

3383

GŁÓWNY URZĄD POMIARÓW KRAJU
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
ТРУДЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА
TRAVAUX DE L'INSTITUT GÉODÉSIQUE

Nr 13

STEFAN HAUSBRANDT

ŚCISŁE WYRÓWNANIE UKŁADÓW OBSERWACJI GEODEZYJNYCH

W KTÓRYCH OBSERWOWANO
ELEMENTY KĄTOWE I ELEMENTY LINIOWE

W A R S Z A W A 1 9 5 2

PAŃSTWOWE PRZEDSIĘBIORSTWO WYDAWNICTW KARTOGRAFICZNYCH

GŁÓWNY URZĄD POMIARÓW KRAJU
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
ТРУДЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА
TRAVAUX DE L'INSTITUT GÉODÉSIQUE

Nr 13

STEFAN HAUSBRANDT

ŚCISŁE WYRÓWNIANIE UKŁADÓW OBSERWACJI GEODEZYJNYCH

W KTÓRYCH OBSERWOWANO
ELEMENTY KĄTOWE I ELEMENTY LINIOWE

W A R S Z A W A 1 9 5 2

PAŃSTWOWE PRZEDSIĘBIORSTWO WYDAWNICTW KARTOGRAFICZNYCH



P. P. W. K. — Zam. Nr 22/1 — nakład 611
Obj. 1 1/4 ark. Papier dr. sat. kl. V 80 g. B1
Podpisano do druku dn. 6. II. 1952 roku
Druk ukończono dn. 12. II. 1952 roku
Red. techn.: KOŁODZIEJSKI WŁ.
Korektor: STACHURSKA IRENA

UWAGI WSTĘPNE

Jest prawdopodobne, że zagadnienie ścisłego wyrównania układów obserwacji geodezyjnych, w których obserwowano zarówno elementy kątowe jak i elementy liniowe będzie się stawało coraz aktualniejsze. Z jednej bowiem strony pośrednie pomiary długościowe, czy to oparte na zjawisku interferencji, czy nawet na zjawisku prostoliniowego rozchodzenia się światła — zaczną w miarę ich doskonalenia się współdziałać z pomiarami kątowymi w sieciach triangulacyjnych; z drugiej strony prace geodezyjne o dokładności najwyższej (pomiary odkształceń) unikające jeszcze pomiarów długościowych zaczną je prawdopodobnie stosować jako często jedyny możliwy środek na usztywnienie swych specyficznych sieci, które zwykle muszą ze względów terenowych bardzo odbiegać od foremności geometrycznej.

Również sieci poligonalne o charakterze podstawowym jak i konstrukcje mieszane kątowo-liniowe w zwykłych sieciach trygonometrycznych, noszące tak niefortunną nazwę „łamanych celowych”, domagają się zarzucenia spekulacyjnego podejścia do tematu i postawienia sprawy wyrównania i scharakteryzowania dokładności na gruncie metody najmniejszych kwadratów.

W niniejszej pracy rozpatrujemy zagadnienie ścisłego wyrównania uogólnionej sieci geodezyjnej — to jest sieci, w której mierzono i elementy kątowe i elementy liniowe — w sposób zupełnie *ogólny*, to znaczy bez narzucania jakichkolwiek ograniczeń, dotyczących czy to kształtu sieci, czy ilości punktów nawiazania, czy wzajemnego układu elementów kątowych i liniowych (oczywiście poza zrozumiałym z natury rzeczy warunkiem, aby rozważana sieć była siecią geodezyjną podlegającą wyrównaniu, to znaczy siecią, w której dla określenia położenia p wyznaczanych punktów zmierzono więcej niż $2p$ elementów charakteryzujących położenie tych punktów).

Aby założenie ogólności nie kolidowało z wykonalnością praktyczno-rachunkową należało wyrzec się metody równań warunkowych tak wygodnej w najprostszych przypadkach zagadnienia (np: wyrównanie poligonu opartego o dwa punkty stałe, sieci centralne itp.), a tak nie-

słychanie uciążliwej w przypadkach ogólniejszych i operować metodą spostrzeżeń pośrednich, przyjmując za pośredniczące elementy współrzędne prostokątne wyznaczanych punktów. Metoda ta poza prostotą pojęciową posiada, jak wiadomo, jeszcze tę cenną zaletę, że pozwala na drodze nieskomplikowanego rachunku znaleźć błędy średnie współrzędnych wyznaczanych punktów.

Wyrównanie sieci geodezyjnej w postaci ogólnej jest, bądź co bądź pod względem techniczno-rachunkowym zagadnieniem bardzo uciążliwym. Aby rachmistrz panował nad tym zagadnieniem w każdym etapie swej pracy koniecznym staje się zastosowanie przejrzystej symboliki, operującej zespołami liczbowymi i w wyraźny sposób podkreślającej podobieństwo formalne działań. Użyłem do tego celu symboli pomocniczych, których bliższe omówienie podaję w pracy „Symbole pomocnicze w rachunkach geodezyjnych”. Istotą rzeczy jest tu oparcie się na spostrzeżeniu, że wiele rachunków geodezyjnych na płaszczyźnie daje się sformułować jn.: dany jest zespół liczbowy — nazwijmy go „formą rachunkową” — typu:

$$f \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{lub} \quad F \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

zaś poszukiwane są następujące funkcje elementów tego zespołu:

$$f_1 = ad - bc \quad \text{lub:} \quad F_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 + a_2 d_2 - b_2 c_2 \quad \text{— „iloczyn wyznacznikowy”}$$

$$f_2 = ac + bd \quad \text{„} \quad F_2 = a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2 \quad \text{— „iloczyn kolumnowy”}$$

$$f_0 = f_1/f_2 \quad \text{„} \quad F_0 = F_1/F_2 \quad \text{— „iloraz główny”.¹⁾}$$

Przyswojenie tej symboliki pozwala z jednej strony realizować w sposób mechaniczny działanie wyznaczenia liczbowego wielkości f_i ze znanych elementów zespołu; z drugiej strony pozwala ono przejść od łatwej do zapamiętania dzięki symetrii postaci równania algebraicznego napisanego w kształcie „formy” do tradycyjnej postaci równania napisanego w wierszu.

¹⁾ Będzie więc np.: dla

$$f \equiv \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -13 & 11 \end{vmatrix} \quad f_1 = 2 \cdot 11 + 5 \cdot 13 = 87 \quad f_2 = -2 \cdot 13 + 5 \cdot 11 = 29 \quad f_0 = \frac{87}{29} = 3$$

Można to też pisać pod postacią:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -13 & 11 \end{vmatrix}_1 = 87 \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -13 & 11 \end{vmatrix}_2 = 29 \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -13 & 11 \end{vmatrix}_0 = \frac{87}{29} = 3 \quad \text{itp.}$$

Zauważymy jeszcze — choć nie wydaje się aby było to dla rachunku istotne, że jeżeli parę liczb (ab) uważać za składowe jednego wektora na płaszczyźnie, zaś parę liczb (cd) za składowe drugiego wektora na tejże płaszczyźnie, wówczas iloczyn wyznacznikowy i kolumnowy formy $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ będą wartościami bezwzględnymi iloczynów: wektorowego i skalarnego danych wektorów, zaś iloraz główny będzie tangensem kąta utworzonego przez wektory.

Celowość wprowadzenia omówionej symboliki zechce czytelnik osądzić po zapoznaniu się z niniejszą pracą.

OPIS POSTĘPOWANIA WYRÓWNAWCZEGO

Problem łącznego wyrównania obserwacji kątowych i liniowych w sieci geodezyjnej przez doprowadzenie do minimum sumy kwadratów poprawek obserwacyjnych v mnożonych przez odpowiadające obserwacjom wagi p :

$$[p v v] = \text{minimum} \quad (1)$$

sprowadzić można do wykonania następujących czynności:

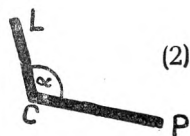
I. Obliczone zostają przybliżone wartości współrzędnych wszystkich wyznaczanych punktów sieci.

Współrzędne te należy obliczać z pełną dokładnością rachunkową założoną dla danego zadania i w oparciu o materiał obserwacyjny. Spowoduje to, że w następstwie dla $2p$ obserwacji — gdzie p ilość wyznaczanych punktów sieci — różnice między wartościami elementów geodezyjnych (linii i kątów), obliczonymi z przybliżonych współrzędnych, a odpowiadającymi wartościami tych elementów uzyskanymi z obserwacji, będą zerami; co ułatwi pracę rachunkową przy zestawianiu równań błędów i równań normalnych Gaussa.

II. Dla każdej dokonanej w sieci obserwacji kątowej zestawione zostaje następujące

równanie błędu obserwacji kątowej:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L & dx_p & dy_p & dx_c & dy_c \\ A_L & B_L & -A_p & -B_p & -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{pn} - \alpha_{obs} = v$$



(2)

Symbole dx dy oznaczają poprawki, jakie należy dodać do przybliżonych wartości współrzędnych xy dla zamiany ich na najprawdopodobniejsze wartości współrzędnych (tzn. na wartości spełniające warunek

minimum (1)], przy czym wskaźniki $_L$ odnoszą się do punktu na lewym ramieniu kąta, wskaźniki $_p$ do punktu na prawym ramieniu kąta, zaś wskaźniki $_c$ do punktu wierzchołkowego kąta.

Symbole α_{prz} i α_{obs} oznaczają wartości kąta: obliczoną z przybliżonych współrzędnych i zaobserwowaną.

Symbole A i B — z wskaźnikami $_L$ dla lewego i $_p$ dla prawego ramienia kąta oznaczają współczynniki kierunkowe zdefiniowane przez równania:

$$A = \frac{\Delta X}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad B = \frac{\Delta Y}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (3)$$

gdzie ΔX i ΔY przyrosty współrzędnych wzdłuż ramienia kąta (a więc np. $\Delta X_L = -X_c + X_L$ itd.).

Jeżeli rachunek kątów prowadzony jest nie w mierze radialnej kąta, lecz w mierze mianowanej o zamienniku ρ , wartości współczynników kierunkowych będą:

$$A = \frac{\Delta X \cdot \rho}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad B = \frac{\Delta Y \cdot \rho}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (3')$$

przy czym $\rho'' = 206265''$ $\rho^{cc} = 636620^{cc}$ $\rho' = 3438'$. Potrzeba efektywnego obliczania wartości współczynników kierunkowych nie zachodzi, gdyż można je znajdować według argumentów ΔX ΔY w odpowiednich tablicach cyfrowych lub nomograficznych, a nawet odczytywać bezpośrednio nakładając odpowiedni nomogram sporządzony na przezroczystym materiale na szkic sieci geodezyjnej. Różne pomoce rachunkowe do wyznaczenia współczynników kierunkowych opisane są w Handbuch der Vermessungskunde Jordana-Eggerta.

Zwracamy uwagę, że współczynniki kierunkowe zdefiniowaliśmy w odmienny od ogólnie przyjętego sposób: A proporcjonalne do ΔX , zaś B do ΔY zgodnie z porządkiem leksykograficznym; znaki współczynników zgodne ze znakami przyrostów.

Celowość tej definicji, wykluczającej przedstawienia i zmianę znaków, łatwo stwierdzić w rachunku praktycznym.

Wartość kąta obliczoną z przybliżonych współrzędnych można oczywiście obliczyć w sposób klasyczny przez wyznaczenie kąta kierunkowego prawego ramienia: $\varphi_p = \arctg \frac{\Delta Y_p}{\Delta X_p}$, kąta kierunkowego lewego ramienia: $\varphi_L = \arctg \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L}$ i znalezienie różnicy tych kątów: $\alpha_{pn} = \varphi_p - \varphi_L$. Można też posłużyć się symbolami pomocniczymi i obliczyć od razu tangens poszukiwanego kąta jako iloraz główny formy, której wiersz

górną tworzą przyrosty współrzędnych wzdłuż lewego ramienia kąta, wiersz dolny — przyrosty współrzędnych wzdłuż prawego ramienia kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha_{pn} = \begin{vmatrix} \Delta X_L & \Delta Y_L \\ \Delta X_p & \Delta Y_p \end{vmatrix}_0$$

III. Dla każdej dokonanej w sieci obserwacji liniowej zestawione zostaje następujące

równanie błędu względnego obserwacji liniowej:

$$\begin{vmatrix} dx_i & dy_i & dx_k & dy_k \\ -A & -B & A & B \end{vmatrix}_2 + \frac{l_{pn} - l_{obs}}{l_{pn}} = v$$



(4)

Symbole dx dy oznaczają poprawki, jakie należy dodać do przybliżonych wartości współrzędnych xy dla ich zamiany na wartości najprawdopodobniejsze.

Symbole l_{pn} i l_{obs} oznaczają wartości odcinka IK : obliczoną z przybliżonych współrzędnych i zaobserwowaną.

Symbole A B oznaczają współczynniki kierunkowe odcinka IK .

Jeżeli współczynniki kierunkowe w danej pracy zdefiniowaliśmy przez równania (3) wyrazy wolne równań obserwacyjnych wyrażać należy jako liczby niemianowane, a więc wyrażnie:

dla obserwacji kątowych — w mierze radialnej

dla obserwacji liniowych — w stosunku długości.

W konsekwencji poprawki v będą liczbami niemianowanymi.

Jeżeli współczynniki kierunkowe mianujemy — por. równanie (3') — należy to uczynić zarówno w równaniach obserwacyjnych kątowych, jak i liniowych. Wyrazy wolne w równaniach obserwacyjnych liniowych pomnożymy wówczas przez zamiennik ρ :

$$\frac{l_{pn} - l_{obs}}{l_{pn}} \rho \quad (5)$$

W konsekwencji poprawki v w równaniach liniowych będą wówczas iloczynami poprawek względnych przez zamiennik. Dzieląc poprawkę obserwacji liniowej przez zamiennik przeliczymy ją na poprawkę względną. Przejdzie od poprawki względnej do bezwzględnej następuje zawsze tak samo: w drodze pomnożenia przez długość odcinka.

IV. Równania obserwacyjne zarówno kątowe jak i liniowe napisane pod postacią tabelaryczną (2 i 4) doprowadzamy do postaci algebraicznej, realizując umowną symbolikę:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 & \dots \end{vmatrix}_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 + a_2 d_2 - b_2 c_2 \dots \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}_2 = a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2 \dots$$

W wyniku tego postępowania otrzymamy układ równań liniowych o niewiadomych dx dy oznaczany w rachunku wyrównawczym w sposób ogólny jn.

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z \dots + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \dots + l_2 &= v_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Jeżeli obserwacje kątowe i liniowe są dokładnie skoordynowane, to znaczy jeżeli błąd średni obserwacji kątowej wyrażony w mierze radialnej jest równy średniemu błędowi względnemu obserwacji liniowej:

$$m_a = \frac{m''_a}{\rho''} = \frac{m_l}{l} \quad (8)$$

otrzymany układ równań (7) będzie równowagowym układem równań błędów, od którego w znany ogólnie sposób przechodzimy do układu równań normalnych Gaussa.

V. Jeżeli — co w praktyce często ma miejsce — skoordynowanie dokładnie obserwacji nie zachodzi, należy każde równanie układu (7) pomnożyć przez stosunek błędu względnego przyjętego za błąd jednostkowy do błędu względnego obserwacji reprezentowanej przez dane równanie. Praktycznie najwygodniej przyjąć za błąd jednostkowy błąd obserwacji kątowej. W następstwie równania błędów obserwacji kątowych żadnej zmianie nie ulegną, zaś równania błędów obserwacji liniowych trzeba będzie pomnożyć przez stosunek błędu średniego obserwacji kątowej wyrażony w mierze radialnej do średniego błędu względnego danej obserwacji liniowej:

$$\frac{m''_a}{\rho''} \bigg/ \frac{m_l}{l} \quad (9)$$

Od przekształconego tak układu — można go np. zasymbolizować jn.:

$$\begin{aligned} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z \dots + l'_1 &= v'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z \dots + l'_2 &= v'_2 \end{aligned} \quad (10)$$

przechodzimy w zwykły sposób do układu równań normalnych Gaussa, pozwalającego wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych i scharakteryzować dokładność.

UZASADNIENIE

Jednoczesne wyrównanie błędów obserwacji kątowych i liniowych w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów wymaga doprowadzenia do minimum funkcji:

$$\left[\frac{v_i}{m_i} \quad \frac{v_i}{m_i} \right] + \left[\frac{w_i}{\mu_i} \quad \frac{w_i}{\mu_i} \right] = F \quad (11)$$

gdzie v są poprawkami obserwacji kątowych; w poprawkami obserwacji liniowych, zaś m i μ oznaczają błędy średnie obserwacji kątowych (m) i liniowych (μ) — określone oczywiście a priori. Aby zrealizować to równanie, którego słuszność omawiamy w odsyłaczu ²⁾, a które Helmert uważa za uogólnienie warunku minimum:

$$[p \lambda \lambda] = \text{minimum}$$

dla wypadku obserwacji niejednorodnych, należy zestawić równania błędów dla obserwacji kątowych, oraz równania błędów dla obserwacji liniowych i przyporządkować im odpowiednie błędy średnie.

Kształt równań błędów przy przyjęciu za elementy pośredniczące, w procesie wyrównania współrzędnych prostokątnych punktów sieci

²⁾ Z niejednorodności obserwacji kątowych i liniowych (niech np.: pierwsze wyrażone będą w mierze radialnej, zaś drugie w mierze metrycznej) wynika oczywiście niemożność sumowania kwadratów poprawek tych wielkości bez postawienia dodatkowych założeń.

Założenia dodatkowe muszą być tak obrane aby w wypadku jednorodności obserwacji prowadziły do warunku $[p \lambda \lambda] = \text{minimum}$, gdzie p wagi λ poprawki. Pomnożmy kwadraty poszukiwanych poprawek v obserwacji kątowych przez czynniki K , kwadraty poszukiwanych poprawek w obserwacji liniowych przez czynniki C i rozważajmy funkcję:

$$f = [v_i \quad v_i \quad k_i] + [w_i \quad w_i \quad c_i]$$

Aby oznaczone wzorem sumowanie było wykonalne wystarczy aby czynniki k miały wymiar odwrotności kwadratu obranej jednostki kątowej, zaś czynniki c wymiar odwrotności kwadratu obranej jednostki liniowej. By ponadto funkcja ta w wypadku spostrzeżeń jednorodnych (a więc np. w wypadku istnienia tylko poprawek v) osiągała minimum dla tych samych wartości poprawek, dla których osiąga minimum suma kwadratów poprawek mnożonych przez odpowiadające im wagi wystarczy przyjąć za czynniki k odwrotności kwadratów błędów średnich obserwacji kątowych m , zaś za czynniki c odwrotności kwadratów błędów średnich obserwacji liniowych μ .

$$K_i = \frac{1}{m_i \quad m_i} \quad C_j = \frac{1}{\mu_j \quad \mu_j}$$

Podstawiając sprecyzowane tak wartości czynników k i c otrzymamy więc funkcję (11), która spełnia założone warunki i może być uważana za uogólnienie funkcji $[p \lambda \lambda]$ aktualnej dla szczególnego wypadku: jednorodności spostrzeżeń. Dowód słuszności wzoru (11) można też oprzeć bezpośrednio na „prawie błędów” Gaussa-Laplace’a.

zależny jest oczywiście od związku funkcjonalnego między wartością kąta α względnie boku l a wartościami współrzędnych wyznaczających kąt względnie bok. Posługując się przyjętymi już oznaczeniami napisać możemy równania błędów obserwacji kątowych³⁾ i równania błędów obserwacji liniowych⁴⁾ pod postacią:

(równanie błędu obserwacji kątowej)

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_c & dy_c \\ -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{pn} - \alpha_{obs} = v \quad (12)$$

(równanie błędu obserwacji liniowej)

$$\begin{vmatrix} dx_J & dy_J \\ -\cos \varphi_{JK} & -\sin \varphi_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_K & dy_K \\ \cos \varphi_{JK} & \sin \varphi_{JK} \end{vmatrix}_2 + l_{pn} - l_{obs} = w \quad (13)$$

3) Jeżeli współrzędne trzech punktów wyznaczających kąt α : punktu L na lewym ramieniu kąta, punktu P na prawym ramieniu kąta oraz punktu C w centrum kąta otrzymają niewielkie poprawki równe odpowiednio dx_L dy_L dx_p dy_p dx_c dy_c kąt zmieni się otrzymując niewielki przyrost $d\alpha$, który traktować można jako różniczkę zupełną:



$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_L} dx_L + \frac{\partial \alpha}{\partial y_L} dy_L + \frac{\partial \alpha}{\partial x_p} dx_p + \frac{\partial \alpha}{\partial y_p} dy_p + \frac{\partial \alpha}{\partial x_c} dx_c + \frac{\partial \alpha}{\partial y_c} dy_c$$

Różniczkując związek między wartością kąta a wartościami współrzędnych punktów wyznaczających ten kąt: $\alpha = \arctg \frac{y_p - y_c}{x_p - x_c} - \arctg \frac{y_L - y_c}{x_L - x_c}$ otrzymamy wartości po-

chodnych. Będzie więc np.:
$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_L} = \frac{y_L - y_c}{\left(1 + \left(\frac{y_L - y_c}{x_L - x_c}\right)^2\right) \left(x_L - x_c\right)^2} = \frac{y_L - y_c}{(x_L - x_c)^2 + (y_L - y_c)^2}$$

tj. przy przyjętych oznaczeniach (str. 6): $\frac{\partial \alpha}{\partial x_L} = B_L$ analogicznie: $\frac{\partial \alpha}{\partial y_L} = -A_L$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_p} = -B_p \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_p} = A_p \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_c} = -(B_L - B_p) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_c} = (A_L - A_p)$$

Przyrost wartości kąta możemy więc przy przyjętych oznaczeniach napisać pod postacią:

$$d\alpha = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_c & dy_c \\ -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix}_1$$

Wyrażając wartość kąta po wyrównaniu raz jako sumę wartości tego kąta obliczonej z przybliżonych współrzędnych α_{pn} i wartości jego przyrostu $d\alpha$ spowodowanego wyrównaniem; zaś drugi raz jako sumę obserwacji α_{obs} i poprawki wyrównawczej v mamy: $\alpha_{pn} + d\alpha = \alpha_{obs} + v$. Stąd, podstawiając wartość $d\alpha$, napiszemy:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_c & dy_c \\ -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{pn} - \alpha_{obs} = v$$

Jest to równanie błędu obserwacji kątowej (12).

4) Jeżeli współrzędne punktów J i K wyznaczających odcinek $JK = l$ otrzymają niewielkie poprawki równe odpowiednio dx_J dy_J dx_K dy_K długość odcinka

Związek podstawowy (11) wymagałby podzielenia równań obserwacyjnych kątowych przez wartości błędów średnich obserwacji kątowych m :

$$\frac{v}{m}$$

podzielenia równań obserwacyjnych liniowych przez wartości błędów średnich obserwacji liniowych μ :

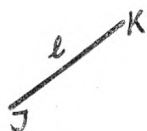
$$\frac{w}{\mu}$$

i postąpienia z otrzymanym układem tak, jak postępujemy z jednorodnym układem równań błędów przy doprowadzaniu do minimum sumy kwadratów poprawek.

Jeżeli jednak — co zawsze się zakłada — błędy średnie obserwacji kątowych są sobie równe, będzie wygodniej ze względów rachunkowych pozostawić układ równań błędów obserwacji kątowych bez zmiany, zato równania błędów obserwacji liniowych mnożyć przez stosunki:

$$\frac{m}{\mu_1} \quad \frac{m}{\mu_2} \quad \dots$$

co sprowadzi się do przyjęcia obserwacji kątowej za obserwację o wadze jednostkowej.



zmieni się otrzymując niewielki przyrost dl , który możemy uważać za różniczkę zupełną:

$$dl = \frac{\partial l}{\partial x_J} dx_J + \frac{\partial l}{\partial y_J} dy_J + \frac{\partial l}{\partial x_K} dx_K + \frac{\partial l}{\partial y_K} dy_K$$

Wartości pochodnych znajdziemy różniczkując związek między długością odcinka a wartościami wyznaczających go współrzędnymi: $l = \sqrt{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2}$.

Różniczkowanie daje: $\frac{\partial l}{\partial x_i} = \frac{-2(x_K - x_J)}{2\sqrt{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2}} = -\cos \varphi_{JK}$,

analogicznie: $\frac{\partial l}{\partial y_i} = -\sin \varphi_{JK}$, $\frac{\partial l}{\partial x_K} = \cos \varphi_{JK}$, $\frac{\partial l}{\partial y_K} = \sin \varphi_{JK}$, gdzie przez φ_{JK} ozna-

czyliśmy kąt kierunkowy odcinka JK w obranym układzie współrzędnych.

Przyrost długości odcinka możemy więc przy przyjętych oznaczeniach napisać pod postacią:

$$dl = \begin{vmatrix} dx_J & dy_J \\ -\cos \varphi_{JK} & -\sin \varphi_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_K & dy_K \\ \cos \varphi_{JK} & \sin \varphi_{JK} \end{vmatrix}_2$$

Wyrażmy wartość odcinka po wyrównaniu raz jako sumę wartości tego odcinka obliczonej z przybliżonych współrzędnych l_{prz} i wartości jego przyrostu dl spowodowanego wyrównaniem; zaś drugi raz jako sumę obserwacji l_{obs} i poprawki wyrównawczej w . Będzie: $l_{pn} + dl = l_{obs} + w$. Stąd podstawiając wartość dl otrzymamy równanie błędu obserwacji liniowej (13):

$$\begin{vmatrix} dx_J & dy_J \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_K & dy_K \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}_2 + l_{pn} - l_{obs} = w.$$

Wykonanie opisanego działania nad dowolnym równaniem błędu obserwacji liniowej przy jednoczesnym pomnożeniu i podzieleniu tego równania przez długość odnośnego odcinka l (dla wprowadzenia i tu współczynników kierunkowych:

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\cos \varphi}{l} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\sin \varphi}{l}$$

$$\text{daje: } \begin{vmatrix} dx_J & dy_J \\ -A_{JK} & -B_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_K & dy_K \\ A_{JK} & B_{JK} \end{vmatrix}_2 \cdot l_{JK} \frac{m}{\rho_{JK}} + \frac{l_{pn} - l_{obs}}{l} \cdot l_{JK} \frac{m}{\rho_{JK}} = w \frac{m}{\rho_{JK}}$$

Oznaczmy krótko przez v_{JK} poprawkę względną obserwacji liniowej, tzn. stosunek wartości tej poprawki do długości odcinka:

$$v = \frac{w}{l}$$

Równanie błędu obserwacji liniowej napisać teraz możemy pod postacią:

$$\frac{m}{\rho} \left(\begin{vmatrix} dx_J & dy_J \\ -A & -B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_K & dy_K \\ A & B \end{vmatrix}_2 + \frac{l_{pn} - l_{obs}}{l} \right) = v \cdot \frac{m}{\rho} \quad (14)$$

A więc: równania błędów obserwacji kątowych zestawia się pod postacią (2), zaś równania błędów obserwacji liniowych można zestawić pod postacią (4), po czym pomnożyć przez stosunek błędu względnego przyjętego za jednostkowy (błąd średni kąta m) do błędu względnego danej obserwacji liniowej. Jeżeli $m = \frac{\rho}{l}$ tzn. błędy względne obserwacji liniowych są równe wartościom radialnym błędów średnich kątowych poprzestajemy oczywiście na postaci (4).

OBJAŚNIENIE PRZYKŁADU LICZBOWEGO

Przykład liczbowy podany na str. 17 jest wyrównaniem układu siedmiu obserwacji kątowych i jednej obserwacji liniowej dokonanych dla łącznego wyznaczenia położenia punktów S i T , przy czym T jest punktem pomocniczym umożliwiającym nawiązanie wyznaczanego punktu S do trygonometru R (celowanie bezpośrednio wzdłuż prostej RS nie jest możliwe). Mamy tu więc do czynienia z typowym przykładem tzw. „łamaney celowej”.

Obserwacje kątowe wykonano teodolitem poligonalnym Wilda T. I, odcinek RT pomierzony został zwykłą taśmą stalową na niesprzyjającym pomiarom liniowym terenie.

Można więc przyjąć, że błędy średnie pomiarów kątowych są rzędu $\pm 10''$, zaś błąd pomiaru liniowego jest rzędu $\pm 0.015 \sqrt{L}$, gdzie L długość mierzonego odcinka.

Współczynniki kierunkowe AB przyjęto według definicji 3', co — zgodnie z uwagami podanymi na str. 7 — wymagało mianowania odchyłki względnej liniowej $\frac{l_{pn} - l_{ob}}{l}$ w drodze pomnożenia jej przez zamiennik.

Po zestawieniu równań błędów, których opracowanie widoczne jest ze schematu rachunkowego, pomnożono równanie błędu obserwacji liniowej przez stosunek błędu średniego obserwacji kątowej wyrażonego w mierze radialnej:

$$\frac{10''}{206265''} = 0.000048$$

do błędu względnego obserwacji liniowej:

$$\frac{0.015 \sqrt{546,7}}{546,7} = 0.00064$$

to znaczy przez:

$$\frac{0.000048}{0.00064} = 0.075.$$

W schemacie rachunkowym znalazło to wyraz w skreśleniu współczynników równania błędu:

349	—	143	0
i napisaniu na ich miejsce:		26	— 11 0

Przejście od układu równań błędów do układu równań normalnych żadnych omówień nie wymaga.

Równania normalne rozwiązano przy pomocy algorytmu Banachiewicza w pełnej postaci, to znaczy z łącznym wyznaczeniem współczynników wagowych.

Po obliczeniu poprawek obserwacyjnych v przez podstawienie wyznaczonych niewiadomych dx dy do równań błędów obliczono błąd średni obserwacji o jednostkowej wadze, to znaczy błąd średni obserwacji kątowej po wyrównaniu. Wymagało to znalezienia sumy kwadratów poprawek sprowadzonych do jednostkowej wagi:

$$[p v v] = 134$$

Ponieważ ilość spostrzeżeń nadliczbowych wynosi 4 (dokonano ich 8, zaś ilość niezbędna dla wyznaczenia 2 punktów jest $2 \times 2 = 4$), wartość błędu średniego spostrzeżenia o wadze jedność będzie:

$$m_0 = \sqrt{\frac{134}{4}} = \pm 5.8''$$

Mnożąc współczynniki wagowe przez otrzymany błąd średni wyznaczono błędy średnie współrzędnych równe odpowiednio:

dla punktu wyznaczanego S : ± 0.02 ± 0.04

dla punktu pomocniczego T : ± 0.17 ± 0.07

Jak widać mało dokładny pomiar liniowy nie wpłynął ujemnie na dokładność wyznaczenia punktu głównego S , co jest zresztą geometrycznie jasne z rysunku (im bliższy kąta półpełnego będzie kąt RTS , tym mniejszy będzie wpływ błędności pomiaru odcinka RT na wyznaczenie punktu S).

Parę słów omówienia poświęcić może należy obliczaniu poprawek obserwacji. W stosunku do obserwacji o jednostkowej wadze sprawa jest prosta: podstawiając niewiadome dx dy do równania błędu obserwacji otrzymujemy bezpośrednio poprawkę — oczywiście w takich jednostkach, jakie obraliśmy przyjmując tę, czy inną definicję współczynników kierunkowych AB (3 lub 3'), Równania błędów obserwacji o wagach różnych od jedności figurują w podwójnej postaci — nazwijmy je krótko postacią pierwotną (równanie skreślone) i wtórną.

Podstawienie niewiadomych dx dy do równania błędu w postaci pierwotnej dostarczy nam wartość poprawki obserwacji — oczywiście znowu w obranych jednostkach. W naszym wypadku otrzymaliśmy $+5.1$ co po przejściu do poprawki względnej, a następnie liniowej w myśl uwag na str. 7 daje poprawkę odcinka $+0.01_3$ m. Podstawienie niewiadomych dx dy do równania błędu w postaci wtórnej daje „wartość poprawki sprowadzoną do jednostkowej wagi”, to znaczy liczbę $v/\sqrt{p}$, która w operacji sumowania kwadratów dla wyznaczenia błędu średniego m_0 jest równorzędna poprawkom spostrzeżeń o jednostkowej wadze.

UWAGI KOŃCOWE

Obierając ten a nie inny przykład liczbowy mieliśmy na oku podwójny cel. Z jednej strony chodziło o zilustrowanie w krótki, a jednocześnie wszechstronny sposób rozwiązania podjętego zadania. Należało więc obrać układ, w którym występowałoby niewiele obserwacji lecz zagadnienie wag nie byłoby uproszczone, to znaczy obserwacje długościowe nie byłyby dokładnie skoordynowane z obserwacjami kątowymi. Ma to właśnie miejsce w układach o „łamanym celowym”.

Z drugiej strony chodziło nam o wykazanie, że układy o „łamanym celowym” mogą być bez trudności czy to pojęciowych, czy rachunkowych wyrównywane w sposób naukowo poprawny, to znaczy przez oparcie na warunku minimum bez uciekania się do nieuzasadnionych założeń czy niezdefiniowanych pojęć. Uzyskuje się przy tym bez wię-

kszych trudności charakterystykę dokładnościową rezultatów, której w pracach geodezyjnych pretendujących do ścisłości trudno się przecież wyrzec.

Czytelnik, który przeczytał opis postępowania wyrównawczego i uważnie prześledził rozwiązanie przykładu liczbowego z całą pewnością nie napotka żadnych trudności pojęciowych w zastosowaniu opisanej metody do wyrównania innych postaci sieci geodezyjnej, czy to operującej łącznie obserwacjami liniowymi i kątowymi, jak zwykle sieci poligonowe; czy tylko obserwacjami kątowymi, jak klasyczne sieci triangulacyjne; czy wreszcie tylko obserwacjami liniowymi, jak sieci triangulacyjne nowego typu, których wnikliwą analizę i sposób wyrównania metodą równań warunkowych podał niedawno prof. E. Warchałowski. Schemat postępowania będzie zawsze taki sam: obliczenie przybliżonych współrzędnych, zestawienie równania błędu dla każdej obserwacji sprowadzenie równań błędów do równoważności wagowej w drodze mnożenia każdego równania przez stosunek błędu spostrzeżenia o wadze przyjętej za jedność do błędu przypisanego obserwacji odpowiadającej danemu równaniu.

Większe sieci geodezyjne należy przed wyrównaniem przenieść na płaszczyznę odwzorowania. Sprowadza się to jak wiadomo do ścisłego przeliczenia współrzędnych geograficznych punktów nawiązania na współrzędne prostokątne tych punktów w obranym odwzorowaniu; pobieżnego obliczenia przybliżonych współrzędnych wszystkich wyznaczanych punktów sieci (dokładność ca ± 50 m) i przeliczenia w oparciu o te wielkości kątów α i odcinków L obserwowanych w terenie na kąty α i odcinki L , które zaobserwowanoby na płaszczyźnie odwzorowania w razie wystąpienia tych samych błędów przypadkowych. W przyjętym u nas odwzorowaniu Gaussa-Krügera związki między wielkościami α i L , oraz α i L można napisać pod postacią:

$$\alpha = \bar{\alpha} + 0.000\ 844 \begin{vmatrix} X_L & Y_L \\ X_c & (2Y_c + Y_L) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -X_p & -Y_p \\ X_c & (2Y_c + Y_c) \end{vmatrix}_1 \quad (15)$$

$$L = \bar{L} [1 + 0.0000\ 0000\ 409 (Y_J^2 + Y_J \cdot Y_K + Y_K^2)]$$

lub z dostateczną przeważnie dokładnością:

$$\begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha} + 0.00253 Y_c (X_L - X_p) \\ L &= \bar{L} (1 + 0.0000\ 000123 Y^2) \end{aligned}$$

(16)

przy czym XY są współrzędnymi Gaussa-Krügera wyrażonymi w kilometrach (w ostatnim wzorze Y oznacza rzędną środka odcinka).

Po przeniesieniu na płaszczyznę odwzorowania całego zespołu obserwacji αL postępujemy z zespołem obserwacji zredukowanych αL w sposób już opisany.

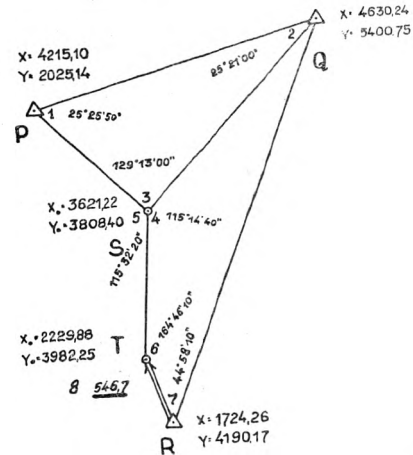
Jeżeli w sieci zachodzi potrzeba zachowania ścisłej wartości pewnego kąta kierunkowego lub odcinka (nawiązania azymutalne, bazy o najwyższej precyzji) najprościej jest napisać związek funkcyjny między współrzędnymi określającymi ten element i po określeniu z tego związku pewnej współrzędnej przez pozostałe podstawić określoną wartość współrzędnej do wszystkich równań błędów, w których ta współrzędna występuje.

Wyrównywanie wielkich sieci operujących spostrzeżeniami kątowymi i liniowymi nie ma zresztą jeszcze dziś znaczenia praktycznego. Dotknęliśmy tego tematu jedynie dla podkreślenia zupełnej ogólności omówionej w niniejszej pracy metody postępowania wyrównawczego.



PRZYKŁAD LICZBOWY:

NN	kol. obserwacji	Zespoły liczbowe do obliczenia wartości elementu sieci ze współrzędnych przybliżonych.	Rachunki pomocnicze	Wartości obserwowane elementów sieci	Wyrazy wolne równań błędów	Współczynniki kierunkowe	Równania błędów w postaci tabelarycznej:	Równania błędów w postaci algebraicznej z rozwinięcia tabel													
		Elementy kątowe		α_{ob} l_{ob}	Poprawki v	Wartości wyrównane	$\frac{\rho \Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	$\frac{\rho \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	Obserwacje kątowe:	Równania błędów sprowadzone do jednostki wagowej											
		Elementy liniowe					A	B	Obserwacje liniowe:	$d x_s$	$d y_s$	$d x_T$	$d y_T$	1					s	s	v
		$f = \begin{vmatrix} \Delta X_L & \Delta Y_L \\ \Delta X_p & \Delta Y_p \end{vmatrix}$ $\alpha_{pn} = \arctg f_0$ $\Delta X_{JK} \Delta Y_{JK}$ $l_{pn} = \frac{\Delta X_{JK} \Delta Y_{JK}}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}$	f_1 f_2 f_0 $\Delta x'' + \Delta y''$		$\alpha_{pn}'' - \alpha_{ob}''$ $\frac{l_{pn} - l_{ob}}{l}$			$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L & dx_p & dy_p & dx_c & dy_c \\ A_L & B_L & -A_p & -B_p & -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{pn} - \alpha_{obs} = v$ $\begin{vmatrix} dx_i & dy_i & dx_k & dy_k \\ -A_{ik} & -B_{ik} & A_{ik} & B_{ik} \end{vmatrix}_2 + l_{pn} - l_{obs} = v$	-0.029	0.074	0.018	0.008									
1		$\begin{vmatrix} 415.14 & 3375.61 \\ -593.88 & 1783.26 \end{vmatrix}$ $\alpha = 25^0 25' 50''$	$\begin{matrix} 274\ 5010 \\ 577\ 3047 \\ \hline 0.47549 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 25^0 25' 50'' \\ 0'' \\ \hline 25^0 25' 50'' \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} 7 \\ -35 \\ \hline 104 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ - & - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_s & dy_s \\ 35 & -104 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ - & - \end{vmatrix}_1 + 0$	-104	-35			0							-139	0.4	
2		$\begin{vmatrix} -1009.02 & -1592.35 \\ -415.14 & -3375.61 \end{vmatrix}$ $\alpha = 25^0 21' 00''$	$\begin{matrix} 274\ 5010 \\ 579\ 4037 \\ \hline 0.47376 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 25^0 21' 00'' \\ +7'' \\ \hline 25^0 21' 07'' \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} -59 \\ -7 \\ \hline 60 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} dx_s & dy_s \\ -59 & -92 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ - & - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ - & - \end{vmatrix}_1 + 0$	-92	59			0							-33	+7.0	
3		$\begin{vmatrix} 593.88 & -1783.26 \\ 1009.02 & 1592.35 \end{vmatrix}$ $\alpha = 129^0 13' 10''$	$\begin{matrix} 274\ 5010 \\ -224\ 0337 \\ \hline -1.22527 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 129^0 13' 00'' \\ +2'' \\ \hline 129^0 13' 02'' \end{matrix}$	10''	$\begin{matrix} 35 \\ 59 \\ \hline 92 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 35 & -104 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -59 & -92 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_s & dy_s \\ 24 & 196 \end{vmatrix}_1 + 10''$	196	-24			10							182	+2.6	
4		$\begin{vmatrix} 1009.02 & 1592.35 \\ -1391.34 & 173.85 \end{vmatrix}$ $\alpha = 115^0 14' 20''$	$\begin{matrix} 239\ 0918 \\ -112\ 7060 \\ \hline -2.12138 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 115^0 14' 40'' \\ -4'' \\ \hline 115^0 14' 36'' \end{matrix}$	-20''	$\begin{matrix} 59 \\ -146 \\ \hline 18 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 59 & 92 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_T & dy_T \\ 146 & -18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_s & dy_s \\ -205 & -74 \end{vmatrix}_1 - 20''$	-74	205	-18	-146	-20							-53	-4.2	
5		$\begin{vmatrix} -1391.34 & 173.85 \\ 593.88 & -1783.26 \end{vmatrix}$ $\alpha = 115^0 32' 30''$	$\begin{matrix} 237\ 7875 \\ -113\ 6309 \\ \hline -2.09263 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 115^0 32' 20'' \\ +2'' \\ \hline 115^0 32' 22'' \end{matrix}$	10''	$\begin{matrix} -146 \\ 35 \\ \hline -104 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} dx_T & dy_T \\ -146 & 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -35 & 104 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_s & dy_s \\ 181 & -122 \end{vmatrix}_1 + 10''$	-122	-181	18	146	10							-129	+1.6	
6		$\begin{vmatrix} 1391.34 & -173.85 \\ -505.62 & 207.92 \end{vmatrix}$ $\alpha = 164^0 46' 08''$	$\begin{matrix} 20\ 1385 \\ -73\ 9636 \\ \hline -0.27228 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 164^0 46' 10'' \\ -5'' \\ \hline 164^0 46' 05'' \end{matrix}$	-2	$\begin{matrix} 146 \\ -349 \\ \hline 143 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} dx_s & dy_s \\ 146 & -18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 349 & -143 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_T & dy_T \\ -495 & 161 \end{vmatrix}_1 - 2''$	-18	-146	161	495	-2							490	-5.4	
7		$\begin{vmatrix} 505.62 & -207.92 \\ 2905.98 & 1210.58 \end{vmatrix}$ $\alpha = 44^0 58' 10''$	$\begin{matrix} 121\ 6305 \\ 121\ 7618 \\ \hline 0.99893 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 44^0 58' 10'' \\ -6'' \\ \hline 44^0 58' 04'' \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} 349 \\ 60 \\ \hline 25 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} dx_T & dy_T \\ 349 & -143 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -60 & -25 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -289 & 168 \end{vmatrix}_1 + 0$			-143	-349	0							-452	-5.4	
8		$\begin{matrix} 505.62 & -207.92 \\ l = 546.70 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 29\ 8882 \\ \hline \end{matrix}$	$\begin{matrix} 546.70 \\ 0.01 \\ \hline 546.71 \end{matrix}$	$0 \cdot \frac{\rho}{546} = 0$	$\begin{matrix} 349 \\ -143 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ - & - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_T & dy_T \\ 349 & -143 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}_2 + 0$			-349 26	-143 -11	0 0							15	$\begin{matrix} +5.1 \\ +0.4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{0.000048}{0.00064} = 0.075 \\ v = \frac{5.1}{\rho''} \cdot 547 = 0.013 \end{matrix}$



Obliczenie przybliżonych współrzędnych.

Punkt S	$f^{\equiv}$	4215.10	2025.14	4630.24	5400.75
		-1	2.11075	1	2.10310
			(4.21385)		

$$X_{S_0} = 3621.22 \quad Y_{S_0} = 3808.40$$

$$\text{Punkt } T \quad \overset{S_0}{RQ} = \overset{S_0}{\text{arc tg}} \frac{1210.58}{2905.98} = \overset{S_0}{\text{arc tg}} 0.41658 \quad \overset{S_0}{RQ} = \overset{S_0}{22^\circ 36' 56''}$$

$$382^{\circ} 36' 56''$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} -44^{\circ} 58' 10'' \\ \hline 227^{\circ} 22' 46'' \end{array}$$

$$RT = 337^{\circ} 38' 46''$$

$$X_{T_0} = 1724.26' + 0.92485 \cdot 546.70 = 2229.88$$

$$Y_{T_0} = 4190.17 - 0.38032 \cdot 546.70 = 3982.25$$

Średnie błędy założone dla ustalenia wag: $m_\alpha = \pm 10'' m_l = \pm 0.015 \sqrt{l}$.

Średni błąd względny linii RT wynosi: $\frac{\pm 0.015\sqrt{546.7}}{546.7} = 0.00064$

$$\text{Stosunek błędu śr. kąta do błędu śr. linii} \frac{0.000048}{0.00064} = 0.075.$$

78380	3048	— 3762	— 15918	2256	— 10000			54004	64004	$[p \ v \ v] = 134$
101384	— 30454	— 128626	— 5858		— 10000			— 70506	— 60506	$m_0 = \sqrt{\frac{(p \ v \ v)}{n_n}} = \sqrt{\frac{134}{4}} = \pm 5.8$
	47694	134572	218		— 10000			138268	148268	
		409579	3390		— 10000			392997	402997	
279.96	10.89	— 13.44	— 56.86	8.06	— 35.72			192.89		
318.22	— 95.24	— 402.26	— 18.68	1.22	— 31.42			— 228.16		
	196.07	487.05	— 7.41	— 1.86	— 15.26	— 51.00		607.59		
		85.53	— 0.67	— 7.42	— 60.88	290.42	— 116.92	190.06		
		niewiadome:	— 0.029	0.074	0.018	0.008				
		współczynniki wagowe Q	0.1336	0.4926	8,6945	$1,3670 \cdot 10^{-4}$				
		Błędy średnie:	$0.37 m_0$	$0.70 m_0$	$2,95 m_0$	$1.17 m_0 \cdot 10^{-2}$				
		a przy przyjęciu $m_0 = \pm 5.8$	± 0.02	± 0.04	± 0.17	± 0.07				
		wyrównane wartości współrzędnych	362119	380847	2229.90	3982.26				
			S	T						

Cena zł 17