PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
NR 15

STEFAN HAUSBRANDT

ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIEŃ RACHUNKOWYCH PRZY POMOCY ZESTAWU ARYTMOMETRYCZNEGO

WARSZAWA 1952
PAŃSTWOWE PRZEDSIĘBIORSTWO WYDAWNICTW KARTOGRAFICZNYCH

E R R A T A

Str.	Wiersz	Jest	Powinno być
4	21 od dołu	arytmometryczne	arytmetyczne
	8 od dołu	może opuścić str. 2	może opuścić str. 5
5	6 od dołu	M	np.
9	2 od dołu	a_{0-1}	a_{p-1}
10	18 od góry	$\sqrt{\frac{V^2}{n-p}}$	$\sqrt{\frac{\underline{V^2}}{n-p}}$
	17 od dołu	— 0.087 30	0,087 30
11	7 od góry	podane na str. 5	podane na str. 9
13	25 od dołu	na str. 11 — 12	na str 10 — 12
	23 od dołu	na str. 11	na str. 10
	10 od dołu	ze str. 11	ze str. 12.
	9 od dołu	tzn. $r = 0.4$	tzn. $\Delta = 0.4$
	8 od dołu	— 3.125 2,5 1	3,125 — 2,5 1
15	1 od góry	0,62 $\overset{--45}{92055}$	0,62 $\overset{-45}{92055}$
	3 od góry	0,56 $\overset{+45}{38\,335}$	0,56 $\overset{+45}{38\,335}$
	15 od dołu	$K = 0{,}1723$	$K = 0{,}7123$
	15 od dołu	$u = \sqrt[3]{151.723}$	$u = \sqrt[3]{151.7123}$
16	22 od dołu	(str. 2)	(str. 6)
17	12 od góry	$k_x \frac{x - x_0}{\Delta x}$	$k_x = \frac{x - x_0}{\Delta x}$
18	7 od dołu	na str. 6	na str. 11
19	13 od góry	(str. 35)	(str. 43)
21	6 od góry	1 4 2 — 17 2 — 1	1 5 2 — 17 2 — 1
	23 od góry	na str. 16	na str. 22
	5 od dołu	na str. 16	na str. 24
22	5 od dołu	wegług	według
23	22 od góry	$v_i = a_i x + b_i y + c_i z + l_i$ c) zestawienie równań normalnych z równań błędów:	c) zestawienie równań normalnych z równań błędów: $v_i = a_i x + b_i y + c_i z + l_i$
25	13 od góry	•9,86 98 •8,0000	•9,86 98 •9,0000
	17 od góry	na str 14	na str. 22
26	15 od dołu	$x_5 = -0{,}03$	$x_5 = -0{,}033$
27	10 od góry	— 0,9729 — 1,0900 — 0,4221	— 0,9729 — 1,0900 + 0,4221
	7 od dołu	$1 \cdot y - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 17 = 0$	$1 \cdot y + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 17 = 0$
28	19 od dołu	W naszym przykładzie głównym redukcji jest więc 2.	W naszym przykładzie elementem głównym redukcji jest więc 2.
31	5 od dołu	na str. 20	na str. 29
	3 od dołu	na str. 20	na str. 29

PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
NR 15

STEFAN HAUSBRANDT

ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIEŃ RACHUNKOWYCH PRZY POMOCY ZESTAWU ARYTMOMETRYCZNEGO

WARSZAWA 1952
PAŃSTWOWE PRZEDSIĘBIORSTWO WYDAWNICTW KARTOGRAFICZNYCH

Red. techn.: SIELSKI TADEUSZ Korektor: STACHURSKA IRENA

P. P. W. K. — Zam. Nr 26 — nakład 611
Obj. 7 ark. Papier druk. sat. kl. V 80 g. A1
Podpisano do druku dn. 19. II. 1952 roku
Druk ukończono dn. 30. V. 1952 roku

Druk W.O.P.K. — Warszawa, Solec 18 — Nr zam. 143/52 — 9.II.1952 — 3-B-50541 — 611

Rozwiązywanie zagadnień rachunkowych przy pomocy zestawu arytmometrów

Zestaw arytmometryczny

Nazwijmy „zestawem arytmometrycznym" zbiór arytmometrów, których główne korby obrotowe zostały tak sprzężone, że ruch jednej korby przenosi się na ruch pozostałych korb układu i ruch przesuwający licznika rezultatów jednego arytmometru w układzie przenosi się na ruch pozostałych liczników rezultatów w układzie.

Zestaw arytmometryczny jest więc niejako uogólnieniem znanego w rachunkach geodezyjnych arytmometru podwójnego.

Nie będziemy przy tym wnikali w takie, czy inne mechaniczne rozwiązanie zagadnienia zsynchronizowania ruchów poszczególnych mechanizmów liczących, ani w zagadnienie montażu i demontażu urządzenia, nadmieniając tylko ogólnie, że w Geodezyjnym Instytucie Naukowo Badawczym został skonstruowany sprzęg, pozwalający na zestawienie 2—4 arytmometrów, zaś w toku są prace nad sprzęgiem, który pozwoli zestawić 10 arytmometrów. Konstrukcję opracował i pracami kieruje inż. mech. Edward Janke. Rozpatrzymy natomiast zagadnienie pracy rachunkowej na zestawie ze szczególnym uwzględnieniem większych prac.

Czytelnik może wyobrażać sobie zestaw jako kilka czy kilkanaście arytmometrów ustawionych tak, że osie obrotowe korb znajdują się w linii prostej, co można zasymbolizować niewymagającym objaśnień rysunkiem:

Będziemy mówili dalej krótko, że *„wprowadziliśmy na zestaw"* wiersz:

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \ldots$$

gdzie symbole $abcd\ldots$ oznaczają liczby, gdy ustawimy te liczby w kolejnych licznikach nastawień arytmometrów, sprzęgniętych w zestaw. *Przez ustawienie liczby ujemnej rozumiemy przy tym ustawienie jej uzupełnienia dziesiętnego.* Tak więc np: gdy w arytmometrach zestawu mamy dziewięciocyfrowe liczniki nastawień, w zestawie znajdują się cztery arytmometry, „wprowadzenie" wiersza:

$$125\,647 \qquad -2\,317.85 \qquad 0 \qquad 428.60$$

sprowadzi się do nastawienia w kolejnych licznikach liczb:

$$000\,125\,647 \qquad 999\,768\,215 \qquad 000\,000\,000 \qquad 000\,042\,860 \tag{1}$$

Będziemy też mówili krótko, że *„pomnożyliśmy wiersz w przez czynnik k,"* jeżeli pomnożymy przez ten czynnik każdy element wiersza w drodze nadania korbie zestawu odpowiedniej ilości obrotów. O kierunku tych obrotów decyduje znak algebraiczny czynnika k w sposób ogólnie znany.

Tak więc np: mnożąc napisany wyżej wiersz (1) przez czynnik $k = +0.85$ możemy osiągnąć to przez 8 obrotów prawych na miejscu drugim i pięć obrotów prawych na miejscu pierwszym, względnie przez 1 obrót prawy na miejscu trzecim, jeden obrót lewy na miejscu drugim i pięć obrotów lewych na miejscu pierwszym itp. W liczniku rezultatów zespołu odczytamy kolejno:

010 679 995 980 298 275 000 000 000 003 643 100

to znaczy, uwzględniając ilość znaków dziesiętnych i znaki algebraiczne:

1 067.9995 — 1 970.1725 0 364.3100

Przy odczytywaniu liczb osiągniętych w drodze rachunku ogólnego, tzn. operującego uzupełnieniami dziesiętnymi, należy pamiętać, że w liczniku rezultatów jest tyle cyfr pewnych, ile ich zawiera licznik nastawień. A więc przy dziewięciocyfrowym liczniku nastawień prowadząc rachunek ogólny nie można odczytywać z licznika rezultatów więcej jak dziewięć cyfr. Na dalszych miejscach występować będą „cyfry błądzące" (ujemna jednostka jest tu reprezentowana przez dziewięciocyfrową liczbę 999 999 999).

Zwyczaj budowania arytmometrów o licznikach rezultatów pojemniejszych od liczników nastawień nie jest, gdy chodzi o rachunki geodezyjne w postaci ogólnej, celowy.

Weźmy jeszcze przykład, wychodząc z założenia, że wyjaśnienie pojęć podstawowych musi być kompletne. Jeżeli zechcemy pomnożyć wiersz (1) przez czynnik $k = -0.37$, możemy osiągnąć to przez trzy obroty lewe na miejscu drugim i siedem obrotów lewych na miejscu pierwszym, bądź też przez cztery obroty lewe na miejscu drugim i trzy obroty prawe na miejscu pierwszym, W liczniku rezultatów zestawu odczytamy:

995 351 061 008 576 045 0 998 414 180

to znaczy, uwzględniając ilość znaków dziesiętnych i znaki algebraiczne:

— 464.8939 857.6045 0 — 158.5820

Jeżeli pomnożymy wiersz w_1 przez czynnik k_1, wiersz w_2 przez czynik k_2 itd., nie kasując w międzyczasie liczników rezultatowych zestawu, odczytamy na nich zespół liczbowy, o którym powiemy krótko, że jest to wiersz w równy sumie iloczynów w_i przez czynniki k_i $(i = 1.2\ldots)$ $w = \Sigma w_i k_i$.

Krakowiany i mnożenie krakowianowe

W interesie wydajności pracy rachmistrza rozwiązującego praktycznie poważniejsze zagadnienia liczbowe leży posiłkowanie się taką czy inną symboliką uogólniającą wykonywane częstokrotnie czynności arytmometryczne. Bez oparcia o taką symbolikę rachunek cyfrowy przestaje być gałęzią matematyki stosowanej, a staje się mechanicznym realizowaniem zbioru przepisów, pochłaniającym dużo czasu, męczącym wykonawcę i nie dającym zadowolenia z wykonywanej pracy. Trafnie obrany symbol — bez względu na to czy jest to symbol o znaczeniu techniczno-operacyjnym, czy zawierający treść głębszą, pozwalającą używać go jako narzędzia myślenia w pracach badawczych, odgrywa w rachunku praktycznym rolę nici przewodniej, pozwalającej rachmistrzowi stale panować nad zagadnieniem.

Do takich wyjątkowo trafnie obranych symboli należy „mnożenie krakowianowe" zespołów liczbowych. Nie wnikając w pojęciową stronę algebry krakowianowej Banachiewicza, przynoszącej ogromne korzyści w dziedzinie myślenia matematycznego (skracania dowodów i ogólność ich), podamy te tylko definicje i twierdzenia z algebry krakowianu, które potrzebne będą do realizacji rozpatrywanych dalej zagadnień liczbowych. Pojęcia te są elementarnie proste i łatwo przyswajalne, a wprowadzenie ich ogromnie ułatwia i systematyzuje pracę.

Czytelnik, znający zasady rachunku krakowianowego może opuścić str. 2 bez szkody dla zrozumienia dalszego tekstu.

Krakowianami nazywamy prostokątne zespoły liczbowe, podlegające podanym dalej definicjom „działań krakowianowych". Dla oznaczenia, że pewien zespół liczbowy jest krakowianem ujmujemy ten zespół w nawiasy gięte. Będą więc krakowianami z oznaczenia zespoły:

$$k = \begin{Bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 3 & 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{Bmatrix} \text{ itp.}$$

Jeżeli elementy zespołu są oznaczone przez litery z wskaźnikami — pierwszy z wskaźników oznacza przy tym numer kolejny *kolumny*, zaś drugi numer kolejny *wiersza* — skracamy często oznaczenie krakowianu, zastępując zespół przez podkreśloną literę ogólną tego zespołu.

Tak np: oznaczymy przez $\underline{a}$ krakowian: $\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{Bmatrix}$ Napiszemy też np: $\underline{A} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}$ lub: $\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_{00} & U_{10} & U_{20} \\ U_{01} & U_{11} & U_{21} \\ U_{02} & U_{12} & U_{22} \end{Bmatrix}$ itp.

I-tą kolumnę krakowianu $\underline{a}$ oznaczamy zazwyczaj $\underline{a_i}$.

W krakowianie, jak w każdej innej liczbie zespołowej, nie można oczywiście zmieniać ani wielkości, ani porządku elementów.

Równość dwóch krakowianów może więc zachodzić tylko wtedy, gdy krakowiany te są równowymiarowe i gdy wszystkie odpowiadające sobie położeniem elementy tych krakowianów są sobie równe. To znaczy:

$\underline{a} = \underline{b}$ gdy $a_{ij} = b_{ij}$. Jest np: $\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{Bmatrix}$ lecz: $\begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 3 & 8 \end{Bmatrix}$ z równania: $\begin{Bmatrix} x & z \\ y & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{Bmatrix}$ wynik $x = 0$ $y = 5$ $z = 2$, $u = 4$ itp:

Transpozą krakowianu $\underline{a}$ nazwiemy taki krakowian $\underline{a}^*$, którego kolejne kolumny zawierają takie same i tak samo uporządkowane elementy jak kolejne wiersze krakowianu $\underline{a}$.

$$\text{Będzie więc np:} \begin{Bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{lub:} \begin{Bmatrix} a & c \\ b & d \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix} \text{ itp.}$$

(Bierzemy symbol $\underline{a}^*$ użyty przez prof. W. Sierpińskiego w jego pracy: „Zasady Algebry Wyższej", uważając ten symbol za wygodniejszy w operacjach rachunkowych od $\tau\underline{a}$, używanego ze względów pojęciowych w pracach krakowianowych).

Iloczynem krakowianu $\underline{a}$ *przez krakowian* $\underline{b}$ nazwiemy taki krakowian $\underline{c}$, którego element położony w i^{tej} kolumnie i j^{tym} wierszu jest iloczynem i^{tej} kolumny krakowianu $\underline{a}$ przez $j^{\text{tą}}$ kolumnę krakowianu $\underline{b}$.

Przez „iloczyn kolumny przez kolumnę" rozumie się przy tym sumę iloczynów odpowiadających sobie położeniem elementów tych kolumn. Symbolicznie wyrazimy tę definicję mnożenia krakowianowego wzorem:

$$\underline{a}\,\underline{b} = \underline{c} \text{ gdy } \underline{c_{ij}} = \underline{a_i}\,\underline{b_j}$$

Wynika z niej, że *dla obliczenia iloczynu krakowianu* $\underline{a}$ *przez krakowian* $\underline{b}$ *należy:*

1) *mnożyć pierwszą kolumnę pierwszego czynnika kolejno przez pierwszą, drugą . . . ostatnią kolumnę drugiego czynnika i rezultaty zapisywać kolejno w pierwszej kolumnie iloczynu;*

2) *mnożyć drugą kolumnę pierwszego czynnika kolejno przez pierwszą, drugą . . . . ostatnią kolumnę drugiego czynnika i rezultaty zapisywać kolejno w drugiej kolumnie iloczynu, itd. itd. Iloczyny ostatniej kolumny pierwszego czynnika przez kolejne drugiego czynnika dawać będą elementy ostatniej kolumny iloczynu.* Tak np: będzie

$$\begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 & 23 \\ 27 & 30 \end{Bmatrix} \text{ gdyż } \begin{matrix} 2 \times 1 + 5 \times 2 + 3 \times 2 = 18 \\ 2 \times 4 + 5 \times 2 + 3 \times 3 = 27 \end{matrix} \text{ oraz: } \begin{matrix} 1 \times 1 + 7 \times 2 + 4 \times 2 = 23 \\ 1 \times 4 + 7 \times 2 + 4 \times 3 = 30 \end{matrix} \text{ itp:}$$

W szczególności iloczynem dwóch jednokolumnowych krakowianów będzie pojedyncza liczba, np: $\begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 11$

Iloczynem jednokolumnowego krakowianu przez trójkolumnowy będzie jednokolumnowy krakowian o trzech elementach. $M \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17 \\ 35 \\ 53 \end{Bmatrix}$ itp. Ogólnie iloczyn dwóch krakowianów będzie miał tyle kolumn, ile pierwszy ma kolumn i tyle wierszy, ile drugi ma kolumn. Wymiary iloczynu zależą więc tylko od ilości kolumn w czynnikach. Ilość wierszy w czynnikach jest bez wpływu na wymiary iloczynu. Ilość wierszy musi być natomiast równa w obu czynnikach, w przeciwnym razie mnożenie byłoby niewykonalne.

Iloczyn trzech krakowianów definiujemy jako iloczyn iloczynu pierwszego czynnika przez drugi, pomnożony przez trzeci czynnik: $\underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{(a\,b)} \cdot \underline{c}$ Będziemy więc np: obliczać:

$$\begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1&3\\2&4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}8\\18\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\2\end{Bmatrix}=76 \quad \text{lub:} \begin{Bmatrix}1&3\\2&4\\5&7\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1&2\\3&5\\0&1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}3&2\\5&4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}7&15\\17&33\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}3&2\\5&4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}106&210\\82&162\end{Bmatrix} \text{ itp:}$$

Należy pamiętać, że mnożenie krakowianowe nie jest ani przemienne, ani łączne, i nie znając zasad algebry krakowianowej, nie dokonywać żadnych przegrupowań krakowianów w używanych wzorach.

Obliczanie iloczynów krakowianowych przy pomocy zestawu arytmometrycznego

Obliczając iloczyn krakowianu $\underline{a}$ przez krakowian $\underline{b}$ przy pomocy zestawu arytmometrycznego możemy wykonać tę czynność dwoma następującymi sposobami, które nazywać będziemy sposobem *alfa* i sposobem *beta.*

Sposób alfa. Wprowadzamy na zestaw pierwszy wiersz pierwszego czynnika krakowianowego po czym mnożymy ten wiersz przez pierwszy element pierwszej kolumny drugiego czynnika krakowianowego.

Po wykonaniu tego, nic nie zapisując i nie kasując liczników rezultatowych, wprowadzamy na zestaw drugi wiersz pierwszego czynnika i mnożymy ten wiersz przez drugi element pierwszej kolumny drugiego czynnika; wprowadzamy na zestaw trzeci wiersz pierwszego czynnika i mnożymy przez trzeci element pierwszej kolumny drugiego czynnika itd. Gdy wprowadzimy na zestaw ostatni wiersz pierwszego czynnika i przemnożymy go przez ostatni element pierwszej kolumny drugiego czynnika w licznikach rezultatów zestawu znajdować się będą kolejne elementy pierwszego wiersza iloczynu $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{c}$.

Po ich zapisaniu kasujemy liczniki rezultatowe zestawu i przeprowadzamy analogiczne do opisanego postępowanie mnożąc kolejne wiersze pierwszego czynnika przez kolejne elementy drugiej kolumny czynnika drugiego. Otrzymamy w wyniku postępowania kolejne elementy drugiego wiersza iloczynu.

Gdy, stosując stopniowo analogiczne postępowanie, wymnożymy już kolejne wiersze pierwszego czynnika przez kolejne elementy ostatniej kolumny i zapiszemy otrzymane w wyniku tego działania elementy ostatniego wiersza iloczynu, praca mnożenia krakowianowego jest ukończona.

Reasumując ten przydługi opis, powiemy że *obliczenie iloczynu $\underline{a} \cdot \underline{b}$ sposobem alfa sprowadza się do wprowadzania na zastaw wierszy pierwszego czynnika i mnożenia ich przez odpowiadające elementy kolumn czynnika drugiego. W wynikach otrzymujemy elementy iloczynu wierszami.*

Przykład: Przy obliczeniu sposobem alfa iloczynu:

$$\begin{Bmatrix}3&12&94\\5&65&0\\7&-8&76\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}8&7&32\\52&0&15\\-3&12&85\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}263&3500&524\\105&-12&1570\\766&679&9468\end{Bmatrix}$$

wykonamy następujące czynności:

wprowadzenie na zestaw:	3	12	94	pomnożenie przez	8 (prawo)
,, ,, ,,	5	65	0	,, ,,	52 (prawo)
,, ,, ,,	7	*999 992	76	,, ,,	−3 (lewo)
Odczytanie:	263	3 500	524	(wiersz pierwszy iloczynu).	

Po zapisie i skasowaniu liczników rezultatowych:

wprowadzenie na zestaw:	3	12	94	pomnożenie przez	7 (prawo)
,, ,, ,,	5	65	0	,, ,,	0
,, ,, ,,	7	*999 992	76	,, ,,	12 (prawo)
Odczytanie:	105	*999 988 (t. zn. −12)	1570	(wiersz drugi iloczynu).	

Po zapisie i skasowaniu liczników rezultatowych:

wprowadzenie na zestaw:	3	12	94	pomnożenie przez	32	(prawo)
" " "	5	65	0	" "	15	(prawo)
" " "	7	*999 992	76	" "	85	(prawo)
Odczytanie:	766	679	9468	wiersz trzeci iloczynu).		

Zbyteczne chyba dodawać, że nic się tu nie zapisuje, oprócz otrzymywanych w wyniku stopniowego rachunku wierszy iloczynu, a cały schemat cyfrowy miał tylko na celu wyjaśnienia przy praktycznym przyswajaniu.

Sposób beta. Wprowadzamy na zestaw pierwszy wiersz drugiego czynnika krakowianowego, mnożymy ten wiersz przez pierwszy element pierwszej kolumny pierwszego czynnika krakowianowego; nie kasując liczników rezultatowych wprowadzamy na zestaw drugi wiersz drugiego czynnika, mnożymy przez drugi element pierwszej kolumny pierwszego czynnika itd. itd. Po przemnożeniu ostatniego wiersza drugiego czynnika przez ostatni element pierwszej kolumny pierwszego czynnika, w licznikach rezultatowych zestawu znajdować się będą kolejne elementy pierwszej kolumny iloczynu $\underline{a}\,\underline{b} = \underline{c}$. Po ich zapisaniu, kasujemy liczniki rezultatowe zestawu i przeprowadzamy analogiczne do opisanego postępowanie mnożąc kolejne wiersze drugiego czynnika przez kolejne elementy drugiej kolumny czynnika pierwszego. Otrzymamy w wyniku postępowania kolejne elementy drugiej kolumny iloczynu. Stosując stopniowo analogiczne postępowanie otrzymamy wreszcie — w drodze mnożenia kolejnych wierszy drugiego czynnika przez kolejne elementy ostatniej kolumny pierwszego czynnika — ostatnią kolumnę iloczynu.

Obliczenie iloczynu $\underline{a} \cdot \underline{b}$ sposobem beta sprowadza się do wprowadzania na zestaw wierszy drugiego czynnika krakowianowego i mnożenia ich przez odpowiadające elementy kolumn czynnika pierwszego. W wynikach otrzymujemy elementy iloczynu kolumnami.

Jeżeli ilości kolumn w obu czynnikach są równe — będzie z punktu widzenia ekonomii rachunku obojętne, który ze sposobów alfa czy beta zastosujemy w operacji mnożenia (o ile nie istnieją inne powody np: różna wielocyfrowość itp.).

Jeżeli pierwszy krakowian zawiera więcej kolumn niż drugi — ekonomiczniejszy będzie sposób alfa.

Jeżeli drugi krakowian zawiera więcej kolumn niż pierwszy — ekonomiczniejszy będzie sposób beta.

Przykład: Przy obliczeniu sposobem beta iloczynu:

$$\left\{\begin{matrix} 3 & 12 & 94 \\ 5 & 65 & 0 \\ 7 & -8 & 76 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 8 & 7 & 32 \\ 52 & 0 & 15 \\ -3 & 12 & 85 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 263 & 3500 & 524 \\ 105 & -12 & 1570 \\ 766 & 679 & 9468 \end{matrix}\right\}$$

wykonamy następujące czynności:

wprowadzenie na zestaw:	8	7	32	pomnożenie przez	3	(prawo)
" " "	52	0	15	" "	5	(prawo)
" " "	*9997	12	85	" "	7	(prawo)
Odczytanie:	263	105	766	(pierwsza kolumna iloczynu).		

Po zapisie i skasowaniu liczników rezultatowych:

wprowadzenie na zestaw:	8	7	32	pomnożenie przez	12	(prawo)
" " "	52	0	15	" "	65	(prawo)
" " "	*9997	12	85	" "	−8	(lewo)
Odczytanie:	3500	*9988 (t. zn. −12)	679	(druga kolumna iloczynu).		

Po zapisie i skasowaniu liczników rezultatowych:

wprowadzenie na zestaw:	8	7	32	pomnożenie przez	94	(prawo)
" " "	52	0	15	" "	0	
" " "	*9997	12	85	" "	76	(prawo)
Odczytanie:	524	1570	9468	(trzecia kolumna iloczynu).		

Uzasadnienie słuszności opisanych sposobów mnożenia krakowianów przy pomocy zestawu arytmometrycznego wynika bezpośrednio z definicji iloczynu. Napiszmy wyraźnie mnożone krakowiany $\underline{a}$ $\underline{b}$ i ich iloczyn $\underline{c}$:

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{i1} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{i2} & & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \ldots & a_{i3} & & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{in} & & a_{mn} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{llllll} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{i1} & \ldots & b_{p1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{i2} & & b_{p2} \\ b_{13} & b_{23} & \ldots & b_{i3} & & b_{p3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{in} & & b_{pn} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{lllll} \underline{a}_1\underline{b}_1 & \underline{a}_2\underline{b}_1 & \ldots & \underline{a}_i\underline{b}_1 & \underline{a}_m\underline{b}_1 \\ \underline{a}_1\underline{b}_2 & \underline{a}_2\underline{b}_2 & \ldots & \underline{a}_i\underline{b}_2 & \underline{a}_m\underline{b}_2 \\ \underline{a}_1\underline{b}_3 & \underline{a}_2\underline{b}_3 & \ldots & \underline{a}_i\underline{b}_3 & \underline{a}_m\underline{b}_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{a}_1\underline{b}_p & \underline{a}_2\underline{b}_p & \ldots & \underline{a}_i\underline{b}_p & \underline{a}_m\underline{b}_p \end{array}\right\}$$

W sposobie alfa po przemnożeniu wszystkich wierszy krakowianu $\underline{a}$ przez kolejne elementy $i^{\underline{tej}}$ kolumny krakowianu $\underline{b}$ mieć będziemy na licznikach rezultatowych sumy iloczynów:

$$\underline{a}_1\underline{b}_i \;\; \underline{a}_2\underline{b}_i \;\ldots .\; \underline{a}_m\underline{b}_i \quad \text{czyli } i^{\underline{ty}} \text{ wiersz iloczynu } \underline{c}.$$

W sposobie beta po przemnożeniu wszystkich wierszy krakowianu $\underline{b}$ przez kolejne elementy $i^{\underline{tej}}$ kolumny krakowianu $\underline{a}$ otrzymamy na licznikach rezultatowych sumy iloczynów:

$$\underline{a}_i\underline{b}_1 \;\; \underline{a}_i\underline{b}_2 \;\ldots .\; \underline{a}_i\underline{b}_p \quad \text{czyli } i^{\underline{tą}} \text{ kolumnę iloczynu } \underline{c}.$$

Zagadnienie kontroli rachunku

Kontrola mnożenia krakowianów w drodze dwukrotnego obliczania iloczynu raz sposobem alfa, drugi raz sposobem beta nie zawsze jest najwygodniejsza.

Gdy stosujemy jedną tylko metodę, można w celu kontroli dopisać do krakowianu, którego wiersze będziemy wprowadzać na zestaw, jego „kolumnę sumową", to znaczy kolumnę utworzoną z sum elementów odpowiednich wierszy. Przeprowadzając operację mnożenia nad takim „rozszerzonym o kolumnę sumową" krakowianem otrzymamy iloczyn również „rozszerzony", bądź to o kolumnę (w sposobie alfa), bądź o wiersz (w sposobie beta).

Elementy takiej „kolumny kontrolującej", względnie „wiersza kontrolującego" przy bezbłędnym rachunku muszą być sumami elementów poprzedzających element kontrolujący. Wyjaśnimy to na przykładach, nadmieniając jednak, że *kontrola mnożenia krakowianowego przez sumy kontrolujące celowa przy użyciu jednego arytmometru, w rachunku przy pomocy zestawu staje się właściwie nieopłacalna. Prędzej bowiem skontrolować tu można rachunek przez powtórzenie mnożenia po raz drugi.*

Przykład:

α Obliczając iloczyn: $\left\{\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc|c} 7 & 12 & 23 & 42 \\ 6 & 11 & 24 & 41 \end{array}\right\}$

utworzyliśmy sumy elementów wierszy w pierwszym czynniku: $\begin{smallmatrix} 9 \\ 8 \end{smallmatrix}$. Po przemnożeniu rozszerzonego tak krakowianu otrzymaliśmy w iloczynie kolumnę kontrolującą: $\begin{smallmatrix} 42 \\ 41 \end{smallmatrix}$, której elementy muszą być sumami poprzedzających je elementów wierszy iloczynu. Istotnie mamy: $7 + 12 + 23 = 42$ oraz: $6 + 11 + 24 = 41$.

Jednak czynności kontrolne (sumowania i zapisy) zabiorą więcej czasu od powtórzenia działania.

β Obliczając iloczyn:

$\left\{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 4 & 13 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 11 & 19 \\ 31 & 54 \\ 7 & 13 \\ \hdashline 49 & 86 \end{array}\right\}$ utworzyliśmy sumy elementów wierszy w drugim czynniku: $\begin{smallmatrix} 13 \\ 12 \end{smallmatrix}$.

Po przemnożeniu rozszerzonego tak krakowianu otrzymaliśmy w iloczynie wiersz kontrolujący: 49.86, którego elementy winny być sumami poprzedzających je elementów kolumn iloczynu. Mamy też: $11 + 31 + 7 = 49$ oraz: $19 + 54 + 13 = 86$.

Przemnożenie po raz drugi przy pomocy zestawu będzie jednak ekonomiczniejsze.

Mnożenie krakowianów o ilości kolumn, przekraczającej ilość arytmometrów w zestawie nie nastręcza żadnych trudności natury pojęciowej. Dzielimy taki krakowian na grupy kolumnowe zawierające ilość kolumn nie większą od ilości arytmometrów w zestawie, po czym przeprowadzamy operacją mnożenia na otrzymanych krakowianach składowych. Chcąc np. przeprowadzić na czterolicznikowym zestawie mnożenie krakowianowe:

$$\left\{\begin{array}{cccc|ccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 & g_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 & g_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n & g_n \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccccccc} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & B_n & C_n & D_n & E_n & F_n & G_n \end{array}\right\}$$

możemy podzielić czynnik lewy na dwie grupy kolumnowe (uwidoczniliśmy to przez wykreślenie pionowej kreski), po czym pomnożyć sposobem alfa pierwszy z otrzymanych tak krakowianów składowych, a następnie drugi z otrzymanych krakowianów składowych przez czynnik prawy. Napisane obok siebie rezultaty dadzą poszukiwany iloczyn. Można to ująć w zrozumiałe bez bliższych omówień równanie:

$$\{\underline{k_1}\ \underline{k_2}\}\,\{\underline{l}\} = \{\underline{k_1 l}\ \underline{k_2 l}\}$$

Gdybyśmy rozbili na krakowiany składowe czynnik prawy dla zastosowania mnożenia beta, należałoby otrzymane rezultaty napisać nie obok siebie, ale drugi pod pierwszym. Takie mnożenie można scharakteryzować równaniem:

$$\{\underline{k}\}\cdot\{\underline{l_1}\ \underline{l_2}\} = \begin{Bmatrix} k\,l_1 \\ \underline{k\,l_2} \end{Bmatrix}$$

Zastosowania mnożenia krakowianowego

W dalszym ciągu podajemy szereg zastosowań praktycznych zwykłego mnożenia krakowianowego. Nie podajemy przy tym dowodów słuszności pojęciowej zastosowania w zagadnieniu mnożenia krakowianowego, poprzestając na podaniu wzorów i wyszczególnieniu literatury uzasadniającej. Każde z zagadnień można oczywiście rozwiązać posługując się zwykłym jednolicznikowym arytmometrem w oparciu o definicję mnożenia krakowianowego (str. 4). Ponieważ jednak niniejsza praca poświęcona jest zestawowi arytmometrów, umieszczając wskazówki techniczno wykonawcze zakładamy stale, że mamy do czynienia z zestawem. Zagadnienia grupujemy według trudności wykonania rachunkowego, rozpoczynając od najprostszych.

I. WYRÓWNANIE METODĄ NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW OBSERWACYJNYCH TABLIC WIELOMIANOWYCH

W laboratoryjnych pracach przyrodoznawczych spotykamy się często z następującym zagadnieniem:

Obserwujemy szereg wartości zmiennej zależnej U odpowiadających wartościom zmiennej niezależnej X, tworzącym postęp arytmometryczny, otrzymując w wyniku obserwacji tabelę:

$$X_{i+1} - X_i = const.$$

X	U
X_1	U_1
X_2	U_2
⋮	⋮
X_n	U_n

Z tych, czy innych względów zakładamy następnie, że U jest wielomianem algebraicznym zmiennej niezależnej X, to znaczy, że zachodzi związek:

$$U = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad (U)$$

Jeżeli ilość parametrów wielomianu jest równa ilości obserwacji, założenie (U) pozwala na wyznaczenie wielkości tych parametrów jednoznacznie. Jeżeli — co z reguły ma miejsce — ilość obserwacji n jest większa od ilości parametrów p, musimy przed ich wyznaczeniem dokonać „wyrównania obserwacji”, to znaczy nadać obserwacjom U_i takie poprawki v_i, aby poprawione wartości obserwacji $U_i + v_i$ tworzyły tabelę wielomianową p parametrowego wielomianu; to znaczy, aby wielkości p parametrów $a_0\,a_1\,a_2 \dots a_{0-1}$ wyznaczone z jakichkolwiek p wielkości U_i były takie same, zaś suma kwadratów poprawek obserwacji była najmniejszością.

Wyrażając zagadnienie krakowianowo powiemy, że znając krakowian obserwacji $\underline{U}$, poszukujemy krakowianu poprawek $\underline{v}$, spełniającego postawione założenia. Mamy więc, pisząc wyraźnie:

$$\text{dane:}\quad \underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \qquad \text{szukane:}\quad \underline{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \qquad \text{przy znanych liczbach: } p \text{ oraz } n.$$

Można wykazać, że *krakowian poprawek jest iloczynem krakowianu obserwacji przez krakowian wyrównawczy* $\underline{F}(p\,n)$, *którego elementy zależne są tylko od wielkości* p *i* n.

$$\boxed{\underline{v} = \underline{U} \cdot \underline{F}(p\,n).}$$

Jeżeli więc stabelaryzujemy krakowiany $\underline{F}$, *ograniczając się do mającego znaczenie praktyczne zakresu zmienności* p *i* n *(zabiera to kilka stron druku), zadanie wyrównania obserwacyjnej tabeli wielomianowej sprowadzi się do odszukania w tablicach odpowiedniego krakowianu wyrównawczego* $\underline{F}$ *i pomnożeniu przezeń krakowianu obserwacji. Otrzymany w wyniku tego mnożenia krakowian poprawek, dodany do krakowianu obserwacji da nam krakowian obserwacji wyrównanych — oznaczamy go przez* $\underline{W}$ *— zaś pomnożony przez siebie („podniesiony do kwadratu") da sumę kwadratów poprawek obserwacyjnych, pozwalającą scharakteryzować dokładność obserwacji w drodze obliczenia błędu średniego obserwacji* m_0. Mamy więc:

$$\underline{W} = \underline{U} + \underline{v} \qquad \text{oraz } m_0 = \sqrt{\frac{\underline{v}^2}{n-p}}$$

Przykład liczbowy

Zilustrujemy postępowanie przykładem liczbowym, którego treść została zaczerpnięta z pracy dr T. M. Gołogórskiego: Rachunek wyrównawczy — podręcznik dla doświadczalników i przyrodników (Poznań, Warszawa, Wilno, Lublin 1927).

Między zawartością bezpostaciowego kwasu krzemowego w ziemi X (zawartość wyrażona w procentach suchej masy) a pojemnością wody w ziemi U skonstatowano zależność, którą charakteryzuje następująca doświadczalna tablica funkcyjna:

X	U
0	24.72
2	26.56
4	28.14
6	34.11
8	38.41
10	42.51

Należy przeprowadzić wyrównanie danych obserwacyjnych U, stawiając założenie, że między U i X zachodzi związek trzeciego stopnia:

$$U = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

Ponieważ ilość parametrów wynosi cztery, zaś ilość obserwacji sześć, weźmiemy krakowian wyrównujący: $\underline{F}(4.6)$. W praktyce przepisywanie krakowianu $\underline{F}$ nie ma oczywiście celu. Najwygodniej jest przepisać krakowian $\underline{U}$ na pasek kartonu, który dla wykonania mnożenia nasuwamy na tablicę krakowianów $\underline{F}$.

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24.72 \\ 26.56 \\ 28.14 \\ 34.11 \\ 38.41 \\ 42.51 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.03969 & 0.12699 & -0.11111 & -0.03174 & -0.08730 & -0.03175 \\ 0.12699 & -0.42064 & 0.41271 & 0.01586 & -0.22222 & 0.08730 \\ -0.11111 & 0.41271 & -0.53971 & 0.25399 & 0.01586 & -0.03174 \\ -0.03174 & 0.01586 & 0.25399 & -0.53971 & 0.41271 & -0.11111 \\ 0.08730 & -0.22222 & 0.01586 & 0.41271 & -0.42064 & 0.12699 \\ -0.03175 & 0.08730 & -0.03174 & -0.11111 & 0.12699 & -0.03969 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.19 \\ -0.70 \\ 0.95 \\ -0.50 \\ 0.02 \\ 0.04 \end{Bmatrix}$$

czyli: $\underline{v} = \underline{U} \qquad \underline{F}(p\,n) \qquad = \qquad \underline{v}$

Obliczenie sumy kwadratów poprawek daje: $\sum v\,v = \underline{v}^2 = 1.6806$. Stąd wnioskujemy, że błąd średni obserwacji wynosi: $m_0 = \sqrt{\frac{1.6806}{6-4}} = \pm\,0.9$ (jest to zresztą właściwie łączny błąd i obserwacji i założenia takiego związku funkcyjnego). Wyrównana tablica obserwacyjna mieć będzie postać (I):

X	U
0	24.91
2	25.86
4	29.09
6	33.61
8	38.43
10	42.55

(I)

Dla porównania podajemy obok (II) wyrównaną tablicę otrzymaną przez dr Gołogórskiego w wyniku nierównie mozolniejszego postępowania rachunkowego nie opartego na warunkach minimum sumy kwadratów poprawek, która to suma wynosi u dr Gołogórskiego 4.5487 (1 cite str. 67).

X	U	poprawki
0	24.44	−0.28
2	26.90	0.34
4	29.89	1.75
6	33.43	−0.68
8	37.54	−0.87
10	42.24	−0.27

(II).

Jeżeli do realizacji liczbowej zagadnienia mamy zestaw sześciu arytmometrów, rozwiązanie zabiera kilka minut czasu. Sprowadza się ono do wykonania mnożenia sposobem beta, to znaczy wprowadzania na zestaw kolejnych wierszy prawego krakowianu i mnożenia ich przez kolejne elementy krakowianu lewego. W wyniku otrzymamy w licznikach rezultatowych kolejne elementy krakowianu poprawek $\underline{v}$.

Jeżeli ilość arytmometrów w zestawie jest mniejsza od sześciu, należy podzielić prawy czynnik na grupy kolumnowe i zastosować wskazówki, podane na str. 5.

Kryterium stwierdzające czy dana tablica jest tablicą p parametrowego wielomianu (tzn. wielomianu stopnia p — 1). W celu sprawdzenia rachunku wyrównania obserwacyjnej tablicy wielomianowej najprościej zastosować: *Twierdzenie o położeniu $p+1$ punktów na p parametrowej krzywej wielomianowej.*

Jeżeli: $U_0 U_1 U_2 \dots U_p$ jest szeregiem wartości, jakie przybiera wielomian $U(x)$ dla szeregu równoodległych wartości: $X_0 X_1 X_2 \dots X_p$, wówczas iloczyn krakowianu $\underline{U}$ utworzonego przez skolumnowanie szeregu wartości $\underline{U}$ przez krakowian Newtonowski $\underline{N}$ o odpowiedniej ilości elementów jest zerem.

$$\boxed{\underline{U} \cdot \underline{N} = \underline{0}}$$

Przez krakowian Newtonowski $\underline{N}$ rozumiemy tu krakowian, utworzony przez skolumnowanie wartości spółczynników dwumianu Newtona przy nadaniu tym spółczynnikom przeplatających się znaków.

Są więc krakowianami Newtonowskiemi następujące zespoły:

$$\left\{\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}1\\-2\\1\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}-1\\3\\-3\\1\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}-1\\5\\-10\\10\\-5\\1\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}1\\-6\\15\\-20\\15\\-6\\1\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}-1\\7\\-21\\35\\-35\\21\\-7\\1\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}1\\-8\\28\\-56\\70\\-56\\28\\-8\\1\end{matrix}\right\} \quad \text{ogólnie:} \left\{\begin{matrix}-\binom{n}{0}\\+\binom{n}{1}\\-\binom{n}{2}\\\vdots\\\pm\binom{n}{n}\end{matrix}\right\}$$

W podanym wyżej przykładzie liczbowym mamy krzywą czteroparametrową. Dla sprawdzenia mnożyć więc będziemy pięcioelementowe krakowiany wyrównanej tablicy przez pięcioelementowy krakowian $\underline{N}$.

$$\text{Otrzymamy:} \left\{\begin{matrix}24.91\\25.86\\29.09\\33.61\\38.43\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{matrix}\right\} = 0.00 \qquad \text{oraz:} \left\{\begin{matrix}25.86\\29.09\\33.61\\38.43\\42.55\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{matrix}\right\} = -0.01 \simeq 0.$$

II. WYRÓWNANIE METODĄ NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW APROKSYMACJI WIELOMIANOWYCH FUNKCJI MATEMATYCZNYCH

Identyczne formalnie, choć odmienne pojęciowo od rozpatrzonego zagadnienia wyrównania doświadczalnej tablicy wielomianowej jest zagadnienie zastąpienia pewnej funkcji matematycznej przez wielomian algebraiczny możliwie mało różniący się w określonym przedziale zmienności od danej funkcji.

Obieramy tu ten z wielomianów założonego stopnia, który posiada tę właściwość, że suma kwadratów różnic między wartością wielomianu a wartością funkcji dla pewnej ilości tych wartości jest minimum. (Zagadnienie można także traktować w sposób ogólny, to znaczy szukać wielomianu posiadającego tę właściwość przy założeniu nieskończonej ilości punktów w danym przedziale zmienności. Zagadnienie takie rozwiązuje się w oparciu o pojęcie całki średniej). Zadanie jest rachunkowo identyczne z zadaniem wyrównania obserwacyjnej tablicy wielomianowej — ilustrujemy je przykładem, którego treść zaczerpnięta została z pracy: „Tieorja i praktika wyczislenij" W. M. Bradisa (Moskwa 1937). Rozwiązanie zadania przy pomocy mnożenia krakowianowego jest oczywiście wielokrotnie krótsze.

Przykład liczbowy (W. M. Bradis — jw.)

Mając daną tablicę funkcyjną:

X	U
2.0	0.3010
2.2	0.3424
2.4	0.3802
2.6	0.4150
2.8	0.4472
3.0	0.4771

znaleźć aproksymację tej funkcji w przedziale od $X = 2$ do $X = 3$ za pomocą wielomianu drugiego stopnia, to znaczy znaleźć taki wielomian:

$$U = a\,x^2 + b\,x + c,$$

aby suma kwadratów poprawek v, jakie trzeba nadać wartościom funkcji U w punktach: $x = 2.0\ 2.2 \dots 3.0$ dla otrzymania wartości wielomianu U w tychże punktach, była najmniejszością.

Ponieważ w naszym zagadnieniu mamy $p = 3$ i $n = 6$ dla otrzymania poszukiwanego krakowianu poprawek $\underline{v}$ pomnożymy krakowian tablicowy $\underline{U}$ przez krakowian wyrównujący $\underline{F}$ (3.6).

Pisząc to wyraźnie, otrzymamy:

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} 0.3010 \\ 0.3424 \\ 0.3802 \\ 0.4150 \\ 0.4472 \\ 0.4771 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.17857 & 0.32143 & 0 & -0.14286 & -0.10714 & 0.10714 \\ 0.32143 & -0.69286 & 0.25714 & 0.17143 & 0.05000 & -0.10714 \\ 0 & 0.25714 & -0.62857 & 0.34286 & 0.17143 & -0.14286 \\ -0.14286 & 0.17143 & 0.34286 & -0.62857 & 0.25714 & 0 \\ -0.10714 & 0.05000 & 0.17143 & 0.25714 & -0.69286 & 0.32143 \\ 0.10714 & -0.10714 & -0.14286 & 0 & 0.32143 & -0.17857 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0002 \\ -0.0003 \\ -0.0001 \\ 0.0002 \\ 0.0003 \\ -0.0002 \end{Bmatrix}$$

Ostatecznie tablica wyrównana mieć będzie postać:

X	U
2.0	0.3012
2.2	0.3421
2.4	0.3801
2.6	0.4152
2.8	0.4475
3.0	0.4769

Sprawdzając przy pomocy krakowianu $\underline{N}$, czy otrzymany zespół jest istotnie tablicą wielomianu 3 parametrowego, otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} 0.3012 \\ 0.3421 \\ 0.3801 \\ 0.4152 \\ 0.4475 \\ 0.4769 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & & \\ 3 & -1 & \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ & 1 & -3 \\ & & 1 \end{Bmatrix} = \underline{0}.$$

III. OBLICZENIE SPÓŁCZYNNIKÓW WIELOMIANU Z REGULARNEJ TABLICY WIELOMIANOWEJ

Mając tablicę wartości, jakie przybiera wielomian $U(x)$ dla równoodległych wartości argumentu $x_0\, x_1\, x_2 \dots$ ($\Delta x = \text{const.}$), obliczyć możemy wartości spółczynników („parametrów wielomianu") $a_0\, a_1\, a_2 \dots$ równania:

$$U = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

w ten czy inny sposób. Jeżeli oznaczyć przez r odwrotność stałej różnicy argumentu, tzn.:

$$r = \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{x_2 - x_1} \dots$$

obliczyć można dość wygodnie krakowian spółczynników realizując wzory, które dalej podajemy. We wzorach tych wyrażono krakowian spółczynników jako iloczyn krakowianu znanych wartości wielomianu, skolumnowanego z krakowianem tychże spółczynników przez krakowian $\underline{k}$ dający się zestawić z wartości znanych. Równanie ma więc kształt:

$$\begin{Bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{Bmatrix} \cdot \underline{K} \qquad \text{gdzie } \underline{K} \text{ dane.}$$

Pozornie jest ono nierozwiązalne, gdyż wyraża nieznany krakowian $\underline{a}$ przez tenże krakowian. Jednak układ elementów w krakowianie $\underline{k}$ jest taki, że realizacja równania nie przedstawia żadnych trudności; gdyż mnożenie krakowianu $\begin{Bmatrix} \underline{U} \\ \underline{a} \end{Bmatrix}$ przez pierwszą kolumnę krakowianu $\underline{k}$ nie wymaga znajomości elementów a; mnożenie $\left\{\frac{U}{a}\right\}$ przez drugą kolumnę k wymaga tylko znajomości a_n itd. Równania realizujemy więc stopniowo, wpisując natychmiast po obliczeniu wartości elementów a_i do krakowianu: $\left\{\frac{U}{a}\right\}$.

Te wzory na obliczenie stopniowe spółczynników wielomianu z regularnej tabeli wielomianowej mają postać:

Wielomian dwuparametrowy (funkcja liniowa):

$$\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \hline a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cc} -r & 1 \\ r & \\ & -x_1 \\ & 0 \end{array}\right\}, \quad \text{gdzie: } r = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

Wielomian trójparametrowy (parabola kwadratowa):

$$\left\{\begin{array}{c} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \hline a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccc} {}^1/_2\, r^2 & -r & 1 \\ -r^2 & r & \\ {}^1/_2\, r^2 & & \\ & -(x_1 + x_2) & -x_1^2 \\ & & -x_1 \\ & & 0 \end{array}\right\}$$

Wielomian czteroparametrowy (parabola sześcienna):

$$\left\{\begin{array}{c} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \hline a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} -{}^1/_6\, r^3 & {}^1/_2\, r^2 & -r & 1 \\ {}^1/_2\, r^3 & -r^2 & r & \\ -{}^1/_2\, r^3 & {}^1/_2\, r^2 & & \\ {}^1/_6\, r^3 & & & \\ & -(x_1+x_2+x_3) & -(x_1^2+x_2^2+x_1x_2) & -x_1^3 \\ & & -(x_1+x_2) & -x_1^2 \\ & & & -x_1 \\ & & & 0 \end{array}\right\}$$

Zastosujemy podane wyżej wzory do obliczenia spółczynników wielomianów, których wartości ustalaliśmy w drodze wyrównania metodą najmniejszych kwadratów na str. 11 — 12.

Przykład liczbowy

Obliczając spółczynniki czteroparametrowego wielomianu, wyrównanego na str. 11 znajdziemy, $(r = {}^1/_2)$:

$$\left\{\begin{array}{c} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 24.91 \\ 25.86 \\ 29.09 \\ 33.61 \\ \hline a_3 = -0.020628 \\ a_2 = 0.408768 \\ a_1 = -0.260024 \\ a_0 = 24.91 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{rrrr} -0.020833 & 0.125 & -0.5 & 1 \\ 0.062500 & -0.250 & 0.5 & \\ -0.062500 & 0.125 & & \\ 0.020833 & & & \\ & -6 & -4 & 0 \\ & & -2 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{array}\right\}$$

Poszukiwane równanie ma więc postać:

$$U = -0.02063\, x^3 + 0.40877\, x^2 - 0.26002\, x + 24.91 \ldots$$

Przykład liczbowy

Dla obliczenia spółczynników wielomianu aproksymacyjnego ze str. 11 napiszemy (bierzemy tu co drugi wyraz, tzn. $r = 0{,}4$):

$$\left\{\begin{array}{r} 0.3012 \\ 0.3801 \\ 0.4475 \\ \hline a_2 = -0.035937 \\ a_1 = 0.355373 \\ a_0 = -0.265798 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{rrr} -3.125 & 2.5 & 1 \\ -6.250 & 2.5 & \\ 3.125 & & \\ & -4.4 & -4 \\ & & -2 \\ & & 0 \end{array}\right\}$$

Poszukiwane równanie ma tedy kształt:

$$U = -0.03594\, x^2 + 0.35537\, x - 0.26580$$

IV. INTERPOLACJA BEZPOŚREDNIA

Interpolacją bezpośrednią nazywamy interpolację przy pomocy wielomianów algebraicznych (tzw. interpolację paraboliczną), pomijającą pojęcie różnic, a operującą bezpośrednio stabelaryzowanymi wartościami funkcji. Interpolacja bezpośrednia jest specjalnie przejrzysta formalnie i ekonomiczna w rachunku przy ujęciu krakowianowym zwłaszcza, gdy chodzi o interpolowanie funkcji dwóch i więcej argumentów, w wykonaniu różnicowym wybitnie uciążliwe.

Interpolacja bezpośrednia sprowadza się do mnożenia krakowianów z tablicy funkcyjnej danej funkcji przez krakowiany interpolacyjne (można by je nazwać „krakowianami Lagrange'a" od nazwiska twórcy bezpośredniego wzoru interpolacyjnego).

Krakowiany interpolacyjne — oznaczamy dużymi literami początku alfabetu: $\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C} \ldots\ldots$ *wyszukuje się z tablic* krakowianów interpolacyjnych — ich obliczanie byłoby bardzo uciążliwe — przy czym argumentem jest oczywiście „faza", zwana też „ułamkiem interpolacyjnym", czyli stosunek różnicy między wartością zmiennej niezależnej, dla której poszukujemy wartości funkcji a najbliższą mniejszą wartością argumentu do stałej różnicy wartości sąsiadujących argumentów (rozpatrujemy tu wyłącznie interpolację z tablic „regularnych", to znaczy tablic, w których argumenty sąsiadujące różnią się o wartość stałą).

Tablice podają wartości krakowianów interpolacyjnych interpolacji trójwyrazowej i czterowyrazowej, to znaczy interpolacji przy pomocy paraboli kwadratowej i sześciennej. Chcąc interpolować dwuwyrazowo — interpolacja „liniowa" — zestawiamy krakowian interpolacyjny przez skolumnowanie różnicy między jednością i ułamkiem interpolacyjnym z ułamkiem interpolacyjnym. Będzie więc np. przy interpolowaniu liniowym dla argumentu: 5.12 między wartościami argumentu 4 i 6 podanymi przez tablicę: ułamek interpolacyjny $k = \frac{1.12}{2}$ czyli: 0.56; zaś krakowian intorpolacyjny: $\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.44 \\ 0.56 \end{Bmatrix}$.

Interpolując trójwyrazowo dla tegoż wypadku znajdziemy według ułamka 0.56 krakowian interpolacyjny $\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.3168 \\ 0.8064 \\ -0.1232 \end{Bmatrix}$

Jeżeli ilość cyfr dziesiętnych w ułamku interpolacyjnym jest większa od ilości cyfr uwzględnionych w tablicy (tablice interpolacji trójwyrazowej, jako częściej stosowane, podają wartości krakowianów interpolacyjnych w przedziałach argumentu 0.001, tablice interpolacji czterowyrazowej w przedziałach 0.01), *wówczas należy wziąć z tablicy krakowian dla najbliższej mniejszej wartości ułamka interpolacyjnego k i skorygować elementy tego krakowianu zmniejszając pierwszy, a zwiększając drugi o różnicę między ułamkiem interpolacyjnym danym w zagadnieniu, a umieszczonym w tablicy. Ta prosta korekta daje najzupełniej wystarczające przybliżenie wartości poszukiwanego krakowianu interpolacyjnego.* *)

Postępowanie korekcyjne można zasymbolizować wzorem:

$$\boxed{\underline{A}\,(k + \Delta k) = \begin{Bmatrix} A_0 - \Delta k \\ A_1 + \Delta k \\ A_2 \end{Bmatrix}}$$

zrozumiałym bez bliższych omówień.

Tak np: dla ułamka interpolacyjnego: $k = 0.274\ 0.425$ będzie:

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.626\ \overset{-0425}{5380} \\ 0.472\ \overset{+0425}{9240} \\ -0.099\ 4620 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.626\,4955 \\ 0.472\,9665 \\ -0.099\,4620 \end{Bmatrix}$$

*) Powstający stąd błąd w obliczeniu interpolowanej wartości funkcji (przy użyciu tablic omówionych) nie przekroczy:

dla interpolacji trójwyrazowej: $\begin{Bmatrix} 0.005 \\ -0.010 \\ 0.005 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$ dla interpolacji czterowyrazowej: $\begin{Bmatrix} -0.0083 \\ 0.0200 \\ -0.0150 \\ 0.0033 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$

Podobnie dla $k = 0.23\,45$ krakowian interpolacji czterowyrazowej będzie:

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} \overset{-45}{0.62\,92055} \\ \overset{+45}{0.56\,38335} \\ -0.24\,52835 \\ 0.05\,22445 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.62\,47055 \\ 0.56\,83335 \\ -0\,24\,52835 \\ 0.05\,22445 \end{Bmatrix} \text{ itp.}$$

Suma elementów krakowianu interpolacyjnego jest zawsze równa jedności. Ta własność pozwala na kontrolę mnożenia bez jakichkolwiek dodatkowych czynności.

Interpolacja funkcji jednego argumentu

Wartość funkcji U argumentu x wyinterpolowana z tablicy funkcyjnej:

X	U
⋮	⋮
X_0	U_0
X_1	U_1
X_2	U_2
⋮	⋮

(Δ X = const.) dla wartości argumentu x zawartej między x_0 i x_1 równa się iloczynowi:

$$\boxed{u = \underline{A}\,\underline{U}}$$

gdzie $\underline{U}$ jest krakowianem funkcyjnym, zaś $\underline{A}$ krakowianem interpolacyjnym, który znajdujemy w tablicy krakowianów interpolacyjnych według ułamka interpolacyjnego $k = \dfrac{x - x_0}{\Delta x}$

Ilość elementów w krakowianach $\underline{A}$ i $\underline{U}$ zależy oczywiście od rzędu interpolacji.

Przykład liczbowy

Posługując się interpolacją trójwyrazową obliczyć: $\sqrt[3]{151\,712}$ w oparciu o następującą tablicę funkcyjną:

X	$U = \sqrt[3]{x}$	$\underline{A}$
⋮	⋮	
150	5.313 293	
151	5.325 074	0.185 4720
152	5.336 803	0.917 0560
153	5.348 481	— 0.102 5280
154	5.360 108	

Według ułamka interpolacyjnego: $k = \dfrac{0.712}{1} = 0.712$ znajdujemy w tablicy krakowian interpolacyjny $\underline{A}$ i wykonujemy mnożenie: $\underline{A} \cdot \underline{U}$ — najwygodniej przez napisanie krakowianu $\underline{A}$ na kawałku kartonu i nasunięcie na tablicę funkcyjną tak, aby początkowy element krakowianu znalazł się naprzeciw wyjściowej wartości funkcji. Otrzymamy: $U = \sqrt[3]{151712} = 5.333\,430$.

Gdyby zadanie polegało na znalezieniu $U = \sqrt[3]{151.723}$ mielibyśmy: $k = 0.1723$ i krakowian interpolacyjny dla $k = 0.712$ należałoby skorygować nadając mu postać: $\begin{Bmatrix} 0.185\,1720 \\ 0.917\,3560 \\ -0.102\,5280 \end{Bmatrix}$. Po wymnożeniu otrzymalibyśmy: 5.333 434.

Interpolacja funkcji dwóch argumentów

Wartość funkcji U argumentów x y wyinterpolowana z tablicy funkcyjnej:

	⋯	Y_0	Y_1	Y_2	⋯
⋮	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
X_0	⋯	U_{00}	U_{10}	U_{20}	⋯
X_1	⋯	U_{01}	U_{11}	U_{21}	⋯
X_2	⋯	U_{02}	U_{12}	U_{22}	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Δx = const.
Δy = const.

dla wartości argumentów x y — przy czym x zawarte między x_0 i x_1, zaś y zawarte między y_0 i y_1 — równa jest iloczynowi krakowianowemu $\underline{A}\,\underline{U}\,\underline{B}$:

$$\boxed{U = \underline{A} \cdot \underline{U} \cdot \underline{B}}$$

gdzie $\underline{A}$ jest „krakowianem interpolacji kolumnowej", to znaczy krakowianem interpolacyjnym, wziętym z tablicy według ułamka interpolacyjnego: $k = \dfrac{x - x_0}{\Delta x}$; $\underline{B}$ jest „krakowianem interpolacji wierszowej", to znaczy krakowianem interpolacyjnym, wziętym z tablicy według ułamka interpolacyjnego: $k = \dfrac{y - y_0}{\Delta y_1}$ wreszcie $\underline{U}$ jest krakowianem funkcyjnym. Ilość elementów w krakowianach $\underline{A}\,\underline{U}\,\underline{B}$ zależna jest oczywiście od rzędu interpolacji. Interpolując np: dwuwyrazowo w kolumnach, a trójwyrazowo w wierszach, to znaczy uważając U przy ustalonej wartości y za funkcję liniową x, zaś U przy ustalonej wartości x za funkcję drugiego stopnia y napisalibyśmy wyraźnie:

$$U = \left\{\begin{matrix} A_0 \\ A_1 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} U_{00} & U_{10} & U_{20} \\ U_{01} & U_{11} & U_{21} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{matrix}\right\} \quad \text{itp.}$$

Odnośnie wartości krakowianów interpolacyjnych obowiązuje oczywiście wszystko, powiedziane o tych krakowianach na str. 14, to znaczy: w wypadku interpolacji liniowej zestawiamy krakowian interpolacyjny bezpośrednio, jako: $\left\{\begin{matrix} 1-k \\ k \end{matrix}\right\}$, w wypadkach interpolacji trój- lub czterowyrazowej korzystamy z tablic krakowianów interpolacyjnych, wprowadzając w razie potrzeby omówioną szczegółowo korektę początkowych elementów.

Przykład liczbowy

Znaleźć wartość funkcji stabelaryzowanej w tablicy:

Y	3	6	9	12	15	18
2	6	12	18	24	30	36
4	12	24	36	48	60	
6	18	36	54	72	90	
8	24	48	72	96	120	
10	30	60	90	120	150	
12	36	72	108	144	180	216

$\underline{A}$	$\underline{AU}$	$\underline{B}$
0.65625	58.50	0.72000
0.43750	78.00	0.36000
−0.09375	97.50	−0.08000

dla wartości argumentów: $x = 6.5$ $y = 9{,}6$ interpolując trójwyrazowo.

Ułamki interpolacyjne wynoszą odpowiednio:

„kolumnowy" $k_x = \dfrac{6.5-6}{2} = 0.25$

„wierszowy" $k_y = \dfrac{9.6-9}{3} = 0.20.$

Znalezione według tych ułamków z tablic krakowiany interpolacyjne równe są:

$$\underline{A} = \left\{\begin{matrix} 0.65\,625 \\ 0.43\,750 \\ -0.09\,375 \end{matrix}\right\} \quad \text{oraz: } \underline{B} = \left\{\begin{matrix} 0.72\,000 \\ 0.36\,000 \\ -0.08\,000 \end{matrix}\right\}$$

Pisząc zupełnie wyraźnie działanie $\underline{U} = \underline{A}\,\underline{U}\,\underline{B}$ mielibyśmy:

$$U = \left\{\begin{matrix} 0.65\,625 \\ 0.43\,750 \\ -0.09\,375 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 54 & 72 & 90 \\ 72 & 96 & 120 \\ 90 & 120 & 150 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 0.72\,000 \\ 0.36\,000 \\ -0.08\,000 \end{matrix}\right\}$$

Ponieważ według definicji (str. 2) dla obliczenia iloczynu trzech krakowianów należy pomnożyć pierwszy przez drugi, po czym znaleziony iloczyn przez trzeci krakowian, otrzymamy stopniowo:

$$U = \underline{A}\,\underline{U}\,\underline{B} = (\underline{A}\,\underline{U})\,\underline{B} = U: \qquad \left\{\begin{matrix} 58.50 \\ 78.00 \\ 97.50 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 0.72\,000 \\ 0.36\,000 \\ -0.08\,000 \end{matrix}\right\} = 62.40$$

W praktyce rachunkowej takie wyraźne wypisywanie wszystkich działań nie miałoby oczywiście celu. Najwygodniej oznaczyć na tablicy funkcyjnej krakowian $\underline{U}$, napisać na kawałku kartonu krakowiany $\underline{A}$ i $\underline{B}$, pozostawiając pomiędzy nimi miejsce na wpisanie iloczynu $(\underline{A}\,\underline{U})$, po czym karton nasunąć na tablicę funkcyjną dla dokonania mnożenia.

Uzmysłowiliśmy tę czynność powyżej, ograniczając krakowian $\underline{U}$ na tablicy funkcyjnej przez wzięcie go w nawiasy krakowianowe i rysując obok zarys kawałka kartonu z wpisanymi nań krakowianami: $\underline{A}$ *i* $\underline{B}$ (z tablic), oraz $(\underline{A}\,\underline{U})$ — uzyskany w toku rachunku.

Rachunek przy pomocy zestawu arytmometrycznego jest tu oczywiście dużo ekonomiczniejszy. Sprowadza się on do kolejnego wprowadzania na zestaw całych wierszy krakowianu tablicowego $\underline{U}$ i mnożenia tych wierszy przez kolejne elementy kolumny $\underline{A}$. Po przemnożeniu wszystkich wierszy $\underline{U}$ przez odpowiadające elementy $\underline{A}$, w licznikach rezultatowych odczytamy kolejno wszystkie elementy kolumny $(\underline{A}\,\underline{U})$, przyczym w wypadku bezbłędnego mnożenia licznik obrotów wykaże jedność. Dalsze obliczenie: $U = (\underline{A}\,\underline{U}) \cdot \underline{B}$ — którego kontrolą będzie też jedność w liczniku obrotów nie jest na zestawie ekonomiczniejsze od obliczenia na arytmometrze pojedyńczym. W rachunkach geodezyjnych zachodzi czasem potrzeba jednoczesnego interpolowania wartości dwóch funkcji dla tych samych wartości argumentów. Rola zestawu jest w tych wypadkach zbyt zrozumiała, aby ją szczegółowo opisywać: wprowadzamy na zestaw jednocześnie wiersze obu krakowianów tablicowych.

Interpolacja funkcji trzech argumentów

Wyobraźmy sobie układ tablic wartości funkcji trzech argumentów $u = f(x\,y\,z)$, z których jedna zawiera zespół wartości tej funkcji dla stałej wartości zmiennej niezależnej $z = z_0$, następna — zespół wartości tej funkcji dla stałej, lecz innej wartości zmiennej niezależnej $z = z_1$, następna — zespół wartości funkcji dla wartości zmiennej $z = z_2$ itd. itd., przy czym jest:

$$\Delta x = \text{const}_1 \qquad \Delta y = \text{const}_2 \qquad \Delta z = \text{const}_3$$

Taki układ tablic można sobie wyobrazić, jak kolejne karty książki. W praktyce rachunkowej jest zresztą wygodniej posługiwać się raczej układem tablic, sporządzonych na oddzielnych kartonach.

Chcąc z takiego układu tablic wyinterpolować wartość funkcji, odpowiadającą wartościom danym zmiennych niezależnych $x\,y\,z$, operować będziemy znanymi nam już krakowianami interpolacyjnymi określonymi w wiadomy sposób z ułamków interpolacyjnych: $k_x \dfrac{x-x_0}{\Delta x}$ $k_y = \dfrac{y-y_0}{\Delta y}$ i $k_z = \dfrac{z-z_0}{\Delta z}$, które to krakowiany interpolacyjne oznaczymy odpowiednio przez: $\underline{A}\,\underline{B}$ i $\underline{C}$; oraz zespołowym krakowianem funkcyjnym: $\{\underline{U_0}, \underline{U_1}, \underline{U_2} —\}$. *Ten zespołowy krakowian funkcyjny powstaje przez zszeregowanie krakowianów, wybranych z poszczególnych tablic układu. Nazywamy go tu krakowianem zespołowym i piszemy w specjalny sposób, oddzielając w nim znakiem przecinka poszczególne krakowiany składowe; gdyż w odmienny sposób zdefiniujemy iloczyn krakowianu zwykłego przez zespołowy. Za iloczyn jednokolumnowego krakowianu przez zespołowy uważać będziemy krakowian, którego kolejne kolumny są iloczynami jednokolumnowego krakowianu przez kolejne krakowiany składowe krakowianu zespołowego. Tę definicję wyrazi wzór:*

$$\underline{A\{U_1, U_2, U_3\} = \{AU_1\ AU_2\ AU_3\}}$$

gdzie $\underline{A}$ jest jednokolumnowym krakowianem, zaś $\underline{U_1}\,\underline{U_2}\,\underline{U_3}$ składowymi krakowianami krakowianu zespołowego. Będzie więc naprzykład:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1\ 3\ 4 & 1\ 0\ 1 \\ 0\ 2\ 1, & 3\ 2\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 11 \\ 12 & 6 \\ 11 & 5 \end{Bmatrix} \text{ lecz: } \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1\ 3 & 4\ 1 & 0\ 1 \\ 0\ 2, & 1\ 3, & 2\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 12 & 11 & 5 \end{Bmatrix} \text{ itp:.}$$

Wprowadzona definicja pozwala wyrazić wartość funkcji trzech argumentów, wyinterpolowaną ze zbioru tablic funkcyjnych prostym wzorem krakowianowym:

$$\boxed{u = (\underline{A}\{\underline{U_0}, \underline{U_1}, \underline{U_2}\}\underline{B})^{\cdot}\,\underline{C}}$$

Realizację tego wzoru najlepiej wyjaśni przykład:

Przykład liczbowy

Z danego układu tablic wyinterpolować przy pomocy interpolacji trójwyrazowej wartości funkcji $u = f(x\,y\,z)$ dla wartości zmiennych: $x = 3.00$ $y = 3.60$ $z = 0.25$.

z = 0

X \ Y	3	6	9
--	--	--	--
2	6	12	18
4	12	24	36
6	18	36	54
--	--	--	--

z = 1

X \ Y	3	6	9
--	--	--	--
2	15	30	45
4	27	54	81
6	39	78	117
--	--	--	--

z = 2

X \ Y	3	6	9
--	--	--	--
2	24	48	72
4	12	84	126
6	60	120	180
--	--	--	--

Ułamki interpolacyjne wynoszą:

$$k_x = \frac{1}{2} = 0.50$$

$$k_y = \frac{0.6}{3} = 0.20$$

$$k_z = \frac{0.25}{1} = 0.25$$

Stąd krakowiany interpolacyjne:

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.375 \\ 0.750 \\ -0.125 \end{Bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{Bmatrix} 0.65625 \\ 0.43750 \\ -0.09375 \end{Bmatrix}$$

Pisząc wyraźnie całe działanie: $u = (\underline{A}\{\underline{U_0}\,\underline{U_1},\underline{U_2},\}\underline{B})^{*}\underline{C}$, otrzymalibyśmy stopniowo:

$$\begin{Bmatrix} 0.375 \\ 0.750 \\ -0.125 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 & 12 & 18 & 15 & 30 & 45 & 24 & 48 & 72 \\ 12 & 24 & 36 & 27 & 54 & 81 & 42 & 84 & 126 \\ 18 & 36 & 54, & 39 & 78 & 117, & 60 & 120 & 180 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 & 21 & 33 \\ 18 & 42 & 66 \\ 27 & 63 & 99 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -00.8 \end{Bmatrix} = \{10.80 \;\; 25.20 \;\; 39.60\}$$

$$\text{i ostatecznie: } u = \begin{Bmatrix} 10.80 \\ 25.20 \\ 39.60 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.65625 \\ 0.43750 \\ -0.09375 \end{Bmatrix} = 14.40$$

Rachunek przy pomocy zestawu arytmometrycznego złożonego z dziewięciu maszyn trwałby tu parę minut. Nastawiając kolejno całe wiersze krakowianu zespołowego — którego nawet nie trzeba wypisywać, gdy na leżących szeregowo tablicach funkcyjnych zakreślimy krakowiany składowe — i mnożąc je przez kolejne elementy krakowianu $\underline{A}$, otrzymamy na licznikach rezultatowych zespołu dziewięć liczb, z których pierwsze trzy dadzą pierwszą kolumnę, drugie trzy — drugą kolumnę, ostatnie trzy — ostatnią kolumnę krakowianu: $\underline{A}\{\underline{U_0},\underline{U_1},\underline{U_2}\}$. Nastawiając dalej wiersze otrzymanego krakowianu (obecnie pracują już tylko trzy maszyny zestawu) i mnożąc przez kolejne elementy krakowianu $\underline{B}$, otrzymamy iloczyn: $\underline{A}\{\underline{U_0},\underline{U_1},\underline{U_2}\}\underline{B}$ lub jeżeli napisać rezultat pod postacią kolumny — transpozą: $(\underline{A}\{\underline{U_0},\underline{U_1},\underline{U_2}\}\underline{B})^{*}$. Pozostaje pomnożyć otrzymaną kolumnę przez krakowian $\underline{C}$ dla otrzymania ostatecznego rezultatu $U = \left(\underline{A}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{B}\right)^{*}\underline{C}$.

Zagęszczanie tablic matematycznych

Zadanie zagęszczenia tablicy matematycznej, czyli wstawienia między dwie dane wartości funkcji szeregu—zazwyczaj dziewięciu—nowych wartości, obliczonych w założeniu, że funkcja może być uważana za wielomian algebraiczny, jest szczególnym wypadkiem zagadnienia interpolacyjnego. Dany jest tu krakowian wartości funkcji:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

dla szeregu równoodległych wartości argumentu: $X_0 X_1 X_2 \ldots$, poszukiwany krakowian wartości funkcji:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_0 \end{Bmatrix}$$

dla szeregu równoodległych wartości argumentu: $x_0 + \frac{\Delta x}{10}\; x_0 + \frac{2\Delta x}{10}\; x_0 + \frac{3\Delta x}{10} \ldots .\; x_0 + \frac{9\Delta x}{10}$.

Ilość elementów krakowianu $\underline{U}$ zależy od rzędu interpolacji, który trzeba w danym konkretnym wypadku stosować. Rząd ten najwygodniej określić, stosując pojęcie krakowianów Newtonowskich, o czym była mowa na str. 6. Jeśli np. mamy zagęszczać tablicę funkcyjną:

0.017 4524	
0.034 8995	
0.052 3360	
0.069 7565	K
0.087 1557	
0.104 5285	
....	

przekonamy się łatwo, że wystarczy tu interpolacja czterowyrazowa, to znaczy, że możemy dany tutaj zespół wartości funkcji uważać za zespół wartości wielomianu trzeciego stopnia. Stosując bowiem krakowiany Newtonowskie otrzymamy:

$$\left\{\begin{array}{c}0.017\,4524\\0.034\,8995\\0.052\,3360\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{r}1\\-2\\1\end{array}\right\}=-\,0.0000106\quad\left\{\begin{array}{c}0.017\,4524\\0.034\,8995\\0.052\,3360\\0.069\,7565\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{r}-1\\3\\-3\\1\end{array}\right\}=-\,0.0000054\quad\left\{\begin{array}{c}0.017\,4524\\0.034\,8995\\0.052\,3360\\0.069\,7565\\0.087\,1557\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{r}1\\-4\\6\\-4\\1\end{array}\right\}=0.0000001\simeq 0$$

Operacja zagęszczenia sprowadzi się do wykonania mnożenia krakowianowego według wzoru:

$$\boxed{\underline{u}=\underline{U}\cdot\underline{D}}$$

gdzie $\underline{D}$ oznacza „krakowian zagęszczenia dziesiętnego", to jest zespół napisanych szeregowo krakowianów interpolacyjnych dla ułamków interpolacyjnych: 0,1 0,2 0,3 .... 0,9.

Krakowiany zagęszczenia dziesiętnego dla interpolacji 3,4,5,6,7, wyrazowej podajemy dalej (str. 35).

Przykład liczbowy

Dla wstawienia dziewięciu wartości między pierwszy i drugi element krakowianu (K) przy pomocy interpolacji czterowyrazowej weźmiemy cztery pierwsze elementy tego krakowianu i ten czteroelementowy krakowian $\underline{U}$ pomnożymy przez krakowian zagęszczenia dziesiętnego interpolacji czterowyrazowej $\underline{D}_4$, wzięty z tablicy krakowianów, zagęszczenia dziesiętnego, otrzymując:

$$\left\{\begin{array}{c}0.017\,4524\\0.034\,8995\\0.052\,3360\\0.069\,7565\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr:r}0.8265&0.6720&0.5355&0.4160&0.3125&0.2240&0.1495&0.0880&0.0385&3.2625\\0.2755&0.5040&0.6885&0.8320&0.9375&1.0080&1.0465&1.0560&1.0395&7.3875\\-0.1305&-0.2240&-0.2835&-0.3120&-0.3125&-0.2880&-0.2415&-0.1760&-0.0945&-2.0625\\0.0285&0.0480&0.0595&0.0640&0.0625&0.0560&0.0455&0.0320&0.0165&0.4125\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0.019\,1974\\0.020\,9424\\0.022\,6873\\0.024\,4322\\0.026\,1769\\0.027\,9216\\0.029\,6662\\0.031\,4108\\0.033\,1552\\\hdashline 0.235\,5901\end{array}\right\}$$

Kontrolę rachunku może stanowić stwierdzenie przy pomocy krakowianu Newtonowskiego, że obliczone wartości są istotnie wartościami czteroparametrowego wielomianu. Mamy więc np:

$$\left\{\begin{array}{c}0.019\;\;1974\\0.020\;\;9424\\0.022\;\;6873\\0.024\;\;4322\\0.026\;\;1769\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{r}1\\-4\\6\\-4\\1\end{array}\right\}=-\,0.000000\,3\simeq 0.\ \text{itd.}$$

Rachunek przy pomocy zestawu arytmometrycznego złożonego z dziewięciu maszyn jest tu bardzo prędki. Sprowadza się do mnożenia sposobem beta, tj. wprowadzania na zestaw elementów wierszy krakowianu $\underline{D}$ i mnożenia przez elementy krakowianu funkcyjnego. W licznikach rezultatowych odczytujemy gotowe wartości funkcji. (Dziesiąta sumowa kolumna krakowianu $\underline{D}$, pozwalająca na kontrolę rachunku, wygodna w pracy na zwykłym arytmometrze; w pracy na zestawie jest raczej zbędna).

Rozwiązanie krakowianowe układu równań normalnych Gaussa

Rozwiązanie układu równań normalnych Gaussa:

$$\begin{array}{l}[a\,a]x\;+[a\,b]y\;+[a\,c]z\;+[a\;l]=0\\ [a\,b]x\;+[b\,b]y\;+[b\,c]z\;+[b\;l]=0\\ [a\,c]x\;+[b\;c]y\;+[c\,c]z\;+[c\;l]=0\end{array}$$

przy pomocy zestawu arytmometrycznego — czy to z jednoczesnym obliczeniem spółczynników wagowych:

$$Q_x=\frac{m_x^{\,2}}{m_0^{\,2}}\qquad Q_y=\frac{m_y^{\,2}}{m_0^{\,2}}\qquad Q_z=\frac{m_z^{\,2}}{m_0^{\,2}}$$

czy też bez przeprowadzenia tej czynności — bardzo ekonomicznie daje się wykonać metodą, znaną w rachunku krakowianowym pod nazwą „metody pierwiastka krakowianowego". Opisując poniżej tę metodę w dostosowaniu do rachunku na zestawie, nie będziemy wnikać w jej treść pojęciową. Nadmienimy tu tylko, że słuszność metody uzasadniana w pracach krakowianowych przy pomocy algebry krakowianu, daje się też względnie prosto uzasadnić przy pomocy algebry zwykłej:

Rozwiązanie sprowadza się do zestawienia tablicy skośnej:

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & f & & \\ \hline [aa] & [ab] & [ac] & [al] & -1 & \\ & [bb] & [bc] & [bl] & 0 & -1 \\ & & [cc] & [cl] & 0 & 0 \quad -1 \end{array}$$

którą nazywać będziemy dalej *„tablicą pierwotną"*, i obliczania w sposób, niżej szczegółowo opisany, drugiej tablicy skośnej:

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & B_1 & C_1 & L_1 & M_1 & \\ & B_2 & C_2 & L_2 & M_2 & N_2 \\ & & C_3 & L_3 & M_3 & N_3 \quad P_3 \end{array}$$

którą nazywać będziemy dalej *„tablicą wtórną"*; posiadającej tę własność, że *iloczyny środkowej jej kolumny przez kolumny na prawo położone wyznaczają wartości niewiadomych:*

$$x = [LM] \qquad y = [LN] \qquad z = [LP]$$

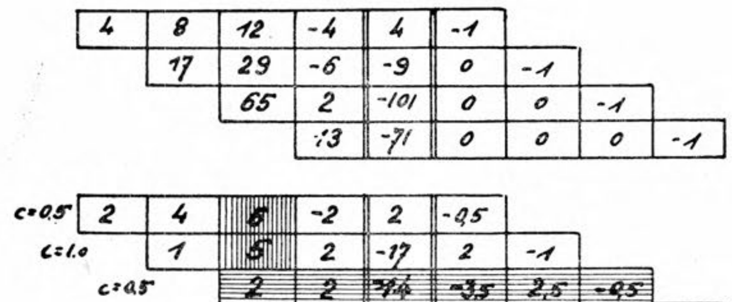
zaś sumy kwadratów elementów kolumn położonych na prawo od kolumny środkowej wyznaczają wartości spółczynników wagowych:

$$Q_x = [MM] \qquad Q_y = [NN] \qquad Q_z = [PP]$$

Oznaczenie literami elementów tablic ma tu wyłącznie charakter orientujący. W praktyce rachunkowej zestawiamy tylko schematy obu tablic przez odpowiednie rozliniowanie papieru, po czym wpisujemy znane zgóry elementy tablicy pierwotnej i przystępujemy do rachunku elementów tablicy wtórnej. Podanie zasady ogólnej, normującej obliczenie elementów tablicy wtórnej poprzedzimy wprowadzeniem paru określeń, ułatwiających wysłowienie tej zasady. A więc:

Nazwiemy **„kolumną prowadzącą** *i^tego wiersza tablicy wtórnej" zespół kolumnowy elementów położonych nad pierwszym elementem tego wiersza* (jest to więc i^{ta} kolumna bez ostatniego elementu). Kolumną prowadzącą trzeciego wiersza w narysowanym poniżej układzie tablic: pierwotnej i wtórnej, będzie więc zespół: $\begin{matrix}6\\5\end{matrix}$ kolumną prowadzącą wiersza czwartego będzie zespół $\begin{matrix}-2\\2\\2\end{matrix}$ itp.

Na rysunku zakreskowano trzeci wiersz tablicy wtórnej liniami poziomymi, jego kolumnę prowadzącą pionowymi. *Nazwiemy „szeregiem przejściowym i^tego wiersza tablicy wtórnej" i^ty wiersz tablicy pierwotnej zmniejszony o iloczyny zespołów wierszowych tablicy wtórnej, położonych nad wierszem i^tym przez odpowiadające elementy kolumny prowadzącej i^tego wiersza.* W myśl tego określenia szeregiem przejściowym pierwszego wiersza tablicy wtórnej będzie wiersz pierwszy tablicy pierwotnej.



Odwrotność pierwiastka pierwszego elementu szeregu przejściowego nazywać będziemy **„czynnikiem charakterystycznym"** *odpowiedniego wiersza i oznaczać C_i.* Wartość czynnika charakterystycznego C_i brać można z tablic umieszczonych na końcu niniejszej pracy (str. 51). *Szeregi przejściowe w toku rachunku na zestawie zapisaniu nie podlegają.* Dlatego nie widzimy ich w naszkicowanym układzie tablic.

Natomiast znając szereg przejściowy wiersza, uzyskujemy z niego odrazu odpowiedni wiersz tablicy wtórnej w drodze pomnożenia szeregu przejściowego przez czynnik charakterystyczny danego wiersza. Obliczenie postępuje więc stopniowo wierszami. Tak np. w naszym przykładzie mnożąc szereg przejściowy pierwszego wiersza (jest nim, jakto już nadmieniliśmy, pierwszy wiersz tablicy pierwotnej) przez czynnik charakterystyczny: $\frac{1}{\sqrt{4}} = 0.5$, otrzymamy pierwszy wiersz tablicy wtórnej. Pozwala to już na znalezienie szeregu przejściowego drugiego wiersza w drodze odjęcia od drugiego wiersza tablicy pierwotnej: 17 29 —6 — 9 0 —1

iloczynu: 4 6 —2 2 —0.5 razy 4

gdy otrzymany szereg przejściowy (napiszemy go wyraźnie): 1 ~~4~~ 5 2 —17 2 —1

pomnożymy przez czynnik charakterystyczny $C_z = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$, otrzymamy drugi wiersz tablicy wtórnej itd. itd.

Czynność przejścia od elementów tablicy pierwotnej do elementów tablicy wtórnej opisać więc możemy ostatecznie krótko, jak następuje: **dla obliczenia kolejnych wierszy tablicy wtórnej znajdujemy stopniowo szeregi przejściowe tych wierszy i mnożymy te szeregi przez odpowiadające czynniki charakterystyczne.** Otrzymane w wyniku tego mnożenia elementy wierszy tablicy wtórnej wpisujemy natychmiast do tej tablicy, gdyż są one zaraz potrzebne w dalszym rachunku.

Rachunek przy pomocy zestawu arytmometrycznego ma przebieg następujący:

1) Wprowadzamy na zestaw pierwszy wiersz tablicy pierwotnej, który, jak to już wiemy, jest jednocześnie szeregiem przejściowym pierwszego wiersza tablicy wtórnej, odszukujemy według pierwszego elementu p tego szeregu czynnik charakterystyczny pierwszego wiersza c, $\left(C = \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ poczem mnożymy przez ten czynnik wiersz, wprowadzony na zestaw. Otrzymane w licznikach rezultatowych liczby, tworzące kolejne elementy pierwszego wiersza tablicy wtórnej, zaraz wpisujemy do tej tablicy.

Zarówno przy operacji **nastawiania,** *jak i przy operacji* **zapisu,** *liczby ujemne w toku całego rachunku występują pod postacią uzupełnień dziesiętnych.* Pod tą postacią najwygodniej wpisywać je odrazu do tablicy pierwotnej, jak to zrobiliśmy w przykładzie liczbowym na str. 16. Dla zaoszczędzenia czasu zapisu, wygodniej jest posługiwać się znanym symbolem gwiazdki *. Symbol ten umieszczony na początku liczby oznacza praktycznie tyle dziewiątek, ile ich pozwala ustawić licznik nastawień. A więc np. liczbę ujemną —124 piszemy pod postacią *876 (czytać: gwiazdka osiemset siedemdziesiąt sześć), a ustawiamy na arytmometrze o dziewięciocyfrowym liczniku nastawień pod postacią: 999 999 876.

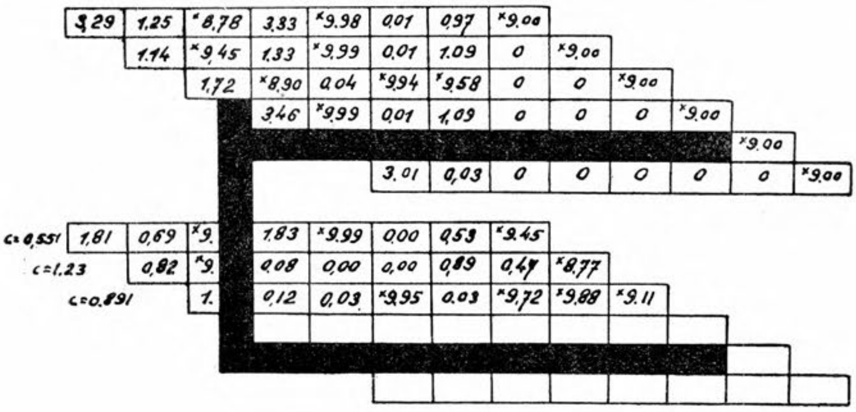
Przy operacji mnożenia przez liczbę napisaną pod postacią uzupełnienia dziesiętnego obowiązują te same zasady, co przy operacji mnożenia przez każdą inną liczbę. Mając np. **dodać** do liczby znajdującej się w liczniku rezultatów iloczyn jakiejkolwiek liczby, ustawionej w liczniku nastawień przez liczbę *876, możemy wykonać **prawe** obroty, wskazane przez kolejne cyfry: 999 999 876. ponieważ jetsto uciążliwe, lepiej zmienić kierunek obrotów na przeciwny, tzn. wykonać jeden obrót lewy na trzecim miejscu, dwa na drugim i cztery na pierwszym od końca. Analogicznie, mając **odjąć** od liczby, znajdującej się w liczniku rezultatów iloczyn jakiejkolwiek liczby przez liczbę *876, możemy wykonać **lewe** obroty, wskazane przez cyfry: 999 999 876. Wygodniej zmienić kierunek obrotów, mnożąc prawoobrotowo przez 124.

Jeżeli pojemność zestawu nie pozwala na wprowadzenie odrazu całego wiersza tablicy pierwotnej, przeprowadzimy czynność obliczania wiersza tablicy wtórnej w dwuch, lub więcej etapach.

Czynnik charakterystyczny wiersza jest oczywiście stale ten sam — najlepiej zapisać go odrazu przy wierszu. Do obliczania drugiego wiersza przystąpimy dopiero po obliczeniu i zapisaniu wszystkich elementów wiersza pierwszego.

2) Wprowadzamy na zestaw drugi wiersz tablicy pierwotnej i sprowadzamy do liczników rezultatowych. Wprowadzamy na zestaw zespół elementów, położonych nad drugim (niewypełnionym jeszcze) wierszem tablicy wtórnej — to znaczy wiersz pierwszy tablicy wtórnej bez pierwszego elementu — i odejmujemy iloczyn tego zespołu przez jego pierwszy element. W licznikach rezultatowych znajduje się teraz szereg przejściowy drugiego wiersza. Wystarczy wprowadzić ten szereg na zestaw i, po odszukaniu wegług jego pierwszego elementu wartości czynnika charakterystycznego drugiego wiersza, przemnożyć przez ten czynnik. Otrzymamy drugi wiersz tablicy wtórnej. Jeżeli pojemność zestawu nie pozwala na wprowadzenie całego wiersza — rachujemy oczywiście etapami, aż do obliczenia i wpisania wszystkich elementów poszukiwanego wiersza.

3) Obliczenie trzeciego i dalszych wierszy będzie zupełnie analogiczne. *Zawsze wprowadzamy na zestaw i przenosimy do liczników rezultatowych ten wiersz tablicy pierwotnej, który odpowiada swą kolejnością kolejności poszukiwanego wiersza tablicy wtórnej. Następnie odejmujemy od niego stopniowo iloczyny fragmentów wierszy tablicy wtórnej, położonych nad wierszem poszukiwanym przez odpowiednie elementy kolumny prowadzącej. Po ukończeniu tej czynności mamy w licznikach rezultatowych szereg przejściowy. Według jego pierwszego elementu odszukujemy czynnik charakterystyczny danego wiersza przenosimy szereg przejściowy na liczniki nastawień, mnożymy go przez czynnik charakterystyczny i otrzymany w licznikach rezultatowych szereg wpisujemy do tablicy wtórnej. Dla uniknięcia omyłek w przyporządkowaniu elementów rachunku należy posługiwać się szablonem (rys.), któremu przy obliczeniu i^tego^ wiersza nadajemy takie położenie, aby kąty proste w górnych krawędziach kątownika wyznaczały na tablicach przecięcie i^tej^ kolumny z i^tym^ wierszem. Górna krawędź szablonu podkreśla potrzebny w rachunku wiersz tablicy pierwotnej; dolna — obliczany wiersz tablicy wtórnej.*



Przy krawędzi bocznej szablonu widzimy elementy kolumny prowadzącej

Na naszym rysunku szablon jest, jak widać, zorientowany do obliczenia czwartego wiersza Jeżeli zestaw, którym rozporządzamy w rachunku, jest zestawem ośmiomaszynowym, na obliczenie elementów czwartego wiersza złożą się następujące czynności:

1) Wprowadzenie na zestaw wiersza: 3.46 *9.99 0.01 1.09 0.00 0.00 0.00 *9.00 i sprowadzenie do liczników rezultatowych w drodze pomnożenia przez 1.00. [W licznikach rezultatowych ukażą się: 3.4600 *9.9900 0.0100 1.0900 0.0000 0.0000 0.0000 *9.0000]

2) Wprowadzenie na zestaw szeregu: 0.12 0.03 *9.95 0.03 *9.72 *9.88 *9.11 0.00 i odjęcie iloczynu tego szeregu przez 0.12, w drodze mnożenia lewoobrotowego przez 0.12.

3) Wprowadzenie na zestaw szeregu: 0.08 0.00 0.00 0.89 0.47 *8.77 0.00 0.00 i odjęcie iloczynu tego szeregu przez 0.08, w drodze mnożenia lewoobrotowego przez 0.08.

4) Wprowadzenie na zestaw szeregu: 1.83 *9.99 0.00 0.53 *9.45 0.00 0.00 0.00 i odjęcie iloczynu tego szeregu przez 1.83, w drodze mnożenia lewoobrotowego przez 1.83.

5) Przeniesienie na liczniki nastawień figurującego w wyniku opisanych działań w licznikach rezultatowych szeregu przejściowego: 0.0903 0.0047 0.0160 0.0453 1.0025 0.1128 0.1068 *9.0000. odszukanie według pierwszego elementu tego szeregu (0.0903) czynnika charakterystycznego $C = 3.33$ i przemnożenie wiersza przez ten czynnik.

Otrzymany w wyniku wiersz: 0.30 0.02 0.05 0.15 3.34 0.38 0.36 *6.67 będzie czwartym wierszem tablicy wtórnej.

Po zapisaniu elementów czwartego wiersza zesuniemy szablon, orientując go do obliczenia piątego wiersza i prowadzić będziemy dalszy rachunek w sposób zupełnie analogiczny do opisanego.

Jeżeli rozporządzamy zestawem czteromaszynowym — obliczenie każdego wiersza przeprowadzimy w dwóch etapach. Taki rachunek opisujemy szczegółowo w przykładzie liczbowym na str. 16, rozwiązując ten sam przykład liczbowy z wyższą dokładnością rachunku; nie będziemy więc tutaj bliżej się nad tym zatrzymywać.

Po obliczeniu wszystkich wierszy tablicy wtórnej pozostaje obliczyć niewiadome, sprawdzić, czy spełniają one istotnie układ równań normalnych i znaleźć spółczynniki wagowe. *Zarówno czynność obliczenia niewiadomych, jak i czynność sprawdzenia spełnieniu układu równań przez* *znalezione niewiadome są mnożeniami krakowianowymi i jako takie mogą być wykonane wygodnie przy pomocy zestawu w znany nam już sposób.* Nie będziemy więc szczegółowo ich opisywać, poprzestając na wyraźnym napisaniu odnośnych równań w symbolice krakowianowej:

a) obliczenie niewiadomych:

$$\left\{\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} M_1 & & \\ M_2 & N_2 & \\ M_3 & N_3 & P_3 \end{matrix}\right\}$$

lub krócej i ogólniej, oznaczając przez $\underline{X}$ krakowian niewiadomych, przez $\underline{L}$ środkową kolumnę tablicy wtórnej, zaś przez $\underline{M}$ jej kolumny, położone na prawo od kolumny środkowej:

$$\underline{X} = \underline{L} \cdot \underline{M}$$

b) sprawdzenie niewiadomych:

$$\left\{\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{matrix}\right\} = - \left\{\begin{matrix} [a\,l] \\ [b\,l] \\ [c\,l] \end{matrix}\right\}$$

lub krócej i ogólniej, oznaczając przez $\underline{x}$ krakowian niewiadomych, przez $\underline{t}$ tablicę spółczynnikową układu równań normalnych (to znaczy uzupełnioną przez wyrazy symetryczne lewą część tablicy pierwotnej), wreszcie przez $\underline{l}$ kolumnę środkową tablicy pierwotnej:

$$\underline{X}\,\underline{t} = -\,\underline{l}$$

Obliczenie spółczynników wagowych Q jako sum kwadratów elementów kolumn tablicy wtórnej, położonych na prawo od kolumny środkowej, żadnych trudności nie przedstawia i omówienia nie wymaga.

Warto może zwrócić też uwagę, że na zestawie wygodnie realizuje się jeszcze następujące równania rachunku wyrównawczego, będące mnożeniami krakowianowymi:

$$v_i = a_i\,x + b_i\,y + c_i\,z + l_i$$

c) zestawienie równań normalnych z równań błędów:

$$\left\{\begin{matrix} a_1\, b_1\, c_1 \cdots l_1 \\ a_2\, b_2\, c_2 \cdots l_2 \\ \vdots \\ a_n\, b_n\, c_n \cdots l_n \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} a_1\, b_1\, c_1 \cdots \\ a_2\, b_2\, c_2 \cdots \\ \vdots \\ a_n\, b_n\, c_n \cdots \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,c] & [b\,l] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,c] & [c\,l] \end{matrix}\right\}$$

d) obliczenie poprawek:

oraz

$$\left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \\ l \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} a_1 \cdots a_2\; a_n \\ b_1 \cdots b_2\; b_n \\ c_1 \cdots c_2\; c_n \\ l_1 \cdots l_2\; l_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}\right\}$$

Warto też nadmienić, że suma kwadratów poprawek winna okazać się równą różnicy między sumą kwadratów wyrazów wolnych równań błędów i sumą kwadratów elementów kolumny środkowej tablicy wtórnej:

$$[v\,v] = [l\,l] - [L\,L]$$

Przykład liczbowy:

Dane układu sześciu równań, które poniżej rozwiązujemy, wyznaczając niewiadome i wagi, zaczerpnięte zostały z pracy prof. F. Kępińskiego ,,Algorytm rozwiązania równań normalnych i równań wag", publikowanej w „Przeglądzie Geodezyjnym" (Warszawa 1947 Nr 5). Aczkolwiek zagadnienie dotyczy obserwacji dokonanych z dokładnościami, scharakteryzowanymi błędami średnimi rzędu sekundy kątowej, prof Kępiński — niewątpliwie przez chęć nawiązania do Bahnbestimmung. — Bauschingera ,z którego zacytowano przykład — wyznacza niewiadome z dokładnością do dziesięciotysięcznej sekundy. Ze względu na pojemność liczników nastawień zestawu nie mogliśmy posunąć się tak daleko w dokładności rachunku; aczkolwiek, pomimo zdawania sobie sprawy z całkowitej iluzoryczności osiąganych rezultatów, należałoby dla porównania pracować z tą samą dokładnością.

Wysoka dokładność rachunku (ca 0.″001) nastręczyła dodatkowe trudności, wynikające stąd, że nie można było posługiwać się przy wyznaczaniu czynników charakterystycznych tablicami, podanymi na końcu pracy, a należało specjalnie obliczać ich wartości.

Liczby ujemne wpisano odrazu do tablicy pierwotnej pod postacią uzupełnień dziesiętnych i cały czas w rachunku tablicy wtórnej operowano tą postacią liczby ujemnej. Czytelnik, który chciałby przećwiczyć przykład, zechce więc pamiętać, że symbol gwiazdki* oznacza tyle dziewiątek, ile ich pozwala ustawić licznik nastawień.

3.2918	1.2519	*8.7789	3.3252	*9.9822	0.0071	0.9731	*9.0000					
	1.1366	*9.4496	1.3300	*9.9925	0.0056	1.0901	0	*9.0000				
		1.7151	*8.9009	0.0356	*9.9353	*9.5779	0	0	*9.0000			
			3.4573	*9.9891	0.0064	1.0920	0	0	0	*9.0000		
				1.7339	0.0401	0.0535	0	0	0	0	*9.0000	
					3.0128	0.0253	0	0	0	0	0	*9.0000

c=0.55117	1.8143	0.6900	*9.3270	1.8328	*9.9902	0.0039	0.5363	*9.4488					
c=1.23044		0.8127	*9.8942	0.0805	*9.9991	0.0036	0.8860	0.4679	*8.7696				
c=0.89408			1.1186	0.1278	0.0258	*9.9448	0.0291	*9.7126	*9.8836	*9.1059			
c=3.64418				0.2744	0.0138	0.0219	0.1239	3.6781	0.4151	0.4165	*6.3558		
c=0.75964					1.3164	0.0314	0.0434	*9.9633	*9.9971	0.0131	0.0382	*9.2404	
c=0.57656						1.7344	0.0101	*9.9453	*9.9937	*9.9660	0.0453	0.0138	*9.4234
Niewiadome x y z								0.564	-1.042	0.026	-0.449	-0.033	-0.006
Spółczynniki wagowe: Q								14.144	1.700	0.974	13.284	0.577	0.332
Czynniki błędów: $\sqrt{Q}$								3.76	1.30	1.00	3.64	0.76	0.58

Na czteromaszynowym zestawie pracę prowadzi się tu dwuetapowo. Oto jej **szczegółowy przebieg:**

1) Wyznaczenie pierwszego wiersza tablicy wtórnej:

Wprowadzenie na zestaw: 3.2918 1.2515 *8.7789 3.3252, odszukanie czynnika char. 0.55117 według elementu 3.2918, zapisanie czynnika, przemnożenie przez ten czynnik i zapisanie w tablicy wtórnej: 1.8143 0.6900 *9.3270 1.8328. Po skasowaniu wprowadzenie na zestaw drugiej połowy pierwszego wiersza: *9.9822 0.0071 0.9731 *9.0000 przemnożenie przez czynnik char. 0.55117 i zapisanie w tablicy wtórnej: *9.9902 0.0039 0.5363 9*.4488. Skasowanie.

2) Wyznaczenie drugiego wiersza tablicy wtórnej:

Wprowadzenie na zestaw: 1.1366 9.4496 1.3300 *9.9925, sprowadzenie do liczników rezultatowych.

Wprowadzenie na zestaw: 0.6900 *9.3270 1.8328 *9.9902 i mnożenie lewoobrotowe przez 0.6900.

Przeniesienie z liczników rezultatów szeregu (0.6605 *9.9140 0.0654 *9.9993) na liczniki nastawień, odszukanie według pierwszego elementu tego szeregu (0.6605) czynnika charakterystycznego wiersza (1.23044) i zapisanie go, przemnożenie szeregu przez czynnik charakterystyczny (oczywiście po skasowaniu licznika rezultatowego zestawu), odczytanie i zapisanie pierwszej połowy drugiego wiersza tablicy wtórnej: 0.8127 *9.8942 0.0805 *9.9991. Po skasowaniu wprowadzenie na zestaw: 0.0056 1.0901 0 9*.0000 (druga połowa wiersza), sprowadzenie do liczników rezultatów, wprowadzenie zestaw: 0.0039 0.5363 *9.4488 0 mnożenie lewoobrotowe przez 0.6900. Przeniesienie otrzymanego w licznikach rezultatowych szeregu (0.0029 0.7201 0.3803 *9.0000) na liczniki nastawień, przemnożenie przez czynnik charakterystyczny (po skasowaniu liczników rezultatowych zestawu), odczytanie i zapisanie drugiej połowy drugiego wiersza tablicy wtórnej: 0.0036 0.8860 0.4679 *8.7696. Skasowanie.

3) Wyznaczenie trzeciego wiersza tablicy wtórnej:

Wprowadzenie na zestaw: 1.7151 *8.9009 0.0356 *9.9353, sprowadzenie do liczników rezultatowych.

Wprowadzenie na zestaw: *9.8942 0.0805 *9.9991 0.0036, i mnożenie lewoobrotowe przez *9.8942 (lub prawoobrotowe przez 0.1058).

Wprowadzenie na zestaw: *9.3270 1.8328 *9.9902 0.0039 i mnożenie lewoobrotowe przez *9.3270 (lub prawoobrotowe przez 0.6730).

Przeniesienie z liczników rezultatowych otrzymanego szeregu przejściowego (1.2511 0.1429 0.0289 *9.9383) na liczniki nastawień i przemnożenie go przez odszukany według pierwszego elementu (1.2511) czynnik charakterystyczny trzeciego wiersza (0.89408), zapisany zaraz do dalszego wykorzystania.

Po zapisaniu figurującej w licznikach rezultatowych pierwszej połowy trzeciego wiersza tablicy wtórnej 1.1186 0.1278 0.0258 *9.9448 — skasowanie.

Wprowadzenie na zestaw: *9.5779 0 0 *9.0000 sprowadzenie do liczników rezultatowych.

Wprowadzenie na zestaw: 0.8860 0.4679 *8.7696 0 i mnożenie lewoobrotowe przez *9.8942 (lub prawo 0.1058).

Wprowadzenie na zestaw: 0.5363 *9.4488 0 0 i mnożenie lewoobrotowe przez *9.3270 (lub prawo 0.6730).

Przeniesienie z liczników rezultatowych otrzymanego szeregu przejściowego (0.0326 *9.6785 *9.8698 *8.0000) na liczniki nastawień, i po skasowaniu liczników rezultatowych, przemnożenie go przez czynnik charakterystyczny trzeciego wiersza (0,89408). Po zapisaniu figurującej w licznikach rezultatowych drugiej połowy trzeciego wiersza tablicy wtórnej: 0.0291 *9.7126 *9.8836 *9.1059 skasowanie.

4) Wyznaczenie czwartego wiersza tablicy wtórnej (porównać szablon na str. 14).

Wprowadzenie na zestaw: 3.4573 *9.9891 0.0064 1.0920 sprowadzenie do liczników rezultatowych.
Wprowadzenie na zestaw: 0.1278 0.0258 *9.9448 0.0291 i mnożenie lewoobrotowe przez 0.1278
" " 0.0805 *9.9991 0.0036 0.8860 " " " 0.0805
" " 1.8328 *9.9902 0.0039 0.5363 " " " 1.8328

Przeniesienie otrzymanego szeregu przejściowego (0.0753 0.0038 0.0060 0.0340) na liczniki nastawień, odszukanie według pierwszego elementu (0.0753 —) czynnika charakt. czwartego wiersza (3.64418), zapisanie go i pomnożenie przez niego szeregu. Po zapisaniu rezultatu pierwszej połowy czwartego wiersza: 0.2744 0.0138 0.0219 0.1239 — skasowanie.

Wprowadzenie na zestaw: 0 0 0 *9.0000 sprowadzenie do liczników rezultatowych.
Wprowadzenie na zestaw: *9.7126 *9.8836 *9.1059 0 i mnożenie lewoobrotowe przez 0.1278
" " 0.4679 *8.7696 0 0 " " " 0.0805
" " *9.4488 0 0 0 " " " 1.8328

Przeniesienie szeregu (1.0093 0.1139 0.1143 *9.0000) z licznika rezultatów na licznik nastawień i pomnożenie przez czynnik charakterystyczny czwartego wiersza (3.64418). Po zapisaniu rezultatu drugiej połowy czwartego wiersza: 3.6781 0.4151 0.4165 *6.3558 — skasowanie.

5) Wyznaczenie piątego wiersza tablicy wtórnej:

Wprowadzenie na zestaw: 1.7339 0.0401 0.0535 0 sprowadzenie do liczników rezultatowych.
Wprowadzenie na zestaw: 0.0138 0.0219 0.1239 3.6781 i mnożenie lewoobrotowe przez 0.0138
" " 0.0258 *9.9448 0.0291 *9.7126 " " " 0.0258
" " *9.9991 0 0036 0 8860 0.4679 " " " *9 9991
(lub prawo 0.0009).

Wprowadzenie na zestaw: *9.9902 0.0039 0.5363 *9.4488 " " " *9.9902
(lub prawo 0.0098).

Przeniesienie otrzymanego szeregu (1.7329 0.0413 0.0571 *9.9517) na liczniki nastawień i po odszukaniu według jego pierwszego elementu (1.7329) wartości czynnika charakterystycznego piątego wiersza (0.75964) i zapisaniu go, przemnożenie szeregu przez czynnik. Po zapisaniu rezultatu pierwszej połowy piątego wiersza 1.3164 0.0314 0.0434 *9.9633 — skasowanie.

Wprowadzenie na zestaw: 0 0 0 *9.0000 sprowadzenie do liczników rezultatowych.
Wprowadzenie na zestaw: 0.4151 0.4165 *6.3558 0 i mnożenie lewoobrotowe przez 0.0138
" " *9.8836 *9.1059 0 0 " " " 0.0258
" " *8.7696 0 0 0 " " " *9.9991
(lub prawo 0.000).

Wprowadzenie na zestaw: 0 0 0 0 " " " (9*.9902)

Przeniesienie otrzymanego w licznikach rezultatowych szeregu (*9.9962 0.0173 0.0503 *9.0000) na licznik nastawień i przemnożenie przez czynnik char. piątego wiersza (0.75964). Po zapisaniu rezultatu drugiej połowy piątego wiersza tablicy wtórnej: *9.9971 0 0131 0.0382 *9.2404 — skasowanie.

6) Wyznaczenie szóstego wiersza tablicy wtórnej:

Wprowadzenie na zestaw: 3.0128 0.0253 0 0 sprowadzenie do liczników rezultatowych.
Wprowadzenie na zestaw: 0.0314 0.0434 *9.9633 *9.9971 i mnożenie lewoobrotowe przez 0.0314
" " 0.0219 0.1239 3.6781 0.4151 " " " 0.0219
" " *9.9448 0.0291 *9.7126 *9.8836 " " " *9.9448
(lub prawo 0.0552).
Wprowadzenie na zestaw: 0.0036 0.8860 0.4679 *8.7696 " " " 0.0036
" " 0.0039 0.5363 *9.4488 0 " " " 0.0039

Przeniesienie otrzymanego szeregu (3.00826 0.0175 *9.9052 *0.9890) na liczniki nastawień i po odszukaniu według pierwszego elementu (3.00826) czynnika charakterystycznego szóstego wiersza (0.57656) i zapisaniu go, przemnożenie szeregu przez czynnik charakterystyczny. Po zapisaniu rezultatu: pierwszej połowy szóstego wiersza tablicy wtórnej: 1.7344 0.0101 *9.9453 *9.9937 — skasowanie.

Wprowadzenie na zestaw: 0 0 0 *9.0000 sprowadzenie do liczników rezultatowych.
Wprowadzenie na zestaw: 0.0131 0.0382 *9.2404 0 i mnożenie lewoobrotowe przez 0.0314
" " 0.4165 *6.3558 0 0 " " " 0.0219
" " *9.1059 0 0 0 " " " *9.9448
(lub prawo 0.0552).
Wprowadzenie na zestaw: 0 0 0 0 " " " (0.0036)
" " 0 0 0 0 " " " (0.0039

Przeniesienie otrzymanego w licznikach rezultatowych szeregu (*9.9411 0.0786 0.0239 *9.000) na liczniki nastawień i przemnożenie szeregu przez czynnik charakterystyczny szóstego wiersza (0.57656).

Po zapisaniu rezultatu drugiej połowy szóstego wiersza: *9.9660 0.0453 0.0138 *9.4234—skasowanie.

Następną czynność rachunkową: *obliczenie wartości niewiadomych* w drodze mnożenia środkowej kolumny tablicy wtórnej przez kolejne kolumny tejże tablicy, położone na prawo od kolumny środkowej, będącą jak to już zauważyliśmy mnożeniem krakowianowym, można też wygodnie wykonać przy pomocy zestawu. Na zestawie czteromaszynowym czynność obliczenia niewiadomych z tablicy wtórnej naszego układu (patrz str. 24) można np: wykonać, dzieląc krakowian M na dwa trzykolumnowe krakowiany. Mnożąc sposobem beta wykonamy następujące czynności:

a) wprowadzenie na zestaw: *9.4488 i mnożenie prawoobrotowe przez 0.5363
" " 0.4679 *8.7696 " " " 0.8860
" " *9.7126 *9.8836 *9.1059 " " " 0.0291
" " 3.6781 0.4151 0.4165 " " " 0.1239
" " *9.9633 *9.9971 0.0131 " " " 0.0434
" " *9.9453 *9.9937 *9.9660 " " " 0.0101
Odczytanie niewiadomych: 0.5642 *8.9577 0.0258 to znaczy: $x_1 = -0.564$ $x_2 = -1.042$ $x_3 = -0.026$.

b) wprowadzenie na zestaw: *6.3558 i mnożenie prawoobrotowe przez 0.1239
" " 0.0382 *9.2404 " " " 0.0434
" " 0.0453 0.0138 *9.4234 " " " 0.0101
Odczytanie niewiadomych: *9.5506 *9.9672 *9.9942 to znaczy: $x_4 = -0.449$ $x_5 = -0.03$ $x_6 = -0.006$.

Sprawdzenie rachunku tzn. stwierdzenie spełnienia układu równań przez znalezione niewiadome co jak już zauważyliśmy jest mnożeniem krakowianowym, wymagać będzie wykonania następujących czynności:

1) Napisanie przed tablicą pierwotną krakowianu obliczonych niewiadomych pod postacią pojedynczej kolumny (liczby ujemne można tu już wpisać algebraicznie, co oczywiście nie wyklucza posługiwania się nadal uzupełnieniami dziesiętnymi) przy jednoczesnym uzupełnieniu części lewej tablicy pierwotnej przez elementy symetryczne. Lewa część tablicy będzie więc teraz krakowianem spółczynnikowym układu równań normalnych:

$$\begin{Bmatrix} 0.5642 \\ -1.0423 \\ 0.0258 \\ -0.449 \\ -0.0328 \\ -0.0058 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.2918 & 1.2519 & {}^{*}8.7789 & 3.3252 & {}^{*}9.9822 & 0.0071 & 0.9731 \\ 1.2519 & 1.1366 & {}^{*}9.4496 & 1.3300 & {}^{*}9.9925 & 0.0056 & 1.0901 \\ {}^{*}8.7789 & {}^{*}9.4496 & 1.7151 & {}^{*}8.9009 & 0.0356 & {}^{*}9.9353 & {}^{*}9.5779 \\ 3.3252 & 1.3300 & {}^{*}8.9009 & 3.4573 & {}^{*}9.9891 & 0.0064 & 1.0920 \\ {}^{*}9.9822 & {}^{*}9.9925 & 0.0356 & {}^{*}9.9891 & 1.7339 & 0.0401 & 0.0535 \\ 0.0071 & 0.0056 & {}^{*}9.9353 & 0.0064 & 0.0401 & 3.0128 & 0.0253 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.9729 \\ -1.0900 \\ 0.4221 \\ -1.0919 \\ -0.0535 \\ -0.0252 \end{Bmatrix}$$

2) Wykonanie mnożenia krakowianowego sposobem beta, co, przy posługiwaniu się czteromaszynowym zestawem i rozbiciu drugiego krakowianu **na dwa** trzykolumnowe krakowiany, wymagać będzie wykonania następujących czynności:

a) wprowadzenie na zestaw:	3.2918	1.2519	*8.7789	i mnożenie	prawoobrotowe	przez	0.5642
,, ,,	1.2519	1.1366	*9.4496	,,	lewoobrotowe	,,	1.0423
,, ,,	*8.7789	*9.4496	1.7151	,,	prawoobrotowe	,,	0.0258
,, ,,	3.3252	1.3300	*8.9009	,,	lewoobrotowe	,,	0.4494
,, ,,	*9.9822	*9.9925	0.0356	,,	,,	,,	0.0328
,, ,,	0.0071	0.0056	9.9353	,,	,,	,,	0.0058
Odczytane w liczn. rez. liczby:	—0.9729	—1.0900	—0.4221	stanowią początkowe elementy iloczynu kontrolującego.			

b) wprowadzenie na zestaw:	3.3252	*9.9822	0.0071	i mnożenie	prawoobrotowe	przez	0.5642
,, ,,	1.3300	*9.9925	0.0056	,,	lewoobrotowe	,,	1.0423
,, ,,	*8.9009	0.0356	*9.9353	,,	prawoobrotowe	,,	0.0258
,, ,,	3.4573	*9.9891	0.0064	,,	lewoobrotowe	,,	0.4494
,, ,,	*9.9891	1.7339	0.0401	,,	,,	,,	0.0328
,, ,,	0.0064	0.0401	3.0128	,,	,,	,,	0.0058
Odczytane w liczn. rez. liczby:	—1.0919	—0.0535	—0.0252	stanowią końcowe elementy iloczynu kontrolującego.			

Obliczenie wartości spółczynników wagowych Q, sprowadzające się do sumowania kwadratów liczb w określonej kolumnie, żadnych omówień nie wymaga, poza uwagą, że czynność tę wykonać należy dwukrotnie.

Prowadzenie kontroli w czasie rachunku w drodze tworzenia sum kontrolujących, analogicznych do sum kontrolujących w algorytmie Gaussa, nie wydaje się przy pracy na zestawie celowe. Nie przedstawia ono żadnych zasadniczych trudności: sumując elementy poszczególnych wierszy całej tablicy pierwotnej tworzymy z otrzymanych sum „kolumnę kontrolującą". Poddając elementy tej kolumny zupełnie analogicznym operacjom rachunkowym, jak elementy innych kolumn, otrzymujemy w tablicy wtórnej „wtórną kolumnę kontrolującą", której elementy winny być przy bezbłędnym rachunku równe sumom elementów poszczególnych wierszy tablicy wtórnej. Kontrola taka pochłania jednak sporo czasu, a rachunek w opisanym algorytmie na zestawie jest tak prosty i krótki, że w wypadku niezgodności, która u wprawnego rachmistrza zdarzyć się może zupełnie wyjątkowo, powtórzenie rachunku będzie ekonomiczniejsze. Kontrola mogłaby być celowa tylko w wypadku bardzo dużych układów równań. Tam jednak najwłaściwsza jest niezależna praca dwóch rachmistrzów, kontrolowana wzajemnie co parę godzin.

Rozwiązanie układu równań normalnych bez wyznaczania spółczynników wagowych wykonać można oczywiście za pomocą już opisanego postępowania. Nieco ekonomiczniej jednak będzie poprzestać na obliczeniu tablicy wtórnej dla tablicy pierwotnej analogicznej do opisanej poprzednio, lecz kończącej się kolumną wyrazów wolnych i znalezieniu niewiadomych bezpośrednio z tej tablicy. Korzystamy tu z tego, że poszczególne wiersze tablicy wtórnej tego układu tablic są zespołami spółczynników i wyrazów wolnych: równania z jedną niewiadomą (wiersz ostatni), równania z dwiema niewiadomymi (wiersz przedostatni), równania z trzema niewiadomymi (wiersz trzeci od końca) itd. itd.

Można więc stopniowo, rozpoczynając od ostatniego wiersza rozwiązywać te równania, przyczym uzyskane wartości niewiadomych wpisuje się odrazu w kolumnach odpowiednich niewiadomych dla wykorzystania w dalszym rachunku. Tak np. z tablicy wtórnej (bierzemy znany już przykład ze str. 20): z ostatniego wiersza reprezentującego równanie $1 \cdot u - 5 = 0$ mamy $u = 5$. Po zapisaniu tej liczby np. w nagłówku tablicy, rachujemy dalej z wiersza przedostatniego: $2 \cdot z + 2 \cdot 5 - 14 \cdot 1 = 0$. Skąd: $z = 2$. Po zapisaniu mamy z następnego wiersza: $1 \cdot y - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 17 = 0$ tj. $y = -3$. Wreszcie z wiersza pierwszego: $2x - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 5 + 2 = 0$. Skąd: $x = 4$. Postępowanie nadaje się dobrze do zmechanizowania na pojedynczym arytmometrze. Rola zestawu przy obliczeniu elementów tablicy wtórnej i przy sprawdzeniu spełnienia układu równań jest tu taka sama, jak w wypadku szczegółowo opisanym na poprzednich stronach (z tą oczywiście różnicą, że obliczenie tablicy wtórnej jest prędsze, gdyż wiersze jej są krótsze).

4	-3	2	5	
x	y	z	u	1
2	4	6	-2	2
	1	5	2	-17
		2	2	-14
			1	-5

Rozwiązywanie układów równań liniowych w postaci niesymetrycznej sprowadzić można do rozwiązywania układów symetrycznych. Wystarczy w tym celu pomnożyć pełny krakowian tj. spółczynniki i wyrazy wolne danego układu równań przez jego krakowian spółczynnikowy. Otrzymamy krakowian pełny układu symetrycznego, równoważnego danemu. Jest to to samo działanie, które wykonujemy przechodząc od układu równań błędów do układu równań normalnych (str. 23). Pomimo pozornego skomplikowania zagadnienia taki sposób postępowania jest o tyle lepszy od bezpośredniego rozwiązania krakowianowego dowolnego układu równań (tzw. metodą rozkładu na czynniki kanoniczne), że wykorzystuje zalety rachunku na zestawie. Sposób rozwiązania układu dowolnego przez przekształcenie na symetryczny jest tym bardziej wskazane, im większym rozporządzamy zestawem. Bardzo wygodny, choć wymagający znaczniejszej ilości zapisów, jest też sposób, który nazwiemy „metodą mnożenia redukcyjnego", opłacalny dla układów niesymetrycznych i przy posługiwaniu się dużym zestawem. Metoda redukcyjna jest metodą eliminacyjną, to znaczy przechodzimy w niej stopniowo od tabeli układu n równań o n niewiadomych do tabeli układu $n-1$ równań o $n-1$ niewiadomych, dalej do tablicy układu $n-2$ równań o $n-2$ niewiadomych itd. itd.

Dla uproszczenia wysłowienia opisu czynności przy rozwiązywaniu układu równań i obliczaniu liczbowej wartości wyznaczników metodą mnożenia redukcyjnego wprowadzimy parę określeń.

Iloczyn redukcyjny dwóch wierszy. *Nazwiemy iloczynem redukcyjnym dwóch przyporządkowanych sobie wierszy* (α) *i* (β) *składających się każdy z n elementów, wiersz składający się z n — 1 elementów, równych wartościom wyznaczników drugiego rzędu, których pierwsze kolumny tworzą pierwsze elementy danych wierszy, zaś drugie kolumny kolejne pary przyporządkowanych sobie elementów tych wierszy.*

Iloczynem redukcyjnym wierszy:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \dots & \beta_n \end{matrix}$$

będzie więc wiersz:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_4 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_n \end{vmatrix}$$

czyli: $(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)(\alpha_1\beta_3-\beta_1\alpha_3)(\alpha_1\beta_4-\beta_1\alpha_4)\dots(\alpha_1\beta_n-\beta_1\alpha_n)$

W szczególności np. iloczynem redukcyjnym wierszy:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & 8 & -4 \end{matrix}$$

będzie wiersz: 6 20 —28 gdyż $2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 6$, $2 \cdot 8 - (-1) \cdot 4 = 20$, oraz: $2(-4) - 5 \cdot 4 = -28$

Pierwszy element pierwszego z obu wierszy mnożonych redukcyjnie nazwiemy **elementem głównym redukcji.** W naszym przykładzie głównym redukcji jest więc 2.

Obliczenie iloczynu redukcyjnego dwóch wierszy przy pomocy zestawu arytmometrycznego *sprowadza się do* 1) *wprowadzenia na zestaw kolejnych elementów pierwszego wiersza bez elementu pierwszego,* 2) *przemnożenia ich przez pierwszy element drugiego wiersza ze znakiem odwrotnym,* 3) *wprowadzenia na zestaw kolejnych elementów drugiego wiersza bez elementu pierwszego,* 4) *przemnożenie ich przez pierwszy element pierwszego wiersza ze znakiem zwykłym.*

W licznikach rezultatowych znajduje się iloczyn redukcyjny pierwszego wiersza przez drugi. Można oczywiście wprowadzać wszystkie, to znaczy i początkowe, elementy wierszy na zestaw. W licznikach rezultatowych otrzymamy wówczas pierwszy element równy zeru, co skontroluje poprawność mnożenia. Tak. np. dla znalezienia iloczynu redukcyjnego wierszy.

	12	7	26	18	3	
	9	5	14	33	8	
możemy wprowadzić na zestaw:		7	26	18	3,	wykonać mnożenie lewoobrotowe przez 9.
następnie „ „ „		5	14	33	8	i wykonać mnożenie prawoobrotowe przez 12.
W licznikach rezultatowych czytamy:		*7	*34	234	69.	

Możemy jednak także:

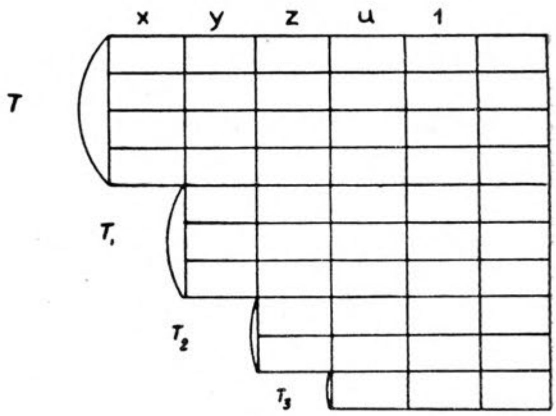
Wprowadzić na zestaw:	12	7	26	18	3,	wykonać mnożenie lewoobrotowe przez 9.
„ „ „	9	5	14	33	8	i wykonać mnożenie prawoobrotowe przez 12.
Odczytamy:	0	*7	*34	234	69.	

Jeszcze bardziej wyczerpującą kontrolę otrzymamy sumując elementy każdego wiersza i przeprowadzając mnożenie redukcyjne takich rozszerzonych o elementy sumowe wierszy. Ostatni element iloczynu redukcyjnego winien okazać się sumą elementów poprzedzających. W naszym wypadku mielibyśmy:

12	7	26	18	3 . . .	66
9	5	14	33	8 . . .	69
0	*7	*34	234	69 . . .	234

Rozwiązanie układu równań z pomocą mnożenia redukcyjnego sprowadza się do wykonania następujących czynności:

1) z zestawionej pełnej tabeli spółczynnikowej T układu n równań z n niewiadomymi: skreślamy wszystkie te wiersze, których pierwszy element jest równy zeru, i przenosimy je do napisanej poniżej tabeli spółczynnikowej T_1 układu $n-1$ równań, nie zawierającego pierwszej niewiadomej. (O ile wszystkie wiersze mają pierwsze elementy różne od zera, opisana czynność oczywiście odpada). Następnie obliczamy iloczyny redukcyjne każdych dwóch sąsiadujących wierszy i wpisujemy wartości tych iloczynów redukcyjnych do tabeli spółczynnikowej T_1 układu $n-1$ równań. Otrzymamy w wyniku tego postępowania wszystkie elementy tabeli T_1. Jeżeli prowadzimy pracę z kontrolą sumową, to znaczy jeżeli po wpisaniu elementów pierwszej tabeli zesumowaliśmy wierszami jej elementy, wpisując wartości tych sum do kolumny sumowej S, mamy możność po obliczeniu elementów tabeli T_1 dokonać ich sprawdzenia w drodze sumowania w tej tabeli elementów w poszczególnych wierszach.



2) w zupełnie analogiczny do wyżej opisanego sposobu przechodzimy od tabeli T_1 do tabeli T_2, która stanowić będzie tabelę spółczynnikową układu $n-2$ równań nie zawierających już pierwszej i drugiej niewiadowej. A więc: *skreślamy w tabeli T_1 wszystkie wiersze, których pierwszy element równy jest zeru, przenosząc je do tabeli spółczynnikowej T_2; po czym obliczamy iloczyny redukcyjne sąsiadujących wierszy w tabeli T_1 i wpisujemy wartości tych iloczynów jako wiersze tabeli T_2.*

3) Powtarzając analogiczne do opisanych czynności otrzymamy układ n tabel, w których ostatnia T_{n-1} będzie tabelą jednego równania o jednej niewiadomej, przedostatnia — tabelą dwóch równań o dwóch niewiadomych itd. Kolejne wyznaczenie niewiadomych przez kolejne wykorzystanie jednego równania z każdej tabeli nie przedstawia trudności. Rachunek kończy oczywiście kontrola spełnienia układu równań przez obliczone wartości niewiadomych. Wykonać ją najwygodniej wprowadzając na zestaw kolejne kolumny pierwszej tablicy i mnożąc przez wartości kolejnych niewiadomych. Otrzymywać będziemy zespoły wyrazów wolnych z odwrotnymi znakami.

Przykład liczbowy:
Rozwiązując układ równań:

$$
\begin{aligned}
3x + 7y - 4z + 2u - 50 &= 0\\
2x - 3y + 5z + 4u + 15 &= 0\\
4x + 2y + 7z + 3u - 1 &= 0\\
-6x + 4y + 5z + 2u + 7 &= 0
\end{aligned}
$$

zestawimy tabelę spółczynnikową T:

	x	y	z	u	1
T	3	7	*6	2	*50
	2	*7	5	4	15
	4	2	7	3	*9
	*4	4	5	2	7
T1		*77	23	8	145
		16	*4	*90	*38
		28	62	26	22
T2			*770	102	*106
			1160	696	2088
T3				*1216	5568

z której kolejno obliczymy tabele T_1 T_2 T_3 w drodze wykonania następujących czynności:

wprowadzenie na zestaw:	3	7	*6	2	*50	mnożenie lewoobrotowe przez 2.
wprowadzenie na zestaw:	2	*7	5	4	15	mnożenie prawoobr: przez 3 (nie kasować!)
wpisanie z licz. rez.:	(0)	*77	23	8	145	do tabeli następnej.
Na zestawie pozostał wiersz:	2	*7	5	4	*15	mnożenie lewoobrotowe przez 4.
Wprowadzenie na zestaw:	4	2	7	3	*9	mnożenie prawoobr. przez 2 (nie kasować zestawu)
wpisanie z licz. rez.:	(0)	16	*4	*90	*38	do tabeli następnej.
Na zestawie pozostał wiersz:	4	2	7	3	*9	mnożenie lowoobr. przez *4 lub prawoobr. przez 6.
Wprowadzenie na zestaw:	*4	4	5	2	7	mnożenie prawoobrotowe przez 4.
wpisanie z licz. rez.:	(0)	28	62	26	22	do tabeli następnej.
Wprowadzenie na zestaw:		*77	23	8	145	mnożenie lewoobrotowe przez 16.
Wprowadzenie na zestaw:		16	*4	*90	*38	mnoż. prawoobr. przez *77 lub lewoobr. przez 23.
wpisanie z licz. rez.:		(0)	*770	102	106	do tabeli następnej.
Na zestawie pozostał wiersz:		16	*4	*90	*38	mnożenie lowoobrotowe przez 28.
Wprowadzenie na zestaw:		28	62	26	22	mnożenie prawoobrotowe przez 16.
wpisanie z licz. rez.:		(0)	1160	696	2088	do tabeli następnej.
Wprowadzenie na zestaw:			*770	102	*106	mnożenie lewoobrotowe przez 1160
Wprowadzenie na zestaw:			1160	696	2088	mnoż. prawoobr. przez *770 lub lewoobr. przez 230.
wpisanie z licz. rez.:				*7216	5568	do tabeli następnej tj. ostatniej.

Praca mechanizuje się bardzo łatwo. Jedyną czynnością, nasuwającą początkującemu pewne trudności, jest operowanie uzupełnieniami dziesiętnymi. Należy uświadomić sobie dobrze co następuje, a o czym już mówiliśmy:

1) liczby ujemne *nastawia* się zawsze pod postacią uzupełnień dziesiętnych.

2) *mnożąc* przez liczbę, napisaną pod postacią uzupełnienia dziesiętnego wygodnie jest, dla uniknięcia konieczności dokonywania wielu obrotów, zmienić kierunek mnożenia. Tak np. zamiast mnożyć prawoobrotowo jakąkolwiek liczbę przez: *76 czyli 999 999 976, wygodniej jest pomnożyć ją lewoobrotowo przez 24. Podobnie zamiast mnożyć lewoobrotowo przez *682, czyli przez 999 999 682, wygodniej będzie pomnożyć ją prawoobrotowo przez 318.

Przy przepisywaniu szeregu liczbowego z liczników rezultatowych do tabeli wygodnie bywa, gdy dany szereg składa się z liczb wielocyfrowych, dokonać w nim przesunięcia znaku dziesiętnego, to znaczy ograniczyć się do przepisania szeregu liczb 10 100 czy 1000 krotnie mniejszych. Sprowadza się to do podzielenia równania przez wielkość stałą, co jest teoretycznie zawsze dopuszczalne; zaś praktycznie wskazane, o ile tylko nie obniża nadmiernie dokładności rachunku. Takiego przesunięcia znaku — nie wpływającego zresztą wcale na obniżenie dokładności rachunku, gdyż odrzucono zera — dokonaliśmy przechodząc od tabeli T_2 do tabeli T_3.

Przepisano tam z liczników rezultatowych: *7216 i 5568 zamiast: *721600 i 556800.

Obliczania poszczególnych niewiadomych nie omawiamy szczegółowo. Schemat postępowania jest tam zawsze ten sam: *obliczając niewiadomą z wiersza wprowadzamy na licznik rezultatów wszystkie znane iloczyny, po czym ustawiamy spółczynnik przy szukanej niewiadomej, kasujemy licznik obrotów i tak nadajemy obroty, aby w liczniku rezultatów otrzymać zera.*

Obliczenie wartości wyznacznika przy pomocy mnożenia redukcyjnego

Nazwijmy pierwszym reduktem tabeli wyznacznika o n kolumnach i n wierszach, tabelę posiadającą $n-1$ kolumn i $n-1$ wierszy utworzoną w następujący sposób:

1) Wiersze posiadające pierwsze elementy równe zeru zostają skreślone w tabeli wyznacznika i przeniesione do reduktu; jednak przy zachowaniu warunku, aby w zmniejszonej o skreślone wiersze tabeli wyznacznika pozostały przynajmniej dwa wiersze. (Choć jeden z nich będzie miał w pierwszej kolumnie element niezerowy — w przeciwnym razie wyznacznik jest zerem i dalszy rachunek staje się nieaktualny).

2) elementy wierszy przenoszonych z tabeli wyznacznika do reduktu zmieniają znaki, jeżeli przeniesienie następuje do wiersza o tej samej parzystości (np. z 3 do 1 lub z 4 do 2 itp.), zaś nie zmieniają znaków, jeżeli przeniesienie następuje do wiersza o innej parzystości (np. z 4 do 1 lub 3 do 2 itp).

Wyjątek stanowią elementy ostatniego wiersza wyznacznika, dla których w razie przenoszenia do reduktu obowiązuje odwrotna reguła znaków.

3) Z pozostałych w tabeli wyznacznika wierszy oblicza się iloczyny redukcyjne, mnożąc kolejno każdy wiersz przez obecnie z nim sąsiadujący i wpisuje te iloczyny jako dalsze wiersze reduktu.

Pierwszy redukt wyznacznika o tabeli D oznaczać będziemy D_1.

Jeżeli dokonamy nad pierwszym reduktem wyznacznika zupełnie analogicznej operacji do operacji, jakiej dokonaliśmy nad tabelą wyznacznika przy obliczeniu tego reduktu otrzymamy tabelę, którą nazwiemy drugim reduktem wyznacznika i oznaczymy D_2. Przechodząc podobnie do trzeciego, czwartego itd. reduktu: D_3 D_4 itd. otrzymywać będziemy stopniowo tabele kwadratowe o coraz mniejszej ilości elementów, aż dojdziemy do reduktu ostatniego. D_{n-1}, który będzie tabelą jednoelementową, tj. liczbą pojedynczą.

Wartość niezerowego wyznacznika równa jest jego ostatniemu reduktowi, podzielonemu przez iloczyn wszystkich elementów pierwszych kolumn kolejnych tabel, włączając i tabelę wyznacznika, bez elementów zerowych i elementów skrajnych każdej tabeli. Oznaczając ten iloczyn przez π, zaś *wartość wyznacznika o tabeli D przez D. mamy więc:*

$$\boxed{D. = \frac{D_{n-1}}{\pi}}$$

Jeżeli czy to w tabeli wyznacznika, czy w tabeli którego z reduktów, wszystkie elementy pierwszej kolumny są zerami, wartość wyznacznika równa jest zeru.

Podany wyżej sposób obliczenia wartości wyznacznika, sprowadzający się do obniżania stopnia wyznacznika, a więc pokrewny regule Chiò, jest przy zastosowaniu zestawu arytmometrycznego ekonomiczniejszy nietylko od metody Chiò, ale i od metody rozkładu na czynniki kanoniczne krakowianu tabeli wyznacznika. Nie wydaje się jednak, aby miało to większe znaczenie praktyczne z uwagi na stosunkowo małą przydatność pojęcia wyznacznika w matematyce stosowanej.

Obliczenie reduktu w wypadku, gdy w kolumnie pierwszej redukowanego wyznacznika nie ma elementów zerowych, jest identyczne z redukcją tabeli spółczynnikowej, omówioną już szczegółowo i zilustrowaną przykładami. Zachodzi tu ta tylko różnica, że tabela będzie obecnie kwadratowa.

Nie można też w wypadku obliczania wyznacznika przesuwać bez odnotowania znaku dziesiętnego, gdyż powoduje to odpowiednie pomnożenie wartości wyznacznika. Mnożąc więc pewien wiersz przez stałą — w praktyce rachunkowej chodzić tu będzie zawsze o ułamek dziesiętny właściwy — należy odnotować wartość tej stałej, aby podzielić przez nią w końcu rachunku obliczoną wartość wyznacznika. W razie kilkakrotnego mnożenia wierszy w czasie rachunku odnotować należy oczywiście wszystkie stałe i podzielić rezultat przez ich iloczyn.

Gdy trafi się w toku rachunku element zerowy w pierwszej kolumnie, postępowanie w porównaniu z postępowaniem przy redukcji tablic spółczynnikowych układu równań zmienia się o tyle, że należy pamiętać o postawieniu odpowiednich znaków przy elementach przenoszonych wierszy. O ile znak wyznacznika jest z góry znany, a chodzi tylko o jego wartość bezwzględną, można oczywiście zaniechać troski o znaki.

Przykład liczbowy

Obliczając wyznacznik $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Obliczymy redukt pierwszy. Przenosząc jego wiersz pierwszy o elemencie zerowym na miejsce pierwsze następnej tablicy, zmienimy znak (+6 —10). Od reduktu drugiego przechodzimy do ostatniego, otrzymując: $D_3 = -2096$. Że zaś $\pi = 4.2$ będzie ostatecznie:

$$D. = \frac{-2096}{4.2} = -262.$$

	2	3	4	1
	4	6	5	7
	2	-1	0	3
	-3	4	5	1
D_1		0	-6	-10
		-16	-10	-2
		5	10	11
D_2			+6	-10
			-110	-166
D_3				-2096

Można też prowadzić zrozumiałą bez bliższych omówień kontrolę sumową, sumując elementy w wierszach i podając sumy redukcji:

10
22
4
7
4
—28
26
—4
—276
—2096.

Rachunek przy pomocy zestawu arytmometrycznego jest zupełnie analogiczny do rachunku przy redukcyjnym rozwiązywaniu układu równań, co omówiono szczegółowo na str. 20.

Czytelnik, chcący przećwiczyć czynność obliczenia wartości wyznacznika przy pomocy zestawu. może prześledzić umieszczony na str. 20 przykład liczbowy odrzucając we wszystkich tabelach ostatnią kolumnę. Ostatnim reduktem będzie tam: $D_3 = {}^{\bullet}721600$. Że zaś: $\pi = 2 \cdot 4 \cdot 16 = 128$, wartość wyznacznika wyniesie: $D = \frac{{}^{\bullet}721600}{128} = \frac{-278400}{128} = -2175.$

Zakończenie

Umieszczone w niniejszej pracy przykłady zastosowania zestawu arytmometrycznego w zagadnieniach rachunkowych są oczywiście bardzo dalekie od wyczerpania materiału. Nie omówiliśmy więc np. wcale zastosowania zestawu w realizacji liczbowej szeregów potęgowych. *) Nie wspomnieliśmy też o ułatwieniach rachunkowych, jakie przyniesie zestaw w realizacji liczbowej wzorów poligonometrii sferycznej Banachiewicza ani w rozwiązywaniu układów równań liniowych metodami iteracyjnymi, itp.

Są to jednak wszystko działania mnożenia krakowianowego. Nie wydaje się więc, aby czytelnik, który zapoznał się z niniejszą pracą i przećwiczył zawarte w niej przykłady mógł w następstwie napotykać na trudności przy tych zagadnieniach.

Nie poruszyłem też wcale zagadnień, które nazwać by można zagadnieniami trygonometrii skierowanej, to znaczy zagadnień, w których, znając spółrzędne niektórych wierzchołków trójkąta czy wielokąta oraz wielkości kątowe, pozwalające na wyznaczenie pozostałych wierzchołków, obliczamy spółrzędne tych wierzchołków (tzw. wcięcia, wyznaczanie grup dwu i wielopunktowych, rachunki sieci itp.).

Te zagadnienia, stanowiące domenę zastosowania arytmometru pojedynczego lub zestawu podwójnego, omówiłem w skrypcie ze zleconych mi na Wydziale Geodezyjnym Politechniki Warszawskiej wykładów z metod liczenia. Zagadnienia te nie są przy tym zagadnieniami mnożenia krakowianowego, to znaczy, pomimo możliwości wyrażania ich w symbolice krakowianowej, dają się wyrazić prościej przez inne wzory operacyjne; nieumieszczenie ich więc w pracy niniejszej, operującej niemal wyłącznie symboliką krakowianową, nadaje tej pracy większą jednolitość.

Na koniec parę słów na tematy pojęciowe. Czytelnik, znający zasady rachunku krakowianowego, zauważył niewątpliwie, że posunąłem jak najdalej oszczędność w dziedzinie materiału teoretycznego ograniczając się do zdefiniowania pojęć niezbędnych przy realizacji zagadnień rachunkowych typu zagadnień rozpatrywanych w niniejszej pracy. Nie twierdzę, aby obrana przeze mnie droga była drogą najlepszą — jest jednak niewątpliwie drogą najkrótszą. Czytelnik nie znający zasad rachunku krakowianowego, a odczuwający potrzebę pogłębienia materiału pojęciowego, ma możność sięgnięcia do literatury krakowianowej, którą dalej wyszczególniam. Czytelnik, życzący sobie wyłącznie opanować zagadnienia rachunkowe, poprzestanie na poznaniu niniejszej pracy, przy redagowaniu której starałem się specjalnie o jasność wykładu posuwając się być może nawet za daleko w szczegółowym opisie czynności.

---

*) Jeżeli oznaczyć symbolem: $(x^i\,y^k\,z^l)$ spółczynnik przy iloczynie $x^i\,y^k\,z^l$ w skończonym szeregu potęgowym (wielomianie) zmiennych $x\,y\,z$: $W(x\,y\,z)$ oraz symbolem: (1) wyraz wolny w tym wielomianie (tzn. $(1) = (x^0\;y^0\;z^0)$) wartość wielomianu W wyrażać będą następujące równania krakowianowe:
(piszemy je dla wielomianów o określonej ilości parametrów nie przypuszczając aby uogólnienie nastręczało trudności):

1) Wielomian jednej zmiennej. $W(x) = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} (1) \\ (x) \\ (x^2) \end{Bmatrix}$ lub w zrozumiałym skrócie: $W(z) = \underline{x}\cdot(\underline{x})$ (1)

2) Wielomian dwóch zmiennych: $W(xy) = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} (1) & (y) & (y^2) \\ (x) & (xy) & (xy^2) \\ (x^2) & (x^2y) & (x^2y^2) \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{Bmatrix}$ lub w skrócie: $W(x\,y) = \underline{x}\cdot(\underline{x}\;\underline{y})\,\underline{y}$ (2)

3) Wielomian trzech zmiennych: $$W(xyz) = \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} (1) & (y) & (y^2) & (z) & (zy) & (y^2z) & (z^2) & (yz^2) & (y^2z^2) \\ (x) & (xy) & (xy^2) & (xz) & (xyz) & (xy^2z) & (xz^2) & (xyz^2) & (xy^2z^2) \\ (x^2) & (x^2y) & (x^2y^2) & (x^2z) & (x^2yz) & (x^2y^2z) & (x^2z^2) & (x^2yz^2) & (x^2y^2z^2) \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{Bmatrix}\right]^{*}\begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

lub w skrócie: $W(xyz) = [\underline{x}\cdot(\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z})\cdot\underline{y}]^{*}\,\underline{z}$ przy czym krakowian spółczynnikowy, który oznaczyliśmy w skrócie $(\underline{x}\;\underline{y}\;\underline{z})$ jest krakowianem zespołowym, tj. krakowianem, podlegającym definicji mnożenia podanej na str. 17, zaś gwiazdka * jest symbolem transpozycji.

Znajomość liczbowej wartości krakowianów spółczynnikowych (w praktyce zazwyczaj trójkątnych) pozwala — zwłaszcza przy użyciu zestawu — na bardzo szybkie rozwiąznie zadania obliczenia wartości funkcji aproksymowej przez wielomian. Zadanie to w symbolice algebry zwykłej jest dla funkcji trzech, a nawet dwóch zmiennych, rachunkowo zniechęcająco skomplikowane, co ograniczało zakres praktycznego stosowania szeregów wielomianowych. W symbolice krakowianowej daje się bez zasadniczych trudności uogólniać na wielomiany kilku zmiennych, co może zmienić metody rozwiązywania wielu zagadnień liczbowych.

* * *

W czasie druku niniejszej pracy ukazał się nowy zestaw arytmometrów, skonstruowany przez inż. Witolda i Stanisława Senissonów.

Zestaw ten, wykonany dla Instytutu Geodezji Politechniki Warszawskiej, pozwala na sprzężenie 8 arytmometrów typu „Triumphator". Konstrukcja odznacza się wielką prostotą i łatwością użycia.

Bliższe szczegóły znaleźć można w notatce, publikowanej w Przeglądzie Geodezyjnym przez inż. mgr W. Senissona. (Warszawa, 4 marzec 1952 nr 3).

LITERATURA

[Prace oznaczone GINB są pracami Geodezyjnego Instytutu Naukowo Badawczego w odbitkach światłodrukowych]

inż Stefan Hausbrandt

1) Algebraiczne ujęcie algorytmu Banachiewicza. [Przegląd Geodezyjny, Warszawa 1947, Nr 11 — 12].
2) Rozwiązywanie układów równań normalnych Gaussa z jednoczesnym obliczeniem średnich błędów niewiadomych przy pomocy algorytmu Banachiewicza [GINB, Warszawa 1947].
3) Bezpośrednia interpolacja wielomianowa ze szczególnym uwzględnieniem interpolacji funkcji dwóch argumentów, ujęta krakowianowo oraz poprzedzona krótkim zarysem rachunku krakowianowego [rozprawa dokt. Pol. Warsz. Wydz. Geod., Warszawa 1948].
4) Obliczanie wartości wyznaczników i rozwiązywanie układów równań liniowych za pomocą mnożenia redukcyjnego [GINB, Warszawa 1947].
5) Interpolacja bezpośrednia w ujęciu krakowianowym [GINB, Warszawa 1947].
6) Wyrównanie doświadczalnych tablic wielomianowych metodą najmniejszych kwadratów za pomocą rachunku krakowianowego [GINB Warszawa 1948].

[*Prace krakowianowe podstawowe* [zgrupowano w przybliżeniu według trudności przyswojenia].

Dr inż. Tadeusz Kochmański

1) Zarys algebry i techniki krakowianowej [Inst. Nauk. Bad. Przem. Węglowego, Katowice 1948].
2) Zarys rachunku krakowianowego [Gł. Urząd Pomiarów Kraju, Warszawa 1948].
3) Rachunek wyrównawczy — metoda gaussowska i krakowianowa [Kraków 1948 II wyd].

Prof. Edward Warchałowski

4) Zastosowanie krakowianów w rachunku wyrównawczym [Warszawa 1939].

Prof. Tadeusz Banachiewicz

5) Principes d'une nouvelle technique de la méthode des moindres carrés [Kraków 1938].
6) Résolution d'un systéme d'équations linéaires algebriques pardivision [Genewa 1948].
7) Wzory podstawowe dla sześciokąta kulistego i poligonów kulistych [Kraków 1948]. Oraz liczne inne prace przeważnie w Acta Astronomica.

KRAKOWIANY WYRÓWNAWCZE
F(pe)
wielomianów
dwu — trzy — i czteroparametrowych

Służące do wyrównywania
metodą najmniejszych kwadratów
obserwacyjnych tablic wielomianowych

Krakowiany wyrównawcze wielomianów dwuparametrowych

$$\underline{N} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.3)} = \left\{ \begin{matrix} -0.16667 & 0.33333 & -0.16666 \\ 0.33333 & -0.66666 & 0.33333 \\ -0.16666 & 0.33333 & -0.16667 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.4)} = \left\{ \begin{matrix} -0.3 & 0.4 & 0.1 & -0.2 \\ 0.4 & -0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & -0.7 & 0.4 \\ -0.2 & 0.1 & 0.4 & -0.3 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.5)} = \left\{ \begin{matrix} -0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0.4 & -0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & -0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -0.7 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & -0.4 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.6)} = \left\{ \begin{matrix} -0.47619 & 0.38095 & 0.23810 & 0.09524 & -0.04762 & -0.19048 \\ 0.38095 & -0.70476 & 0.20952 & 0.12381 & 0.03810 & -0.04762 \\ 0.23810 & 0.20952 & -0.81905 & 0.15238 & 0.12381 & 0.09524 \\ 0.09524 & 0.12381 & 0.15238 & -0.81905 & 0.20952 & 0.23810 \\ -0.04762 & 0.03810 & 0.12381 & 0.20952 & -0.70476 & 0.38095 \\ -0.19048 & -0.04762 & 0.09524 & 0.23810 & 0.38095 & -0.47619 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.7)} = \left\{ \begin{matrix} -0.53571 & 0.35714 & 0.25000 & 0.14286 & 0.03571 & -0.07143 & -0.17857 \\ 0.35714 & -0.71429 & 0.21429 & 0.14286 & 0.07143 & 0 & -0.07143 \\ 0.25000 & 0.21429 & -0.82143 & 0.14286 & 0.10714 & 0.07143 & 0.03571 \\ 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 & -0.85716 & 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 \\ 0.03571 & 0.07143 & 0.10714 & 0.14286 & -0.82143 & 0.21429 & 0.25000 \\ -0.07143 & 0 & 0.07143 & 0.14286 & 0.21429 & -0.71429 & 0.35714 \\ -0.17857 & -0.07143 & 0.03571 & 0.14286 & 0.25000 & 0.35714 & -0.53571 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.8)} = \left\{ \begin{matrix} -0.58333 & 0.33333 & 0.25000 & 0.16667 & 0.08333 & 0 & -0.08333 & -0.16667 \\ 0.33333 & -0.72619 & 0.21429 & 0.15476 & 0.09524 & 0.03571 & -0.02381 & -0.08333 \\ 0.25000 & 0.21429 & -0.82143 & 0.14286 & 0.10714 & 0.07143 & 0.03571 & 0 \\ 0.16667 & 0.15476 & 0.14286 & -0.86905 & 0.11905 & 0.10714 & 0.09524 & 0.08333 \\ 0.08333 & 0.09524 & 0.10714 & 0.11905 & -0.86905 & 0.14286 & 0.15476 & 0.16667 \\ 0 & 0.03571 & 0.07143 & 0.10714 & 0.14286 & -0.82143 & 0.21429 & 0.25000 \\ -0.08333 & -0.02381 & 0.03571 & 0.09524 & 0.15476 & 0.21429 & -0.72619 & 0.33333 \\ -0.16667 & -0.08333 & 0 & 0.08333 & 0.16667 & 0.25000 & 0.33333 & -0.58333 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.9)} = \left\{ \begin{matrix} -0.62222 & 0.31111 & 0.24444 & 0.17778 & 0.11111 & 0.04444 & -0.02222 & -0.08889 & -0.15555 \\ 0.31111 & -0.73888 & 0.21111 & 0.16111 & 0.11111 & 0.06111 & 0.01111 & -0.03889 & -0.08889 \\ 0.24444 & 0.21111 & -0.82221 & 0.14444 & 0.11111 & 0.07778 & 0.04444 & 0.01111 & -0.02222 \\ 0.17778 & 0.16111 & 0.14444 & -0.87221 & 0.11111 & 0.09444 & 0.07778 & 0.06111 & 0.04444 \\ 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 & -0.88888 & 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 \\ 0.04444 & 0.06111 & 0.07778 & 0.09444 & 0.11111 & -0.87221 & 0.14444 & 0.16111 & 0.17778 \\ -0.02222 & 0.01111 & 0.04444 & 0.07778 & 0.11111 & 0.14444 & -0.82221 & 0.21111 & 0.24444 \\ -0.08889 & -0.03889 & 0.01111 & 0.06111 & 0.11111 & 0.16111 & 0.21111 & -0.73888 & 0.31111 \\ -0.15555 & -0.08889 & -0.02222 & 0.04444 & 0.11111 & 0.17778 & 0.24444 & 0.31111 & -0.62222 \end{matrix} \right\}$$

$$F_{(2.10)} = \left\{ \begin{matrix} -0.65455 & 0.29091 & 0.23636 & 0.18182 & 0.12727 & 0.07273 & 0.01818 & -0.03636 & -0.09091 & -0.14545 \\ 0.29091 & -0.75151 & 0.20606 & 0.16364 & 0.12121 & 0.07879 & 0.03636 & -0.00606 & -0.04849 & -0.09091 \\ 0.23636 & 0.20606 & -0.82424 & 0.14545 & 0.11515 & 0.08485 & 0.05455 & 0.02424 & -0.00606 & -0.03636 \\ 0.18182 & 0.16364 & 0.14545 & -0.87273 & 0.10909 & 0.09091 & 0.07273 & 0.05455 & 0.03636 & 0.01818 \\ 0.12727 & 0.12121 & 0.11515 & 0.10909 & -0.89697 & 0.09697 & 0.09091 & 0.08485 & 0.07879 & 0.07273 \\ 0.07273 & 0.07879 & 0.08485 & 0.09091 & 0.09697 & -0.89697 & 0.10909 & 0.11515 & 0.12121 & 0.12727 \\ 0.01818 & 0.03636 & 0.05455 & 0.07273 & 0.09091 & 0.10909 & -0.87273 & 0.14545 & 0.16364 & 0.18182 \\ -0.03636 & -0.00606 & 0.02424 & 0.05455 & 0.08485 & 0.11515 & 0.14545 & -0.82424 & 0.20606 & 0.23636 \\ -0.09091 & -0.04849 & -0.00606 & 0.03636 & 0.07879 & 0.12121 & 0.16364 & 0.20606 & -0.75151 & 0.29091 \\ -0.14545 & -0.09091 & -0.03636 & 0.01818 & 0.07273 & 0.12727 & 0.18182 & 0.23636 & 0.29091 & -0.65455 \end{matrix} \right\}$$

Krakowiany wyrównawcze wielomianów trójparametrowych

$$\underline{N} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$F_{(3.4)} = \begin{Bmatrix} -0.05 & 0.15 & -0.15 & 0.05 \\ 0.15 & -0.45 & 0.45 & -0.15 \\ -0.15 & 0.45 & -0.45 & 0.15 \\ 0.05 & -0.15 & 0.15 & -0.05 \end{Bmatrix}$$

$$F_{(3.5)} = \begin{Bmatrix} -0.11429 & 0.25715 & -0.08571 & -0.14287 & 0.08572 \\ 0.25715 & -0.62858 & 0.34284 & 0.17146 & -0.14287 \\ -0.08571 & 0.34284 & -0.51426 & 0.34284 & -0.08571 \\ -0.14287 & 0.17146 & 0.34284 & -0.62858 & 0.25715 \\ 0.08572 & -0.14287 & -0.08571 & 0.25715 & -0.11429 \end{Bmatrix}$$

$$F_{(3.6)} = \begin{Bmatrix} -0.17857 & 0.32143 & 0 & -0.14286 & -0.10714 & 0.10714 \\ 0.32143 & -0.69286 & 0.25714 & 0.17143 & 0.05000 & -0.10714 \\ 0 & 0.25714 & -0.62857 & 0.34286 & 0.17143 & -0.14286 \\ -0.14286 & 0.17143 & 0.34286 & -0.62857 & 0.25714 & 0 \\ -0.10714 & 0.05000 & 0.17143 & 0.25714 & -0.69286 & 0.32143 \\ 0.10714 & -0.10714 & -0.14286 & 0 & 0.32143 & -0.17857 \end{Bmatrix}$$

$$F_{(3.7)} = \begin{Bmatrix} -0.23809 & 0.35714 & 0.07143 & -0.09524 & -0.14286 & -0.07143 & 0.11905 \\ 0.35714 & -0.71429 & 0.21429 & 0.14286 & 0.07143 & 0 & -0.07143 \\ 0.07143 & 0.21429 & -0.71429 & 0.28571 & 0.21429 & 0.07143 & -0.14286 \\ -0.09524 & 0.14286 & 0.28571 & -0.66666 & 0.28571 & 0.14286 & -0.09524 \\ -0.14286 & 0.07143 & 0.21429 & 0.28571 & -0.71429 & 0.21429 & 0.07143 \\ -0.07143 & 0 & 0.07143 & 0.14286 & 0.21429 & -0.71429 & 0.35714 \\ 0.11905 & -0.07143 & -0.14286 & -0.09524 & 0.07143 & 0.35714 & -0.23809 \end{Bmatrix}$$

$$F_{(3.8)} = \begin{Bmatrix} -0.29167 & 0.37500 & 0.12500 & -0.04166 & -0.12500 & -0.12500 & -0.04167 & 0.12500 \\ 0.37500 & -0.72024 & 0.19643 & 0.12500 & 0.06548 & 0.01786 & -0.01786 & -0.04167 \\ 0.12500 & 0.19643 & -0.76786 & 0.23214 & 0.19643 & 0.12500 & 0.01786 & -0.12500 \\ -0.04166 & 0.12500 & 0.23214 & -0.72025 & 0.26786 & 0.19643 & 0.06548 & -0.12500 \\ -0.12500 & 0.06548 & 0.19643 & 0.26786 & -0.72025 & 0.23214 & 0.12500 & -0.04166 \\ -0.12500 & 0.01786 & 0.12500 & 0.19643 & 0.23214 & -0.76786 & 0.19643 & 0.12500 \\ -0.04167 & -0.01786 & 0.01786 & 0.06548 & 0.12500 & 0.19643 & -0.72024 & 0.37500 \\ 0.12500 & -0.04167 & -0.12500 & -0.12500 & -0.04166 & 0.12500 & 0.37500 & -0.29167 \end{Bmatrix}$$

$$F_{(3.9)} = \begin{Bmatrix} -0.33939 & 0.38182 & 0.16363 & 0.00606 & -0.09091 & -0.12727 & -0.10303 & -0.01818 & 0.12727 \\ 0.38182 & -0.72121 & 0.19091 & 0.11818 & 0.06060 & 0.01818 & -0.00909 & -0.02121 & -0.01818 \\ 0.16363 & 0.19091 & -0.79913 & 0.19351 & 0.16883 & 0.12684 & 0.06753 & -0.00909 & -0.10303 \\ 0.00606 & 0.11818 & 0.19351 & -0.76797 & 0.23377 & 0.19870 & 0.12684 & 0.01818 & -0.12727 \\ -0.09091 & 0.06060 & 0.16883 & 0.23377 & -0.74458 & 0.23377 & 0.16883 & 0.06060 & -0.09091 \\ -0.12727 & 0.01818 & 0.12684 & 0.19870 & 0.23377 & -0.76797 & 0.19351 & 0.11818 & 0.00606 \\ -0.10303 & -0.00909 & 0.06753 & 0.12684 & 0.16883 & 0.19351 & -0.79913 & 0.19091 & 0.16363 \\ -0.01818 & -0.02121 & -0.00909 & 0.01818 & 0.06060 & 0.11818 & 0.19091 & -0.72121 & 0.38182 \\ 0.12727 & -0.01818 & -0.10303 & -0.12727 & -0.09091 & 0.00606 & 0.16363 & 0.38182 & -0.33939 \end{Bmatrix}$$

$$F_{(3.10)} = \begin{Bmatrix} -0.38182 & 0.38182 & 0.19091 & 0.04545 & -0.05454 & -0.10909 & -0.11818 & -0.08182 & 0 & 0.12727 \\ 0.38182 & -0.72121 & 0.19091 & 0.11818 & 0.06060 & 0.01818 & -0.00909 & -0.02121 & -0.01818 & 0 \\ 0.19091 & 0.19091 & -0.81666 & 0.16818 & 0.14545 & 0.11515 & 0.07727 & 0.03182 & -0.02121 & -0.08182 \\ 0.04545 & 0.11818 & 0.16818 & -0.80454 & 0.20000 & 0.18182 & 0.14091 & 0.07727 & -0.00909 & -0.11818 \\ -0.05454 & 0.06060 & 0.14545 & 0.20000 & -0.77575 & 0.21818 & 0.18182 & 0.11515 & 0.01818 & -0.10909 \\ -0.10909 & 0.01818 & 0.11515 & 0.18182 & 0.21818 & -0.77575 & 0.20000 & 0.14545 & 0.06060 & -0.05454 \\ -0.11818 & -0.00909 & 0.07727 & 0.14091 & 0.18182 & 0.20000 & -0.80454 & 0.16818 & 0.11818 & 0.04545 \\ -0.08182 & -0.02121 & 0.03182 & 0.07727 & 0.11515 & 0.14545 & 0.16818 & -0.81666 & 0.19091 & 0.19091 \\ 0 & -0.01818 & -0.02121 & -0.00909 & 0.01818 & 0.06060 & 0.11818 & 0.19091 & -0.72121 & 0.38182 \\ 0.12727 & 0 & -0.08182 & -0.11818 & -0.10909 & -0.05454 & 0.04545 & 0.19091 & 0.38182 & -0.38182 \end{Bmatrix}$$

Krakowiany wyrównawcze wielomianów czteroparametrowych

$$\underline{N} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

$$F_{(4.5)} = \left\{\begin{matrix}
-0.01428 & 0.05714 & -0.08571 & 0.05714 & -0.01429 \\
0.05714 & -0.22857 & 0.34286 & -0.22857 & 0.05714 \\
-0.08571 & 0.34286 & -0.51430 & 0.34286 & -0.08571 \\
0.05714 & -0.22857 & 0.34286 & -0.22857 & 0.05714 \\
-0.01429 & 0.05714 & -0.08571 & 0.05714 & -0.01428
\end{matrix}\right\}$$

$$F_{(4.6)} = \left\{\begin{matrix}
-0.03969 & 0.12699 & -0.11111 & -0.03174 & 0.08730 & -0.03175 \\
0.12699 & -0.42064 & 0.41271 & 0.01586 & -0.22222 & 0.08730 \\
-0.11111 & 0.41271 & -0.53971 & 0.25399 & 0.01586 & -0.03174 \\
-0.03174 & 0.01586 & 0.25399 & -0.53971 & 0.41271 & -0.11111 \\
0.08730 & -0.22222 & 0.01586 & 0.41271 & -0.42064 & 0.12699 \\
-0.03175 & 0.08730 & -0.03174 & -0.11111 & 0.12699 & -0.03969
\end{matrix}\right\}$$

$$F_{(4.7)} = \left\{\begin{matrix}
-0.07142 & 0.19047 & -0.09524 & -0.09524 & 0.02380 & 0.09524 & -0.04761 \\
0.19047 & -0.54762 & 0.38097 & 0.14285 & -0.09524 & -0.16667 & 0.09524 \\
-0.09524 & 0.38097 & -0.54763 & 0.28572 & 0.04762 & -0.09524 & 0.02380 \\
-0.09524 & 0.14285 & 0.28572 & -0.66666 & 0.28572 & 0.14285 & -0.09524 \\
0.02380 & -0.09524 & 0.04762 & 0.28572 & -0.54763 & 0.38097 & -0.09524 \\
0.09524 & -0.16667 & -0.09524 & 0.14285 & 0.38097 & -0.54762 & 0.19047 \\
-0.04761 & 0.09524 & 0.02380 & -0.09524 & -0.09524 & 0.19047 & -0.07142
\end{matrix}\right\}$$

$$F_{(4.8)} = \left\{\begin{matrix}
-0.10606 & 0.24242 & -0.06061 & -0.12121 & -0.04545 & 0.06061 & 0.09091 & -0.06061 \\
0.24242 & -0.62554 & 0.32900 & 0.18182 & 0.00866 & -0.11472 & -0.11255 & 0.09091 \\
-0.06061 & 0.32900 & -0.58224 & 0.31169 & 0.11688 & -0.06061 & -0.11472 & 0.06061 \\
-0.12121 & 0.18182 & 0.31169 & -0.68616 & 0.23377 & 0.11688 & 0.00866 & -0.04545 \\
-0.04545 & 0.00866 & 0.11688 & 0.23377 & -0.68616 & 0.31169 & 0.18182 & -0.12121 \\
0.06061 & -0.11472 & -0.06061 & 0.11688 & 0.31169 & -0.58224 & 0.32900 & -0.06061 \\
0.09091 & -0.11255 & -0.11472 & 0.00866 & 0.18182 & 0.32900 & -0.62554 & 0.24242 \\
-0.06061 & 0.09091 & 0.06061 & -0.04545 & -0.12121 & -0.06061 & 0.24242 & -0.10606
\end{matrix}\right\}$$

$$F_{(4.9)} = \left\{\begin{matrix}
-0.14141 & 0.28282 & -0.02020 & -0.12121 & -0.09091 & 0 & 0.08081 & 0.08081 & -0.07071 \\
0.28282 & -0.67172 & 0.28283 & 0.18182 & 0.06061 & -0.04545 & -0.10101 & -0.07071 & 0.08081 \\
-0.02020 & 0.28283 & -0.62843 & 0.31169 & 0.16883 & 0.00866 & -0.10318 & -0.10101 & 0.08081 \\
-0.12121 & 0.18182 & 0.31169 & -0.68615 & 0.23377 & 0.11687 & 0.00866 & -0.04545 & 0 \\
-0.09091 & 0.06061 & 0.16883 & 0.23377 & -0.74460 & 0.23377 & 0.16883 & 0.06061 & -0.09091 \\
0 & -0.04545 & 0.00866 & 0.11687 & 0.23377 & -0.68615 & 0.31169 & 0.18182 & -0.12121 \\
0.08081 & -0.10101 & -0.10318 & 0.00866 & 0.16883 & 0.31169 & -0.62842 & 0.28283 & -0.02021 \\
0.08081 & -0.07071 & -0.10101 & -0.04545 & 0.06061 & 0.18182 & 0.28283 & -0.67173 & 0.28283 \\
-0.07071 & 0.08081 & 0.08081 & 0 & -0.09091 & -0.12121 & -0.02021 & 0.28283 & -0.14141
\end{matrix}\right\}$$

$$F_{(4.10)} = \left\{\begin{matrix}
-0.17622 & 0.31328 & 0.01958 & -0.10629 & -0.11329 & -0.05035 & 0.03357 & 0.08951 & 0.06853 & -0.07832 \\
0.31328 & -0.69836 & 0.24802 & 0.16876 & 0.08019 & -0.00140 & -0.05967 & -0.07832 & -0.04103 & 0.06853 \\
0.01958 & 0.24802 & -0.67389 & 0.29464 & 0.19440 & 0.06620 & -0.04919 & -0.11095 & -0.07832 & 0.08951 \\
-0.10629 & 0.16876 & 0.29464 & -0.69255 & 0.24336 & 0.13846 & 0.02891 & -0.04919 & -0.05967 & 0.03357 \\
-0.11329 & 0.08019 & 0.19440 & 0.24336 & -0.75897 & 0.20140 & 0.13846 & 0.06620 & -0.00140 & -0.05035 \\
-0.05035 & -0.00140 & 0.06620 & 0.13846 & 0.20140 & -0.75897 & 0.24336 & 0.19440 & 0.08019 & -0.11329 \\
0.03357 & -0.05967 & -0.04919 & 0.02891 & 0.13846 & 0.24336 & -0.69255 & 0.29464 & 0.16876 & -0.10629 \\
0.08951 & -0.07832 & -0.11095 & -0.04919 & 0.06620 & 0.19440 & 0.29464 & -0.67389 & 0.24802 & 0.01958 \\
0.06853 & -0.04103 & -0.07832 & -0.05967 & -0.00140 & 0.08019 & 0.16876 & 0.24802 & -0.69836 & 0.31328 \\
-0.07832 & 0.06853 & 0.08951 & 0.03357 & -0.05035 & -0.11329 & -0.10629 & 0.01958 & 0.31328 & -0.17622
\end{matrix}\right\}$$

KRAKOWIANY INTERPOLACYJNE

do interpolowania wartości funkcji jednej
i wielu zmiennych wzorem Lagrange'a
przy jednakowych odstępach argumentu.

Krakowiany zagęszczenia dziesiętnego

Dla interpolacji trójwyrazowej

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & S \end{array} \\
\underset{3}{\underline{\mathrm{D}}} = \left\{\begin{array}{ccccccccc|c}
0.855 & 0.720 & 0.595 & 0.480 & 0.375 & 0.280 & 0.195 & 0.120 & 0.055 & 3.675 \\
0.190 & 0.360 & 0.510 & 0.640 & 0.750 & 0.840 & 0.910 & 0.960 & 0.990 & 6.150 \\
-0.045 & -0.080 & -0.105 & -0.120 & -0.125 & -0.120 & -0.105 & -0.080 & -0.045 & -0.825
\end{array}\right\}
\end{array}$$

Dla interpolacji czterowyrazowej

$$\underset{4}{\underline{\mathrm{D}}} = \left\{\begin{array}{ccccccccc|c}
0.8265 & 0.6720 & 0.5355 & 0.4160 & 0.3125 & 0.2240 & 0.1495 & 0.0880 & 0.0385 & 3.2625 \\
0.2755 & 0.5040 & 0.6885 & 0.8320 & 0.9375 & 1.0080 & 1.0465 & 1.0560 & 1.0395 & 7.3875 \\
-0.1305 & -0.2240 & -0.2835 & -0.3120 & -0.3125 & -0.2880 & -0.2415 & -0.1760 & -0.0945 & -2.0625 \\
0.0285 & 0.0480 & 0.0595 & 0.0640 & 0.0625 & 0.0560 & 0.0455 & 0.0320 & 0.0165 & 0.4125
\end{array}\right\}$$

Dla interpolacji pięciowyrazowej

$$\underset{5}{\underline{\mathrm{D}}} = \left\{\begin{array}{ccccccccc|c}
0.805\,8375 & 0.638\,4000 & 0.495\,3375 & 0.374\,4000 & 0.273\,4375 & 0.190\,4000 & 0.123\,3375 & 0.070\,4000 & 0.029\,8375 & 3.001\,3875 \\
0.358\,1500 & 0.638\,4000 & 0.849\,1500 & 0.998\,4000 & 1.093\,7500 & 1.142\,4000 & 1.151\,1500 & 1.126\,4000 & 1.074\,1500 & 8.431\,9500 \\
-0.254\,4750 & -0.425\,6000 & -0.524\,4750 & -.0561\,6000 & -0.546\,8750 & -0.489\,6000 & -0.398\,4750 & -0.281\,6000 & -0.146\,4750 & -3.629\,1750 \\
0.111\,1500 & 0.182\,4000 & 0.220\,1500 & 0.230\,4000 & 0.218\,7500 & 0.190\,4000 & 0.150\,1500 & 0.102\,4000 & 0.051\,1500 & 1.456\,9500 \\
-0.020\,6625 & -0.033\,6000 & -0.040\,1625 & -0.041\,6000 & -0.039\,0625 & -0.033\,6000 & -0.026\,1625 & -0.017\,6000 & -0.008\,6625 & -0.261\,1125
\end{array}\right\}$$

Dla interpolacji sześciowyrazowej

$$\underset{6}{\underline{\mathrm{D}}} = \left\{\begin{array}{ccccccccc|c}
0.7897\,2075 & 0.6128\,6400 & 0.4656\,1725 & 0.3444\,4800 & 0.2460\,9375 & 0.1675\,5200 & 0.1060\,7025 & 0.0591\,3600 & 0.0244\,6675 & 2.8159\,6875 \\
0.4387\,3375 & 0.7660\,8000 & 0.9977\,5125 & 1.1481\,6000 & 1.2304\,6875 & 1.2566\,4000 & 1.2374\,8625 & 1.1827\,2000 & 1.1010\,0375 & 9.3590\,4375 \\
-0.4156\,4250 & -0.6809\,6000 & -0.8216\,7750 & -0.8611\,2000 & -0.8203\,1250 & -0.7180\,8000 & -0.5711\,4750 & -0.3942\,4000 & -0.2001\,8250 & -5.4833\,6250 \\
0.2723\,1750 & 0.4377\,6000 & 0.5173\,5250 & 0.5299\,2000 & 0.4921\,8750 & 0.4188\,8000 & 0.3228\,2250 & 0.2150\,4000 & 0.1048\,5750 & 3.3111\,3750 \\
-0.1012\,4625 & -0.1612\,8000 & -0.1887\,6375 & -0.1913\,6000 & -0.1757\,8125 & -0.1478\,4000 & -0.1124\,9875 & -0.0739\,2000 & -0.0355\,1625 & -1.1882\,0625 \\
0.0161\,1675 & 0.0255\,3600 & 0.0297\,2025 & 0.0299\,5200 & 0.0273\,4375 & 0.0228\,4800 & 0.0172\,6725 & 0.0112\,6400 & 0.0053\,7075 & 0.1854\,1875
\end{array}\right\}$$

Dla interpolacji siedmiowyrazowej

$$\underset{7}{\underline{\mathrm{D}}} = \left\{\begin{array}{ccccccccc|c}
0.77655\,87375 & 0.59243\,52000 & 0.44233\,63875 & 0.32148\,48000 & 0.22558\,59375 & 0.15079\,68000 & 0.09369\,53875 & 0.05125\,12000 & 0.02079\,67375 & 2.67494\,11875 \\
0.51770\,58250 & 0.88865\,28000 & 1.13743\,64250 & 1.28593\,92000 & 1.35351\,56250 & 1.35717\,12000 & 1.31173\,54250 & 1.23002\,88000 & 1.12302\,38250 & 10.20520\,91250 \\
-0.61307\,26875 & -0.98739\,20000 & -1.17089\,04375 & -1.20556\,80000 & -1.12792\,96875 & -0.96940\,80000 & -0.75677\,04375 & -0.51251\,20000 & -0.25523\,26875 & -7.59877\,59375 \\
0.53555\,77500 & 0.84633\,60000 & 0.98296\,97500 & 0.98918\,40000 & 0.90234\,37500 & 0.75398\,40000 & 0.57031\,97500 & 0.37273\,60000 & 0.17825\,77500 & 6.13168\,87500 \\
-0.29867\,64375 & -0.46771\,20000 & -0.53797\,66875 & -0.53580\,80000 & -0.48339\,84375 & -0.39916\,80000 & -0.29812\,16875 & -0.19219\,20000 & -0.09056\,64375 & -3.30361\,96875 \\
0.09508\,88250 & 0.14810\,88000 & 0.16940\,54250 & 0.16773\,12000 & 0.15039\,06250 & 0.12337\,92000 & 0.09151\,64250 & 0.05857\,28000 & 0.02739\,08250 & 1.03158\,41250 \\
-0.01316\,20125 & -0.02042\,88000 & -0.02328\,08625 & -0.02296\,32000 & -0.02050\,78125 & -0.01675\,52000 & -0.01237\,48625 & -0.00788\,48000 & -0.00367\,00125 & -0.14102\,75625
\end{array}\right\}$$

Kryteria obrania rzędu interpolacji

Aby funkcja mogła być aproksymowana przez wielomian trójparametrowy (interpolacja trójwyrazowa), muszą cztery wartości tej funkcjj, U_0 U_1 U_2 U_3, odpowiadające równoodległym wartościom argumentu X, spełnić warunek:

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \simeq 0$$

(funkcja $U = f(x)$ musi być oczywiście w rozpatrywanym zakresie zmienności ciągła).

Analogicznie dla aproksymowania funkcji przez wielomian: cztero, pięcio, sześcio, siedmioparametrowy, muszą być spełnione warunki:

wiel: czteroparametrowy

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \simeq 0$$

wiel. pięcioparametrowy

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \\ 10 \\ -5 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \simeq 0$$

wiel. sześcioparametrowy

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \\ -20 \\ 15 \\ -6 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \simeq 0$$

wiel. siedmioparametrowy

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 7 \\ -21 \\ 35 \\ -35 \\ 21 \\ -7 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{Bmatrix} \simeq 0$$

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.000	0.020	0.040	0.060	0.080	0.100	0.120	0.140	0.160	0.180
1.000 0000	0.970 2000	0.940 8000	0.911 8000	0.883 2000	0.855 0000	0.827 2000	0.799 8000	0.772 8000	0.746 2000
0	0.039 6000	0.078 4000	0.116 4000	0.153 6000	0.190 0000	0.225 6000	0.260 4000	0.294 4000	0.327 6000
0	-0.009 8000	-0.019 2000	-0.028 2000	-0.036 8000	-0.045 0000	-0.052 8000	-0.060 2000	-0.067 2000	-0.073 8000
0.001	0.021	0.041	0.061	0.081	0.101	0.121	0.141	0.161	0.181
0.998 5005	0.968 7205	0.939 3405	0.910 3605	0.881 7805	0.853 6005	0.825 8205	0.798 4405	0.771 4605	0.744 8805
0.001 9990	0.041 5590	0.080 3190	0.118 2790	0.155 4390	0.191 7990	0.227 3590	0.262 1190	0.296 0790	0.329 2390
-0.000 4995	-0.010 2795	-0.019 6595	-0.028 6395	-0.037 2195	-0.045 3995	-0.053 1795	-0.060 5595	-0.067 5395	-0.074 1195
0.002	0.022	0.042	0.062	0.082	0.102	0.122	0.142	0.162	0.182
0.997 0020	0.967 2420	0.937 8820	0.908 9220	0.880 3620	0.852 2020	0.824 4420	0.797 0820	0.770 1220	0.743 5620
0.003 9960	0.043 5160	0.082 2360	0.120 1560	0.157 2760	0.193 5960	0.229 1160	0.263 8360	0.297 7560	0.330 8760
-0.000 9980	-0.010 7580	-0.020 1180	-0.029 0780	-0.037 6380	-0.045 7980	-0.053 5580	-0.060 9180	-0.067 8780	-0.074 4380
0.003	0.023	0.043	0.063	0.083	0.103	0.123	0.143	0.163	0.183
0.995 5045	0.965 7645	0.936 4245	0.907 4845	0.878 9445	0.850 8045	0.823 0645	0.795 7245	0.768 7845	0.742 2445
0.005 9910	0.045 4710	0.084 1510	0.122 0310	0.159 1110	0.195 3910	0.230 8710	0.265 5510	0.299 4310	0.332 5110
-0.001 4955	-0.011 2355	-0.020 5755	-0.029 5155	-0.038 0555	-0.046 1955	-0.053 9355	-0.061 2755	-0.068 2155	-0.074 7555
0.004	0.024	0.044	0.064	0.084	0.104	0.124	0.144	0.164	0.184
0.994 0080	0.964 2880	0.934 9680	0.906 0480	0.877 5280	0.849 4080	0.821 6880	0.794 3680	0.767 4480	0.740 9280
0.007 9840	0.047 4240	0.086 0640	0.123 9040	0.160 9440	0.197 1840	0.232 6240	0.267 2640	0.301 1040	0.334 1440
-0.001 9920	-0.011 7120	-0.021 0320	-0.029 9520	-0.038 4720	-0.046 5920	-0.054 3120	-0.061 6320	-0.068 5520	-0.075 0720
0.005	0.025	0.045	0.065	0.085	0.105	0.125	0.145	0.165	0.185
0.992 5125	0.962 8125	0.933 5125	0.904 6125	0.876 1125	0.848 0125	0.820 3125	0.793 0125	0.766 1125	0.739 6125
0.009 9750	0.049 3750	0.087 9750	0.125 7750	0.162 7750	0.198 9750	0.234 3750	0.268 9750	0.302 7750	0.335 7750
-0.002 4875	-0.012 1875	-0.021 4875	-0.030 3875	-0.038 8875	-0.046 9875	-0.054 6875	-0.061 9875	-0.068 8875	-0.075 3875
0.006	0.026	0.046	0.066	0.086	0.106	0.126	0.146	0.166	0.186
0.991 0180	0.961 3380	0.932 0580	0.903 1780	0.874 6980	0.846 6180	0.818 9380	0.791 6580	0.764 7780	0.738 2980
0.011 9640	0.051 3240	0.089 8840	0.127 6440	0.164 6040	0.200 7640	0.236 1240	0.270 6840	0.304 4440	0.337 4040
-0.002 9820	-0.012 6620	-0.021 9420	-0.030 8220	-0.039 3020	-0.047 3820	-0.055 0620	-0.062 3420	-0.069 2220	-0.075 7020
0.007	0.027	0.047	0.067	0.087	0.107	0.127	0.147	0.167	0.187
0.989 5245	0.959 8645	0.930 6045	0.901 7445	0.873 2845	0.845 2245	0.817 5645	0.790 3045	0.763 4445	0.736 9845
0.013 9510	0.053 2710	0.091 7910	0.129 5110	0.166 4310	0.202 5510	0.237 8710	0.272 3910	0.306 1110	0.339 0310
-0.003 4755	-0.013 1355	-0.022 3955	-0.031 2555	-0.039 7155	-0.047 7755	-0.055 4355	-0.062 6955	-0.069 5555	-0.076 0155
0.008	0.028	0.048	0.068	0.088	0.108	0.128	0.148	0.168	0.188
0.988 0320	0.958 3920	0.929 1520	0.900 3120	0.871 8720	0.843 8320	0.816 1920	0.788 9520	0.762 1120	0.735 6720
0.015 9360	0.055 2160	0.093 6960	0.131 3760	0.168 2560	0.204 3360	0.239 6160	0.274 0960	0.307 7760	0.340 6560
-0.003 9680	-0.013 6080	-0.022 8480	-0.031 6880	-0.040 1280	-0.048 1680	-0.055 8080	-0.063 0480	-0.069 8880	-0.076 3280
0.009	0.029	0.049	0.069	0.089	0.109	0.129	0.149	0.169	0.189
0.986 5405	0.956 9205	0.927 7005	0.898 8805	0.870 4605	0.842 4405	0.814 8205	0.787 6005	0.760 7805	0.734 3605
0.017 9190	0.057 1590	0.095 5990	0.133 2390	0.170 0790	0.206 1190	0.241 3590	0.275 7990	0.309 4390	0.342 2790
-0.004 4595	-0.014 0795	-0.023 2995	-0.032 1195	-0.040 5395	-0.048 5595	-0.056 1795	-0.063 3995	-0.070 2195	-0.076 6395
0.010	0.030	0.050	0.070	0.090	0.110	0.130	0.150	0.170	0.190
0.985 0500	0.955 4500	0.926 2500	0.897 4500	0.869 0500	0.841 0500	0.813 4500	0.786 2500	0.759 4500	0.733 0500
0.019 9000	0.059 1000	0.097 5000	0.135 1000	0.171 9000	0.207 9000	0.243 1000	0.277 5000	0.311 1000	0.343 9000
-0.004 9500	-0.014 5500	-0.023 7500	-0.032 5500	-0.040 9500	-0.048 9500	-0.056 5500	-0.063 7500	-0.070 5500	-0.076 9500
0.011	0.031	0.051	0.071	0.091	0.111	0.131	0.151	0.171	0.191
0.983 5605	0.953 9805	0.924 8005	0.896 0205	0.867 6405	0.839 6605	0.812 0805	0.784 9005	0.758 1205	0.731 7405
0.021 8790	0.061 0390	0.099 3990	0.136 9590	0.173 7190	0.209 6790	0.244 8390	0.279 1990	0.312 7590	0.345 5190
-0.005 4395	-0.015 0195	-0.024 1995	-0.032 9795	-0.041 3595	-0.049 3395	-0.056 9195	-0.064 0995	-0.070 8795	-0.077 2595
0.012	0.032	0.052	0.072	0.092	0.112	0.132	0.152	0.172	0.192
0.982 0720	0.952 5120	0.923 3520	0.894 5920	0.866 2320	0.838 2720	0.810 7120	0.783 5520	0.756 7920	0.730 4320
0.023 8560	0.062 9760	0.101 2960	0.138 8160	0.175 5360	0.211 4560	0.246 5760	0.280 8960	0.314 4160	0.347 1360
-0.005 9280	-0.015 4880	-0.024 6480	-0.033 4080	-0.041 7680	-0.049 7280	-0.057 2880	-0.064 4480	-0.071 2080	-0.077 5680
0.013	0.033	0.053	0.073	0.093	0.113	0.133	0.153	0.173	0.193
0.980 5845	0.951 0445	0.921 9045	0.893 1645	0.864 8245	0.836 8845	0.809 3445	0.782 2045	0.755 4645	0.729 1245
0.025 8310	0.064 9110	0.103 1910	0.140 6710	0.177 3510	0.213 2310	0.248 3110	0.282 5910	0.316 0710	0.348 7510
-0.006 4155	-0.015 9555	-0.025 0955	-0.033 8355	-0.042 1755	-0.050 1155	-0.057 6555	-0.064 7955	-0.071 5355	-0.077 8755
0.014	0.034	0.054	0.074	0.094	0.114	0.134	0.154	0.174	0.194
0.979 0980	0.949 5780	0.920 4580	0.891 7380	0.863 4180	0.835 4980	0.807 9780	0.780 8580	0.754 1380	0.727 8180
0.027 8040	0.066 8440	0.105 0840	0.142 5240	0.179 1640	0.215 0040	0.250 0440	0.284 2840	0.317 7240	0.350 3640
-0.006 9020	-0.016 4220	-0.025 5420	-0.034 2620	-0.042 5820	-0.050 5020	-0.058 0220	-0.065 1420	-0.071 8620	-0.078 1820
0.015	0.035	0.055	0.075	0.095	0.115	0.135	0.155	0.175	0.195
0.977 6125	0.948 1125	0.919 0125	0.890 3125	0.862 0125	0.834 1125	0.806 6125	0.779 5125	0.752 8125	0.726 5125
0.029 7750	0.068 7750	0.106 9750	0.144 3750	0.180 9750	0.216 7750	0.251 7750	0.285 9750	0.319 3750	0.351 9750
-0.007 3875	-0.016 8875	-0.025 9875	-0.034 6875	-0.042 9875	-0.050 8875	-0.058 3875	-0.065 4875	-0.072 1875	-0.078 4875
0.016	0.036	0.056	0.076	0.096	0.116	0.136	0.156	0.176	0.196
0.976 1280	0.946 6480	0.917 5680	0.888 8880	0.860 6080	0.832 7280	0.805 2480	0.778 1680	0.751 4880	0.725 2080
0.031 7440	0.070 7040	0.108 8640	0.146 2240	0.182 7840	0.218 5440	0.253 5040	0.287 6640	0.321 0240	0.353 5840
-0.007 8720	-0.017 3520	-0.026 4320	-0.035 1120	-0.043 3920	-0.051 2720	-0.058 7520	-0.065 8320	-0.072 5120	-0.078 7920
0.017	0.037	0.057	0.077	0.097	0.117	0.137	0.157	0.177	0.197
0.974 6445	0.945 1845	0.916 1245	0.887 4645	0.859 2045	0.831 3445	0.803 8845	0.776 8245	0.750 1645	0.723 9045
0.033 7110	0.072 6310	0.110 7510	0.148 0710	0.184 5910	0.220 3110	0.255 2310	0.289 3510	0.322 6710	0.355 1910
-0.008 3555	-0.017 8155	-0.026 8755	-0.035 5355	-0.043 7955	-0.051 6555	-0.059 1155	-0.066 1755	-0.072 8355	-0.079 0955
0.018	0.038	0.058	0.078	0.098	0.118	0.138	0.158	0.178	0.198
0.973 1620	0.943 7220	0.914 6820	0.886 0420	0.857 8020	0.829 9620	0.802 5220	0.775 4820	0.748 8420	0.722 6020
0.035 6760	0.074 5560	0.112 6360	0.149 9160	0.186 3960	0.222 0760	0.256 9560	0.291 0360	0.324 3160	0.356 7960
-0.008 8380	-0.018 2780	-0.027 3180	-0.035 9580	-0.044 1980	-0.052 0380	-0.059 4780	-0.066 5180	-0.073 1580	-0.079 3980
0.019	0.039	0.059	0.079	0.099	0.119	0.139	0.159	0.179	0.199
0.971 6805	0.942 2605	0.913 2405	0.884 6205	0.856 4005	0.828 5805	0.801 1605	0.774 1405	0.747 5205	0.721 3005
0.037 6390	0.076 4790	0.114 5190	0.151 7590	0.188 1990	0.223 8390	0.258 6790	0.292 7190	0.325 9590	0.358 3990
-0.009 3195	-0.018 7395	-0.027 7595	-0.036 3795	-0.044 5995	-0.052 4195	-0.059 8395	-0.066 8595	-0.073 4795	-0.079 6995

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.200	0.220	0.240	0.260	0.280	0.300	0.320	0.340	0.360	0.380
0.720 0000	0.694 2000	0.668 8000	0.643 8000	0.619 2000	0.595 0000	0.571 2000	0.547 8000	0.524 8000	0.502 2000
0.360 0000	0.391 6000	0.422 4000	0.452 4000	0.481 6000	0.510 0000	0.537 6000	0.564 4000	0.590 4000	0.615 6000
−0.080 0000	−0.085 8000	−0.091 2000	−0.096 2000	−0.100 8000	−0.105 0000	−0.108 8000	−0.112 2000	−0.115 2000	−0.117 8000
0.201	0.221	0.241	0.261	0.281	0.301	0.321	0.341	0.361	0.381
0.718 7005	0.692 9205	0.667 5405	0.642 5605	0.617 9805	0.593 8005	0.570 0205	0.546 6405	0.523 6605	0.501 0805
0.361 5990	0.393 1590	0.423 9190	0.453 8790	0.483 0390	0.511 3990	0.538 9590	0.565 7190	0.591 6790	0.616 8390
−0.080 2995	−0.086 0795	−0.091 4595	−0.096 4395	−0.101 0195	−0.105 1995	−0.108 9795	−0.112 3595	−0.115 3395	−0.117 9195
0.202	0.222	0.242	0.262	0.282	0.302	0.322	0.342	0.362	0.382
0.717 4020	0.691 6420	0.666 2820	0.641 3220	0.616 7620	0.592 6020	0.568 8420	0.545 4820	0.522 5220	0.499 9620
0.363 1960	0.394 7160	0.425 4360	0.455 3560	0.484 4760	0.512 7960	0.540 3160	0.567 0360	0.592 9560	0.618 0760
−0.080 5980	−0.086 3580	−0.091 7180	−0.096 6780	−0.101 2380	−0.105 3980	−0.109 1580	−0.112 5180	−0.115 4780	−0.118 0380
0.203	0.223	0.243	0.263	0.283	0.303	0.323	0.343	0.363	0.383
0.716 1045	0.690 3645	0.665 0245	0.640 0845	0.615 5445	0.591 4045	0.567 6645	0.544 3245	0.521 3845	0.498 8445
0.364 7910	0.396 2710	0.426 9510	0.456 8310	0.485 9110	0.514 1910	0.541 6710	0.568 3510	0.594 2310	0.619 3110
−0.080 8955	−0.086 6355	−0.091 9755	−0.096 9155	−0.101 4555	−0.105 5955	−0.109 3355	−0.112 6755	−0.115 6155	−0.118 1555
0.204	0.224	0.244	0.264	0.284	0.304	0.324	0.344	0.364	0.384
0.714 8080	0.689 0880	0.663 7680	0.638 8480	0.614 3280	0.590 2080	0.566 4880	0.543 1680	0.520 2480	0.497 7280
0.366 3840	0.397 8240	0.428 4640	0.458 3040	0.487 3440	0.515 5840	0.543 0240	0.569 6640	0.595 5040	0.620 5440
−0.081 1920	−0.086 9120	−0.092 2320	−0.097 1520	−0.101 6720	−0.105 7920	−0.109 5120	−0.112 8320	−0.115 7520	−0.118 2720
0.205	0.225	0.245	0.265	0.285	0.305	0.325	0.345	0.365	0.385
0.713 5125	0.687 8125	0.662 5125	0.637 6125	0.613 1125	0.589 0125	0.565 3125	0.542 0125	0.519 1125	0.496 6125
0.367 9750	0.399 3750	0.429 9750	0.459 7750	0.488 7750	0.516 9750	0.544 3750	0.570 9750	0.596 7750	0.621 7750
−0.081 4875	−0.087 1875	−0.092 4875	−0.097 3875	−0.101 8875	−0.105 9875	−0.109 6875	−0.112 9875	−0.115 8875	−0.118 3875
0.206	0.226	0.246	0.266	0.286	0.306	0.326	0.346	0.366	0.386
0.712 2180	0.686 5380	0.661 2580	0.636 3780	0.611 8980	0.587 8180	0.564 1380	0.540 8580	0.517 9780	0.495 4980
0.369 5640	0.400 9240	0.431 4840	0.461 2440	0.490 2040	0.518 3640	0.545 7240	0.572 2840	0.598 0440	0.623 0040
−0.081 7820	−0.087 4620	−0.092 7420	−0.097 6220	−0.102 1020	−0.106 1820	−0.109 8620	−0.113 1420	−0.116 0220	−0.118 5020
0.207	0.227	0.247	0.267	0.287	0.307	0.327	0.347	0.367	0.387
0.710 9245	0.685 2645	0.660 0045	0.635 1445	0.610 6845	0.586 6245	0.562 9645	0.539 7045	0.516 8445	0.494 3845
0.371 1510	0.402 4710	0.432 9910	0.462 7110	0.491 6310	0.519 7510	0.547 0710	0.573 5910	0.599 3110	0.624 2310
−0.082 0755	−0.087 7355	−0.092 9955	−0.097 8555	−0.102 3155	−0.106 3755	−0.110 0355	−0.113 2955	−0.116 1555	−0.118 6155
0.208	0.228	0.248	0.268	0.288	0.308	0.328	0.348	0.368	0.388
0.709 6320	0.683 9920	0.658 7520	0.633 9120	0.609 4720	0.585 4320	0.561 7920	0.538 5520	0.515 7120	0.493 2720
0.372 7360	0.404 0160	0.434 4960	0.464 1760	0.493 0560	0.521 1360	0.548 4160	0.574 8960	0.600 5760	0.625 4560
−0.082 3680	−0.088 0080	−0.093 2480	−0.098 0880	−0.102 5280	−0.106 5680	−0.110 2080	−0.113 4480	−0.116 2880	−0.118 7280
0.209	0.229	0.249	0.269	0.289	0.309	0.329	0.349	0.369	0.389
0.708 3405	0.682 7205	0.657 5005	0.632 6805	0.608 2605	0.584 2405	0.560 6205	0.537 4005	0.514 5805	0.492 1605
0.374 3190	0.405 5590	0.435 9990	0.465 6390	0.494 4790	0.522 5190	0.549 7590	0.576 1990	0.601 8390	0.626 6790
−0.082 6595	−0.088 2795	−0.093 4995	−0.098 3195	−0.102 7395	−0.106 7595	−0.110 3795	−0.113 5995	−0.116 4195	−0.118 8395
0.210	0.230	0.250	0.270	0.290	0.310	0.330	0.350	0.370	0.390
0.707 0500	0.681 4500	0.656 2500	0.631 4500	0.607 0500	0.583 0500	0.559 4500	0.536 2500	0.513 4500	0.491 0500
0.375 9000	0.407 1000	0.437 5000	0.467 1000	0.495 9000	0.523 9000	0.551 1000	0.577 5000	0.603 1000	0.627 9000
−0.082 9500	−0.088 5500	−0.093 7500	−0.098 5500	−0.102 9500	−0.106 9500	−0.110 5500	−0.113 7500	−0.116 5500	−0.118 9500
0.211	0.231	0.251	0.271	0.291	0.311	0.331	0.351	0.371	0.391
0.705 7605	0.680 1805	0.655 0005	0.630 2205	0.605 8405	0.581 8605	0.558 2805	0.535 1005	0.512 3205	0.489 9405
0.377 4790	0.408 6390	0.438 9990	0.468 5590	0.497 3190	0.525 2790	0.552 4390	0.578 7990	0.604 3590	0.629 1190
−0.083 2395	−0.088 8195	−0.093 9995	−0.098 7795	−0.103 1595	−0.107 1395	−0.110 7195	−0.113 8995	−0.116 6795	−0.119 0595
0.212	0.232	0.252	0.272	0.292	0.312	0.332	0.352	0.372	0.392
0.704 4720	0.678 9120	0.653 7520	0.628 9920	0.604 6320	0.580 6720	0.557 1120	0.533 9520	0.511 1920	0.488 8320
0.379 0560	0.410 1760	0.440 4960	0.470 0160	0.498 7360	0.526 6560	0.553 7760	0.580 0960	0.605 6160	0.630 3360
−0.083 5280	−0.089 0880	−0.094 2480	−0.099 0080	−0.103 3680	−0.107 3280	−0.110 8880	−0.114 0480	−0.116 8080	−0.119 1680
0.213	0.233	0.253	0.273	0.293	0.313	0.333	0.353	0.373	0.393
0.703 1845	0.677 6445	0.652 5045	0.627 7645	0.603 4245	0.579 4845	0.555 9445	0.532 8045	0.510 0645	0.487 7245
0.380 6310	0.411 7110	0.441 9910	0.471 4710	0.500 1510	0.528 0310	0.555 1110	0.581 3910	0.606 8710	0.631 5510
−0.083 8155	−0.089 3555	−0.094 4955	−0.099 2355	−0.103 5755	−0.107 5155	−0.111 0555	−0.114 1955	−0.116 9355	−0.119 2755
0.214	0.234	0.254	0.274	0.294	0.314	0.334	0.354	0.374	0.394
0.701 8980	0.676 3780	0.651 2580	0.626 5380	0.602 2180	0.578 2980	0.554 7780	0.531 6580	0.508 9380	0.486 6180
0.382 2040	0.413 2440	0.443 4840	0.472 9240	0.501 5640	0.529 4040	0.556 4440	0.582 6840	0.608 1240	0.632 7640
−0.084 1020	−0.089 6220	−0.094 7420	−0.099 4620	−0.103 7820	−0.107 7020	−0.111 2220	−0.114 3420	−0.117 0620	−0.119 3820
0.215	0.235	0.255	0.275	0.295	0.315	0.335	0.355	0.375	0.395
0.700 6125	0.675 1125	0.650 0125	0.625 3125	0.601 0125	0.577 1125	0.553 6125	0.530 5125	0.507 8125	0.485 5125
0.383 7750	0.414 7750	0.444 9750	0.474 3750	0.502 9750	0.530 7750	0.557 7750	0.583 9750	0.609 3750	0.633 9750
−0.084 3875	−0.089 8875	−0.094 9875	−0.099 6875	−0.103 9875	−0.107 8875	−0.111 3875	−0.114 4875	−0.117 1875	−0.119 4875
0.216	0.236	0.256	0.276	0.296	0.316	0.336	0.356	0.376	0.396
0.699 3280	0.673 8480	0.648 7680	0.624 0880	0.599 8080	0.575 9280	0.552 4480	0.529 3680	0.506 6880	0.484 4080
0.385 3440	0.416 3040	0.446 4640	0.475 8240	0.504 3840	0.532 1440	0.559 1040	0.585 2640	0.610 6240	0.635 1840
−0.084 6720	−0.090 1520	−0.095 2320	−0.099 9120	−0.104 1920	−0.108 0720	−0.111 5520	−0.114 6320	−0.117 3120	−0.119 5920
0.217	0.237	0.257	0.277	0.297	0.317	0.337	0.357	0.377	0.397
0.698 0445	0.672 5845	0.647 5245	0.622 8645	0.598 6045	0.574 7445	0.551 2845	0.528 2245	0.505 5645	0.483 3045
0.386 9110	0.417 8310	0.447 9510	0.477 2710	0.505 7910	0.533 5110	0.560 4310	0.586 5510	0.611 8710	0.636 3910
−0.084 9555	−0.090 4155	−0.095 4755	−0.100 1355	−0.104 3955	−0.108 2555	−0.111 7155	−0.114 7755	−0.117 4355	−0.119 6955
0.218	0.238	0.258	0.278	0.298	0.318	0.338	0.358	0.378	0.398
0.696 7620	0.671 3220	0.646 2820	0.621 6420	0.597 4020	0.573 5620	0.550 1220	0.527 0820	0.504 4420	0.482 2020
0.388 4760	0.419 3560	0.449 4360	0.478 7160	0.507 1960	0.534 8760	0.561 7560	0.587 8360	0.613 1160	0.637 5960
−0.085 2380	−0.090 6780	−0.095 7180	−0.100 3580	−0.104 5980	−0.108 4380	−0.111 8780	−0.114 9180	−0.117 5580	−0.119 7980
0.219	0.239	0.259	0.279	0.299	0.319	0.339	0.359	0.379	0.399
0.695 4805	0.670 0605	0.645 0405	0.620 4205	0.596 2005	0.572 3805	0.548 9605	0.525 9405	0.503 3205	0.481 1005
0.390 0390	0.420 8790	0.450 9190	0.480 1590	0.508 5990	0.536 2390	0.563 0790	0.589 1190	0.614 3590	0.638 7990
−0.085 5195	−0.090 9395	−0.095 9595	−0.100 5795	−0.104 7995	−0.108 6195	−0.112 0395	−0.115 0595	−0.117 6795	−0.119 8995

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.400 0.480 0000 0.640 0000 −0.120 0000	0.420 0.458 2000 0.663 6000 −0.121 8000	0.440 0.436 8000 0.686 4000 −0.123 2000	0.460 0.415 8000 0.708 4000 −0.124 2000	0.480 0.395 2000 0.729 6000 −0.124 8000	0.500 0.375 0000 0.750 0000 −0.125 0000	0.520 0.355 2000 0.769 6000 −0.124 8000	0.540 0.335 8000 0.788 4000 −0.124 2000	0.560 0.316 8000 0.806 4000 −0.123 2000	0.580 0.298 2000 0.823 6000 −0.121 8000
0.401 0.478 9005 0.641 1990 −0.120 0995	0.421 0.457 1205 0.664 7590 −0.121 8795	0.441 0.435 7405 0.687 5190 −0.123 2595	0.461 0.414 7605 0.709 4790 −0.124 2395	0.481 0.394 1805 0.730 6390 −0.124 8195	0.501 0.374 0005 0.750 9990 −0.124 9995	0.521 0.354 2205 0.770 5590 −0.124 7795	0.541 0.334 8405 0.789 3190 −0.124 1595	0.561 0.315 8605 0.807 2790 −0.123 1395	0.581 0.297 2805 0.824 4390 −0.121 7195
0.402 0.477 8020 0.642 3960 −0.120 1980	0.422 0.456 0420 0.665 9160 −0.121 9580	0.442 0.434 6820 0.688 6360 −0.123 3180	0.462 0.413 7220 0.710 5560 −0.124 2780	0.482 0.393 1620 0.731 6760 −0.124 8380	0.502 0.373 0020 0.751 9960 −0.124 9980	0.522 0.353 2420 0.771 5160 −0.124 7580	0.542 0.333 8820 0.790 2360 −0.124 1180	0.562 0.314 9220 0.808 1560 −0.123 0780	0.582 0.296 3620 0.825 2760 −0.121 6380
0.403 0.476 7045 0.643 5910 −0.120 2955	0.423 0.454 9645 0.667 0710 −0.122 0355	0.443 0.433 6245 0.689 7510 −0.123 3755	0.463 0.412 6845 0.711 6310 −0.124 3155	0.483 0.392 1445 0.732 7110 −0.124 8555	0.503 0.372 0045 0.752 9910 −0.124 9955	0.523 0.352 2645 0.772 4710 −0.124 7355	0.543 0.332 9245 0.791 1510 −0.124 0755	0.563 0.313 9845 0.809 0310 −0.123 0155	0.583 0.295 4445 0.826 1110 −0.121 5555
0.404 0.475 6080 0.644 7840 −0.120 3920	0.424 0.453 8880 0.668 2240 −0.122 1120	0.444 0.432 5680 0.690 8640 −0.123 4320	0.464 0.411 6480 0.712 7040 −0.124 3520	0.484 0.391 1280 0.733 7440 −0.124 8720	0.504 0.371 0080 0.753 9840 −0.124 9920	0.524 0.351 2880 0.773 4240 −0.124 7120	0.544 0.331 9680 0.792 0640 −0.124 0320	0.564 0.313 0480 0.809 9040 −0.122 9520	0.584 0.294 5280 0.826 9440 −0.121 4720
0.405 0.474 5125 0.645 9750 −0.120 4875	0.425 0.452 8125 0.669 3750 −0.122 1875	0.445 0.431 5125 0.691 9750 −0.123 4875	0.465 0.410 6125 0.713 7750 −0.124 3875	0.485 0.390 1125 0.734 7750 −0.124 8875	0.505 0.370 0125 0.754 9750 −0.124 9875	0.525 0.350 3125 0.774 3750 −0.124 6875	0.545 0.331 0125 0.792 9750 −0.123 9875	0.565 0.312 1125 0.810 7750 −0.122 8875	0.585 0.293 6125 0.827 7750 −0.121 3875
0.406 0.473 4180 0.647 1640 −0.120 5820	0.426 0.451 7380 0.670 5240 −0.122 2620	0.446 0.430 4580 0.693 0840 −0.123 5420	0.466 0.409 5780 0.714 8440 −0.124 4220	0.486 0.389 0980 0.735 8040 −0.124 9020	0.506 0.369 0180 0.755 9640 −0.124 9820	0.526 0.349 3380 0.775 3240 −0.124 6620	0.546 0.330 0580 0.793 8840 −0.123 9420	0.566 0.311 1780 0.811 6440 −0.122 8220	0.586 0.292 6980 0.828 6040 −0.121 3020
0.407 0.472 3245 0.648 3510 −0.120 6755	0.427 0.450 6645 0.671 6710 −0.122 3355	0.447 0.429 4045 0.694 1910 −0.123 5955	0.467 0.408 5445 0.715 9110 −0.124 4555	0.487 0.388 0845 0.736 8310 −0.124 9155	0.507 0.368 0245 0.756 9510 −0.124 9755	0.527 0.348 3645 0.776 2710 −0.124 6355	0.547 0.329 1045 0.794 7910 −0.123 8955	0.567 0.310 2445 0.812 5110 −0.122 7555	0.587 0.291 7845 0.829 4310 −0.121 2155
0.408 0.471 2320 0.649 5360 −0.120 7680	0.428 0.449 5920 0.672 8160 −0.122 4080	0.448 0.428 3520 0.695 2960 −0.123 6480	0.468 0.407 5120 0.716 9760 −0.124 4880	0.488 0.387 0720 0.737 8560 −0.124 9280	0.508 0.367 0320 0.757 9360 −0.124 9680	0.528 0.347 3920 0.777 2160 −0.124 6080	0.548 0.328 1520 0.795 6960 −0.123 8480	0.568 0.309 3120 0.813 3760 −0.122 6880	0.588 0.290 8720 0.830 2560 −0.121 1280
0.409 0.470 1405 0.650 7190 −0.120 8595	0.429 0.448 5205 0.673 9590 −0.122 4795	0.449 0.427 3005 0.696 3990 −0.123 6995	0.469 0.406 4805 0.718 0390 −0.124 5195	0.489 0.386 0605 0.738 8790 −0.124 9395	0.509 0.366 0405 0.758 9190 −0.124 9595	0.529 0.346 4205 0.778 1590 −0.124 5795	0.549 0.327 2005 0.796 5990 −0.123 7995	0.569 0.308 3805 0.814 2390 −0.122 6195	0.589 0.289 9605 0.831 0790 −0.121 0395
0.410 0.469 0500 0.651 9000 −0.120 9500	0.430 0.447 4500 0.675 1000 −0.122 5500	0.450 0.426 2500 0.697 5000 −0.123 7500	0.470 0.405 4500 0.719 1000 −0.124 5500	0.490 0.385 0500 0.739 9000 −0.124 9500	0.510 0.365 0500 0.759 9000 −0.124 9500	0.530 0.345 4500 0.779 1000 −0.124 5500	0.550 0.326 2500 0.797 5000 −0.123 7500	0.570 0.307 4500 0.815 1000 −0.122 5500	0.590 0.289 0500 0.831 9000 −0.120 9500
0.411 0.467 9605 0.653 0790 −0.121 0395	0.431 0.446 3805 0.676 2390 −0.122 6195	0.451 0.425 2005 0.698 5990 −0.123 7995	0.471 0.404 4205 0.720 1590 −0.124 5795	0.491 0.384 0405 0.740 9190 −0.124 9595	0.511 0.364 0605 0.760 8790 −0.124 9395	0.531 0.344 4805 0.780 0390 −0.124 5195	0.551 0.325 3005 0.798 3990 −0.123 6995	0.571 0.306 5205 0.815 9590 −0.122 4795	0.591 0.288 1405 0.832 7190 −0.120 8595
0.412 0.466 8720 0.654 2560 −0.121 1280	0.432 0.445 3120 0.677 3760 −0.122 6880	0.452 0.424 1520 0.699 6960 −0.123 8480	0.472 0.403 3920 0.721 2160 −0.124 6080	0.492 0.383 0320 0.741 9360 −0.124 9680	0.512 0.363 0720 0.761 8560 −0.124 9280	0.532 0.343 5120 0.780 9760 −0.124 4880	0.552 0.324 3520 0.799 2960 −0.123 6480	0.572 0.305 5920 0.816 8160 −0.122 4080	0.592 0.287 2320 0.833 5360 −0.120 7680
0.413 0.465 7845 0.655 4310 −0.121 2155	0.433 0.444 2445 0.678 5110 −0.122 7555	0.453 0.423 1045 0.700 7910 −0.123 8955	0.473 0.402 3645 0.722 2710 −0.124 6355	0.493 0.382 0245 0.742 9510 −0.124 9755	0.513 0.362 0845 0.762 8310 −0.124 9155	0.533 0.342 5445 0.781 9110 −0.124 4555	0.553 0.323 4045 0.800 1910 −0.123 5955	0.573 0.304 6645 0.817 6710 −0.122 3355	0.593 0.286 3245 0.834 3510 −0.120 6755
0.414 0.464 6980 0.656 6040 −0.121 3020	0.434 0.443 1780 0.679 6440 −0.122 8220	0.454 0.422 0580 0.701 8840 −0.123 9420	0.474 0.401 3380 0.723 3240 −0.124 6620	0.494 0.381 0180 0.743 9640 −0.124 9820	0.514 0.361 0980 0.763 8040 −0.124 9020	0.534 0.341 5780 0.782 8440 −0.124 4220	0.554 0.322 4580 0.801 0840 −0.123 5420	0.574 0.303 7380 0.818 5240 −0.122 2620	0.594 0.285 4180 0.835 1640 −0.120 5820
0.415 0.463 6125 0.657 7750 −0.121 3875	0.435 0.442 1125 0.680 7750 −0.122 8875	0.455 0.421 0125 0.702 9750 −0.123 9875	0.475 0.400 3125 0.724 3750 −0.124 6875	0.495 0.380 0125 0.744 9750 −0.124 9875	0.515 0.360 1125 0.764 7750 −0.124 8875	0.535 0.340 6125 0.783 7750 −0.124 3875	0.555 0.321 5125 0.801 9750 −0.123 4875	0.575 0.302 8125 0.819 3750 −0.122 1875	0.595 0.284 5125 0.835 9750 −0.120 4875
0.416 0.462 5280 0.658 9440 −0.121 4720	0.436 0.441 0480 0.681 9040 −0.122 9520	0.456 0.419 9680 0.704 0640 −0.124 0320	0.476 0.399 2880 0.725 4240 −0.124 7120	0.496 0.379 0080 0.745 9840 −0.124 9920	0.516 0.359 1280 0.765 7440 −0.124 8720	0.536 0.339 6480 0.784 7040 −0.124 3520	0.556 0.320 5680 0.802 8640 −0.123 4320	0.576 0.301 8880 0.820 2240 −0.122 1120	0.596 0.283 6080 0.836 7840 −0.120 3920
0.417 0.461 4445 0.660 1110 −0.121 5555	0.437 0.439 9845 0.683 0310 −0.123 0155	0.457 0.418 9245 0.705 1510 −0.124 0755	0.477 0.398 2645 0.726 4710 −0.124 7355	0.497 0.378 0045 0.746 9910 −0.124 9955	0.517 0.358 1445 0.766 7110 −0.124 8555	0.537 0.338 6845 0.785 6310 −0.124 3155	0.557 0.319 6245 0.803 7510 −0.123 3755	0.577 0.300 9645 0.821 0710 −0.122 0355	0.597 0.282 7045 0.837 5910 −0.120 2955
0.418 0.460 3620 0.661 2760 −0.121 6380	0.438 0.438 9220 0.684 1560 −0.123 0780	0.458 0.417 8820 0.706 2360 −0.124 1180	0.478 0.397 2420 0.727 5160 −0.124 7580	0.498 0.377 0020 0.747 9960 −0.124 9980	0.518 0.357 1620 0.767 6760 0.124 8380	0.538 0.337 7220 0.786 5560 −0.124 2780	0.558 0.318 6820 0.804 6360 −0.123 3180	0.578 0.300 0420 0.821 9160 −0.121 9580	0.598 0.281 8020 0.838 3960 −0.120 1980
0.419 0.459 2805 0.662 4390 −0.121 7195	0.439 0.437 8605 0.685 2790 −0.123 1395	0.459 0.416 8405 0.707 3190 −0.124 1595	0.479 0.396 2205 0.728 5590 −0.124 7795	0.499 0.376 0005 0.748 9990 −0.124 9995	0.519 0.356 1805 0.768 6390 −0.124 8195	0.539 0.336 7605 0.787 4790 −0.124 2395	0.559 0.317 7405 0.805 5190 −0.123 2595	0.579 0.299 1205 0.822 7590 −0.121 8795	0.599 0.280 9005 0.839 1990 −0.120 0995

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.600	0.620	0.640	0.660	0.680	0.700	0.720	0.740	0.760	0.780
0.280 0000	0.262 2000	0.244 8000	0.227 8000	0.211 2000	0.195 0000	0.179 2000	0.163 8000	0.148 8000	0.134 2000
0.840 0000	0.855 6000	0.870 4000	0.884 4000	0.897 6000	0.910 0000	0.921 6000	0.932 4000	0.942 4000	0.951 6000
-0.120 0000	-0.117 8000	-0.115 2000	-0.112 2000	-0.108 8000	-0.105 0000	-0.100 8000	-0.096 2000	-0.091 2000	-0.085 8000
0.601	0.621	0.641	0.661	0.681	0.701	0.721	0.741	0.761	0.781
0.279 1005	0.261 3205	0.243 9405	0.226 9605	0.210 3805	0.194 2005	0.178 4205	0.163 0405	0.148 0605	0.133 4805
0.840 7990	0.856 3590	0.871 1190	0.885 0790	0.898 2390	0.910 5990	0.922 1590	0.932 9190	0.942 8790	0.952 0390
-0.119 8995	-0.117 6795	-0.115 0595	-0.112 0395	-0.108 6195	-0.104 7995	-0.100 5795	-0.095 9595	-0.090 9395	-0.085 5195
0.602	0.622	0.642	0.662	0.682	0.702	0.722	0.742	0.762	0.782
0.278 2020	0.260 4420	0.243 0820	0.226 1220	0.209 5620	0.193 4020	0.177 6420	0.162 2820	0.147 3220	0.132 7620
0.841 5960	0.857 1160	0.871 8360	0.885 7560	0.898 8760	0.911 1960	0.922 7160	0.933 4360	0.943 3560	0.952 4760
-0.119 7980	-0.117 5580	-0.114 9180	-0.111 8780	-0.108 4380	-0.104 5980	-0.100 3580	-0.095 7180	-0.090 6780	-0.085 2380
0.603	0.623	0.643	0.663	0.683	0.703	0.723	0.743	0.763	0.783
0.277 3045	0.259 5645	0.242 2245	0.225 2845	0.208 7445	0.192 6045	0.176 8645	0.161 5245	0.146 5845	0.132 0445
0.842 3910	0.857 8710	0.872 5510	0.886 4310	0.899 5110	0.911 7910	0.923 2710	0.933 9510	0.943 8310	0.952 9110
-0.119 6955	-0.117 4355	-0.114 7755	-0.111 7155	-0.108 2555	-0.104 3955	-0.100 1355	-0.095 4755	-0.090 4155	-0.084 9555
0.604	0.624	0.644	0.664	0.684	0.704	0.724	0.744	0.764	0.784
0.276 4080	0.258 6880	0.241 3680	0.224 4480	0.207 9280	0.191 8080	0.176 0880	0.160 7680	0.145 8480	0.131 3280
0.843 1840	0.858 6240	0.873 2640	0.887 1040	0.900 1440	0.912 3840	0.923 8240	0.934 4640	0.944 3040	0.953 3440
-0.119 5920	-0.117 3120	-0.114 6320	-0.111 5520	-0.108 0720	-0.104 1920	-0.099 9120	-0.095 2320	-0.090 1520	-0.084 6720
0.605	0.625	0.645	0.665	0.685	0.705	0.725	0.745	0.765	0.785
0.275 5125	0.257 8125	0.240 5125	0.223 6125	0.207 1125	0.191 0125	0.175 3125	0.160 0125	0.145 1125	0.130 6125
0.843 9750	0.859 3750	0.873 9750	0.887 7750	0.900 7750	0.912 9750	0.924 3750	0.934 9750	0.944 7750	0.953 7750
-0.119 4875	-0.117 1875	-0.114 4875	-0.111 3875	-0.107 8875	-0.103 9875	-0.099 6875	-0.094 9875	-0.089 8875	-0.084 3875
0.606	0.626	0.646	0.666	0.686	0.706	0.726	0.746	0.766	0.786
0.274 6180	0.256 9380	0.239 6580	0.222 7780	0.206 2980	0.190 2180	0.174 5380	0.159 2580	0.144 3780	0.129 8980
0.844 7640	0.860 1240	0.874 6840	0.888 4440	0.901 4040	0.913 5640	0.924 9240	0.935 4840	0.945 2440	0.954 2040
-0.119 3820	-0.117 0620	-0.114 3420	-0.111 2220	-0.107 7020	-0.103 7820	-0.099 4620	-0.094 7420	-0.089 6220	-0.084 1020
0.607	0.627	0.647	0.667	0.687	0.707	0.727	0.747	0.767	0.787
0.273 7245	0.256 0645	0.238 8045	0.221 9445	0.205 4845	0.189 4245	0.173 7645	0.158 5045	0.143 6445	0.129 1845
0.845 5510	0.860 8710	0.875 3910	0.889 1110	0.902 0310	0.914 1510	0.925 4710	0.935 9910	0.945 7110	0.954 6310
-0.119 2755	-0.116 9355	-0.114 1955	-0.111 0555	-0.107 5155	-0.103 5755	-0.099 2355	-0.094 4955	-0.089 3555	-0.083 8155
0.608	0.628	0.648	0.668	0.688	0.708	0.728	0.748	0.768	0.788
0.272 8320	0.255 1920	0.237 9520	0.221 1120	0.204 6720	0.188 6320	0.172 9920	0.157 7520	0.142 9120	0.128 4720
0.846 3360	0.861 6160	0.876 0960	0.889 7760	0.902 6560	0.914 7360	0.926 0160	0.936 4960	0.946 1760	0.955 0560
-0.119 1680	-0.116 8080	-0.114 0480	-0.110 8880	-0.107 3280	-0.103 3680	-0.099 0080	-0.094 2480	-0.089 0880	-0.083 5280
0.609	0.629	0.649	0.669	0.689	0.709	0.729	0.749	0.769	0.789
0.271 9405	0.254 3205	0.237 1005	0.220 2805	0.203 8605	0.187 8405	0.172 2205	0.157 0005	0.142 1805	0.127 7605
0.847 1190	0.862 3590	0.876 7990	0.890 4390	0.903 2790	0.915 3190	0.926 5590	0.936 9990	0.946 6390	0.955 4790
-0.119 0595	-0.116 6795	-0.113 8995	-0.110 7195	-0.107 1395	-0.103 1595	-0.098 7795	-0.093 9995	-0.088 8195	-0.083 2395
0.610	0.630	0.650	0.670	0.690	0.710	0.730	0.750	0.770	0.790
0.271 0500	0.253 4500	0.236 2500	0.219 4500	0.203 0500	0.187 0500	0.171 4500	0.156 2500	0.141 4500	0.127 0500
0.847 9000	0.863 1000	0.877 5000	0.891 1000	0.903 9000	0.915 9000	0.927 1000	0.937 5000	0.947 1000	0.955 9000
-0.118 9500	-0.116 5500	-0.113 7500	-0.110 5500	-0.106 9500	-0.102 9500	-0.098 5500	-0.093 7500	-0.088 5500	-0.082 9500
0.611	0.631	0.651	0.671	0.691	0.711	0.731	0.751	0.771	0.791
0.270 1605	0.252 5805	0.235 4005	0.218 6205	0.202 2405	0.186 2605	0.170 6805	0.155 5005	0.140 7205	0.126 3405
0.848 6790	0.863 8390	0.878 1990	0.891 7590	0.904 5190	0.916 4790	0.927 6390	0.937 9990	0.947 5590	0.956 3190
-0.118 8395	-0.116 4195	-0.113 5995	-0.110 3795	-0.106 7595	-0.102 7395	-0.098 3195	-0.093 4995	-0.088 2795	-0.082 6595
0.612	0.632	0.652	0.672	0.692	0.712	0.732	0.752	0.772	0.792
0.269 2720	0.251 7120	0.234 5520	0.217 7920	0.201 4320	0.185 4720	0.169 9120	0.154 7520	0.139 9920	0.125 6320
0.849 4560	0.864 5760	0.878 8960	0.892 4160	0.905 1360	0.917 0560	0.928 1760	0.938 4960	0.948 0160	0.956 7360
-0.118 7280	-0.116 2880	-0.113 4480	-0.110 2080	-0.106 5680	-0.102 5280	-0.098 0880	-0.093 2480	-0.088 0080	-0.082 3680
0.613	0.633	0.653	0.673	0.693	0.713	0.733	0.753	0.773	0.793
0.268 3845	0.250 8445	0.233 7045	0.216 9645	0.200 6245	0.184 6845	0.169 1445	0.154 0045	0.139 2645	0.124 9245
0.850 2310	0.865 3110	0.879 5910	0.893 0710	0.905 7510	0.917 6310	0.928 7110	0.938 9910	0.948 4710	0.957 1510
-0.118 6155	-0.116 1555	-0.113 2955	-0.110 0355	-0.106 3755	-0.102 3155	-0.097 8555	-0.092 9955	-0.087 7355	-0.082 0755
0.614	0.634	0.654	0.674	0.694	0.714	0.734	0.754	0.774	0.794
0.267 4980	0.249 9780	0.232 8580	0.216 1380	0.199 8180	0.183 8980	0.168 3780	0.153 2580	0.138 5380	0.124 2180
0.851 0040	0.866 0440	0.880 2840	0.893 7240	0.906 3640	0.918 2040	0.929 2440	0.939 4840	0.948 9240	0.957 5640
-0.118 5020	-0.116 0220	-0.113 1420	-0.109 8620	-0.106 1820	-0.102 1020	-0.097 6220	-0.092 7420	-0.087 4620	-0.081 7820
0.615	0.635	0.655	0.675	0.695	0.715	0.735	0.755	0.775	0.795
0.266 6125	0.249 1125	0.232 0125	0.215 3125	0.199 0125	0.183 1125	0.167 6125	0.152 5125	0.137 8125	0.123 5125
0.851 7750	0.866 7750	0.880 9750	0.894 3750	0.906 9750	0.918 7750	0.929 7750	0.939 9750	0.949 3750	0.957 9750
-0.118 3875	-0.115 8875	-0.112 9875	-0.109 6875	-0.105 9875	-0.101 8875	-0.097 3875	-0.092 4875	-0.087 1875	-0.081 4875
0.616	0.636	0.656	0.676	0.696	0.716	0.736	0.756	0.776	0.796
0.265 7280	0.248 2480	0.231 1680	0.214 4880	0.198 2080	0.182 3280	0.166 8480	0.151 7680	0.137 0880	0.122 8080
0.852 5440	0.867 5040	0.881 6640	0.895 0240	0.907 5840	0.919 3440	0.930 3040	0.940 4640	0.949 8240	0.958 3840
-0.118 2720	-0.115 7520	-0.112 8320	-0.109 5120	-0.105 7920	-0.101 6720	-0.097 1520	-0.092 2320	-0.086 9120	-0.081 1920
0.617	0.637	0.657	0.677	0.697	0.717	0.737	0.757	0.777	0.797
0.264 8445	0.247 3845	0.230 3245	0.213 6645	0.197 4045	0.181 5445	0.166 0845	0.151 0245	0.136 3645	0.122 1045
0.853 3110	0.868 2310	0.882 3510	0.895 6710	0.908 1910	0.919 9110	0.930 8310	0.940 9510	0.950 2710	0.958 7910
-0.118 1555	-0.115 6155	-0.112 6755	-0.109 3355	-0.105 5955	-0.101 4555	-0.096 9155	-0.091 9755	-0.086 6355	-0.080 8955
0.618	0.638	0.658	0.678	0.698	0.718	0.738	0.758	0.778	0.798
0.263 9620	0.246 5220	0.229 4820	0.212 8420	0.196 6020	0.180 7620	0.165 3220	0.150 2820	0.135 6420	0.121 4020
0.854 0760	0.868 9560	0.883 0360	0.896 3160	0.908 7960	0.920 4760	0.931 3560	0.941 4360	0.950 7160	0.959 1960
-0.118 0380	-0.115 4780	-0.112 5180	-0.109 1580	-0.105 3980	-0.101 2380	-0.096 6780	-0.091 7180	-0.086 3580	-0.080 5980
0.619	0.639	0.659	0.679	0.699	0.719	0.739	0.759	0.779	0.799
0.263 0805	0.245 6605	0.228 6405	0.212 0205	0.195 8005	0.179 9805	0.164 5605	0.149 5405	0.134 9205	0.120 7005
0.854 8390	0.869 6790	0.883 7190	0.896 9590	0.909 3990	0.921 0390	0.931 8790	0.941 9190	0.951 1590	0.959 5990
-0.117 9195	-0.115 3395	-0.112 3595	-0.108 9795	-0.105 1995	-0.101 0195	-0.096 4395	-0.091 4595	-0.086 0795	-0.080 2995

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.800 0.120 0000 0.960 0000 −0.080 0000	0.820 0.106 2000 0.967 6000 −0.073 8000	0.840 0.092 8000 0.974 4000 −0.067 2000	0.860 0.079 8000 0.980 4000 −0.060 2000	0.880 0.067 2000 0.985 6000 −0.052 8000	0.900 0.055 0000 0.990 0000 −0.045 0000	0.920 0.043 2000 0.993 6000 −0.036 8000	0.940 0.031 8000 0.996 4000 −0.028 2000	0.960 0.020 8000 0.998 4000 −0.019 2000	0.980 0.010 2000 0.999 6000 −0.009 8000
0.801 0.119 3005 0.960 3990 −0.079 6995	0.821 0.105 5205 0.967 9590 −0.073 4795	0.841 0.092 1405 0.974 7190 −0.066 8595	0.861 0.079 1605 0.980 6790 −0.059 8395	0.881 0.066 5805 0.985 8390 −0.052 4195	0.901 0.054 4005 0.990 1990 −0.044 5995	0.921 0.042 6205 0.993 7590 −0.036 3795	0.941 0.031 2405 0.996 5190 −0.027 7595	0.961 0.020 2605 0.998 4790 −0.018 7395	0.981 0.009 6805 0.999 6390 −0.009 3195
0.802 0.118 6020 0.960 7960 −0.079 3980	0.822 0.104 8420 0.968 3160 −0.073 1580	0.842 0.091 4820 0.975 0360 −0.066 5180	0.862 0.078 5220 0.980 9560 −0.059 4780	0.882 0.065 9620 0.986 0760 −0.052 0380	0.902 0.053 8020 0.990 3960 −0.044 1980	0.922 0.042 0420 0.993 9160 −0.035 9580	0.942 0.030 6820 0.996 6360 −0.027 3180	0.962 0.019 7220 0.998 5560 −0.018 2780	0.982 0.009 1620 0.999 6760 −0.008 8380
0.803 0.117 9045 0.961 1910 −0.079 0955	0.823 0.104 1645 0.968 6710 −0.072 8355	0.843 0.090 8245 0.975 3510 −0.066 1755	0.863 0.077 8845 0.981 2310 −0.059 1155	0.883 0.065 3445 0.986 3110 −0.051 6555	0.903 0.053 2045 0.990 5910 −0.043 7955	0.923 0.041 4645 0.994 0710 −0.035 5355	0.943 0.030 1245 0.996 7510 −0.026 8755	0.963 0.019 1845 0.998 6310 −0.017 8155	0.983 0.008 6445 0.999 7110 −0.008 3555
0.804 0.117 2080 0.961 5840 −0.078 7920	0.824 0.103 4880 0.969 0240 −0.072 5120	0.844 0.090 1680 0.975 6640 −0.065 8320	0.864 0.077 2480 0.981 5040 −0.058 7520	0.884 0.064 7280 0.986 5440 −0.051 2720	0.904 0.052 6080 0.990 7840 −0.043 3920	0.924 0.040 8880 0.994 2240 −0.035 1120	0.944 0.029 5680 0.996 8640 −0.026 4320	0.964 0.018 6480 0.998 7040 −0.017 3520	0.984 0.008 1280 0.999 7440 −0.007 8720
0.805 0.116 5125 0.961 9750 −0.078 4875	0.825 0.102 8125 0.969 3750 −0.072 1875	0.845 0.089 5125 0.975 9750 −0.065 4875	0.865 0.076 6125 0.981 7750 −0.058 3875	0.885 0.064 1125 0.986 7750 −0.050 8875	0.905 0.052 0125 0.990 9750 −0.042 9875	0.925 0.040 3125 0.994 3750 −0.034 6875	0.945 0.029 0125 0.996 9750 −0.025 9875	0.965 0.018 1125 0.998 7750 −0.016 8875	0.985 0.007 6125 0.999 7750 −0.007 3875
0.806 0.115 8180 0.962 3640 −0.078 1820	0.826 0.102 1380 0.969 7240 −0.071 8620	0.846 0.088 8580 0.976 2840 −0.065 1420	0.866 0.075 9780 0.982 0440 −0.058 0220	0.886 0.063 4980 0.987 0040 −0.050 5020	0.906 0.051 4180 0.991 1640 −0.042 5820	0.926 0.039 7380 0.994 5240 −0.034 2620	0.946 0.028 4580 0.997 0840 −0.025 5420	0.966 0.017 5780 0.998 8440 −0.016 4220	0.986 0.007 0980 0.999 8040 −0.006 9020
0.807 0.115 1245 0.962 7510 −0.077 8755	0.827 0.101 4645 0.970 0710 −0.071 5355	0.847 0.088 2045 0.976 5910 −0.064 7955	0.867 0.075 3445 0.982 3110 −0.057 6555	0.887 0.062 8845 0.987 2310 −0.050 1155	0.907 0.050 8245 0.991 3510 −0.042 1755	0.927 0.039 1645 0.994 6710 −0.033 8355	0.947 0.027 9045 0.997 1910 −0.025 0955	0.967 0.017 0445 0.998 9110 −0.015 9555	0.987 0.006 5845 0.999 8310 −0.006 4155
0.808 0.114 4320 0.963 1360 −0.077 5680	0.828 0.100 7920 0.970 4160 −0.071 2080	0.848 0.087 5520 0.976 8960 −0.064 4480	0.868 0.074 7120 0.982 5760 −0.057 2880	0.888 0.062 2720 0.987 4560 −0.049 7280	0.908 0.050 2320 0.991 5360 −0.041 7680	0.928 0.038 5920 0.994 8160 −0.033 4080	0.948 0.027 3520 0.997 2960 −0.024 6480	0.968 0.016 5120 0.998 9760 −0.015 4880	0.988 0.006 0720 0.999 8560 −0.005 9280
0.809 0.113 7405 0.963 5190 −0.077 2595	0.829 0.100 1205 0.970 7590 −0.070 8795	0.849 0.086 9005 0.977 1990 −0.064 0995	0.869 0.074 0805 0.982 8390 −0.056 9195	0.889 0.061 6605 0.987 6790 −0.049 3395	0.909 0.049 6405 0.991 7190 −0.041 3595	0.929 0.038 0205 0.994 9590 −0.032 9795	0.949 0.026 8005 0.997 3990 −0.024 1995	0.969 0.015 9805 0.999 0390 −0.015 0195	0.989 0.005 5605 0.999 8790 −0.005 4395
0.810 0.113 0500 0.963 9000 −0.076 9500	0.830 0.099 4500 0.971 1000 −0.070 5500	0.850 0.086 2500 0.977 5000 −0.063 7500	0.870 0.073 4500 0.983 1000 −0.056 5500	0.890 0.061 0500 0.987 9000 −0.048 9500	0.910 0.049 0500 0.991 9000 −0.040 9500	0.930 0.037 4500 0.995 1000 −0.032 5500	0.950 0.026 2500 0.997 5000 −0.023 7500	0.970 0.015 4500 0.999 1000 −0.014 5500	0.990 0.005 0500 0.999 9000 −0.004 9500
0.811 0.112 3605 0.964 2790 −0.076 6395	0.831 0.098 7805 0.971 4390 −0.070 2195	0.851 0.085 6005 0.977 7990 −0.063 3995	0.871 0.072 8205 0.983 3590 −0.056 1795	0.891 0.060 4405 0.988 1190 −0.048 5595	0.911 0.048 4605 0.992 0790 −0.040 5395	0.931 0.036 8805 0.995 2390 −0.032 1195	0.951 0.025 7005 0.997 5990 −0.023 2995	0.971 0.014 9205 0.999 1590 −0.014 0795	0.991 0.004 5405 0.999 9190 −0.004 4595
0.812 0.111 6720 0.964 6560 −0.076 3280	0.832 0.098 1120 0.971 7760 −0.069 8880	0.852 0.084 9520 0.978 0960 −0.063 0480	0.872 0.072 1920 0.983 6160 −0.055 8080	0.892 0.059 8320 0.988 3360 −0.048 1680	0.912 0.047 8720 0.992 2560 −0.040 1280	0.932 0.036 3120 0.995 3760 −0.031 6880	0.952 0.025 1520 0.997 6960 −0.022 8480	0.972 0.014 3920 0.999 2160 −0.013 6080	0.992 0.004 0320 0.999 9360 −0.003 9680
0.813 0.110 9845 0.965 0310 −0.076 0155	0.833 0.097 4445 0.972 1110 −0.069 5555	0.853 0.084 3045 0.978 3910 −0.062 6955	0.873 0.071 5645 0.983 8710 −0.055 4355	0.893 0.059 2245 0.988 5510 −0.047 7755	0.913 0.047 2845 0.992 4310 −0.039 7155	0.933 0.035 7445 0.995 5110 −0.031 2555	0.953 0.024 6045 0.997 7910 −0.022 3955	0.973 0.013 8645 0.999 2710 −0.013 1355	0.993 0.003 5245 0.999 9510 −0.003 4755
0.814 0.110 2980 0.965 4040 −0.075 7020	0.834 0.096 7780 0.972 4440 −0.069 2220	0.854 0.083 6580 0.978 6840 −0.062 3420	0.874 0.070 9380 0.984 1240 −0.055 0620	0.894 0.058 6180 0.988 7640 −0.047 3820	0.914 0.046 6980 0.992 6040 −0.039 3020	0.934 0.035 1780 0.995 6440 −0.030 8220	0.954 0.024 0580 0.997 8840 −0.021 9420	0.974 0.013 3380 0.999 3240 −0.012 6620	0.994 0.003 0180 0.999 9640 −0.002 9820
0.815 0.109 6125 0.965 7750 −0.075 3875	0.835 0.096 1125 0.972 7750 −0.068 8875	0.855 0.083 0125 0.978 9750 −0.061 9875	0.875 0.070 3125 0.984 3750 −0.054 6875	0.895 0.058 0125 0.988 9750 −0.046 9875	0.915 0.046 1125 0.992 7750 −0.038 8875	0.935 0.034 6125 0.995 7750 −0.030 3875	0.955 0.023 5125 0.997 9750 −0.021 4875	0.975 0.012 8125 0.999 3750 −0.012 1875	0.995 0.002 5125 0.999 9750 −0.002 4875
0.816 0.108 9280 0.966 1440 −0.075 0720	0.836 0.095 4480 0.973 1040 −0.068 5520	0.856 0.082 3680 0.979 2640 −0.061 6320	0.876 0.069 6880 0.984 6240 −0.054 3120	0.896 0.057 4080 0.989 1840 −0.046 5920	0.916 0.045 5280 0.992 9440 −0.038 4720	0.936 0.034 0480 0.995 9040 −0.029 9520	0.956 0.022 9680 0.998 0640 −0.021 0320	0.976 0.012 2880 0.999 4240 −0.011 7120	0.996 0.002 0080 0.999 9840 −0.001 9920
0.817 0.108 2445 0.966 5110 −0.074 7555	0.837 0.094 7845 0.973 4310 −0.068 2155	0.857 0.081 7245 0.979 5510 −0.061 2755	0.877 0.069 0645 0.984 8710 −0.053 9355	0.897 0.056 8045 0.989 3910 −0.046 1955	0.917 0.044 9445 0.993 1110 −0.038 0555	0.937 0.033 4845 0.996 0310 −0.029 5155	0.957 0.022 4245 0.998 1510 −0.020 5755	0.977 0.011 7645 0.999 4710 −0.011 2355	0.997 0.001 5045 0.999 9910 −0.001 4955
0.818 0.107 5620 0.966 8760 −0.074 4380	0.838 0.094 1220 0.973 7560 −0.067 8780	0.858 0.081 0820 0.979 8360 −0.060 9180	0.878 0.068 4420 0.985 1160 −0.053 5580	0.898 0.056 2020 0.989 5960 −0.045 7980	0.918 0.044 3620 0.993 2760 −0.037 6380	0.938 0.032 9220 0.996 1560 −0.029 0780	0.958 0.021 8820 0.998 2360 −0.020 1180	0.978 0.011 2420 0.999 5160 −0.010 7580	0.998 0.001 0020 0.999 9960 −0.000 9980
0.819 0.106 8805 0.967 2390 −0.074 1195	0.839 0.093 4605 0.974 0790 −0.067 5395	0.859 0.080 4405 0.980 1190 −0.060 5595	0.879 0.067 8205 0.985 3590 −0.053 1795	0.899 0.055 6005 0.989 7990 −0.045 3995	0.919 0.043 7805 0.993 4390 −0.037 2195	0.939 0.032 3605 0.996 2790 −0.028 6395	0.959 0.021 3405 0.998 3190 −0.019 6595	0.979 0.010 7205 0.999 5590 −0.010 2795	0.999 0.000 5005 0.999 9990 −0.000 4995

KRAKOWIANY INTERPOLACJI CZTEROWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
1.0000 0000	0.826 5000	0.672 0000	0.535 5000	0.416 0000	0.312 5000	0.224 0000	0.149 5000	0.088 0000	0.038 5000
0	0.275 5000	0.504 0000	0.688 5000	0.832 0000	0.937 5000	1.008 0000	1.046 5000	1.056 0000	1.039 5000
0	−0.130 5000	−0.224 0000	−0.283 5000	−0.312 0000	−0.312 5000	−0.288 0000	−0.241 5000	−0.176 0000	−0.094 5000
0	0.028 5000	0.048 0000	0.059 5000	0.064 0000	0.062 5000	0.056 0000	0.045 5000	0.032 0000	0.016 5000
0.01	0.11	0.21	0.31	0.41	0.51	0.61	0.71	0.81	0.91
0.981 7665	0.810 2115	0.657 5565	0.522 8015	0.404 9465	0.302 9915	0.215 9365	0.142 7815	0.082 5265	0.034 1715
0.029 7505	0.300 4155	0.524 3805	0.704 6455	0.844 2105	0.946 0755	1.013 2405	1.048 7055	1.055 4705	1.036 5355
−0.014 8005	−0.141 4655	−0.231 4305	−0.287 6955	−0.313 2605	−0.311 1255	−0.284 2905	−0.235 7555	−0.168 5205	−0.085 5855
0.003 2835	0.030 8385	0.049 4935	0.060 2485	0.064 1035	0.062 0585	0.055 1135	0.044 2685	0.030 5235	0.014 8785
0.02	0.12	0.22	0.32	0.42	0.52	0.62	0.72	0.82	0.92
0.963 7320	0.794 1120	0.643 2920	0.510 2720	0.394 0520	0.293 6320	0.208 0120	0.136 1920	0.077 1720	0.029 9520
0.059 0040	0.324 8640	0.544 3240	0.720 3840	0.856 0440	0.954 3040	1.018 1640	1.050 6240	1.054 6840	1.033 3440
−0.029 2040	−0.152 0640	−0.238 5240	−0.291 5840	−0.314 2440	−0.309 5040	−0.280 3640	−0.229 8240	−0.160 8840	−0.076 5440
0.006 4680	0.033 0880	0.050 9080	0.060 9280	0.064 1480	0.061 5680	0.054 1880	0.043 0080	0.029 0280	0.013 2480
0.03	0.13	0.23	0.33	0.43	0.53	0.63	0.73	0.83	0.93
0.945 8955	0.778 2005	0.629 2055	0.497 9105	0.383 3155	0.284 4205	0.200 2255	0.129 7305	0.071 9355	0.025 8405
0.087 7635	0.348 8485	0.563 8335	0.735 7185	0.867 5035	0.962 1885	1.022 7735	1.052 2585	1.053 6435	1.029 9285
−0.043 2135	−0.162 2985	−0.245 2835	−0.295 1685	−0.314 9535	−0.307 6385	−0.276 2235	−0.223 7085	−0.153 0935	−0.067 3785
0.009 5545	0.035 2495	0.052 2445	0.061 5395	0.064 1345	0.061 0295	0.053 2245	0.041 7195	0.027 5145	0.011 6095
0.04	0.14	0.24	0.34	0.44	0.54	0.64	0.74	0.84	0.94
0.928 2560	0.762 4760	0.615 2960	0.485 7160	0.372 7360	0.275 3560	0.192 5760	0.123 3960	0.066 8160	0.021 8360
0.116 0320	0.372 3720	0.582 9120	0.750 6520	0.878 5920	0.969 7320	1.027 0720	1.053 6120	1.052 3520	1.026 2920
−0.056 8320	−0.172 1720	−0.251 7120	−0.298 4520	−0.315 3920	−0.305 5320	−0.271 8720	−0.217 4120	−0.145 1520	−0.058 0920
0.012 5440	0.037 3240	0.053 5040	0.062 0840	0.064 0640	0.060 4440	0.052 2240	0.040 4040	0.025 9840	0.009 9640
0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
0.910 8125	0.746 9375	0.601 5625	0.473 6875	0.362 3125	0.266 4375	0.185 0625	0.117 1875	0.061 8125	0.017 9375
0.143 8125	0.395 4375	0.601 5625	0.765 1875	0.889 3125	0.976 9375	1.031 0625	1.054 6875	1.050 8125	1.022 4375
−0.070 0625	−0.181 6875	−0.257 8125	−0.301 4375	−0.315 5625	−0.303 1875	−0.267 3125	−0.210 9375	−0.137 0625	−0.048 6875
0.015 4375	0.039 3125	0.054 6875	0.062 5625	0.063 9375	0.059 8125	0.051 1875	0.039 0625	0.024 4375	0.008 3125
0.06	0.16	0.26	0.36	0.46	0.56	0.66	0.76	0.86	0.96
0.893 5640	0.731 5840	0.588 0040	0.461 8240	0.352 0440	0.257 6640	0.177 6840	0.111 1040	0.056 9240	0.014 1440
0.171 1080	0.418 0480	0.619 7880	0.779 3280	0.899 6680	0.983 8080	1.034 7480	1.055 4880	1.049 0280	1.018 3680
−0.082 9080	−0.190 8480	−0.263 5880	−0.304 1280	−0.315 4680	−0.300 6080	−0.262 5480	−0.204 2880	−0.128 8280	−0.039 1680
0.018 2360	0.041 2160	0.055 7960	0.062 9760	0.063 7560	0.059 1360	0.050 1160	0.037 6960	0.022 8760	0.006 6560
0.07	0.17	0.27	0.37	0.47	0.57	0.67	0.77	0.87	0.97
0.876 5095	0.716 4145	0.574 6195	0.450 1245	0.341 9295	0.249 0345	0.170 4395	0.105 1445	0.052 1495	0.010 4545
0.197 9215	0.440 2065	0.637 5915	0.793 0765	0.909 6615	0.990 3465	1.038 1315	1.056 0165	1.047 0015	1.014 0865
−0.095 3715	−0.199 6565	−0.269 0415	−0.306 5265	−0.315 1115	−0.297 7965	−0.257 5815	−0.197 4665	−0.120 4515	−0.029 5365
0.020 9405	0.043 0355	0.056 8305	0.063 3255	0.063 5205	0.058 4155	0.049 0105	0.036 3055	0.021 3005	0.004 9955
0.08	0.18	0.28	0.38	0.48	0.58	0.68	0.78	0.88	0.98
0.859 6480	0.701 4280	0.561 4080	0.438 5880	0.331 9680	0.240 5480	0.163 3280	0.099 3080	0.047 4880	0.006 8680
0.224 2560	0.461 9160	0.654 9760	0.806 4360	0.919 2960	0.996 5560	1.041 2160	1.056 2760	1.044 7360	1.009 5960
−0.107 4560	−0.208 1160	−0.274 1760	−0.308 6360	−0.314 4960	−0.294 7560	−0.252 4160	−0.190 4760	−0.111 9360	−0.019 7960
0.023 5520	0.044 7720	0.057 7920	0.063 6120	0.063 2320	0.057 6520	0.047 8720	0.034 8920	0.019 7120	0.003 3320
0.09	0.19	0.29	0.39	0.49	0.59	0.69	0.79	0.89	0.99
0.842 9785	0.686 6235	0.548 3685	0.427 2135	0.322 1585	0.232 2035	0.156 3485	0.093 5935	0.042 9385	0.003 3835
0.250 1145	0.483 1795	0.671 9445	0.819 4095	0.928 5745	1.002 4395	1.044 0045	1.056 2695	1.042 2345	1.004 8995
−0.119 1645	−0.216 2295	−0.278 9945	−0310 4595	−0.313 6245	−0.291 4895	−0.247 0545	−0.183 3195	−0.103 2845	−0.009 9495
0.026 0715	0.046 4265	0.058 6815	0.063 8365	0.062 8915	0.056 8465	0.046 7015	0.033 4565	0.018 1115	0.001 6665

TABLICA

wartości

CZYNNIKÓW CHARAKTERYSTYCZNYCH

$$c = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

do rozwiązywania układów równań normalnych Gaussa
przy pomocy metody pierwiastka krakowianowego
(„algorytmu Banachiewicza")

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	∞	1.0000	0.7071	0.5774	0.5000	0.4472	0.4082	0.3780	0.3536	0.3333
.01	10.00	0.9950	0.7053	0.5764	0.4994	0.4468	0.4079	0.3777	0.3533	0.3331
.02	7.07	0.9901	0.7036	0.5754	0.4988	0.4463	0.4076	0.3774	0.3531	0.3330
.03	5.77	0.9853	0.7019	0.5745	0.4981	0.4459	0.4072	0.3772	0.3529	0.3328
.04	5.00	0.9806	0.7001	0.5735	0.4975	0.4454	0.4069	0.3769	0.3527	0.3326
.05	4.47	0.9759	0.6984	0.5726	0.4969	0.4450	0.4066	0.3766	0.3525	0.3324
.06	4.08	0.9713	0.6967	0.5717	0.4963	0.4446	0.4062	0.3764	0.3522	0.3322
.07	3.78	0.9667	0.6950	0.5707	0.4957	0.4441	0.4059	0.3761	0.3520	0.3320
.08	3.54	0.9623	0.6934	0.5698	0.4951	0.4437	0.4056	0.3758	0.3518	0.3319
.09	3.33	0.9578	0.6917	0.5689	0.4945	0.4432	0.4052	0.3756	0.3516	0.3317
.10	3.162	0.9535	0.6901	0.5680	0.4939	0.4428	0.4049	0.3753	0.3514	0.3315
.11	3.015	0.9492	0.6884	0.5670	0.4933	0.4424	0.4046	0.3750	0.3511	0.3313
.12	2.887	0.9449	0.6868	0.5661	0.4927	0.4419	0.4042	0.3748	0.3509	0.3311
.13	2.774	0.9407	0.6852	0.5652	0.4921	0.4415	0.4039	0.3745	0.3507	0.3310
.14	2.673	0.9366	0.6836	0.5643	0.4915	0.4411	0.4036	0.3742	0.3505	0.3308
.15	2.582	0.9325	0.6820	0.5634	0.4909	0.4407	0.4032	0.3740	0.3503	0.3306
.16	2.500	0.9285	0.6804	0.5625	0.4903	0.4402	0.4029	0.3737	0.3501	0.3304
.17	2.425	0.9245	0.6788	0.5617	0.4897	0.4398	0.4026	0.3735	0.3499	0.3302
.18	2.357	0.9206	0.6773	0.5608	0.4891	0.4394	0.4023	0.3732	0.3496	0.3300
.19	2.294	0.9167	0.6757	0.5599	0.4885	0.4390	0.4019	0.3729	0.3494	0.3299
.20	2.236	0.9129	0.6742	0.5590	0.4880	0.4385	0.4016	0.3727	0.3492	0.3297
.21	2.182	0.9091	0.6727	0.5581	0.4874	0.4381	0.4013	0.3724	0.3490	0.3295
.22	2.132	0.9054	0.6712	0.5573	0.4868	0.4377	0.4010	0.3722	0.3488	0.3293
.23	2.085	0.9017	0.6696	0.5564	0.4862	0.4373	0.4006	0.3719	0.3486	0.3292
.24	2.041	0.8980	0.6682	0.5556	0.4856	0.4369	0.4003	0.3716	0.3484	0.3290
.25	2.000	0.8944	0.6667	0.5547	0.4851	0.4364	0.4000	0.3714	0.3482	0.3288
.26	1.961	0.8909	0.6652	0.5538	0.4845	0.4360	0.3997	0.3711	0.3479	0.3286
.27	1.925	0.8874	0.6637	0.5530	0.4839	0.4356	0.3994	0.3709	0.3477	0.3284
.28	1.890	0.8839	0.6623	0.5522	0.4834	0.4352	0.3990	0.3706	0.3475	0.3283
.29	1.857	0.8805	0.6608	0.5513	0.4828	0.4348	0.3987	0.3704	0.3473	0.3281
.30	1.826	0.8771	0.6594	0.5505	0.4822	0.4344	0.3984	0.3701	0.3471	0.3279
.31	1.796	0.8737	0.6580	0.5496	0.4817	0.4340	0.3981	0.3699	0.3469	0.3277
.32	1.768	0.8704	0.6565	0.5488	0.4811	0.4336	0.3978	0.3696	0.3467	0.3276
.33	1.741	0.8671	0.6551	0.5480	0.4806	0.4331	0.3975	0.3694	0.3465	0.3274
.34	1.715	0.8639	0.6537	0.5472	0.4800	0.4327	0.3972	0.3691	0.3463	0.3272
.35	1.690	0.8607	0.6523	0.5464	0.4795	0.4323	0.3968	0.3689	0.3461	0.3270
.36	1.667	0.8575	0.6509	0.5455	0.4789	0.4319	0.3965	0.3686	0.3459	0.3269
.37	1.644	0.8544	0.6496	0.5447	0.4784	0.4315	0.3962	0.3684	0.3457	0.3267
.38	1.622	0.8513	0.6482	0.5439	0.4778	0.4311	0.3959	0.3681	0.3454	0.3265
.39	1.601	0.8482	0.6468	0.5431	0.4773	0.4307	0.3956	0.3679	0.3452	0.3263
.40	1.581	0.8452	0.6455	0.5423	0.4767	0.4303	0.3953	0.3676	0.3450	0.3262
.41	1.562	0.8422	0.6442	0.5415	0.4762	0.4299	0.3950	0.3674	0.3448	0.3260
.42	1.543	0.8392	0.6428	0.5407	0.4757	0.4295	0.3947	0.3671	0.3446	0.3258
.43	1.525	0.8362	0.6415	0.5399	0.4751	0.4291	0.3944	0.3669	0.3444	0.3256
.44	1.508	0.8333	0.6402	0.5392	0.4746	0.4287	0.3941	0.3666	0.3442	0.3255
.45	1.491	0.8305	0.6389	0.5384	0.4740	0.4284	0.3937	0.3664	0.3440	0.3253
.46	1.474	0.8276	0.6376	0.5376	0.4735	0.4280	0.3934	0.3661	0.3438	0.3251
.47	1.459	0.8248	0.6363	0.5368	0.4730	0.4276	0.3931	0.3659	0.3436	0.3250
.48	1.443	0.8220	0.6350	0.5361	0.4725	0.4272	0.3928	0.3656	0.3434	0.3248
.49	1.429	0.8192	0.6337	0.5353	0.4719	0.4268	0.3925	0.3654	0.3432	0.3246
.50	1.414	0.8165	0.6325	0.5345	0.4714	0.4264	0.3922	0.3651	0.3430	0.3244

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	1.414	0.8165	0.6325	0.5345	0.4714	0.4264	0.3922	0.3651	0.3430	0.3244
.51	1.400	0.8138	0.6312	0.5338	0.4709	0.4260	0.3919	0.3649	0.3428	0.3243
.52	1.387	0.8111	0.6299	0.5330	0:4704	0.4256	0.3916	0.3647	0.3426	0.3241
.53	1.374	0.8085	0.6287	0.5322	0.4698	0.4252	0.3913	0.3644	0.3424	0.3239
.54	1.361	0.8058	0.6275	0.5315	0.4693	0.4249	0.3910	0.3642	0.3422	0.3238
.55	1.348	0.8032	0.6262	0.5307	0.4688	0.4245	0.3907	0.3639	0.3420	0.3236
.56	1.336	0.8006	0.6250	0.5300	0.4683	0.4241	0.3904	0.3637	0.3418	0.3234
.57	1.325	0.7981	0.6238	0.5293	0.4678	0.4237	0.3901	0.3635	0.3416	0.3233
.58	1.313	0.7956	0.6226	0.5285	0.4673	0.4233	0.3898	0.3632	0.3414	0.3231
.59	1.302	0.7931	0.6214	0.5278	0.4668	0.4230	0.3895	0.3630	0.3412	0.3229
.60	1.291	0.7906	0.6202	0.5270	0.4663	0.4226	0.3892	0.3627	0.3410	0.3227
.61	1.280	0.7881	0.6190	0.5263	0.4657	0.4222	0.3890	0.3625	0.3408	0.3226
.62	1.270	0.7857	0.6178	0.5256	0.4652	0.4218	0.3887	0.3623	0.3406	0.3224
.63	1.260	0.7833	0.6166	0.5249	0.4647	0.4214	0.3884	0.3620	0.3404	0.3222
.64	1.250	0.7809	0.6155	0.5241	0.4642	0.4211	0.3881	0.3618	0.3402	0.3221
.65	1.240	0.7785	0.6143	0.5234	0.4637	0.4207	0.3878	0.3616	0.3400	0.3219
.66	1.231	0.7762	0.6131	0.5227	0.4632	0.4203	0.3875	0.3613	0.3398	0.3217
.67	1.222	0.7738	0.6120	0.5220	0.4627	0.4200	0.3872	0.3611	0.3396	0.3216
.68	1.213	0.7715	0.6108	0.5213	0.4623	0.4196	0.3869	0.3608	0.3394	0.3214
.69	1.204	0.7692	0.6097	0.5206	0.4618	0.4192	0.3866	0.3606	0.3392	0.3212
.70	1.195	0.7670	0.6086	0.5199	0.4613	0.4189	0.3863	0.3604	0.3390	0.3211
.71	1.187	0.7647	0.6075	0.5192	0.4608	0.4185	0.3860	0.3601	0.3388	0.3209
.72	1.179	0.7625	0.6063	0.5185	0.4603	0.4181	0.3858	0.3599	0.3386	0.3208
.73	1.170	0.7603	0.6052	0.5178	0.4598	0.4178	0.3855	0.3597	0.3384	0.3206
.74	1.162	0.7581	0.6041	0.5171	0.4593	0.4174	0.3852	0.3594	0.3383	0.3204
.75	1.155	0.7559	0.6030	0.5164	0.4588	0.4170	0.3849	0.3592	0.3381	0.3203
.76	1.147	0.7538	0.6019	0.5157	0.4583	0.4167	0.3846	0.3590	0.3379	0.3201
.77	1.140	0.7516	0.6008	0.5150	0.4579	0.4163	0.3843	0.3587	0.3377	0.3199
.78	1.132	0.7495	0.5998	0.5143	0.4574	0.4159	0.3840	0.3585	0.3375	0.3198
.79	1.125	0.7474	0.5987	0.5137	0.4569	0.4156	0.3838	0.3583	0.3373	0.3196
.80	1.118	0.7454	0.5976	0.5130	0.4564	0.4152	0.3835	0.3581	0.3371	0.3194
.81	1.111	0.7433	0.5965	0.5123	0.4560	0.4149	0.3832	0.3578	0.3369	0.3193
.82	1.104	0.7412	0.5955	0.5116	0.4555	0.4145	0.3829	0.3576	0.3367	0.3191
.83	1.098	0.7392	0.5944	0.5110	0.4550	0.4142	0.3826	0.3574	0.3365	0.3190
.84	1.091	0.7372	0.5934	0.5103	0.4545	0.4138	0.3824	0.3571	0.3363	0.3188
.85	1.085	0.7352	0.5923	0.5096	0.4541	0.4134	0.3821	0.3569	0.3361	0.3186
.86	1.078	0.7332	0.5913	0.5090	0.4536	0.4131	0.3818	0.3567	0.3360	0.3185
.87	1.072	0.7313	0.5903	0.5083	0.4531	0.4127	0.3815	0.3565	0.3358	0.3183
.88	1.066	0.7293	0.5893	0.5077	0.4527	0.4124	0.3812	0.3562	0.3356	0.3181
.89	1.060	0.7274	0.5882	0.5070	0.4522	0.4120	0.3810	0.3560	0.3354	0.3180
.90	1.054	0.7255	0.5872	0.5064	0.4518	0.4117	0.3807	0.3558	0.3352	0.3178
.91	1.048	0.7236	0.5862	0.5057	0.4513	0.4113	0.3804	0.3556	0.3350	0.3177
.92	1.043	0.7217	0.5852	0.5051	0.4508	0.4110	0.3801	0.3553	0.3348	0.3175
.93	1.037	0.7198	0.5842	0.5044	0.4504	0.4107	0.3799	0.3551	0.3346	0.3173
.94	1.031	0.7180	0.5832	0.5038	0.4499	0.4103	0.3796	0.3549	0.3345	0.3172
.95	1.026	0.7161	0.5822	0.5032	0.4495	0.4100	0.3793	0.3547	0.3343	0.3170
.96	1.021	0.7143	0.5812	0.5025	0.4490	0.4096	0.3790	0.3544	0.3341	0.3169
.97	1.015	0.7125	0.5803	0.5019	0.4486	0.4093	0.3788	0.3542	0.3339	0.3167
.98	1.010	0.7107	0.5793	0.5013	0.4481	0.4089	0.3785	0.3540	0.3337	0.3165
.99	1.005	0.7089	0.5783	0.5006	0.4477	0.4086	0.3782	0.3538	0.3335	0.3164
	1.000	0.7071	0.5774	0.5000	0.4472	0.4082	0.3780	0.3536	0.3333	0.3162

SPIS RZECZY

TABLICE

4666

CENA ZŁ 45.–