovian a^2 .

After we have solved the system of normal equations we substitute the values of the unknowns in the system of the weighted set of equations of errors and find — as the result of this substitution — the relations of the corrections v which were to be determined to the corresponding mean errors m .

The sum of the squares of these relations $\frac{v}{m}$ — they could be called relative corrections — will enable us to determine the single mean error

$$m_o = \sqrt{\left[\frac{vv}{mm} \right] \cdot n_n},$$

where n denotes the number of supernumerary observations in the system. By multiplying the relative corrections by the corresponding mean errors we determine the corrections v and improve the observations.

The formulae of the mean errors of the unknowns will sustain no formal change.

§ 11) The reader who has read this summary only may find it difficult to understand why the present author should have applied craco-

vians, or more generally speaking, group numbers, in his work to the formulae essential to the problem, whose content could be expressed in the symbols of ordinary algebra, e. g., the subindices and even the Gaussian symbols so popular in the compensating computation. What made the author use group numbers is that, based on the concepts of group numbers, the demonstration of the formulae used in his work is uncomparably simpler than on the concepts of the algebra of individual numbers. Although the demonstrations of the formulae applied were made in the main body of the work, we demonstrate here the formula (5) on the basis of the concepts of the calculus of cracovians as presented on p. 17.

With some concentration of attention this will enable even a reader far from being familiar with the algebra of group numbers to appreciate the advantage of the application of these numbers.

It should be borne in mind that the question is to determine the value of the change dx_i to be undergone by the i -th unknown quantity, if the k -th observation is given the suffix dl_k . To denote the column of the unknown quantity in a set of equations of errors by x and the column of observation terms of these equations by l means to assume

$$\underline{x} = \tau(xyz \dots) = \tau(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_r)$$

$$\underline{l} = \tau(l_1 l_2 \dots l_k \dots l_n)$$

and then, as it may be easily verified on the basis of the definition of the multiplication of cracovians, a set of normal Gaussian equations will express the cracovian equation

$$\underline{x} \underline{a}^2 = \underline{l} \underline{a}$$

(the observation terms understood to stand on the right-hand side of the set of equations of error). By multiplying both sides of this equation by the inverse of the symmetrical cracovian $\underline{a}^2$, which inverse will also be the symmetrical cracovian $(\underline{a}^2)^{-1}$, we obtain

$$\underline{x} \underline{a}^2 (\underline{a}^2)^{-1} = \underline{l} \underline{a} (\underline{a}^2)^{-1}.$$

After we apply the associative theorem to both sides of the equation, we shall obtain

$$\underline{x} ((\underline{a}^2)^{-1} \tau \underline{a}^2 (= \underline{l})) (\underline{a}^2)^{-1} \tau \underline{a} = \underline{l} \underline{t},$$

where

$$\underline{t} = (\underline{a}^2)^{-1} \tau \underline{a}.$$

Since because of the symmetry of the cracovian $\underline{a}^2$, $\underline{a}^2 = \underline{a}^2$ and the product $(\underline{a}^2)^{-1} \underline{a}^2$ is a cracovian unit which, when written on the right side of a cracovian does not change its value, we shall eventually obtain

$$\underline{x} = \underline{l} \underline{t},$$

or, to put it more clearly

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_{r1} \\ t_{12} & & & & & t_{i2} & & & & & t_{r2} \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ t_{1k} & & & & & t_{ik} & & & & & t_{rk} \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ t_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_{in} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_{rn} \end{pmatrix}.$$

By multiplying the column of observation terms, i. e., the cracovian $\underline{l}$, by the successive columns of the cracovian $\underline{t}$ we obtain successively unknowns as linear functions of observation terms.

So we shall determine the i -th unknown quantity by multiplying the column of observation terms by the i -th column of the cracovian $\underline{t}$. It follows hence that if the k -th observation term is given the suffix dl_k , the i -th unknown quantity will receive the suffix $dl_k t_{ik}$. The value t_{ik} or the value of the element situated in the i -th column and in the k -th row of the cracovian $\underline{t} = (\underline{a}^2)^{-1} \cdot \underline{\tau}$ remains to be calculated. Since, furthermore, the elements of the i -th column of the cracovian $(\underline{a})^{-1}$ are, in view of the symmetry of this cracovian, equal to the corresponding elements of the i -th row of this cracovian and, the elements of the k -th column of the cracovian $\underline{a}$ are equal to the corresponding elements of the k -th row of the cracovian $\underline{a}$, we eventually obtain

$$dx_i = dl_k (\underline{a}^2)^{-1}_{(i)} \omega \underline{a}_{(k)}$$

where the symbol ω denotes linear multiplication.

We suggest that the reader may try a demonstration of this relation, based on the concepts of the algebra of individual numbers.

„W razie ujawnienia w egzemplarzu błędu powstałego z winy drukarni, uniemożliwiającego użytkowanie książki zgodnie z jej przeznaczeniem, nabywca ma prawo wymienić ten egzemplarz w księgarniach „Dom Książki” niezależnie od czasu i miejsca zakupu. W przypadku braku odpowiedniego egzemplarza wymiennego, księgarnia obowiązana jest zwrócić nabywcy wartość książki według ceny katalogowej.”