

Trasowanie osnowy geodezyjnej pod postacią siatki kwadratów w oparciu o podstawy rachunku wyrównawczego i pojęcie krakowianów transformujących

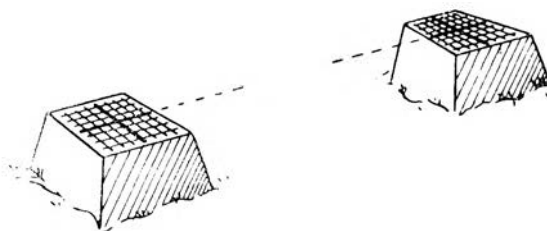
1. W pewnych wypadkach celowe bywa zakładanie osnowy geodezyjnej pod postacią siatki kwadratów. Jeżeli na osnowie tego rodzaju mają być następnie oparte pomiary o wysokiej dokładności, co ma np. miejsce w realizacyjnych pomiarach przemysłowych, słuszne jest takie zorganizowanie trasowania założonego z góry zespołu punktów, aby nie tylko osiągnięta została ekonomia pracy w podjętych czynnościach geodezyjnych, ale jednocześnie istniała możliwość zgodnego z nauką unieszkodliwienia nieuniknionych we wszelkich czynnościach pomiarowych błędów przypadkowych pomiaru, jak również istniała możliwość i łatwość poprawnego naukowo scharakteryzowania dokładności osiągniętych rezultatów. W niniejszej pracy postaramy się w sposób naukowo poprawny sformułować zagadnienie wytrasowania zespołu punktów geodezyjnych tworzących sieć kwadratów oraz rozwiązać to zagadnienie w oparciu o pojęcia rachunku krakowianowego Banachiewicza. Okaze się że zgodne z nauką rozwiązanie zadania staje się tu jednocześnie — jak to często bywa — rozwiązaniem najkrótszym, na co warto może zwrócić specjalną uwagę osób kierujących przebiegiem procesu produkcji geodezyjnej, tak często niestety niedoceniających ekonomii naukowego podchodzenia do spraw.

Aby niniejsza praca mogła być w pełni wykorzystana również przez osoby nieznające rachunku krakowianowego, rozpoczynam od ogólnego sformułowania zagadnienia oraz opisu postępowania technicznego, przenosząc na koniec dowody wymagające znajomości rachunku krakowianowego.

2. Wyobraźmy sobie, że siatka kwadratów została na gruncie wytrasowana przy użyciu takich czy innych środków technicznych, lecz z zachowaniem warunku aby różnice między nominalną t. zn. założoną długością boku kwadratu a zmierzoną długością boku była w każdym wypadku dostatecznie mała, iżby można drugą potęgę tej różnicy pomnożoną przez 10 i podzieloną przez długość boku kwadratu uznać w danym postępowaniu za wielkość zaniedbywalną.

Tak np. przy trasowaniu sieci 100 metrowych kwadratów dopuścimy takie jej przybliżone wytrasowanie, aby różnica między dowolnym zmierzonym bokiem a 100 metrami nie przekraczała 0,10 metra w tym wypadku jeżeli uznajemy za wartość zaniedbywalną $(0,01 \cdot 10) : 100 = 0,001$ metra tj. 1 mm.

Niech znaki geodezyjne przy trasowaniu zostaną przy tym zrealizowane — zgodnie zresztą z istniejącym zwyczajem — pod postacią kamieni betonowych, na górnej płaszczyźnie których umieszczono płytki metalowe z wykreśloną siatką centymetrową zorientowaną do tyczonego układu kwadratów (osiągnąć to najwygodniej przez naklejenie na metalowej tabliczce zastabilizowanego już znaku — siatki centymetrowej wykreślonej na kawałku kodatrasu; przyczym dostatecznie dokładne zorientowanie do tyczonego układu kwadratów osiągnie się przy użyciu kieszonkowej busoli).



Rys. 1

Po ukończeniu czynności przybliżonego trasowania przeprowadzamy dokładny pomiar zarówno kątów jak i boków w każdym kwadracie, przyjmując za punkty geodezyjne punkty środkowe siatek centymetrowych. Nazywamy je dalej krótko „punktami zerowymi kamieni”. Dokładność pomiaru boków i kątów koordynujemy przy pomiarze tak, aby wartość średniego błędu względnego pomiaru boku była równa wartości radialnej średniego błędu pomiaru kąta.

Jeśli więc np. pomierzono kąty z błędem średnim rzędu $20''$, to znaczy w mierze radialnej $0,000\,005 \cdot 20 = 0,000\,1$, wówczas długości boków powinny być mierzone ze średnim błędem względnym rzędu $0,000\,1$, to znaczy bok 100 metrowy winien być zmierzony z błędem średnim rzędu 1 cm.

Podkreślamy, że nie jest intencją autora sugerowanie tu takich czy innych dokładności pomiaru w sieciach kwadratów, powyższy więc przykład, ani też podany dalej przykład liczbowy wyrównania sieci o jednym kwadracie nie mają na celu sugerowania takiego czy innego normalizowania dokładności; jakkolwiek normalizowanie uważamy tu za wskazane.

Ponieważ rezultaty przeprowadzonego po przybliżonym trasowaniu pomiaru kątów i boków obciążone są błędami przypadkowymi tego pomiaru, za najprawdopodobniejsze wartości współrzędnych X i Y punktów zerowych kamieni odniesione do obranego układu osiowego XOY , (którego początek przyjmujemy w jednym z punktów zerowych kamieni zaś kierunek osi głównej wyznaczymy przez ten i sąsiedni punkt zerowy kamienia) uznać musimy takie wartości współrzędnych, z których obliczone wartości kątów i boków dadzą układ obserwacji poprawionych o najmniejszej sumie kwadratów poprawek obserwacyjnych, dzielonych przez kwadraty błędów średnich:

$$\left[\frac{V \cdot V}{m_0 \cdot m_0} \right] = \text{minimum}$$

Z uwagi na założoną równość błędów średnich wszystkich obserwacji, warunek ten napisać też można pod postacią:

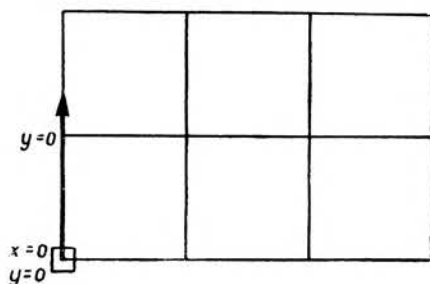
$$[vv] + [ww] = \text{minimum}$$

przy czym v oznacza poprawkę radialną kąta zaś w poprawkę względną boku. (Bliższe uwagi na temat poprawek podajemy dalej w części teoretycznej).

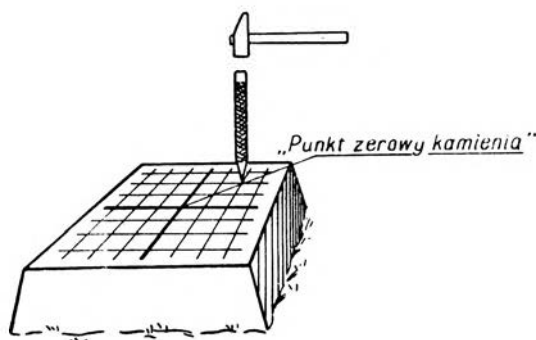
Oznaczmy przez x_z y_z przybliżone wartości współrzędnych punktu zerowego pewnego kamienia. Niech przy tym te współrzędne będą identyczne z nominalnymi, to znaczy założonymi w liczbach okrągłych współrzędnymi tego punktu. Oznaczmy dalej przez dx dy drobne poprawki, jakie w wyniku wyrównania opartego na warunku minimum dodać należy do wartości współrzędnych nominalnych punktu zerowego kamienia dla otrzymania wartości najprawdopodobniejszych współrzędnych tegoż punktu. Wartości

$$x_z + dx \text{ oraz } y_z + dy$$

charakteryzować nam będą liczbowo najprawdopodobniejsze – z punktu widzenia dokonanych obserwacji – położenie punktu zerowego kamienia w odniesieniu do obranego układu. Wynika stąd jednak, że chcąc wyznaczyć na gruncie najprawdopodobniejsze z punktu widzenia dokonanych obserwacji położenie punktu o współrzędnych nominalnych – o co w zagadnieniu chodzi – wystarczy od punktu zerowego kamienia przesunąć się w kierunku osi OX , o odcinek skierowany $\delta x = -dx$, oraz w kierunku osi OY o odcinek skierowany $\delta y = -dy$, co uzmysławia załączony poniżej rysunek, a co wykonujemy w terenie przez uderzenie punktakiem w odpowiedni punkt siatki centymetrowej na danym kamieniu. Odcinki δx δy nazywamy dalej „poprawkami trasowania”.



Rys. 2

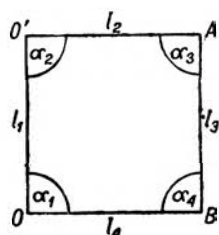


Rys. 3

3. Wyznaczanie poprawek trasowania w oparciu o każdorazowe formułowanie zagadnienia w języku metody najmniejszych kwadratów, to znaczy o układanie i rozwiązywanie układu równań normalnych Gaussa, byłoby bardzo uciążliwe. Ponadto musielibyśmy tu zakładać świadome operowanie rachunkiem wyrównawczym u osoby przeprowadzającej trasowanie, co nie zawsze może mieć miejsce.

Ponieważ jednak potrzeby praktyki wyczerpują tu kilka zaledwie rodzajów siatek, wystarczy opracowanie kilku tabel liczbowych, odpowiadających obranym typom siatek, pozwalających na czysto mechaniczne rozwiązywanie zagadnienia wyznaczenia poprawek trasowania na drodze mnożenia kolumny „różnic obserwacyjnych”, to znaczy kolumny 1) różnic między wartościami teoretycznymi kątów $\frac{\pi}{2}$ a ich wartościami uzyskanymi z pomiaru α mnożonych przez długość boku kwadratu k , i 2) różnic między długościami boków nominalnymi a otrzymanymi z pomiaru l , przez kolumny tabeli, którą nazywamy dalej „krakowianem transformującym”. W wyniku pomnożenia kolumny różnic obserwacyjnych przez pierwszą kolumnę krakowianu transformującego otrzymamy pierwszą poprawkę trasowania; w wyniku pomnożenia kolumny różnic obserwacyjnych przez drugą kolumnę krakowianu transformującego, otrzymamy drugą poprawkę trasowania itd.

Pomnożenie wreszcie kolumny różnic obserwacyjnych przez ostatnią, oddzieloną punktami od poprzedzających „kolumnę sumową” krakowianu transformującego da wielkość, która — w wypadku bezbłędnego wykonania wszystkich mnożeń — będzie równa sumie wszystkich poprawek trasowania.



Rys. 4

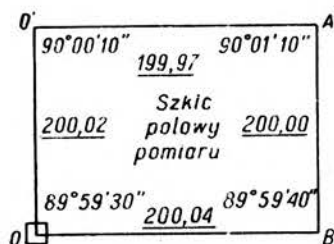
Wartości liczbowe różnic obserwacyjnych należy oczywiście pisać w takiej kolejności, w jakiej wypisano je we wzorze i oznaczono na umieszczonym obok wzoru szkicu wyjaśniającym. Otrzymane w wyniku rachunku poprawki trasowania należy wpisać na szkicu polowy uważnie obserwując kolejność ich oznaczenia we wzorze i na szkicu wyjaśniającym. Poniżej podajemy wzór liczbowy i szkic wyjaśniający dla wypadku trasowania najprostszej siatki: pojedynczego kwadratu. (Rys. 4)

$$\begin{pmatrix} \partial x_0' \\ \partial x_A \\ \partial y_A \\ \partial x_B \\ \partial y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) k \\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) k \\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right) k \\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_4\right) k \\ (k - l_1) \\ (k - l_2) \\ (k - l_3) \\ (k - l_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,1667 & -0,4167 & 0,1667 & -0,5833 & -0,1667 & -1,1667 \\ -0,1667 & 0,4167 & -0,1667 & 0,2500 & 0,1667 & 0,5000 \\ 0,1667 & -0,0833 & -0,1667 & 0,0833 & 0,1667 & 0,1667 \\ 0,1667 & 0,0833 & 0,1667 & 0,2500 & -0,1667 & 0,5000 \\ 0,6667 & 0,5000 & 0 & 0,1667 & 0 & 1,3334 \\ 0 & -0,1667 & 0,6667 & -0,1667 & 0,3333 & 0,6666 \\ 0,3333 & 0,5000 & 0 & -0,1667 & 0 & 0,6666 \\ 0 & 0,1667 & 0,3333 & 0,1667 & 0,6667 & 1,3334 \end{pmatrix}$$

Przykład liczbowy

Po przybliżonym wytrasowaniu kwadratu zmierzono starannie jego kąty i boki otrzymując dane uwidocznione na szkicu: (rys. 5)

Obliczone ze szkicu elementy kolumny różnic obserwacyjnych wyniosą odpowiednio:



Rys. 5

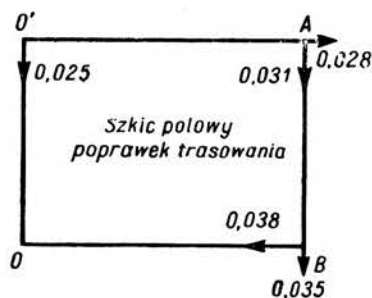
$$\begin{aligned}
 + 30'' \cdot 0,000\,004\,848 \cdot 200 &= 0,029\,1 \\
 - 10'' \cdot 0,000\,004\,848 \cdot 200 &= -0,009\,7 \\
 - 70'' \cdot 0,000\,004\,848 \cdot 200 &= -0,067\,9 \\
 + 20'' \cdot 0,000\,004\,848 \cdot 200 &= 0,019\,4 \\
 200,00 - 200,02 &= -0,020\,0 \\
 200,00 - 199,97 &= 0,030\,0 \\
 200,00 - 200,00 &= 0,000\,0 \\
 200,00 - 200,04 &= -0,040\,0
 \end{aligned}$$

Mnożenie kolumny różnic obserwacyjnych przez kolejne kolumny krakowianu transformującego najwygodniej wykonać pisząc na pasku kartonu kolejne elementy kolumny różnic i umieszczając ten pasek przed kolumnami krakowianu.

W wyniku mnożenia otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \partial x_{O'} &= -0,024\,7 \\
 \partial x_A &= -0,030\,6 \\
 \partial y_A &= 0,027\,7 \\
 \partial x_B &= -0,035\,2 \\
 \partial y_B &= -0,037\,7
 \end{aligned}$$

$$\text{kontrola sumowa: } -0,100\,4$$



Rys. 6

4. W szczególnych wypadkach zachodzić może potrzeba scharakteryzowania dokładności wyznaczenia punktów siatki kwadratów. Jeżeli założymy że błędy wyznaczenia poprawek trasowania są równe zeru, co z uwagi na małe wielkości tych poprawek będzie zupełnie usprawiedliwione, wówczas dokładność wyznaczenia punktów w siatce kwadratów będą nam charakteryzować średnie błędy współrzędnych tych punktów. Średnie błędy współrzędnych m_x m_y można wyrazić pod postacią iloczynów stałych dla danego punktu czynników — oznaczmy je przez C_x oraz C_y — przez pierwiastek z sumy kwadratów poprawek obserwacyjnych $[v\,v]$. Dla rozwiązania zadania znalezienia błędów średnich współrzędnych punktu:

$$m_x = C_x \cdot \sqrt{[v\,v]} \quad m_y = C_y \cdot \sqrt{[v\,v]}$$

wystarcza więc znać wartości czynników C dla każdego punktu siatki, oraz wartości bezwzględne poprawek v . Wartości współczynników C najwygodniej napisać przy każdym punkcie na szkicu wyjaśniającym. Wartości poprawek obserwacyjnych oblicza się mnożąc znaną nam już kolumnę różnic obserwacyjnych przez kolejne kolumny krakowianu t' , który może być, podobnie jak krakowian t , dany pod postacią gotowej tabeli liczbowej.^{*)}

^{*)} Nie odróżniamy tu poprawek obserwacyjnych od błędów obserwacji, gdyż nie chodzi nam o wartości v lecz o sumę kwadratów $[v\,v]$. Chcąc używać obliczonych wielkości v do poprawiania obserwacji należałoby przy nich zmienić znaki na przeciwne, co wynika z przyjętych oznaczeń. Taki rachunek nie jest jednak potrzebny w zagadnieniu trasowania.

Poniżej podajemy wzór liczbowy i szkic wyjaśniający, rozwiązujący zagadnienie wyznaczenia średnich błędów współrzędnych w wypadku trasowania najprostszej siatki: pojedynczego kwadratu.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)k \\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)k \\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right)k \\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_4\right)k \\ k - l_1 \\ k - l_2 \\ k - l_3 \\ k - l_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,417 & -0,250 & -0,083 & -0,250 & -0,167 & 0,167 & 0,167 & -0,167 & -1 \\ -0,250 & -0,417 & -0,250 & -0,083 & -0,167 & -0,167 & 0,167 & 0,167 & -1 \\ -0,083 & -0,250 & -0,417 & -0,250 & 0,167 & -0,167 & -0,167 & 0,167 & -1 \\ -0,250 & -0,083 & -0,250 & -0,417 & 0,167 & 0,167 & -0,167 & -0,167 & -1 \\ -0,167 & -0,167 & 0,167 & 0,167 & -0,333 & 0 & 0,333 & 0 & 0 \\ 0,167 & -0,167 & -0,167 & 0,167 & 0 & -0,333 & 0 & 0,333 & 0 \\ 0,167 & 0,167 & -0,167 & -0,167 & 0,333 & 0 & -0,333 & 0 & 0 \\ -0,167 & 0,167 & 0,167 & -0,167 & 0 & 0,333 & 0 & -0,333 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_x = 0,47 & \begin{array}{c} O' \quad A \\ \alpha_2 \quad l_2 \\ l_1 \quad l_3 \\ \alpha_1 \quad \alpha_4 \\ O \quad B \end{array} & C_x = 0,55 \\ C_y = 0 & & C_y = 0,47 \\ C_x = 0 & & C_x = 0,44 \\ C_y = 0 & & C_y = 0,47 \end{array}$$

Rys. 7

Przykład liczbowy

Obliczymy średnie błędy współrzędnych w opracowanej uprzednio (str. 4) siatce. Mnożenie znanej nam już kolumny różnic obserwacyjnych:

$$\begin{array}{rcl} 0,0291 & 0,0063 & \\ -0,0097 & 0,0040 & \\ -0,0679 & 0,0087 & \\ 0,0194 & 0,0110 & \text{Stąd: } [v v] = 0,0003066 \\ -0,0200 & -0,0047 & \sqrt{[v v]} = \pm 0,0175 \\ 0,0300 & -0,0023 & \\ 0,0000 & 0,0047 & \\ -0,0400 & 0,0022 & \\ \hline & 0,0300 & \text{kontrola: } \end{array}$$

Mnożenie pierwiastka z sumy kwadratów poprawek obserwacyjnych $\pm 0,0175$ przez wzięte ze szkicu wyjaśniającego współczynniki daje.

$$\begin{array}{ll} m_{x_0}' = \pm 0,0175 \cdot 0,47 = \pm 0,008 & m_{y_0} = 0 \\ m_{xA} = \pm 0,0175 \cdot 0,55 = \pm 0,010 & m_{yA} = \pm 0,0175 \cdot 0,47 = \pm 0,008 \\ m_{xB} = \pm 0,0175 \cdot 0,44 = \pm 0,008 & m_{yB} = \pm 0,0175 \cdot 0,47 = \pm 0,008 \end{array}$$

Uzasadnienie teoretyczne

5. Zadanie sprowadza się do wyrażenia zespołu wartości poprawek dx dy , jakie dodać należy do zespołu przybliżonych wartości współrzędnych x y wierzchołków siatki kwadratów, aby suma kwadratów zniekształceń obserwacji kątowych plus suma kwadratów względnych zniekształceń obserwacji liniowych była najmniejszą *).

Znając postać równania błędu obserwacji kątowej.

$$\left| \begin{array}{cc} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} dx_C & dy_C \\ (A_L - A_P) & (B_L - B_P) \end{array} \right|_1 + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v$$

oraz postać równania błędu względnego obserwacji liniowej:

$$\left| \begin{array}{cc} dx_L & dy_L \\ -A_{LK} & -B_{LK} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_K & dy_K \\ A_{LK} & B_{LK} \end{array} \right|_2 + \frac{L_{prz} - L_{obs}}{L} = w$$

można napisać takie równania dla każdego zaobserwowanego kąta i dla każdej zaobserwowanej linii w założonej sieci kwadratów**). Przy obraniu osi głównej układu OX zgodnie z kierunkiem jednego z boków obranego za wyjściowy ($00'$) i przyjęciu za jednostkę długości boku siatki kwadratów, wartości współczynni-

*) Ogólnie powinno być: $\left[\frac{v}{m_0} \frac{v}{m_0} \right] + \left[\frac{v'}{m_d} \frac{v'}{m_d} \right] = \text{minimum}$, gdzie v i m_0 poprawka i średni błąd obserwacji kątowej, zaś v' i m_d poprawka i błąd średni obserwacji liniowej. Wprowadzając pojęcie poprawki względnej obserwacji liniowej $w = v' : d$, oraz błędu względnego obserwacji liniowej (średniego) $M = m_d : d$ możemy napisać warunek minimum pod postacią:

$$\left[\frac{v}{m_0} \frac{v}{m_0} \right] + \left[\frac{w}{M} \frac{w}{M} \right] = \text{minimum}.$$

Jeżeli — zgodnie z przyjętym założeniem — średni błąd kąta (rozumiemy go oczywiście ciągle w mierze radialnej) równy będzie średniemu błędowi względnemu pomiaru liniowego, to znaczy $m_0 = M$, wówczas ostatnie równanie przybierze postać: $[v v] + [w w] = \text{minimum}$, którą to postacią posługujemy się w tekście głównym.

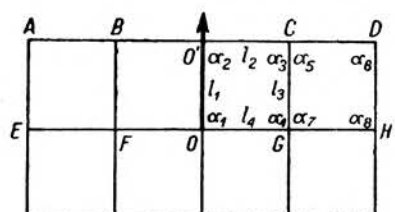
**) dx_L dy_L , dx_P dy_P , dx_C dy_C są tu poprawkami przybliżonych współrzędnych punktów położonych odpowiednio: na lewym (L), prawym (P) ramieniu kąta, oraz w jego centrum (C). Analogicznie A_L B_L oraz A_P B_P są współczynnikami kierunkowymi lewego i prawego ramienia kąta. Współczynniki kierunkowe zdefiniowane są przytym jako stosunki przyrostów na osiach do kwadratu odległości, to znaczy wyraźnie dla kierunku z punktu „ i ” na punkt „ k ” będzie:

$$A = \frac{(x_k - x_i)}{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \quad \text{oraz} \quad B = \frac{(y_k - y_i)}{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$$

$\alpha_{prz} - \alpha_{obs}$ oznacza różnicę między wartością kąta obliczoną z przybliżonych współrzędnych (w naszym wypadku przy przyjęciu współrzędnych nominalnych siatki za przybliżone będzie to kąt prosty), a wartością kąta zaobserwowaną. Innymi słowy będzie to poprawka jaką należałoby dodać do wyniku obserwacji dla otrzymania kąta prostego.

Analogiczne są oznaczenia dla równania błędu obserwacji liniowej, dokonanej między punktami i oraz k : dx_i dy_i dx_k dy_k są poprawkami wyrównawczymi przybliżonych współrzędnych punktu, początkowego (i) i końcowego odcinka $i - k$, A i B są współczynnikami kierunkowymi odcinka $i - k$. $l_{prz} - l_{obs}$ — oznacza różnicę między wartością nominalną i zaobserwowaną odcinka.

ków kierunkowych $A B$ będą bądź zerami, bądź też jednościami lub mniej jednościami, co ogromnie ułatwi zestawienie równań błędów. Tak np równanie błędu obserwacji kąta α_7 w sieci przedstawionej na rysunku mieć będzie kształt:



$$\begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_H & dy_H \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_G & dy_G \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \Delta \alpha_7 = v_{\alpha_7}$$

Rys. 8

czyli pod postacią algebraiczną: $-dy_C - dx_H + dx_G + dy_G + \Delta \alpha_7 = v_{\alpha_7}$. Oznaczyliśmy tu $\Delta \alpha$ poprawkę jaką należy dodać do zaobserwowanej wartości kąta dla otrzymania jego wartości obliczonej z przybliżonych współrzędnych: $\Delta \alpha = \alpha_{\text{przyb}} - \alpha_{\text{obser}}$, czyli, przy przyjęciu za wartości przybliżone współrzędnych ich wartości „nominalnych”, $\Delta \alpha$ oznacza poprawkę jaką należy dodać do wyniku obserwacji dla otrzymania kąta prostego. Podobnie równanie obserwacji linii l_3 w tejże sieci mieć będzie postać:

$$\begin{vmatrix} dx_G & dy_G \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{l_{\text{przyb}} - l_{\text{obs}}}{l} = w$$

a więc: $-dx_G + dx_C + \Delta l_3 = w_3$, przyczym przez Δl oznaczyliśmy poprawkę jaką należy dodać do wartości zaobserwowanej linii dla otrzymania jej wartości nominalnej, podzieloną przez długość linii:

$$\Delta l = \frac{l_{\text{przyb}} - l_{\text{obs}}}{l}$$

Znaczenie użytych w równaniach pomocniczych symboli operacyjnych „iloczynu wyznacznikowego” i „iloczynu kolumnowego” wyjaśniają określenia:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \dots = a_1 d_1 - b_1 c_1 + a_2 d_2 - b_2 c_2 \dots$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \dots = a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2 \dots$$

Celem posługiwania się tymi symbolami pomocniczymi jest nadanie rachunkowi — zarówno liczbowemu jak i literowemu — większej przejrzystości.

Dla uzasadnienia słuszności wzorów na równanie błędu obserwacji kątowej oraz na równanie błędu obserwacji liniowej najprościej iść klasyczną drogą: wyrazić wartość wyrównaną raz jako sumę wartości zaobserwowanej i poprawki obserwacyjnej, drugi raz jako sumę wartości przybliżonej i przyrostu jaki osiągnie rozważana wielkość (kąt ew. długość), gdy nadamy współrzędnym określającym tę wielkość różniczkowe przyrosty dx dy zamieniające przybliżone wartości współrzędnych na ich wartości najprawdopodobniejsze.

Przebieg potrzebnego tu rachunku różniczkowania funkcji:

$$\alpha = \arctan \frac{y_p - y_c}{x_p - x_c} - \arctan \frac{y_l - y_c}{x_l - x_c} \text{ oraz } l = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$$

nie wymagający omówień pomijamy. Bliższe szczegóły dotyczące łącznego wyrównywania układu obserwacji kątowych i liniowych, oraz symboli pomocniczych i ich zastosowań podaję w publikacjach Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego: N 13 i N 16, Warszawa 1952.

Poprawki współrzędnych punktu 0 obranego za zero układu będą oczywiście zerami: $dx_0 = 0$ $dy_0 = 0$. Również zerem będzie poprawka rzędnej punktu 0' $dy_0' = 0$, gdy za kierunek osi głównej układu obrano prostą 00'. Po napisaniu wszystkich równań błędów obserwacji kątowych i liniowych i doprowadzeniu ich do postaci algebraicznej otrzymamy układ równań liniowych o ilości równań równej ilości obserwacji i o ilości niewiadomych równej podwójnej ilości punktów w sieci, pomniejszonej o 3.

6. Dla wyrażenia z takiego układu „równań błędów” symbolizowanego zazwyczaj:

$$a_i x + b_i y + c_i z \dots = l_i + v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

niewiadomych jako funkcji liniowych wyrazów wolnych, przy założeniu warunku minimum, oznaczmy przez $\underline{x}$ krakowian kolumnowy niewiadomych, przez $\underline{l}$ krakowian kolumnowy wyrazów wolnych, przez $\underline{v}$ krakowian kolumnowy poprawek obserwacyjnych, oraz przez $\underline{a}$ krakowian współczynników układu równań błędów, uszeregowanych tak, jak napisano je w tym układzie. Układ równań błędów napiszemy więc krakowianowo jak następuje:

$$\underline{x} \cdot \tau \underline{a} = \underline{l} + \underline{v}$$

zaś układ równań normalnych Gaussa wyrazi się jak następuje:

$$\underline{x} \cdot \underline{a}^2 = \underline{l} \cdot \underline{a}$$

Po przemnożeniu obu stron ostatniego równania przez odwrotność („inwers”) krakowianu $\underline{a}^2$ — zasymbolizujemy tę odwrotność przez $(\underline{a}^2)^{-1}$ otrzymamy:

$$\underline{x} \cdot \underline{a}^2 \cdot (\underline{a}^2)^{-1} = \underline{l} \cdot \underline{a} \cdot (\underline{a}^2)^{-1}$$

Zastosujmy do obu stron równania twierdzenie o łączeniu czynników w iloczynie krakowianowym („twierdzenie asocjatywne”). Pamiętając że z uwagi na symetrię krakowianu $\underline{a}^2$ będzie: $\tau \underline{a}^2 = \underline{a}^2$, otrzymamy:

$$\underline{x} \cdot [(\underline{a}^2)^{-1} \underline{a}^2] = \underline{l} [(\underline{a}^2)^{-1} \cdot \tau \underline{a}]$$

Ponieważ $(\underline{a}^2)^{-1} \cdot \underline{a}^2 = \tau$ (określenie odwrotności), zaś pomnożenie krakowianu przez τ nie zmienia jego wartości, otrzymamy ostatecznie:

$$\boxed{\underline{x} = \underline{l} [(\underline{a}^2)^{-1} \cdot \tau \underline{a}] \quad \text{lub: } \underline{x} = \underline{l} \cdot \underline{t}, \text{ gdzie: } \underline{t} = (\underline{a}^2)^{-1} \cdot \tau \underline{a}} \quad \text{I}$$

Między zespołami: niewiadomych $\underline{dx}$ i poprawek trasowania $\underline{\partial x}$ zachodzi związek $\underline{dx} = -\underline{\partial x}$. Ponieważ jednak w równaniach błędów obserwacji kątowych i liniowych pisaliśmy wyrazy wolne z lewej strony równań (str. 7), nie zachodzi tu potrzeba zmiany znaku, jeżeli pozostawić przyjęte tam określenie wyrazów wolnych.

Dla znalezienia krakowianu przekształcającego kolumnę wyrazów wolnych układu równań błędów na kolumnę poprawek obserwacyjnych $\underline{v}$ zwróćmy się do napisanego krakowianowo układu równań błędów:

$$\underline{x} \cdot \underline{\tau a} = \underline{l} + \underline{v} \quad \text{czyli} \quad \underline{v} = \underline{x} \cdot \underline{\tau a} - \underline{l}$$

Podstawiając $\underline{x} = \underline{l} \cdot \underline{t}$ otrzymamy: $\underline{v} = \underline{l} \cdot \underline{t} \cdot \underline{\tau a} - \underline{l}$ i ostatecznie:

$$\underline{v} = \underline{l} \cdot (\underline{\tau a} \underline{\tau t} - \underline{\tau}) \quad \text{lub:} \quad \underline{v} = \underline{l} \cdot \underline{t'} \quad \text{gdzie} \quad \underline{t'} = \underline{\tau a} \cdot \underline{\tau t} - \underline{\tau} \quad \text{II}$$

Dla obliczenia średnich błędów współrzędnych punktu skorzystać można z tego, że wyraziliśmy już współrzędne jako funkcje liniowe spostrzeżeń. Mamy mianowicie — jeżeli odcięta X jest dla pewnego punktu q -tą zaś rzędna Y r -tą niewiadomą, w układzie, i jeżeli oznaczymy przez: $t_{q1} \ t_{q2} \ t_{q3} \dots$ elementy q -tej kolumny krakowianu $\underline{t}$ oraz przez $t_{r1} \ t_{r2} \ t_{r3} \dots$ elementy r -tej kolumny krakowianu $\underline{t}$, na wyrażenie odciętej i rzędnej tego punktu następujące równania liniowe:

$$x = x_0 + t_{q1} \cdot l_1 + t_{q2} \cdot l_2 + t_{q3} \cdot l_3 \dots \quad y = y_0 + t_{r1} \cdot l_1 + t_{r2} \cdot l_2 + t_{r3} \cdot l_3 \dots$$

gdzie x, y oznaczają najprawdopodobniejsze zaś x_0, y_0 przybliżone wartości współrzędnych. Wynika stąd zaraz że kwadrat błędu średniego odciętej będzie równy iloczynowi kwadratu średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia m_0^2 przez kwadrat q -tej kolumny krakowianu $\underline{t}$, zaś kwadrat błędu średniego rzędnej będzie równy iloczynowi kwadratu średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia przez kwadrat r -tej kolumny krakowianu $\underline{t}$:

$$m_x^2 = m_0^2 \cdot \underline{t_q}^2 \quad m_y^2 = m_0^2 \cdot \underline{t_r}^2$$

Wielkości $\underline{t_q}^2 \ \underline{t_r}^2$, oznaczane w symbolice Gaussowskiej dla kolejnych niewiadomych układu przez $[a \ a] \ [\beta \ \beta] \dots$ lub $Q_{11} \ Q_{22} \dots$, można zresztą otrzymać bez sumowania kwadratów kolumn krakowianu $\underline{t}$. Są one nam już znane przez obliczenie krakowianu odwrotnościowego $(\underline{a}^2)^{-1}$. Muszą bowiem być równe elementom głównej przekątnej tego krakowianu, to znaczy wyrażnie:

$$\underline{t_1}^2 = (\underline{a}^2)_{11}^{-1} \dots \quad \underline{t_q}^2 = (\underline{a}^2)_{qq}^{-1} \quad \underline{t_r}^2 = (\underline{a}^2)_{rr}^{-1}$$

Wynika to z równości krakowianów $(\underline{a}^2)^{-1}$ oraz $\underline{t}^2$. Będzie mianowicie:

$$\underline{t}^2 = [(\underline{a}^2)^{-1} \cdot \underline{\tau a}]^2 = (\underline{a}^2)^{-1} \cdot \underline{a}^2 \cdot (\underline{a}^2)^{-1} = [(\underline{a}^2)^{-1} \cdot \underline{a}^2] \cdot (\underline{a}^2)^{-1} = (\underline{a}^2)^{-1}$$

gdzie posłużyliśmy się znanym wzorem na kwadrat iloczynu dwóch krakowianów:

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^2 = \underline{A} \ (\underline{\tau B}^2) \cdot \underline{A}$$

Ostatecznie więc wzory na średnie błędy współrzędnych punktu, którego odcięta jest q -tą, zaś rzędna r -tą niewiadomą układu, napisać można pod jedną z następujących postaci:

$$m_x = m_0 \sqrt{\underline{t_q}^2} \quad m_y = m_0 \sqrt{\underline{t_r}^2} \quad \text{lub:} \quad m_x = m_0 \sqrt{(\underline{a}^2)_{qq}^{-1}} \quad m_y = m_0 \sqrt{(\underline{a}^2)_{rr}^{-1}}$$

Ponieważ dalej między średnim błędem pojedynczego spostrzeżenia m_0 , sumą kwadratów poprawek obserwacyjnych $[vv]$ oraz ilością spostrzeżeń nadliczbowych n_n zachodzi znany związek:

$$m_0 = \sqrt{1/n_n \cdot [vv]}$$

możemy też napisać: $m_x = C_x \sqrt{[vv]} \quad m_y = C_y \sqrt{[vv]}$

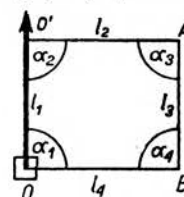
$$\text{gdzie: } C_x = \sqrt{\frac{(a^2)_{qq}^{-1}}{n_n}} \quad C_y = \sqrt{\frac{(a^2)_{rr}^{-1}}{n_n}}$$

przy czym n_n jest ilością obserwacji (kątowych i liniowych łącznie) zwiększoną o 3 i zmniejszoną o podwójną ilość punktów w sieci.

7. Zilustrujemy teraz całe postępowanie rachunkowe uzasadnione powyżej, przeprowadzając kompletne postępowanie rachunkowe związane z opracowaniem krakowianów służących do wyrównania najprostszej sieci: pojedynczego kwadratu.

Przyjmując oznaczenia podane na załączonym rysunku: napiszemy równania błędów opierając się na wzorach podanych na str. 7. Poprzestajemy przytym na wypisywaniu elementów współczynnikowych równań błędów, zaznaczając punktami miejsca wyrazów wolnych dla obliczenia odwrotności nieistotnych.

Piszemy najpierw wszystkie równania obserwacji kątowych w kolejności kątów 1 2 3 4, potem wszystkie równania obserwacji liniowych w kolejności linii 1 2 3 4. Otrzymamy:



Rys. 9

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc|cc|cc} dx_0' & 0 & dx_B & dy_B & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right|_1 \dots \left| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & dx_0' & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right|_2 \dots \\ \left| \begin{array}{cc|cc|cc} dx_A & dy_A & 0 & 0 & dx_0' & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right|_1 \dots \left| \begin{array}{cc|cc} dx_0' & 0 & dx_A & dy_A \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right|_2 \dots \\ \left| \begin{array}{cc|cc|cc} dx_B & dy_B & dx_0' & 0 & dx_A & dy_A \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right|_1 \dots \left| \begin{array}{cc|cc} dx_A & dy_A & dx_B & dy_B \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right|_2 \dots \\ \left| \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & dx_A & dy_A & dx_B & dy_B \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right|_1 \dots \left| \begin{array}{cc|cc} dx_B & dy_B & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right|_2 \dots \end{array}$$

Przepisując ten układ pod postacią tabeli współczynnikowej otrzymamy:

$$\underline{a} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} dx_0' & dx_A & dy_A & dx_B & dy_B \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \end{array} \quad \text{skąd } \underline{a}^2 = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

Odwrotność ostatniego krakowianu wynosi *)

$$(a^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 18 & 0 & 6 & 0 \\ 18 & 33 & -6 & 15 & 6 \\ 0 & -6 & 24 & -6 & 12 \\ 6 & 15 & -6 & 21 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 & 24 \end{pmatrix} \frac{1}{36}$$

Mnożąc znaną odwrotność $(a^2)^{-1}$ przez transpozę krakowianu współczynnika τa znajdziemy krakowian $(a^2)^{-1} \cdot \tau a = t$ służący do transformowania różnic obserwacyjnych na niewiadome poprawki w myśl równania $x = l \cdot t$.

Znajdujemy:

$$\frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 18 & 0 & 6 & 0 \\ 18 & 33 & -6 & 15 & 6 \\ 0 & -6 & 24 & -6 & 12 \\ 6 & 15 & -6 & 21 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = t'$$

$$t = \begin{pmatrix} -6 & -15 & 6 & -21 & -6 \\ -6 & 15 & -6 & 9 & 6 \\ 6 & -3 & -6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & -6 \\ 24 & 18 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 24 & -6 & 12 \\ 12 & 18 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 6 & 24 \end{pmatrix} \frac{1}{36} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 & -7 & -2 \\ -2 & 5 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 8 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -2 & 4 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Tym krakowianem, którego elementy napisano pod postacią ułamków dziesiętnych, posługiwaliśmy się w przykładzie liczbowym na str. 4:

Dla obliczenia krakowianu t' przekształcającego różnice obserwacyjne na poprawki v zrealizować musimy działanie: $t' = \tau a \cdot \tau t - \tau$. Otrzymujemy:

$$\tau a \cdot \tau t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ -5 & 5 & -1 & 1 & 6 & -2 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 1 & 3 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 & -3 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 & -1 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 7 & -3 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -3 & 7 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ stąd } t' = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & -3 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & -3 & -1 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -3 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -3 & -5 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{12}$$

*) Obliczyliśmy tu odwrotność w oparciu o pojęcia wyznacznikowe, to znaczy jako tabelę minorów wyznacznika, którego tabela jest identyczna z tabelą danego krakowianu, dzieloną przez wartość wyznacznika. Dla dużych tabel takie obliczanie odwrotności staje się niesłychanie uciążliwe i lepiej jest obliczać tam odwrotność w oparciu o pojęcie rozkładu krakowianu na czynniki.

Tym krakowianem, którego elementy napisano pod postacią ułamków dziesiętnych, posługiwaliśmy się w przykładzie liczbowym na str. 5.

Ponieważ kolejnymi elementami przekątnej krakowianu odwrotnościowego $(a)^{-1}$ są odpowiednie liczby:

$$\frac{24}{36} \quad \frac{33}{36} \quad \frac{24}{36} \quad \frac{21}{36} \quad \frac{24}{36} ,$$

zaś ilość spostrzeżeń nadliczbowych wynosi: $8 + 3 - 8 = 3$, przeto wartości współczynników C dla kolejnych niewiadomych:

x_0, x_A, y_A, x_B, y_B będą odpowiednio równe:

$$C_{x_0} = \sqrt{\frac{24}{108}} \quad C_{x_A} = \sqrt{\frac{33}{108}} \quad C_{y_A} = \sqrt{\frac{24}{108}} \quad C_{x_B} = \sqrt{\frac{21}{108}} \quad C_{y_B} = \sqrt{\frac{24}{108}}$$

$$C_{x_0} = 0,471 \quad C_{x_A} = 0,553 \quad C_{y_A} = 0,471 \quad C_{x_B} = 0,441 \quad C_{y_B} = 0,471$$

Tymi współczynnikami posługiwaliśmy się przy rachunku na str. 6.

8. W niniejszym zeszycie „Prac Geodezyjnego Instytutu Naukowo Badawczego” znajduje się zespół krakowianów transformujących dla trasowania sieci kwadratów opracowany przez pracowników naukowych Instytutu inż. Jana Panaśiuka i inż. Ireneusza Gombrycha. Wydaje mi się że ten zespół powinien wyczerpać potrzeby praktyki i że raczej nie będzie zachodzić potrzeba opracowywania krakowianów transformujących dla poszczególnych wypadów nieobjętych wyżej wspomnianym zbiorem. Gdyby jednak konieczność takiego rachunku zaszła—realizujący ten rachunek rachmistrz pamiętać powinien o konieczności nieustannej kontroli. Specjalną uwagę, jak zawsze w rachunku wyrównawczym, zwrócić należy na poprawne zestawienie tabeli współczynnikowej układu równań błędów $\underline{a}$. W toku rachunku należy natychmiast po obliczeniu sprawdzać związki: $\underline{a}^2 (\underline{a}^2)^{-1} = \underline{1}$ oraz $\underline{t}^2 = (\underline{a}^2)^{-1}$, upewniające nas o bezbłędnym obliczeniu odwrotności i krakowianu transformującego. W każdym mnożeniu krakowianowym należy oczywiście stosować kontrolę sumową.

СТЕФАН ХАУСБРАНДТ

РАЗБИВКА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ В ВИДЕ СЕТИ КВАДРАТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ УРАВНИТЕЛЬНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ ТРАНСФОРМИРУЮЩИХ КРАКОВЯНОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Опираясь на основах уравнительного вычисления, автор занимается проблемой разбивки сети квадратов, являющихся основой геодезической съемки на территории промышленных предприятий. После приближенной разбивки и стабилизации знаков, производится точное измерение угловых и линейных элементов сети, принимая за геодезические точки „нулевые точки знаков”, т. е. точки пересечения осей сантиметровых сеток, нанесенных на знаках и ориентированных относительно трасируемой системы квадратов (рис. 1).

При заложении минимума суммы квадратов поправок вычисляется в полученной системе комплекс векторов δ_x и δ_y , дающих перемещения принятых геодезических точек по осям X и Y для получения вероятнейших положений вершин сети квадратов относительно точки и направления, принятых за исходные (рис. 2 и 3).

Вычисление векторов поправок δ_x и δ_y сводится к выполнению одного умножения по правилам умножения краковянов (или матриц):

$$X = \underline{1} \cdot \underline{t}$$

где X — краковян (столбец) или матрица (строка) искоемых векторов поправок, $\underline{1}$ — есть краковян (столбец) или матрица (строка) поправок, которые следовало бы ввести в итоги угловых наблюдений для погугения прямого угла $\frac{\pi}{2}$, умножаемых на длину сторон и квадрата и поправок, которые следовало бы ввести в итоги линейных измерений, чтобы получить номинальную длину сторон квадратов, наконец t есть краковян (или матрица), элементы которого зависят только от числа квадратов в направлении обеих осей системы. Принят при этом постулат такого согласования точности угловых и линейных наблюдений в сети, чтобы средняя ошибка наблюдения угла, выраженная в радианах, разнялась средней относительной ошибке измерения длины.

Если нужно, можно также легко вычислить средние ошибки определения точек сети по осям системы. Для этой цели вычисляем суммы квадратов поправок наблюдений:

$$[v v] = (\underline{1} \cdot \underline{t'})^2$$

где $\underline{1}$ — уже оговоренная выше величина, а t' — это краковян, элементы которого зависят исключительно от числа квадратов сети по осям системы. Умно-

жая корень из суммы квадратов исправляющих поправок на некоторые, постоянные для каждой точки в заданной сети, коэффициенты C_x и C_y , получаем средние ошибки определения точки:

$$m_x = \sqrt{[v v]} \cdot C_x \quad m_y = \sqrt{[v v]} \cdot C_y$$

Числовые таблицы t и t' для самой простой формы сети: одиночного квадрата, вычислены с приложением общей теории. Дан числовой пример уравнивания в случае одиночного квадрата (рис. 4 и 5).

Прилагаются также числовые таблицы величин t и t' для типичных, встречаемых на практике сетей.

(Вычисления произвели инж. Я. Панасюк и инж И. Гомбрых).

STEFAN HAUSBRANDT

TRACEMENT DE LA CHAÎNE GÉODÉSIQUE SOUS LA FORME D'UN RÉSEAU DE CARRÉS À L'APPUI DES PRINCIPES DE CALCUL DE COMPENSATION ET DE NOTION DES CRACOVIENS TRANSFORMABLES.

RÉSUMÉ

L'Auteur discute le problème de tracement du réseau de carrés constituant la base des mesures géodésique sur les terrains industriels à l'appui des principes de calcul de compensation.

Après un jalonnement approché et une stabilisation des pierres on exécute l'arpentage précis des éléments angulaires et linéaires du réseau en prenant comme points géodésiques les „points zéro des pierres”, c'est à dire points d'intersection des axes des réseaux de carrés (de 1 centimètre) qui sont tracés sur les pierres et orientés au système jalonné. (fig. 1)

En se basant sur le postulat minimum de la somme des carrés des corrections d'observations dans le dit système on calcule l'ensemble des vecteurs δx , δy , des quels il faut déplacer les points géodésiques déjà mesurés soit vers l'axe X soit vers l'axe Y pour fixer la position la plus probable des points angulaires de réseau de carrés et cela en rapport au point et à la direction de départ (fig. 2 et 3)

Le calcul des vecteurs de correction δx δy se réduit à une seule multiplication cracovienne (soit à la multiplication de matrice):

$$\underline{x} = \underline{l} \cdot \underline{t}$$

où le $\underline{x}$ est un cracovien de colonne (soit une matrice de ligne) des vecteurs recherchés, le $\underline{l}$ est un cracovien de colonne des corrections les quelles doivent être ajoutées aux résultats des observations angulaires pour avoir un angle droit $\frac{\pi}{2}$, multipliés par la longueur du côté de carré et corrections lesquelles il faudrait ajouter aux résultats des observations linéaires pour avoir la valeur nominale du côté de carré; enfin le $\underline{t}$ est un cracovien (soit une matrice) dont les éléments dependent uniquement de la quantité de carrés qui se trouvent dans deux directions des axes perpendiculaires.

Il faut tenir compte qu'on part de tel principe que la correction d'exactitude des mesures angulaires et linéaires de réseau doit être faite de telle manière que l'erreur moyenne relative de la mesure de longueur.

En cas de besoin on peut facilement calculer les erreurs moyennes de fixation des points de réseau en direction des axes de système.

Ainsi on obtient en calculant la somme des carrés des corrections d'observation:

$$[v v] = (l \cdot t')^2$$

où le l a une signification ci-dessus expliquée et le t' est un cracovien, dont les éléments dépendent uniquement de la quantité de carrés qui se trouvent dans deux directions des axes du système.

En multipliant la racine de la somme des carrés des corrections compensatrices par les coefficients stables pour chaque point dans le réseau donné C_x C_y on obtient les erreurs moyennes de fixation des points:

$$m_x = \sqrt{[v v]} C_x \quad m_y = \sqrt{[v v]} C_y$$

Les tables numériques t et t' pour un cas le plus simple de réseau: un simple carré, on a calculé avec l'explication de la théorie en lignes générales.

On a inséré aussi un exemple de calcul de compensation se rapportant au carré simple. (pages 4 et 5)

Les valeurs des tables numériques t et t' pour les systèmes des réseaux de carrés typiques qu'on rencontre en pratique sont publiés dans ce volume à part.

(Élaboration de calculs — ingénieur Jan Panasiuk et ingénieur Ireneusz Gombrych).