

Nowy sposób obliczania azymutu gwiazdy Polarnej z kąta godzinnego

W praktyce geodezyjnej coraz częściej zachodzi potrzeba astronomicznego wyznaczenia azymutu z dokładnością rzędu sekundy łuku. Stosowana jest metoda wyznaczenia azymutu z kąta godzinnego gwiazdy Polarnej, polegająca na pomiarze kąta dwuściennego zawartego między wertykałem przedmiotu ziemskiego a wertykałem gwiazdy. Przy czym w momencie bisekcji Biegunowej nitką pionową teodolitu notujemy wskazanie chronometru z dokładnością jednej sekundy czasu.

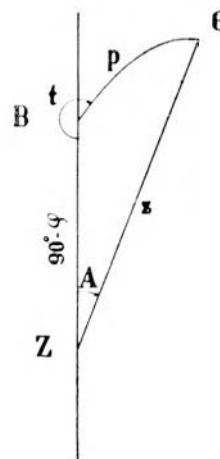
Kąt godzinny gwiazdy otrzymujemy przez dodanie do wskazania chronometru aktualnej poprawki chronometru oraz odjęcie rektascenzji i różnicy długości geograficznych między południkiem miejsca obserwacji a południkiem, według czasu którego idzie chronometr. Jeśli wprowadzimy następujące oznaczenia:

- t : kąt godzinny gwiazdy,
- T : wskazanie chronometru,
- u : poprawka chonometru,
- $\Delta\lambda$: długość geograficzna miejsca obserwacji minus długość geograficzna południka, według czasu którego idzie chronometr,
- α : rektascenzja widoma gwiazdy,

to dla obliczenia kąta godzinnego gwiazdy otrzymamy wzór następujący:

$$t = T + u - \Delta\lambda - \alpha \quad . \quad . \quad (1)$$

Dla obliczenia azymutu gwiazdy Biegunowej potrzeba oprócz kąta godzinnego znać również szerokość geograficzną miejsca obserwacji oraz deklinację gwiazdy. Wzór pozwalający na obliczenie azymutu w funkcji szerokości geograficznej, deklinacji i kąta godzinnego gwiazdy wyprowadzimy z podstawowych zależności w trójkącie paralaktycznym, którego wierzchołkami są: biegun B, gwiazda G oraz zenit Z. Przy czym zamiast deklinacji widomej wprowadzimy do rachunku jej dopełnienie, a więc odległość biegunową widomą.



Rys 1

Przyjmujemy następujące dodatkowe oznaczenia:

p : odległość biegunowa widoma gwiazdy,

z : odległość zenitalna gwiazdy,

A : azymut gwiazdy liczony od północnej strony południka w kierunku *NESW*.

Wyjdziemy z następujących podstawowych zależności w trójkącie paralaktycznym:

$$\sin z \cdot \sin A = -\sin p \cdot \sin t$$

$$\sin z \cdot \cos A = \cos \varphi \cdot \cos p - \sin \varphi \cdot \sin p \cdot \cos t$$

Po podzieleniu obu równań stronami, otrzymamy:

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\sin p \cdot \sin t}{\cos \varphi \cdot \cos p - \sin \varphi \cdot \sin p \cdot \cos t}$$

Dzieląc licznik i mianownik prawej strony ostatniego wzoru przez $\cos \varphi \cdot \cos p$, mamy wzór ostateczny:

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\sec \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \sin t}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t} \quad (2)$$

Obliczenia azymutu Biegunowej prowadzone są obecnie w praktyce najczęściej przy pomocy tablic podających wartości

$$\log \frac{1}{1-a},$$

gdzie: $\log a = \log (\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)$

Tablice takie zawiera Rocznik Astronomiczny na rok 1953, opracowany przez Geofizyczny Instytut Naukowo-Badawczy (Warszawa 1952, PPWK).

Brak natomiast sposobu pozwalającego na szybkie, dokładne i niezależne sprawdzenie wyniku. Lukę tę powinna wypełnić niniejsza praca, której celem jest wyłożenie nowej metody obliczania azymutu gwiazdy Polarnej przy użyciu tablic pomocniczych, zapewniającej dokładność rachunku $\pm 0,5$, a przy tym prostej w stosowaniu.

Podstawowy wzór do obliczania azymutu gwiazdy Polarnej nowym sposobem wyprowadzimy ze znanego wzoru (2) drogą przekształcenia go w szereg. Szereg ten będzie przedstawiał wartość azymutu wyrażoną w mierze łukowej w zależności od funkcji trygonometrycznych szerokości geograficznej (secans i tangens) i kąta godzinowego (sinus i cosinus) oraz od odległości biegunowej. Wyrazy uszeregujemy według rosnących potęg odległości biegunowej wyrażonej, podobnie jak azymut, w mie-

rze łukowej. Rozwinięcia zatrzymamy na wyrazach zawierających p w szóstej potęgze, których maksymalny wpływ na wartość azymutu, nawet na równoleżniku $\varphi = 60^\circ$, sięga obecnie zaledwie paru stutysięcznych sekundy łuku. Wpływ odrzuconych wyrazów z odległością biegunową w siódmej potęgze jest kilkadziesiąt razy mniejszy.

Wzór podstawowy po nieskomplikowanych przeróbkach przekształcimy w prosty wzór roboczy do obliczania azymutu Polarnej przy pomocy tablic współczynników. Tablice współczynników obliczone zostaną przy zastosowaniu wzoru podstawowego oraz rachunku interpolacyjnego, przy czym trzeba będzie przyjąć na odległość biegunową gwiazdy jakąś średnią wartość z okresu lat kilkunastu. I dopiero po ich upływie, kiedy p gwiazdy Polarnej osiągnie wartość 53 minut łuku, wpływ błędu tablic na obliczany azymut pocnie sięgać w skrajnych przypadkach $0''.25$, co w połączeniu z innymi błędami może już być niepożądane. Wtedy trzeba będzie zestawić nowe tablice.

Po tym wprowadzeniu przejdziemy teraz do wyprowadzenia wzoru podstawowego.

Wyjściowy wzór (2) możemy napisać również w postaci następującej:

$$\operatorname{tg} A = -\sec \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \sin t \cdot (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-1} \quad (3)$$

Skądinąd wiadomo, że:

$$A = \operatorname{tg} A - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 A + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 A - \dots$$

Podstawiając w miejsce $\operatorname{tg} A$ prawą stronę wzoru (3), otrzymamy:

$$\begin{aligned} A = & -\sec \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \sin t \cdot (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-1} \\ & + \frac{1}{3} \sec^3 \varphi \cdot \operatorname{tg}^3 p \cdot \sin^3 t \cdot (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-3} \\ & - \frac{1}{5} \sec^5 \varphi \cdot \operatorname{tg}^5 p \cdot \sin^5 t \cdot (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-5} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Rozwinięcia dwumianów $(1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-2n+1}$ przyjmą postać następującą:

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-1} = & 1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 p \cdot \cos^2 t + \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \operatorname{tg}^3 p \cdot \cos^3 t \\ & + \operatorname{tg}^4 \varphi \cdot \operatorname{tg}^4 p \cdot \cos^4 t + \operatorname{tg}^5 \varphi \cdot \operatorname{tg}^5 p \cdot \cos^5 t + \dots \\ (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-3} = & 1 + 3 \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t + 6 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 p \cdot \cos^2 t \\ & + 10 \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \operatorname{tg}^3 p \cdot \cos^3 t + \dots \\ (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t)^{-5} = & 1 + 5 \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Po podstawieniu do wzoru (4) powyższych rozwinięć, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 A = & -\operatorname{tg} p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t - \operatorname{tg}^2 p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \\
 & - \operatorname{tg}^3 p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t - \operatorname{tg}^4 p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \cos^3 t \\
 & - \operatorname{tg}^5 p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^4 \varphi \cdot \cos^4 t - \operatorname{tg}^6 p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^5 \varphi \cdot \cos^5 t \\
 & + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 p \cdot \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t + \operatorname{tg}^1 p \cdot \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \\
 & + 2 \operatorname{tg}^5 p \cdot \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t + \frac{10}{3} \operatorname{tg}^6 p \cdot \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \cos^3 t \\
 & - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 p \cdot \sec^5 \varphi \cdot \sin^5 t - \operatorname{tg}^6 p \cdot \sec^5 \varphi \cdot \sin^5 t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t - \dots
 \end{aligned}$$

Grupując wyrazy szeregu według rosnących potęg $\operatorname{tg} p$, mamy:

$$\begin{aligned}
 A = & -\operatorname{tg} p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t - \operatorname{tg}^2 p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \\
 & - \operatorname{tg}^3 p \cdot \left(\sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t - \frac{1}{3} \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t \right) \\
 & - \operatorname{tg}^4 p \cdot (\sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \cos^3 t - \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t) \\
 & - \operatorname{tg}^5 p \cdot \left(\sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^4 \varphi \cdot \cos^4 t - 2 \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t + \frac{1}{5} \sec^5 \varphi \cdot \sin^5 t \right) \\
 & - \operatorname{tg}^6 p \cdot \left(\sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg}^5 \varphi \cdot \cos^5 t - \frac{10}{3} \sec^3 \varphi \cdot \sin^3 t \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \cos^3 t \right. \\
 & \left. + \sec^5 \varphi \cdot \sin^5 t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \right) - \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

Rozwinięcia w szereg potęgowy wartości $\operatorname{tg}^n p$ przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} p &= p + \frac{1}{3} p^3 + \frac{2}{15} p^5 + \dots \\
 \operatorname{tg}^2 p &= p^2 + \frac{2}{3} p^4 + \frac{17}{45} p^6 + \dots \\
 \operatorname{tg}^3 p &= p^3 + p^5 + \dots \\
 \operatorname{tg}^4 p &= p^4 + \frac{4}{3} p^6 + \dots \\
 \operatorname{tg}^5 p &= p^5 + \dots \\
 \operatorname{tg}^6 p &= p^6 + \dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

Po podstawieniu rozwinięć (7) do wzoru (6) i po ugrupowaniu według rosnących potęg p , otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 A = & -p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \\
 & -p^2 \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \\
 & -p^3 \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \left(\frac{1}{3} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t - \frac{1}{3} \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \right) \\
 & -p^4 \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot \left(\frac{2}{3} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t - \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \right) \\
 & -p^5 \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \left[\frac{2}{15} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t + \operatorname{tg}^4 \varphi \cdot \cos^4 t \right. \\
 & \quad \left. - \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \cdot \left(\frac{1}{3} + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t \right) + \frac{1}{5} \sec^4 \varphi \cdot \sin^4 t \right] \\
 & -p^6 \cdot \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot \left[\frac{17}{45} + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t + \operatorname{tg}^4 \varphi \cdot \cos^4 t \right. \\
 & \quad \left. - \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{10}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t \right) + \sec^4 \varphi \cdot \sin^4 t \right] - \dots
 \end{aligned} \tag{8}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 (w.3) &= \frac{1}{3} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t - \frac{1}{3} \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \\
 (w.4) &= \frac{2}{3} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t - \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \\
 (w.5) &= \frac{2}{15} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t + \operatorname{tg}^4 \varphi \cdot \cos^4 t - \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \cdot \left(\frac{1}{3} + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t \right) \\
 &\quad + \frac{1}{5} \sec^4 \varphi \cdot \sin^4 t \\
 (w.6) &= \frac{17}{45} + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t + \operatorname{tg}^4 \varphi \cdot \cos^4 t - \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{10}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t \right) \\
 &\quad + \sec^4 \varphi \cdot \sin^4 t
 \end{aligned} \tag{9}$$

Uwzględniając oznaczenia (9) wzór (8) przyjmie ostatecznie postać wzoru podstawowego:

$$A = -p \cdot \sec \varphi \cdot \left\{ \sin t + p \cdot \sin t \cdot \left[\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t + p \cdot (w \cdot 3) + p^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot (w \cdot 4) \right. \right. \\ \left. \left. + p^3 \cdot (w \cdot 5) + p^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot (w \cdot 6) + \dots \right] \right\} \quad (10)$$

Zarówno azymut A jak i odległość biegunowa p , są tu wyrażone w radianach. Przyjmując, że:

p'' oznacza odległość biegunową wyrażoną w sekundach łuku, zaś ρ'' oznacza promień koła wyrażony w sekundach łuku,

możemy wzór (10) przedstawić w postaci następującej:

$$A = -p \cdot \sec \varphi \cdot \left\{ \sin t + \frac{p''}{1000} \cdot \frac{10^3}{\rho''} \cdot \sin t \cdot \left[\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p''}{\rho''} \cdot (w \cdot 3) + \left(\frac{p''}{\rho''} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot (w \cdot 4) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{p''}{\rho''} \right)^3 \cdot (w \cdot 5) + \left(\frac{p''}{\rho''} \right)^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot (w \cdot 6) + \dots \right] \right\}$$

Wprowadźmy teraz nowe oznaczenie, a mianowicie niech:

$$W = \frac{10^3}{\rho''} \cdot \sin t \cdot \left[\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t + \frac{p''}{\rho''} \cdot (w \cdot 3) + \left(\frac{p''}{\rho''} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot (w \cdot 4) \right. \\ \left. + \left(\frac{p''}{\rho''} \right)^3 \cdot (w \cdot 5) + \left(\frac{p''}{\rho''} \right)^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t \cdot (w \cdot 6) + \dots \right] \quad (11)$$

Wzór roboczy służący do obliczania azymutu gwiazdy Polarnej ujmijemy następująco:

$$A = -p \cdot \sec \varphi \cdot \left(\sin t + \frac{p''}{1000} \cdot W \right) \quad (12)$$

Przy czym, jeśli chcemy azymut otrzymać w sekundach łuku, należy odległość biegunową p (przed nawiasem) wyrazić również w sekundach łuku. Jeśli natomiast mamy zamiar azymut otrzymać w gradach, trzeba p również wyrazić w gradach. Wielkość $\frac{p''}{1000}$ w nawiasie przy współczynniku W należy przy tym w każdym wypadku wyrażać w sekundach łuku.

Przy okazji powiedzmy, że do wyrażenia stanowiącego współczynnik W wprowadzono 10^3 , a p'' podzielono przez tysiąc dla późniejszej wygody rachunkowej.

Ze wzoru roboczego (12) wynika, że dla otrzymania azymutu gwiazdy Biegunowej, aktualną (zaczepniętą na dany moment z Rocznika Astronomicznego) wartość odległości biegunowej gwiazdy mnożymy przez secans szerokości geograficznej miejsca obserwacji. Następnie — $p \cdot \sec \varphi$ mnożymy przez sinus kąta godzinowego gwiazdy, poprawionego o wielkość $\frac{p''}{1000} W$. Współczynnik W interpolujemy z tablic autora

umieszczonych w drugiej części niniejszej pracy. W tym celu należy wybrać kolumnę odpowiadającą szerokości geograficznej najbliższej szerokości geograficznej miejsca obserwacji. W kolumnie tej współczynnik oblicza się dla danego kąta godzinowego drogą interpolacji liniowej i poprawia o maksymalnie 2 jednostki ostatniego miejsca w wyniku dodatkowej interpolacji w zależności od szerokości geograficznej.

Tablice podają współczynniki W dla szerokości geograficznych od 45° do 60° co 10 minut łuku oraz dla kątów godzinnych od 0^h do 12^h co 10 minut czasu. Dla kątów godzinnych od 12^h do 24^h współczynniki równe są co do wartości bezwzględnej współczynnikom dla t od 12^h do 0^h , zaś znak posiadają przeciwny. I tak W dla kąta godzinnego np. 14^h równa się — W dla $t = 10^h$. Biorąc zatem z tablic współczynnik dla kąta godzinnego większego od 12^h należy go opatrzyć znakiem przeciwnym do podanego w tablicach. Przy czym dla ułatwienia należy korzystać z tablicy argumentów z prawej strony.

Na ostatniej stronie pracy umieszczone dwie tablice ułatwiające rachunek interpolacyjny. Pierwsza z nich przeznaczona jest zasadniczo do interpolacji w zależności od kąta godzinnego, ale jej pierwsze kolumny mogą służyć również i dla dodatkowej interpolacji w zależności od szerokości geograficznej. Drugą tablicę przewidziano dla ułatwienia rachunku przy dodatkowej interpolacji. Podane są tu interwały końcówki wartości szerokości geograficznej oraz odpowiadające im poprawki wyrażone w jednostkach ostatniego miejsca (piątego po przecinku).

Przejdziemy teraz z kolei do rozpatrzenia wzoru roboczego (12) z punktu widzenia dokładności. W tym celu najpierw go zróżniczkujemy.

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} -dA &= \sec \varphi \cdot \sin t \cdot dp + p \cdot \sec \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin t \cdot d\varphi \\ &+ p \cdot \sec \varphi \cdot \cos t \cdot dt + p \cdot \frac{p''}{1000} \cdot \sec \varphi \cdot dW \end{aligned}$$

Przechodząc do rachunku, w którym operować będziemy małymi przyrostami azymutu, odległości biegunowej i szerokości geograficznej

wyrażonymi w sekundach łuku oraz kąta godzinnego wyrażonego w sekundach czasu, wzór powyższy napiszemy w postaci następującej:

$$\begin{aligned} -dA'' &= \sec \varphi \cdot \sin t \cdot dp'' + \frac{p''}{\rho''} \cdot \sec \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin t \cdot d\varphi'' \\ &+ \frac{p''}{\rho''} \cdot \sec \varphi \cdot \cos t \cdot dt'' + \frac{p''^2}{1000} \cdot \sec \varphi \cdot dW \end{aligned} \quad (13)$$

Aby zobrazować wpływ na azymut błędu wynikającego z przyjęcia do obliczenia tablicy współczynników W pewnej średniej wartości na odległość biegunową, dW wyrazimy w zależności od $\Delta p''$, którym to symbolem oznaczymy różnicę średniej i aktualnej wartości p . W tym celu obliczymy pochodną cząstkową $\frac{\partial W}{\partial p''}$ ze wzoru (11), ograniczając się do wyrazów zawierających p'' w pierwszej potęgce. Otrzymamy:

$$\frac{\partial W}{\partial p''} = \frac{1000}{\rho''^2} \cdot \sin t \cdot (w \cdot 3)$$

Przechodząc do rachunku przyrostami, mamy:

$$dW = \frac{1000}{\rho''^2} \cdot \sin t \cdot (w \cdot 3) \cdot \Delta p''$$

Uwzględniając ponadto wzór (1), który po zróżniczkowaniu przedstawia się następująco:

$$dt = dT + du - d(\Delta \lambda) - d\alpha$$

oraz przyjmując, że odległość biegunowa gwiazdy Polarnej wynosi 58', wzór (13) ujmemy tak:

$$\begin{aligned} -dA'' &= \sec \varphi \cdot \sin t \cdot dp'' + 0,017 \sec \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin t \cdot d\varphi'' \\ &+ 0,25 \sec \varphi \cdot \cos t \cdot [dT + du - d(\Delta \lambda) - d\alpha] \\ &+ 0,000285 \sec \varphi \cdot \sin t \cdot \left(\frac{1}{3} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 t - \frac{1}{3} \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 t \right) \cdot \Delta p'' \end{aligned} \quad (14)$$

Ze wzoru (14) wynika, że na błąd wyznaczenia azymutu zarówno błędy odległości biegunowej i szerokości geograficznej, jak i błędy odczytania wskazania chronometru, poprawki chronometru, różnicy długości geograficznych oraz rektascenzji wpływają w sposób znany już z analizy dotychczas stosowanych wzorów.

Jeśli idzie o wpływ różnicy odległości biegunowych: średniej i aktualnej, to w najniekorzystniejszych warunkach dla szerokości geograficznej 60° wyraz przy $\Delta p''$ osiąga wartość 0,00064. Odchylenie zatem p o 3'

od wartości przyjętej do obliczenia tablicy współczynników W spowoduje błąd azymutu równy $0''.12$ przez zniekształcenie współczynnika W o pół jednostki piątego miejsca po przecinku. Przy opracowywaniu tablic przyjęto, że odległość biegunowa gwiazdy Polarnej równa się $56'$. Około roku 1967 zacznie ona osiągać wartość $53'$ i wtedy już w skrajnych przypadkach błąd tablic będzie powodował błąd azymutu prawie $0''.25$ przez zniekształcenie współczynnika W o jednostkę piątego miejsca po przecinku wskutek odchylenia aktualnej wartości odległości biegunowej od przyjętej do obliczenia tablic oraz wskutek błędu zaokrąglania. Trzeba więc będzie zestawić nowe tablice, przynajmniej dla większych szerokości geograficznych. Im mniejsza szerokość tym dłużej tablice zachowują założoną dokładność.

Przedstawimy jeszcze wzór (14) dla średniej szerokości geograficznej Polski, tj. dla $\varphi = 52^\circ$, w uproszczonej postaci, po opuszczeniu wyrazów ujmujących wpływ błędów pozycji gwiazdy Biegunowej i wyrażając błąd współczynnika W w jednostkach ostatniego miejsca. Otrzymamy:

$$-dA'' = 0,03s \sin t \cdot d\varphi'' + 0,4 \cos t \cdot [dT^s + du^s - d(\Delta\lambda^s)] + 0,2 dW \quad (15)$$

Na zakończenie podamy przykład obliczenia (w gradach) azymutu gwiazdy Polarnej przy pomocy omawianych tablic. Przykład obliczono dla stanowiska o szerokości geograficznej $51^\circ 53' 12''$ dla czterech różnych kątów godzinnych Biegunowej w dniu 19 lipca 1953 r.

φ	$51^\circ 53' 12''$			
$\sec \varphi$	1,62 017			
$\hat{\sigma}$	$89^\circ 02' 34''.2$			
p	57 25,8			
p''	3445,8			
p^g	1,0635 2 g			
t	$\begin{smallmatrix} h & m & s \\ 4 & 16 & 25 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} h & m & s \\ 10 & 42 & 47 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} h & m & s \\ 14 & 11 & 06 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} h & m & s \\ 22 & 37 & 54 \end{smallmatrix}$
t	$64^\circ 06' 15''$	$160^\circ 41' 45''$	$212^\circ 46' 30''$	$339^\circ 28' 30''$
W	+ 0,00 242	— 0,00 188	+ 0,00 276	— 0,00 208
$\sin t$	+ 0,89 959	+ 0,33 058	— 0,54 134	— 0,35 062
$\frac{p''}{1000} \cdot W$	+ 834	— 648	+ 951	— 717
$\sin t + \frac{p''}{1000} \cdot W$	+ 0,90 793	+ 0,32 410	— 0,53 183	— 0,35 779
$-p^g \cdot \sec \varphi$	— 1,72 308			
A	— 1,5644 g	— 0,5585 g	0,9164 g	0,6165 g

ЮЛИАН РАДЭЦКИ

НОВЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ АЗИМУТА ПОЛЯРНОЙ ПО ЧАСОВОМУ УГЛУ

СОДЕРЖАНИЕ

Нынешний труд имеет своей целью изложить новый метод вычисления азимута Полярной пользуясь вспомогательными таблицами; точность вычисления этим методом $\pm 0''.5$.

Основная формула выведена из известного соотношения:

$$\operatorname{tg} A = - \frac{\sec \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \sin t}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t} \quad (10)$$

путем преобразования его в ряд, представляющий значение азимута в зависимости от тригонометрических функций географической широты, часового угла и полюсного расстояния, выраженного, как и азимут в радианах.

Основная формула (10) преобразована в простую удобную для вычисления формулу, при помощи таблиц коэффициентов, помещенных во второй части труда:

$$A = - p \cdot \sec \varphi \left(\sin t + \frac{p''}{1000} \cdot W \right)$$

При этом, если желаем получить азимут в секундах дуги, следует p (перед скобками) выразить тоже в секундах дуги. Если желаем получить азимут в градах, p тоже следует выразить в градах. Величину $\frac{p''}{1000}$ в скобках при коэффициенте W следует при этом всегда выражать в секундах дуги.

Таблицы дают коэффициенты для географических широт от 45° до 60° через 10 минут дуги и для часовых углов от 0^h до 12^h через 10 минут времени. Для часовых углов от 12^h до 24^h коэффициенты по абсолютным величинам равны коэффициентам для t от 0^h до 12^h .

Находя в таблицах коэффициент для $t > 12^h$, следует брать его с обратным знаком, чем в таблицах.

При обработке таблиц, принято, что полюсное расстояние Полярной равно $56'$. Около 1967 года оно будет только $53'$, и ошибка таблиц в крайних случаях будет искажать азимут почти на $0''.25$ и тогда нужно будет вычислить новые таблицы.

JULIAN RADECKI

NOUVELLE MÉTHODE POUR CALCULER L'AZIMUT DE LA POLAIRE
AU MOYEN DE L'ANGLE HORAIRE

R É S U M É

Le but de ce travail est l'explication de la nouvelle méthode de calcul d'azimut de la Polaire. Ce procédé consiste en l'utilisation des tables auxilliaires et il garantit le calcul avec précision de $\pm 0''.5$.

La formule de base prend son origine de la formule bien connue, à savoir:

$$\operatorname{tg} A = - \frac{\sec \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \sin t}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} p \cdot \cos t}$$

Cette formule est transformé en une série, laquelle représente la valeur d'azimut dépendant des fonctions trygonométriques de latitude et de l'angle d'heure ainsi que de la distance polaire, cette dernière étant exprimée, de même que l'azimut, en mesure d'arc.

La formule fondamentale (10) fut donc transformée en une simple formule de travail afin de calculer l'azimut de la Polaire à l'aide de tables des coefficients, insérés dans la dernière partie de ce travail.

$$A = -p \cdot \sec \varphi \cdot \left(\sin t + \frac{p''}{1000} \cdot w \right)$$

Désirant obtenir l'azimut en secondes d'arc, il faut exprimer p (avant la parenthèse) aussi en secondes d'arc; par contre si nous préférons obtenir l'azimut en grades, il faut aussi exprimer p en grades.

Dans ces deux cas la valeur $\frac{p''}{1000}$ près du coefficient W (entre parenthèse) doit être exprimée en secondes d'arc.

Les tables indiquent les coefficients pour latitudes géographiques de 45° à 60° tous les 10 minutes d'arc, et pour les angles horaires de 0^h à 12^h tous les 10 minutes de temps.

Pour les angles horaires de 12^h à 24^h , les coefficients W sont égaux, quant à leur valeur absolue aux coefficients pour t de 12^h à 0^h .

D'après les tables, le coefficient pour $t > 12^h$ doit être muni d'un signe autre que celui figurant dans les tables. En élaborant les tables il a été convenu que la distance polaire serait égale à $56'$.

Vers l'année 1967, c'est à dire au moment où cette valeur arriverait à $53'$ l'erreur des tables déformera dans les cas extrêmes l'azimut presque de $0''25$ c'est pourquoi il faudra alors élaborer des tables nouvelles.