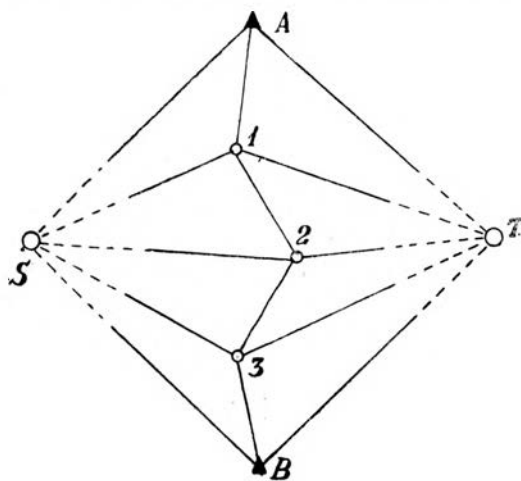
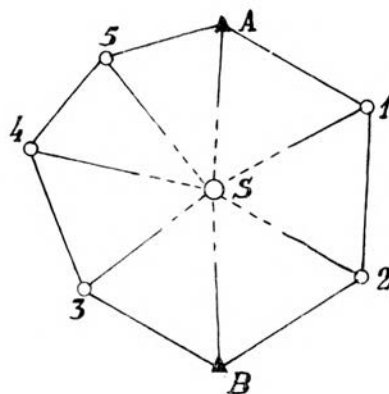


Zagęszczenie sieci triangulacji wyższego rzędu przy pomocy punktów oporowych

Obok ogólnie stosowanych metod zagęszczenia punktów triangulacji wyższego rzędu, jak wcięcia wprzód, wstecz i inne, stosowaną może być konstrukcja punktów oporowych, przewyższająca pod pewnymi względami dawne i obecnie stosowane metody. Zagadnienie jest analogiczne do triangulacji przy pomocy lampionów, stosowanej przy łączeniu punktów triangulacyjnych dwóch lądów, będących od siebie w znacznej odległości. Triangulacja lampionowa oparta jest na jednoczesnych obserwacjach lampionów zrzucanych z samolotu. W omawianym zagadnieniu rolę lampionów — punktów pomocniczych — spełniają punkty oporowe, którymi mogą być istniejące już, charakterystyczne punkty terenu, jak: wieże kościołów, kominy fabryczne i tp., które są tylko oparciem dla pęku celowych z punktów wyznaczanych. W zależności od położenia punktów oporowych, zaistnieć mogą dwa przypadki, gdzie punkty oporowe położone są po obu stronach prostej łączącej dwa trygonometry A i B (rys. 10), lub układ centralny (rys. 11). Punkty A i B to punkty triangulacji wyższego rzędu, 1, 2, 3, ... — punkty wyznaczane, oraz S i T — punkty oporowe.



rys. 10



rys. 11

Wydaje się, że konstrukcja taka przynieść może znaczne oszczędności w czasie, jak i w środkach potrzebnych do wykonania jej w terenie — przy jednoczesnym zapewnieniu dokładności otrzymanych wyników, odpowiadających triangulacji zagęszczającej (o ile nie wyższych). Jest do pomyślenia bowiem taki układ punktów 1, 2, 3, ..., z których wszystkie sąsiednie widziane będą z ziemi — odpada kosztowna zabudowa wież. Punkty *S* i *T* — to punkty istniejące już w terenie, a gdyby okazało się koniecznym zabudowanie ich wieżami (o względnej statyczności), pociągnie to za sobą stosunkowo małe koszty. Całość pracy wykonać może jeden zespół pracowników, będących dla siebie zespołem wywiadu, zabudowy i jednocześnie zespołem obserwacyjnym — odpada ewentualny przestój spowodowany złą organizacją pracy, w związku z czym, czas pracowników wykorzystany będzie do maximum. Punkty *A*, *B*, 1, 2, 3, ..., zabudowane mogą być sześć metrowymi sygnałami, przenośnymi, montaż których odbywa się bardzo szybko i dokonany może być przez pracowników nie posiadających specjalnych kwalifikacji w tym kierunku. Poza tym, konstrukcję punktów oporowych wykonać można w dowolnym czasie i miejscu — niezależnie od triangulacji wyższego rzędu.

Pewne trudności spotkać można przy wywiadzie — przy wzajemnym usytuowaniu wszystkich punktów. Nie znaczy to, aby zagadnienie mogło stracić na stosowalności w terenie — oznacza to, że wykonawcy powinni być technicznie przygotowani do pracy terenowej.

Zagadnienie zagęszczenia sieci triangulacji wyższego rzędu przy pomocy punktów oporowych, zainicjowane zostało przez prof. dr. Stefana Hausbrandta i dzięki Jego pomocy zarówno przy analizie dokładnościowej, jak i nad zrealizowaniem zagadnienia w terenie — prace nad metodą punktów oporowych posunięte są już tak daleko, że można ją z powodzeniem stosować w terenie.

W celu zorientowania się o przydatności tej metody w praktyce, wykonano cały szereg rachunków dokładnościowych. Analizę przeprowadzić można dwoma metodami — a to drogą wstępnych rachunków dokładnościowych, lub też drogą analizy matematycznej. Ze względu na bardzo skomplikowany rachunek przy analizie matematycznej — zaniechano jej — całość rachunku przeprowadzono drogą wstępnych rachunków dokładnościowych. W wyniku analizy, otrzymamy pola wyboru punktów oporowych i wyznaczanych — gwarantujące takie wzajemne ich położenie, aby dokładność punktów wyznaczanych nie była mniejsza od z góry założonej.

Opis przebiegu badania dokładności sieci

Dla prostoty rachunku przyjęto:

1. Współrzędne punktów *A* i *B* uważamy za bezbłędne, ewentualnie obciążone takimi błędami, które w stosunku do dokładności z jaką chcemy otrzymać punkty wyznaczane są znikome.

-
- The diagram shows a network with nodes S and T on the horizontal axis, and nodes A and B on the vertical axis. Intermediate nodes 1 , 2 , and 3 are located on the vertical axis between A and B . Solid lines connect S to 1 , 1 to A , A to 2 , 2 to B , B to 3 , and 3 to T . Dashed lines connect S to 2 and 3 , and T to 1 and 3 .

Rachunek dokładnościowy polega na wyznaczeniu błędów średnich współrzędnych punktów:

$$m_v = m_0 df,$$

f — czynnik zależny od konfiguracji sieci.

Rozważając różne przypadki wzajemnego położenia punktów, w pierwszej kolejności zmieniają swe położenia punkty oporowe — przy stałym położeniu punktów wyznaczanych. Następnie, położenia swe zmieniają wszystkie punkty, przy czym punkty oporowe przesuwają się w granicach optymalnego obszaru, wyznaczonego przypadkami poprzednimi. Całość rachunku odbywa się w następującej kolejności:

Z wypisanych współrzędnych punktów, (współrzędne wypisujemy na rysunku wykonanym w skali — przyjmując za jednostkę odległość między dwoma sąsiednimi punktami wyznaczanymi), obliczamy przyrosty ΔX i ΔY , z których z kolei określamy współczynniki kierunkowe według wzorów:

$$A_L = \frac{\Delta X_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2}, \quad B_L = \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2}, \quad A_p = \frac{\Delta X_p}{\Delta X_p^2 + \Delta Y_p^2},$$

$$B_p = \frac{\Delta Y_p}{\Delta X_p^2 + \Delta Y_p^2}$$

Następną czynnością jest zestawienie równań błędów dla poszczególnych obserwacji kątowych, które wyrażą się w postaci:

$$V = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_c & dy_c \\ -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix} + \alpha_{\text{przyb}} - \alpha_{\text{obs}}$$

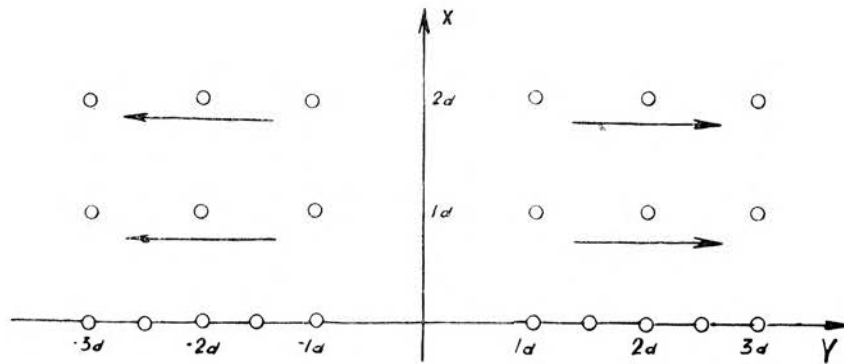
Z kolei przechodzimy do krakowianu współczynnikowego (rozwiązując równania błędów według formy 1), a następnie do jego kwadratu, który stanowi tabelę współczynnikową układu normalnych równań Gaussa. Następnie wyliczamy pierwiastek kanoniczny, oraz jego odwrotność^{*)}. Pierwiastki kwadratów kolumn odwrotności pierwiastka kanonicznego, dadzą błędy niewiadomych — m_{dx} i m_{dy} . Średnie błędy punktów wyrażą się wzorem:

$$M_p = \pm \sqrt{m_{dx}^2 + m_{dy}^2},$$

W pierwszej fazie analizy dokładnościowej, przesunięte zostały punkty oporowe wzdłuż osi yy — otrzymaliśmy w wyniku graniczne ich położenia w kierunku tej osi. Dla wyliczenia dopuszczalnego współczynnika błędów średnich punktów 1, 2, 3, ..., przyjęto błąd obserwacji kątowej (m_0) = 2^{cc}, odległość między dwoma sąsiednimi punktami wyznaczanymi (d) = 5 km i przy średnim błędzie punktów wyznaczanych ± 6 cm, otrzymamy, że wyliczany przez nas współczynnik nie może być większy od 4,00.

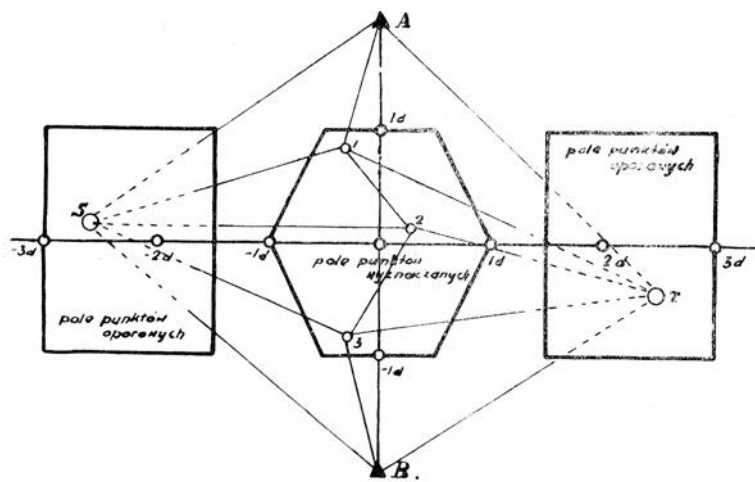
Rysunek 13 przedstawia kolejne położenia punktów oporowych w rozważanych przypadkach. Po znalezieniu granicznych położenia punktów oporowych w kierunku osi yy , w następnej fazie rachunku zmieniły one swe położenia w kierunku osi xx (jak na rysunku). Biorąc pod uwagę graniczną wartość współczynnika, otrzymaliśmy maksymalne

^{*)} Tok postępowania nad wyliczeniem pierwiastka kanonicznego równań normalnych, oraz jego odwrotności — opisany jest bardzo szczegółowo w pracy prof. dr. Stefana Hausbrandta „Rachunki geodezyjne”.



rys. 13

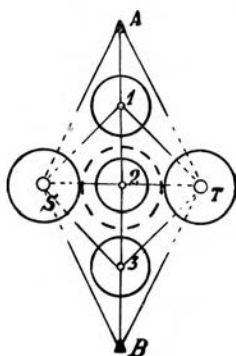
wychylenie punktów oporowych w kierunku osi xx . Ze względu na symetrię konstrukcji względem osi yy , punkty oporowe zmieniały swe położenia w ćwiartkach 1 i 4 (przy położeniu punktów oporowych w ćwiartkach 2 i 3, $m_1 = m_3$ i $m_2 = m_4$). Mając współczynniki błędów średnich dla poszczególnych przypadków, sporządzone zostały wykresy, z których bardzo ściśle określić można pole obioru punktów oporowych — pod warunkiem nie przekroczenia założonego błędu.



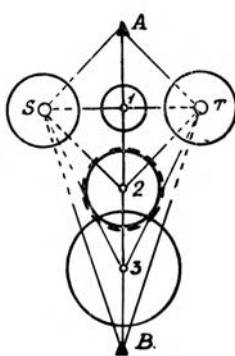
rys. 14

Pierwsza część zagadnienia jest skończona — wyznaczony został obszar obioru punktów oporowych przy stałym położeniu punktów wyznaczanych. W następnym etapie pracy, położenia swe zmieniają wszystkie punkty — przy czym punkty oporowe przesuwają się w granicach obszaru wyznaczonego wypadkami poprzednim.

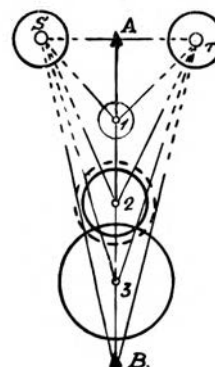
Dla dokładnego zobrazowania otrzymanych wyników, załączam kilka przypadków wzajemnych położeń punktów. Okręgi kół wykreślone linią pełną oznaczają wielkości błędów średnich punktów, natomiast okrąg koła wykreślony linią przerywaną wskazuje dopuszczalną wielkość błędu średniego.



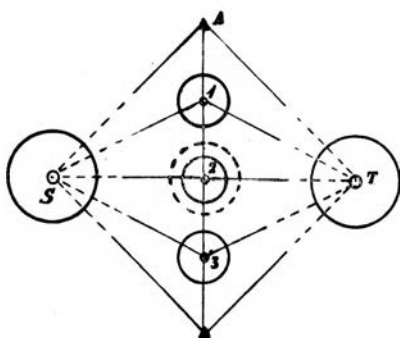
rys. 15a



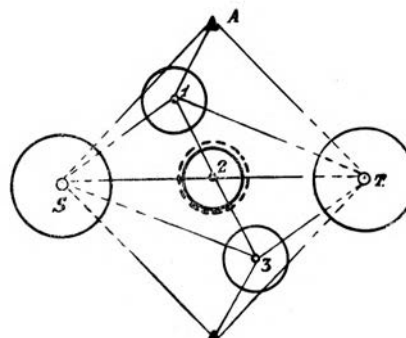
rys. 15b



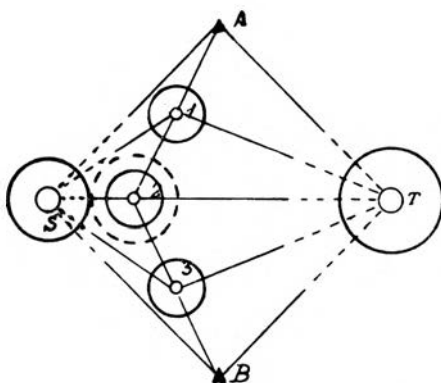
rys. 15c



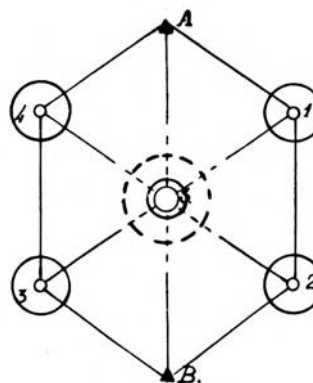
rys. 15d



rys. 15e



rys. 15f



rys. 15g

Na podstawie otrzymanych wyników przy analizie dokładnościowej, sporządzono wykresy błędów dla poszczególnych punktów. Analizując poszczególne wykresy dochodzimy do następujących wniosków:

1. Przesunięcie punktów oporowych wzdłuż osi yy , mało wpływa na wzrost średnich błędów punktów wyznaczanych. Błędy zaś punktów oporowych rosną bardzo szybko, aż do współczynnika 7,5 (co nie ma zupełnie znaczenia, gdyż punkty oporowe są tylko oparciem celowych z punktów wyznaczanych). Optymalnym położeniem punktów oporowych na osi yy jest $\pm 2d$.
2. Przy przesuwaniu punktów oporowych wzdłuż osi yy na wysokości $x=1$, w miarę oddalania się od osi xx , współczynniki błędów średnich maleją. To samo w przybliżeniu dzieje się przy przesuwie punktów oporowych na wysokości $x=2$. Ogólne minimum jest jednak większe — i tak dla punktu 3, przy położeniu punktów oporowych: $y=\pm 1$, $x=2$ — wynosi 6,5 — co już znacznie odbiega od przyjętej granicy dokładności.
- Zatym, przy położeniu punktów wyznaczanych na prostej łączącej dwa trygonometry, pole obioru punktów oporowych ograniczone jest punktami: $A(\pm 1,5; 1)$, $B(\pm 3; 1)$, $C(\pm 3; -1)$, $D(\pm 1,5; -1)$.
3. Wychylenie punktów 1 i 3 o $\pm 0,25d$ równoległe do osi yy , powoduje małe zmiany współczynników błędów średnich. Poza tym krzywe są bardziej zagęszczone — odbiegają tylko krzywe punktów oporowych.
4. Zmianie położenia ulegają wszystkie punkty — 1 i 3 są w wychyleniu stałym ($0,5d$), natomiast punkt 2 wędruje równoległe do osi yy przyjmując kolejne położenia: $0,5d$, $1d$, $1,5d$. Wykres wykazuje, że i w tym wypadku współczynniki błędów średnich są poniżej dopuszczalnych.

Niezależnie od opisanych dociekań, przeprowadzono też analizę dokładnościową dla układu centralnego. Wyniki wykazały, że błędy średnie punktów są poniżej dopuszczalnych, z tym, że punkty wyznaczane mają nieco większe błędy średnie od jedynego w tym układzie punktu oporowego (rys. 15g).

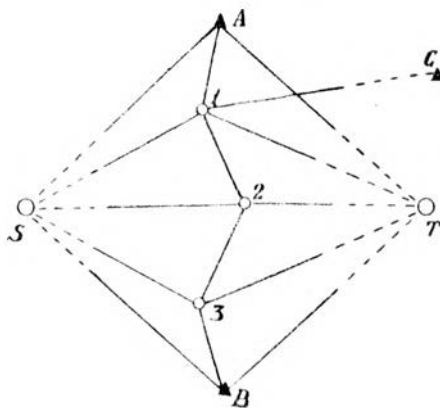
Wnioski

Opierając się na wynikach analizy dokładnościowej, można bardzo dokładnie określić pola obioru punktów wyznaczanych i oporowych. Materiał taki (jak na rysunku 14), wykorzystany może być przy pracach polowych — co niewątpliwie ułatwi pracę przy wywiadzie w terenie. Dla dowolnej odległości między dwoma trygonometrami A i B (przyjmując, że odległość ta równa się $4d$ — jak na rys. 12), wykreślić można pola obioru na kalce technicznej. Tak przygotowany materiał

pomocniczy, zapewni dokładność punktów wyznaczanych, jak i usprawni prace przy wywiadzie w terenie.

Obok wytycznych uzyskanych drogą analizy dokładnościowej, wydaje się wskazanym przestrzeganie ogólnych zasad w triangulacji (wielkości kątów).

Wyrównanie rozważanej siatki odbywać się może ogólnie przyjętymi metodami, stosowanymi w triangulacji, a to: metodą zawarunkowaną, lub spostrzeżeń pośrednich. Przy metodzie zawarunkowanej możemy natrafić na pewne trudności — w wypadku dodatkowych obserwacji (jak na rys. 16), gdzie z punktu 1 zamierzono dodatkowo kierunek na trygonometr C . Fakt ten niewątpliwie wzmocni konstrukcję, ale może stać się powodem trudności przy ułożeniu dodatkowego równania warunkowego. Przy metodzie spostrzeżeń pośrednich, każda dodatkowa obserwacja pociągnie za sobą napisanie dla niej dodatkowego równania błędów — co nie stworzy żadnych trudności. Tok wyrównania jest analogiczny do analizy dokładnościowej (opisanej uprzednio).



rys. 16

W celu obliczenia współrzędnych przybliżonych wszystkich punktów, obieramy zupełnie dowolne współrzędne dwóch punktów sąsiednich (np. A i 1) — obieramy przez to pewien układ U . Następnie przez wcięcia wprzód obliczamy współrzędne przybliżone wszystkich punktów w tym układzie. Mając współrzędne trygonometrów A i B w układzie właściwym V i w układzie przyjętym U , obliczyć możemy skalę i skreślenie układu U . Po transformacji wszystkich współrzędnych przybliżonych do układu właściwego V — przechodzimy do wyrównania.

Ze względu na dobre wyniki analizy dokładnościowej jesienią roku ubiegłego przepracowano pomiary w terenie dla zrealizowania zagadnienia na gruncie.

Oznaczenie kąta	Przyrosty współ- rzędnych		Tangens przybl. wartości kąta	Wartość kąta			α przybl. — α zaobs.	Współczynniki kierunkowe		Równanie obserwacyjne kąta pod postacią tabelaryczną						l		
				α przybliżone														
	Δx_L Δx_P	Δy_L Δy_P		Δx_L Δx_P	Δy_L Δy_P	α zaobserwowane			$A = \frac{\rho^{cc} \Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	$B = \frac{\rho^{cc} \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	dx_L A_L	dy_L B_L	dx_P $-A_P$	dy_P $-B_P$	dx_c $-(A_P - A_P)$		dy_c $-(B_L - B_L)$	
						g		c										cc
1	— 3455,21 — 3343,70	— 2706,32 1623,44	— 2,0473728	328 328	92 92	47,9 45,9	+ 2,0	— 114,2 — 154,1	— 89,4 74,8	dx_S — 114,2	dy_S — 89,4	dx_T 154,1	dy_T — 74,8	dx_A 0	dy_A 0	+ 2,0		
2	— 3343,70 — 2000,00	1623,44 — 200,00	0,6154011	35 35	12 12	02,1 02,8	— 0,7	— 154,1 — 315,2	74,8 — 31,5	dx_T — 154,1	dy_T 74,8	dx_1 315,2	dy_1 31,5	dx_A 0	dy_A 0	— 0,7		
3	— 2000,00 — 3455,21	— 200,00 — 2706,32	0,6336283	35 35	95 95	50,0 50,3	— 0,3	— 315,2 — 114,2	— 31,5 — 89,4	dx_1 — 315,2	dy_1 — 31,5	dx_S 114,2	dy_S 89,4	dx_A 0	dy_A 0	— 0,3		
4	2000,00 — 1343,70	200,00 1823,44	— 1,6857966	134 134	08 08	45,0 43,0	+ 2,0	315,2 — 165,8	31,5 226,2	dx_A 0	dy_A 0	dx_T 166,8	dy_T — 226,2	dx_1 — 482,0	dy_1 194,7	+ 2,0		
5	— 1343,70 — 1434,18	1823,44 57,16	1,2495897	57 57	03 03	44,6 61,3	— 16,7	— 166,8 — 443,2	226,2 17,6	dx_T — 166,8	dy_T 226,2	dx_2 443,2	dy_2 — 17,6	dx_1 — 276,4	dy_1 — 208,6	— 16,7		
6	— 1434,18 — 1455,21	57,16 — 2506,32	1,8920397	69 69	04 04	68,9 54,1	+ 14,8	— 443,2 — 110,3	17,6 — 190,0	dx_2 — 443,2	dy_2 17,6	dx_S 110,3	dy_S 190,0	dx_1 332,9	dy_1 — 207,6	+ 14,8		
7	— 1455,21 2000,00	— 2506,32 200,00	— 1,3839494	139 139	83 83	41,5 42,0	— 0,5	— 110,3 315,2	— 190,0 31,5	dx_S — 110,3	dy_S — 190,0	dx_A 0	dy_A 0	dx_1 425,5	dy_1 221,5	— 0,5		
8	1434,18 90,48	— 57,16 1766,28	88,12428	99 99	27 27	76,2 76,9	— 0,7	443,2 18,3	— 17,6 359,5	dx_1 443,2	dy_1 — 17,6	dx_T — 18,3	dy_T — 359,5	dx_2 — 424,9	dy_2 377,1	— 0,7		
9	90,48 — 1687,66	1766,28 90,40	428,7089	99 99	85 85	15,0 22,5	— 7,5	18,3 — 376,1	359,5 20,1	dx_T 18,3	dy_T 359,5	dx_1 376,1	dy_1 — 20,1	dx_2 — 334,4	dy_2 — 339,4	— 7,5		
10	— 1687,66 — 21,03	90,40 — 2563,48	— 22,05476	102 102	88 88	45,7 39,4	+ 6,3	— 376,1 — 2,0	20,1 — 248,4	dx_3 — 376,1	dy_3 20,1	dx_S 2,0	dy_S 248,4	dx_2 374,1	dy_2 — 268,5	+ 6,3		
11	— 21,03 1434,18	— 2563,48 — 57,16	31,60408	97 97	98 98	63,1 62,4	+ 0,7	— 2,0 443,2	— 248,4 — 17,6	dx_S — 2,0	dy_S — 248,4	dx_1 — 443,2	dy_1 17,6	dx_2 445,2	dy_2 230,8	+ 0,7		
12	1687,66 1778,14	— 90,40 1675,88	1,0490151	51 51	52 52	25,9 51,2	— 25,3	376,1 189,6	— 20,1 178,7	dx_2 376,1	dy_2 — 20,1	dx_T — 189,6	dy_T — 176,7	dx_3 — 186,5	dy_3 198,8	— 25,3		
13	1778,14 — 2240,24	1675,88 — 559,99	— 0,5604772	167 167	47 46	81,8 88,1	+ 93,7	189,6 — 267,5	178,7 — 66,9	dx_T 189,6	dy_T 178,7	dx_B 0	dy_B 0	dx_3 — 457,1	dy_3 — 245,6	+ 93,7		
14	— 2240,24 1666,63	— 559,99 — 2653,88	— 3,0605602	120 120	10 11	46,3 22,7	— 76,4	— 267,5 108,0	— 66,9 — 172,0	dx_B 0	dy_B 0	dx_S — 108,0	dy_S 172,0	dx_3 375,5	dy_3 — 105,1	— 76,4		
15	1666,63 1687,66	— 2653,88 — 90,40	1,4178605	60 60	89 89	46,0 36,9	+ 9,1	108,0 376,1	— 172,0 — 20,1	dx_S 108,0	dy_S — 172,0	dx_2 — 376,1	dy_2 20,1	dx_3 268,1	dy_3 151,9	+ 9,1		
16	2240,24 4018,38	559,99 2235,87	0,2690247	16 16	73 73	95,3 60,6	— 55,3	267,5 121,0	66,9 67,3	dx_3 267,5	dy_3 66,9	dx_T — 121,0	dy_T — 67,3	dx_B 0	dy_B 0	— 55,3		
17	4018,38 3906,87	2235,87 2093,89	— 1,5565336	336 336	35 35	42,7 37,4	+ 5,3	121,0 126,6	67,3 — 67,8	dx_T 121,0	dy_T 67,3	dx_S — 126,6	dy_S 67,8	dx_B 0	dy_B 0	+ 5,3		
18	3906,87 2240,24	2093,89 559,99	0,9074979	46 46	91 91	52,0 01,1	+ 50,9	126,6 267,5	— 67,8 66,9	dx_S 126,6	dy_S — 67,8	dx_3 — 267,5	dy_3 — 66,9	dx_B 0	dy_B 0	+ 50,9		

dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_S	dy_S	dx_T	dy_T	l	s	v^{cc}
						— 89,4	114,2	— 74,8	— 154,1	+ 2,0	— 202,1	+ 1,1
31,5	— 315,2							74,8	154,1	— 0,7	— 55,5	+ 5,5
— 31,5	315,2					89,4	— 114,2			— 0,3	+ 258,6	— 5,6
194,7	482,0							— 226,2	— 166,8	+ 2,0	+ 285,7	+ 2,4
— 208,6	276,4	— 17,6	— 443,2					226,2	166,8	— 16,7	— 16,7	+ 1,1
— 207,6	— 332,9	17,6	443,2			190,0	— 110,3			+ 14,8	+ 14,8	— 0,4
221,5	— 425,5					— 190,0	110,3			— 0,5	— 284,2	— 3,5
— 17,6	— 443,2	377,1	424,9					— 359,5	18,3	— 0,7	— 0,7	— 0,4
		— 339,4	394,4	— 20,1	— 376,1			359,5	— 18,3	— 7,5	— 7,5	— 1,2
		— 268,5	— 374,1	20,1	376,1	248,4	— 2,0			+ 6,3	+ 6,3	+ 1,2
17,6	443,2	230,8	— 445,2			— 248,4	2,0			+ 0,7	+ 0,7	— 0,8
		— 20,1	— 376,1	198,8	186,5			— 178,7	189,6	— 25,3	— 25,3	— 2,3
				— 245,6	457,1			178,7	— 189,6	+ 93,7	+ 294,3	— 0,6
				— 105,1	— 375,5	172,0	108,0			— 76,4	— 277,0	+ 0,7
		20,1	376,1	151,9	— 268,1	— 172,0	— 108,0			+ 9,1	+ 9,1	+ 3,3
				66,9	— 267,5			— 67,3	121,0	— 55,3	— 202,2	— 1,2
						67,8	126,6	67,3	— 121,0	+ 5,3	+ 146,0	+ 0,3
				— 66,9	267,5	— 67,8	— 126,6			+ 50,9	+ 57,1	+ 1,8

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{k-2p}} = \pm 3,7^{cc}$$

Tabela współczynnika normalnych równań Gaussa

176186	6793	— 2557	— 14875	—	—	— 88717	50962	— 80543	— 62738	702	— 16783
1192148	— 75564	— 655670	—	—	— 64318	— 45323	89247	— 90977	— 7619	348717	
384187	54784	482	17528	— 124139	— 3113	— 257971	6365	1997	1997		
1350000	— 33086	— 460008	37180	— 89646	— 44008	— 144676	20975	20975			
143720	— 97119	— 34675	— 19327	— 91143	92721	— 25458	— 63885				
882615	56814	— 46217	— 68849	— 76791	97959	305933					
279952	— 9008	11250	5573	— 13705	53206						
105807	— 22	— 32917	— 16443	— 105247							
444929	1306	18467	20665								
204986	— 33306	130453									

Krakowian jednostkowy

100000											83217
100000											448717
100000											101997
100000											120975
100000											36115
100000											405933
100000											156206
100000											— 5247
100000											120665
100000											— 30453

Pierwiastek kanoniczny tabeli współczynnika

419,7	16,2	— 6,1	— 35,4	—	—	— 211,4	121,4	— 196,7	— 149,5	1,7	— 40,0
1091,7	— 69,1	— 600,1	—	—	— 55,8	— 43,3	84,6	— 81,2	— 7,0	320,0	
615,9	21,3	0,8	28,5	209,9	— 8,7	— 411,3	— 0,3	2,5	38,8		
994,1	— 33,3	— 463,3	0,7	— 111,8	8,6	— 199,9	16,9	212,0			
377,6	— 298,1	— 91,3	— 61,0	— 239,7	227,9	— 65,9	— 150,6				
760,5	47,2	— 152,5	— 163,8	— 133,6	113,2	470,9					
421,3	33,5	— 299,3	— 8,1	— 57,8	89,3						
220,3	— 21,2	— 212,6	0,6	— 13,0							
235,6	26,2	24,3	285,9								
142,6	— 7,6	137,8									

Odwrotność pierwiastka tabeli współczynnika

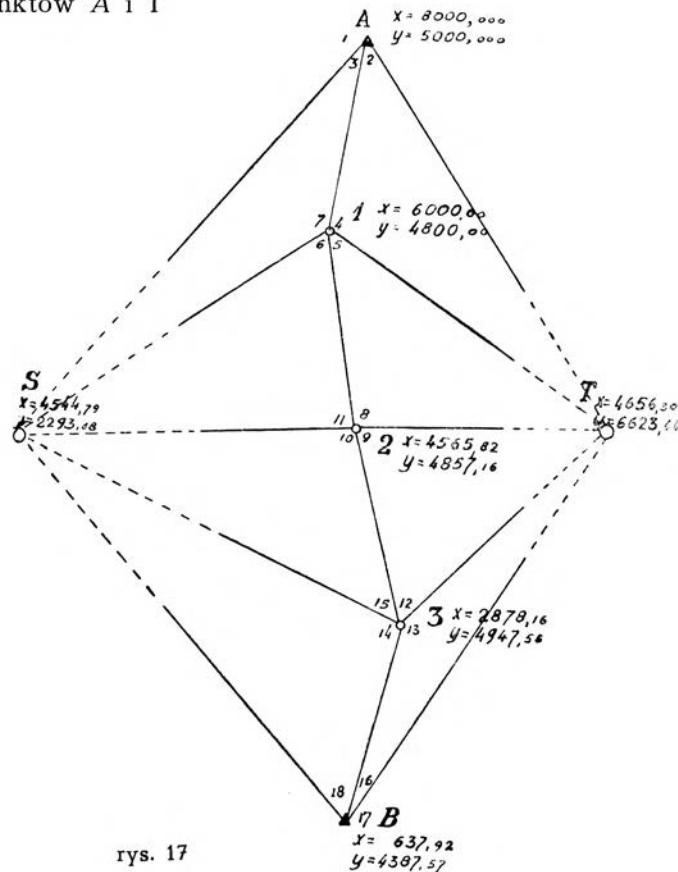
238,3											198,3
— 3,5	91,6										408,1
1,8	10,3	162,4									213,4
6,3	55,1	— 3,5	100,6								370,5
0,6	4,8	— 0,7	8,9	264,8							127,9
4,1	35,1	— 8,5	64,8	103,8	131,5						801,6
119,7	14,4	81,7	— 5,5	45,8	— 14,7	237,4					567,9
— 143,9	69,8	— 13,9	99,2	138,2	93,3	— 36,1	453,9				647,5
345,7	36,9	379,6	52,4	412,2	81,1	298,3	40,8	424,4			2357,3
— 11,7	252,7	— 97,2	325,6	— 193,0	246,6	— 95,1	669,2	— 78,0	701,3		1857,6

Niewiadome: — 0,025 — 0,022 — 0,047 — 0,076 — 0,032 — 0,159 0,058 0,038 — 0,109 0,053
 Błędy niewiadomych: $\pm 0,017 \pm 0,011 \pm 0,016 \pm 0,014 \pm 0,020 \pm 0,011 \pm 0,015 \pm 0,030 \pm 0,016 \pm 0,026$
 Błędy punktów: $\pm 0,020 \pm 0,021 \pm 0,023 \pm 0,033 \pm 0,030$
 (1) (2) (3) (S) (T)

Teren pracy — to okolice Warszawy — dużo lasów, ogrodów, gęsto zabudowany, przy pomocy opisanej konstrukcji polecono mi połączyć dwa (z góry określone) punkty triangulacji wypełniające.

Wywiad, — najbardziej pracochłonna część pracy — trwał w łącznej sumie około 15 godzin, w efekcie czego uzyskano kształt siatki jak na rysunku 17. Jednym punktem oporowym (S) był komin fabryczny, drugi zaś (T) zabudowano sześciu metrowym sygnałem przenośnym. Punkty A, 1, 2, 3, zabudowano wspomnianymi sygnałami — na punkcie B wykorzystano istniejącą wieżę triangulacyjną. Zabudowa pięciu sygnałów, łącznie z przewiezieniem ich na miejsce pracy, trwała około 7-miu godzin (czas montażu jednego sygnału trwa około 30 minut). Wykonanie obserwacji kątowych, pomiar elementów mimośrodów, to kwestia około 8-u godzin. Zdemontowanie wszystkich sygnałów trwało około 5-ciu godzin (czas demontażu jednego sygnału wynosi około 25 minut). Tak więc kosztem około 35 godzin pracy w terenie, przy minimalnym koszcie — scharakteryzowano geodezyjnie trzy punkty.

Uzyskane w polu wyniki, wyrównano metodą spostrzeżeń pośrednich, (patrz załącznik). Współrzędne przybliżone punktów, jak i wyrównanie siatki dokonane zostało w układzie dowolnym — przyjmując współrzędne punktów A i 1



rys. 17

Wszystkie założenia przyjęte na wstępie zostały spełnione i jak się okazało, metoda punktów oporowych, może być stosowana przy pracach polowych. Zarówno dokładność otrzymanych wyników, czas trwania pracy, jak i stosunkowo niski koszt wykonania pomiaru — przewyższa metody stosowane obecnie nad zagęszczeniem punktów triangulacji wyższego rzędu.

Dla zobrazowania zalet konstrukcji punktów oporowych, porównajmy ją cyfrowo z obecnie stosowanymi wcięciami wprzód i wstecz, pod względem kosztów i czasu trwania pracy terenowej (kwestię dokładności, uważam za dostatecznie udowodnioną — średnie błędy punktów z dokonanego pomiaru). Dla przeprowadzenia analizy, założmy, że zarówno w jednym jak i w drugim wypadku, pomiaru dokonamy przy pomocy wień przenośnych. Pomijając więc pewien procent ich zużycia, przyjmując możemy koszt materiału równy zeru — na wykonanie pomiaru złożą się: robocizna i transport. Czas pracy terenowej przy wcięciach wprzód i wstecz, ująłem według katalogu nom. W związku z tym należałoby się liczyć z pewnym skróceniem trwania pracy terenowej przez wykonawców. Założmy, że sostanie on skrócony o $\frac{1}{3}$ — ogólny czas pracy terenowej przewidziany katalogiem norm, przemnożyłem przez 0,67 (znaczniejsze skrócenie, mogłoby pociągnąć za sobą zastosowanie współczynnika dla punktów oporowych — pomiaru dokonano po raz pierwszy i przy pewnej wprawie, czas ten niewątpliwie zostanie skrócony).

Ze względu na bardzo skromny materiał polowy odnośnie punktów oporowych — do analizy przyjąłem teren, na którym dokonałem pomiaru wspomnianą metodą. Być może, że w innych warunkach terenowych, porównanie wyraziłoby się cokolwiek innym stosunkiem. Skład zespołu, wykonującego zagęszczenie punktów triangulacji wyższego rzędu przy pomocy punktów oporowych, przyjąłem jak niżej:

1 inżynier, 1 sekretarz techniczny (ewentualnie technik), 3-ch pracowników fizycznych i samochód ciężarowy.

I. Punkty oporowe.

1. Czas trwania pracy:

a) wywiad — około	.	.	.	.	.	.	15,000 godz.
b) zabudowa — około	.	.	.	.	.	.	7,000 „
c) obserwacje triangul. — około	.	.	.	.	.	.	8,000 „
d) demontaż — około	.	.	.	.	.	.	5,000 „

2. Koszt wykonania pomiaru:

a) robocizna:

35 inżyniero-godzin	à 10,— zł	.	.	.	.	.	350,00 zł
35 godzin technika	à 6,— zł	.	.	.	.	.	210,00 „
105 godz. prac. fizycznych	à 4,— zł	.	.	.	.	.	420,00 „
diety dla 5-ciu pracown.	à 26,— zł × 4 doby	.	.	.	.	.	520,00 „

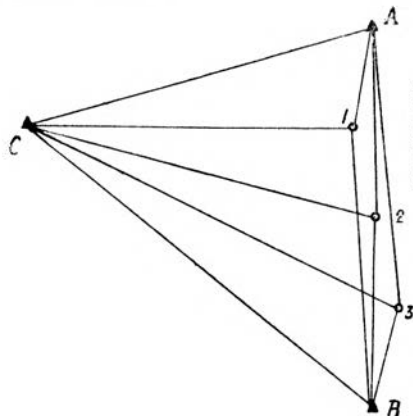
Razem około 1500,00 zł

b) transport:

jeden samochód ciężarowy — czas trwania pracy terenowej około 25,000 godz.

Koszt wykonania jednego punktu, przy zastosowaniu konstrukcji punktów oporowych, wyniesie: 500,00 zł i 8,333 godz. pracy samochodu, oraz czas trwania pracy terenowej waha się około 11,667 godz. dla jednego punktu (ogółem wykonano trzy punkty).

II. Wcięcia wprzód i wstecz.



rys. 18

Dla geodezyjnego scharakteryzowania punktów 1, 2 i 3, (rys. 18), należałoby zabudować wieżami przenośnymi punkty A i C (w omawianym przykładzie punkt B zabudowany jest wieżą triangulacyjną). Założmy, że z punktów zagęszczających, wszystkie trygonometry widoczne są z ziemi i że trygonometry A i C zabudowane zostaną wieżami o wysokości 25 m. Punkty zagęszczające zabudujemy sygnałami przenośnymi. Według rysunku 18, każdy z punktów wyznaczanych, określony zostanie przez dwa wcięcia wprzód i jedno wstecz (obserwacje triangulacyjne wykonamy na wszystkich punktach).

Przy wykonywaniu prac polowych, zatrudnione zostaną zespoły:

- wywiadu — 1 inżynier, 4 pracowników fizycznych,
- zabudowy — 1 majster ciesielski, 7 pracown. fizycznych,
- obserwacji triang. — 1 inż., 1 sekretarz techn., 1 pomiarowy,
- demontażu — 1 majster ciesielski, 7 pracown. fizycznych.

Poza tym dla każdego zespołu przewiduję, w zależności od potrzeb, samochód ciężarowy, lub terenowo-osobowy.

1. Czas trwania pracy:

a) zespół wywiadu			
wywiad na punktach A i C à 20,000	.	.	40,000 godz.
wywiad na punktach 1, 2, 3 à 4,000	.	.	12,000 "
		Razem	52,000 godz.
		$\frac{1}{3}$	17,333 "
b) zespół budowy:	Ostatecznie wywiad		34,667 godz.
montaż wież na punktach A i C à 88,889	.	.	177,778 godz.
montaż sygnałów à 4,706	.	.	14,118 "
		Razem	191,896 godz.
		$\frac{1}{3}$	63,965 "
	Ostatecznie zabudowa		127,931 godz.

c) zespół obserwacji triangulacyjnych:		
obserw. triang. na 6-ciu punktach à 10,000 godz.	.	60,000 godz.
pomiar elem. mimośr. na 3-ch stanow. à 4,000 godz.	.	12,000 „
Razem		72,000 godz.
	$\frac{1}{3}$	24,000 „
Ostatecznie obserwacje triang.		48,000 godz.
d) zespół demontażu:		
punkty A i C à 50,000 godz.	.	100,000 godz.
punkty 1, 2, 3, à 3,000 godz.	.	9,000 „
Razem		109,000 godz.
	$\frac{1}{3}$	36,333 „
Ostatecznie demontaż		72,667 godz.

Tak więc dla scharakteryzowania trzech punktów, zużyłoby w łącznej sumie 283,265 godz.

2. Koszt wykonania pomiaru:

a) zespół wywiadu:		
1 inż. — 34,667 godz. à 10,— zł	.	346,67 zł
4 prac. fizyczn. — 138,668 godz. à 4,— zł	.	554,67 „
diety dla 5-ciu pracown. à 26,— zł x 4 doby	.	520,00 „
Razem		1421,34 zł
b) zespół zabudowy:		
1 majster cies. — 127,931 zł à 6,— zł	.	767,59 zł
7 pracown. fizyczn. — 859,517 godz. à 4,— zł	.	3582,07 „
diety dla 8-miu pracown. à 26,— zł x 16 dob	.	3328,00 „
Razem		7677,66 zł
c) zespół obserwacji triangulacyjnych:		
1 inżynier — 48,000 godz. à 10,— zł	.	480,00 zł
1 sekretarz techn. — 48,00 godz. à 6,— zł	.	288,00 „
1 prac. fizyczny — 48,00 godz. à 4,— zł.	.	192,00 „
diety dla trzech pracown. à 26,— zł x 6 dob	.	468,00 „
Razem		1428,00 zł
d) zespół demontażu;		
1 majster cies. — 72,667 godz. à 6,— zł	.	436,00 zł
7 pracown. fizyczn. — 508,669 godz. à 4,— zł	.	2034,68 „
diety dla 8-miu pracown. à 26,— zł x 9 dob	.	1872,00 „
Razem		4376,68 zł

Ogólny koszt pracy terenowej wyniesie — 14.903,68 zł.

3. Transport:

- zespół wywiadu:
1 samochód terenowo-osobowy — czas trwania pracy — około 20,000 godz.
- zespół zabudowy:
1 samochód ciężarowy — czas trwania pracy — około 40,000 godz.
- zespół obserwacji triangulacyjnych:
1 samochód terenowo-osobowy — czas trwania pracy — około 5.000 godz.
- zespół demontażu:
1 samochód ciężarowy — czas trwania pracy — około 40,000 godz.

Łączny czas pracy samochodów wynosi 105,000 godz.

Koszt wykonania jednego punktu wynosi: 4.967,89 zł i 35,000 godz. pracy samochodu, oraz czas trwania pracy terenowej — 94,755 godz.

Dla bardziej przejrzystego wykazania przewagi konstrukcji punktów oporowych, porównajmy cyfrowo obydwie metody, a więc:

czas trwania pracy terenowej wyrazi się stosunkiem — 1:8,12

czas pracy samochodu — 1:4,20, oraz

koszt związany z pracami polowymi — 1:9,94.

Przeprowadzone porównanie jest oczywiście słuszne tylko w tym wypadku, gdy zagęszczenie sieci triangulacyjnej nie odbywa się równolegle z triangulacją wypełniającą. W wypadku równoległości prac — stosunki te ulegną zmianie na korzyść metod stosowanych obecnie. Podane cyfry nie są oczywiście ścisłe (koszt i czas trwania pracy terenowej będzie różny nawet dla każdego wykonawcy), niemniej mają swoją wymowę. Każda z nich wskazuje, że w wypadku doraźnego zagęszczania terenu, konstrukcja punktów oporowych ma zdecydowaną przewagę. Niejednokrotnie, ze względu na rozbudowę przemysłu, regulację rzek, i tp., staniemy przed problemem zagęszczenia terenu punktami o stosunkowo wysokiej dokładności i w jak najkrótszym czasie (przykładem tu może być Nowa Huta). W takich właśnie przypadkach, konstrukcja punktów oporowych wydaje się jedną z nielicznych, która te wszystkie wymogi może spełnić. O ile chodzi o stosowalność omawianego zagadnienia w terenie, nie przypuszczam, aby można go stosować wszędzie — ale na podstawie własnych spostrzeżeń twierdzę, że można ją stosować wszędzie tam, gdzie zagęszczenia sieci triangulacyjnej dokonać można przy pomocy wcięć.

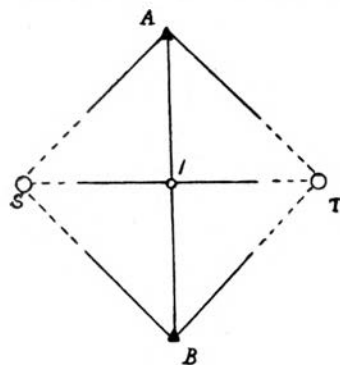
Wydaje mi się, że omawiane zagadnienie mogłoby mieć zastosowanie przy zakładaniu osnowy fotogrametrycznej. Proponuję ją nie jako wyłącznie obowiązującą, ale jedną z wielu, którą w zależności od warunków terenowych możnaby stosować. Zastosowanie jej w fotogrametrii pozwoliłoby na pewne tolerancje we wzajemnym usytuowaniu punktów — ze względu na małe wymogi dokładnościowe.

Nie przypuszczam, aby przy ewentualnym stosowaniu opisanej konstrukcji w terenie, w każdym przypadku można było stosować grupę trzypunktową, jaką przyjęto przy analizie dokładnościowej. Ilość punktów wyznaczanych będzie w każdym przypadku różna — w zależności od terenu i odległości między punktami oparcia. Na podstawie przeprowadzonego pomiaru w terenie stwierdzam, że najtrudniejszą rzeczą do przeprowadzenia jest wywiad — a ściślej mówiąc, obranie punktów oporowych. Wydaje się, że zwiększenie ilości punktów oporowych ułatwi w pewnym stopniu pracę w terenie.

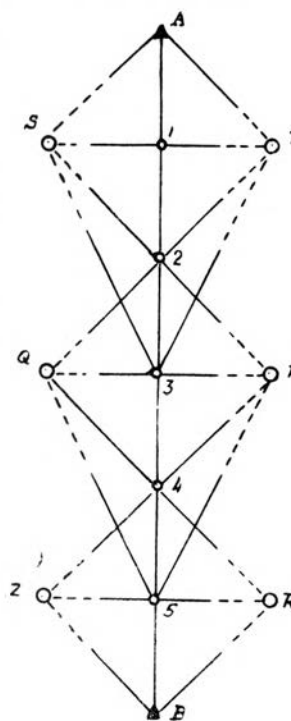
Wielką trudnością analizy dokładnościowej jest to, że trudno jest podać ogólną „receptę” odnośnie ilości i wzajemnego usytuowania punktów, którą możnaby stosować w każdym wypadku. Dla rozwią-

zania tak trudnej sprawy, przyjąłem za zasadniczy element konstrukcyjny foremny czworobok (rys. 19), który w zależności od odległości między punktami oparcia (A i B) będzie wielokrotnie powtarzany,

W celu zorientowania się w wielkościach błędów punktów, przy zastosowaniu wspomnianego elementu konstrukcyjnego — przeprowadziłem analizę dla przypadku przedstawionego na rysunku 20. Jak wyniki wykazują, zwiększenie ilości punktów wyznaczanych i oporowych nie ma decydującego wpływu na dokładność punktów. Współczynniki średnich błędów punktów wynoszą: $1=2,3$, $2=3,9$, $3=3,6$, $4=3,9$, $5=2,2$, $S=T=R=Z=3,3$, $P=Q=4,4$.



rys. 19



rys. 20

Zakładając średni błąd obserwacji kątowej $1''$, średnią długość boku około 3 km — błędy punktów wyznaczanych wyniosą około 5 cm.

Rozważając kolejne przypadki wzajemnego usytuowania punktów przy analizie dokładnościowej, zauważyłem, że niekiedy punkty oporowe są dokładnościowo nieznacznie gorsze od punktów wyznaczanych. Dzieje się to z reguły tam, gdzie punkty oporowe położone są blisko prostej łączącej dwa trygonometry. W pewnych więc przypadkach można je celowo zbliżać do punktów wyznaczanych, zapewniając im większe dokładności (przy takim układzie, nie byłyby to tylko punkty pomocnicze, ale możnaby je zaliczyć do punktów wyznaczanych). Przykładem tu może być układ punktów przedstawiony na rysunku 20 — największe średnie błędy punktów oporowych (P i Q) wynoszą 6,4 cm.

Prace nad badaniem dokładności konstrukcji punktów oporowych nie są zakończone. W zależności od potrzeb stosowania jej w praktyce, od dokładności wymaganych od punktów wyznaczanych, należałoby stosować różne kryteria w usytuowaniu punktów. Mam wrażenie, że dalsze dociekania nad dokładnością i stosownością tej konstrukcji w terenie — przyczynią się do postawienia jej w rzędzie ogólnie stosowanych metod nad zagęszczeniem sieci triangulacji wyższego rzędu.

СТАНИСЛАВ КАСПЭРЭК

ЗАГУЩЕНИЕ СЕТИ ТРИАНГУЛЯЦИИ ВЫСШЕГО РЯДА ПРИ ПОМОЩИ ОПОРНЫХ ПУНКТОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Проблема заключается в геодезическом определении ряда пунктов, лежащих между двумя тригонометрическими пунктами, координаты которых известны. Излагаемый метод предлагает решить этот вопрос при помощи вспомогательных, так называемых „опорных” пунктов. Эти опорные пункты могут быть расположены с обеих сторон прямой, соединяющей триангуляционные пункты, и являются только визирной маркой при визировании с определяемых пунктов. В зависимости от расположения опорных пунктов выступают два случая: центральная система (один опорный пункт), и „триангуляционный ход” с двумя опорными пунктами.

Для осуждения практической пригодности этого метода был произведен анализ точности метода и определены районы взаимного расположения определяемых и опорных пунктов, поручающие получение желаемой точности. Эти районы могут быть начерчены на кодатрасе или технической кальке, что может служить помощью при полевых работах.

Полевые работы полностью оправдали итоги теоретического анализа. Измерения уравнивались методом посредственных наблюдений; средние ошибки определяемых пунктов — около 2 см.

Произведенный сравнительный анализ подчеркнул преимущества этого метода по сравнению с другими относительно времени и экономики наблюдений. Численные соотношения оговариваемого метода и других методов загушения триангуляции следующие:

продолжительность полевых работ: 1:8,12

стоимость полевых работ: 1:9,94

STANISŁAW KASPEREK

L'ÉPAISSISEMENT DU RÉSEAU DE TRIANGULATION DU RANG
SUPÉRIEUR À L'AIDE DES POINTS DE RÉSISTANCE

RÉSUMÉ

Le problème consiste à caractériser en géodésie quelques points situés entre les deux trigonomètres dont les coordonnées sont connues. Cette caractéristique est établie à l'aide des points auxiliaires autrement dit: points de résistance.

Les points de résistance sont situés de deux cotés de la droite qui joint les deux trigonomètres et constituent uniquement un appui des lignes de visée des points fixés.

Dépendamment de la position des points de résistance il peut être question de deux cas à savoir: système central (un point de résistance) ou „suite de triangulation” avec deux points de résistance.

Afin de s'orienter sur l'utilité de cette construction en pratique, on a procédé à une analyse du problème en se basant sur les calculs de précision préliminaires.

Le résultat d'analyse détermina les champs des points à fixer et des points de résistance garantissant leur réciproque position de la sorte que la précision des points à fixer ne sont pas inférieure à celle établie d'avance.

Les champs des points à fixer sus mentionnés peuvent être tracés sur Kodatraces ou sur papier-carbone technique.

Le dessin ainsi établi peut être mis à profit pendant les travaux de terrain ce qui assure une opportune réciproque fixation des points.

Pour vérifier l'étude théorique, des travaux de terrain ont été effectués lesquels ont confirmé dans toute leur étendue les résultats de l'analyse de précision. Les résultats obtenus dans le terrain ont été égalisés par la méthode des observations intermédiaires et les erreurs moyennes des points à fixer oscillent à 2 centimètres environ.

Afin de prouver le prépondérance de la construction des points de résistance sur les méthodes actuellement pratiquées on a effectué en plus une analyse comparative quant à la durée du travail dans le terrain et quant au coût des travaux y afférent (en cas d'un épaissement immédiat du réseau de triangulation de rang supérieur).

Les rapports numériques sous mentionnés prouvent tout à fait l'avantage de la méthode des points de résistance, à savoir:

- 1) durée du travail dans le terrain — 1:8,12
- 2) coût du travail dans le terrain — 1:9,94.