

Główny Urząd Pomiarów Kraju
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
=====Nr 9=====

CZESŁAW KAMEŁA

WYZNACZENIE GEOIDY Z POMIARÓW GRAWIMETRYCZNYCH



W a r s z a w a 1950

S P I S R Z E C Z Y

	Str.
Wstęp ,	VII

ROZDZIAŁ I

Pomiary grawimetryczne

a. Metody	1
b. Wzory podstawowe	2
c. Instrumenty i ich dokładność	3
d. Gęstość punktów grawimetrycznych	5

ROZDZIAŁ II

Redukcja pomiarów grawimetrycznych na geoideę

a. Metody, ich dokładność i zastosowania	7
1. Redukcja Faye'a (redukcja na wolne powietrze)	7
2. Redukcja Bouguera i redukcja topograficzna	8
3. Redukcja Poincaré'go lub Preya	9
4. Redukcja Rudzkiego	10
5. Dwie metody kondensacji Helmerta	12

IV

	Str.
6. Metoda Brillouina	13
7. Metoda Brunsa i Bowiego	13
8. Metoda izostazji	14
Założenie Pratta-Hayforda	14
Hipoteza Airy	18
Założenie Vening-Meinesza	19
b. Uwagi	21

ROZDZIAŁ III

Wyznaczenie geoidy z pomiarów grawimetrycznych

a. Podstawowe pojęcia z teorii potencjału	23
1. Funkcje harmoniczne	23
2. Wzory Greena	23
3. Funkcje kuliste	24
4. Funkcje Lamé'go	29
5. Zagadnienie Dirichleta	32
6. Wyznaczenie funkcji harmonicznej z wartości brze- gowych	32
7. Pierwsza funkcja Greena	34
8. Druga funkcja Greena	37
9. Funkcja Greena dla kuli	40
10. Zagadnienia wartości brzegowych teorii potencjału .	41
b. Metody rozwiązania zadania	44
1. Wzór całkowity Stokesa	44
2. Trzecie zagadnienie wartości brzegowych, jako roz- wiązanie problemu Stokesa	49

3. Rozwiązanie drugiego zagadnienia na wartości brzegowe dla obszaru zewnątrz geoidy według Stokesa	53
4. Metoda Rudzkiego wyznaczenia geoidy	56
5. Metoda Poincarégo wyznaczenia geoidy	61
6. Wyznaczenie geoidy przy pomocy rozwinięcia szeregowego przyspieszenia siły ciężkości g i promienia R geoidy według funkcji kulistych . .	67
7. Metoda Pizzetti'ego wyznaczenia geoidy	69
8. Metoda B. Numerowa i D. Chramowa wyznaczenia geoidy	74
9. Metoda Vening-Meinesza wyznaczenia geoidy . .	75
10. Uwagi N. Idelson dotyczące wyznaczenia geoidy .	75
11. Uwagi J. de Graaff Huntera dotyczące wyznaczenia geoidy	77
12. Problem rzeczywistej ziemi	77
Metoda Malkina	77
Uwagi W. D. Lamberta	78
Uwaga K. Junga	78
Metoda Harold Jeffreysa	78
Metoda N. Mojsiejewa	79
c. Dokładność wyznaczenia geoidy przy pomocy tych metod.	81

ROZDZIAŁ IV

Porównanie prac o wyznaczeniu geoidy

ROZDZIAŁ V

Zmiany geoidy w czasie

ROZDZIAŁ VI

**Analiza praktycznych zastosowań metod i narzędzi oraz uwagi
końcowe**

	Str.
a. Podwójny grawimetr Grafa	87
b. Metoda geometryczno-grawimetryczna wyznaczenia geoidy	90
c. Uwagi dotyczące wyznaczenia geoidy	92
d. Uwagi końcowe	93
Spis literatury	95

W S T Ę P

Głównym zadaniem geodezji jest wyznaczenie fizycznej powierzchni ziemi.

Ponieważ wyznaczenie tak skomplikowanej powierzchni nie da się wprost wykonać, dlatego w geodezji operujemy zastępczymi prostszymi powierzchniami. Jedną z takich powierzchni jest *geoida*. Jest to powierzchnia prostopadła w każdym punkcie do kierunku linii pionowej, przechodzącej przez ten punkt w ogólnym swym przebiegu i zawierająca w sobie powierzchnie wolnych wód mórz i oceanów w stanie spoczynku. Wiemy, że kierunki pionów są styczne do linii sił pola grawitacyjnego; odrzucamy przy tym wpływ ciał niebieskich (księżycy, słońca, gwiazd) na wielkość i kierunek przyspieszenia ziemskiego oraz wpływy wiatrów, prądów itd. Przy takim założeniu przyspieszenie siły ciężkości, będzie wyłącznie *funkcją miejsca*.

Mimo to, również geoida jest tak skomplikowaną powierzchnią, że nie da się wyrazić przez prostą funkcję analityczną. Wiadomo jednak, że geoida jest powierzchnią zamkniętą, ciągłą, bez kantów i ostrzy.

Powierzchnię wyznaczoną przybliżonym równaniem geoidy nazywamy często *sferoidą*. Sferoida niewiele odbiega od elipsoidy obrotowej (ziemskiej).

Wyznaczenie geoidy pozwala nam w dalszej kolejności wyznaczyć fizyczną powierzchnię ziemi.

VIII

Do rozwiązania tego zadania służą: pomiary geodezyjne (triangulacja, niwelacja), pomiary grawimetryczne i pomiary astronomiczne. Koordynacja tych pomiarów prowadzi do wyznaczenia geoidy.

W niniejszej rozprawie będziemy rozpatrywali jedynie wyznaczanie geoidy z pomiarów grawimetrycznych, przy pomocy których wyznaczamy przyspieszenie siły ciężkości.

Na początku omówimy w krótkości pomiary grawimetryczne oraz ich redukcje, w dalszym zaś ciągu — sposoby wyznaczenia geoidy z pomiarów grawimetrycznych, ich dokładność i praktyczność zastosowania, oraz zmiany geoidy w czasie.

Zadaniem pracy niniejszej jest przeanalizowanie dotychczasowego dorobku geodezji w tej dziedzinie oraz wysnucie uwag i wniosków dla dokładniejszego wyznaczenia geoidy.

ROZDZIAŁ I

POMIARY GRAWIMETRYCZNE

a. Metody

Wiadomo, że pomiary grawimetryczne wykonujemy dla różnych potrzeb: dla geodezji, geofizyki, górnictwa itd.

We wszystkich tych pomiarach, mimo że będą one przeprowadzone jedynie dla jednej gałęzi nauki, musimy mieć na względzie to, ażeby z ich wyników mogły korzystać i inne gałęzie wiedzy. Musi więc być ścisła współpraca geodetów z geofizykami, sejsmologami, geologami, inżynierami górnictwa itd.

Pomiary grawimetryczne, wykonywane przez geodetów w celu wyznaczenia kształtu i wielkości geoidy, są przeprowadzane zasadniczo dwiema metodami: *metodą dynamiczną i metodą statyczną*.

Do metody dynamicznej należą pomiary wykonane przy pomocy różnych wahadeł, oraz te wszystkie pomiary, które podlegają *prawom dynamiki*.

Do metody statycznej należą pomiary wykonane *metodą barometryczną* i metodami opartymi na *prawach elastyczności*.

Obecny stan rozwoju budowy przyrządów grawimetrycznych daje nam duży wybór sprzętu do celów wyznaczenia geoidy; wystarczą jednak przyrządy, które dają przyspieszenie siły ciężkości z dokładnością $\pm 0,1$ mgala, co odpowiada zmianie około $\pm 0,33$ m w sensie wysokościowym.

Musimy być przygotowani, że odstępów geoidy od powierzchni odniesienia nie wyznaczymy z dużą dokładnością.

Zauważymy, że wpływ przyciągania księżyca na pomiary grawimetryczne wynosi maksymalnie około 0,11 mgala, a więc jest na granicy osiągalnej dokładności pomiarowej, wpływ zaś przyciągania przez słońce wynosi maksymalnie 0,05 mgala.

Oprócz zmian wywołanych tymi czynnikami, wartość siły ciężkości w tym samym miejscu zmienia się w czasie, wskutek wpływu różnych przesunięć lokalnych mas wewnątrz ziemi oraz innych zjawisk.

W pierwszej części naszej rozprawy przyjmujemy, że takie czynniki jak wpływ księżyca, słońca, przesunięć mas wewnątrz ziemi itd. nie występują, lub też że ich wpływ jest znany i da się rachunkowo uwzględnić.

Tymi wpływami zajmiemy się w drugiej części rozprawy.

Jeżeli chodzi o rodzaj pomiarów grawimetrycznych, to różniamy: *pomiary bezwzględne, pomiary względne i pomiary interpolacyjne*.

Pomiary bezwzględne wykonujemy na głównych (podstawowych) punktach obserwacyjnych ziemi; ich ilość obecnie nie jest duża, a rozkład niekorzystny.

Pomiary względne wykonujemy na punktach głównych względnych w nawiązaniu do punktów bezwzględnych. W każdym kraju winien być co najmniej jeden punkt główny względny.

Pomiary interpolacyjne wykonujemy na punktach pozostałych, przez zagęszczenie sieci punktów grawimetrycznych w nawiązaniu do punktów głównych względnych.

b. Wzory podstawowe

Pomiary bezwzględne wykonuje się przy pomocy aparatów wahadłowych, umieszczonych w specjalnych obserwatoriach; żmudne prace obserwacyjne trwają często od kilku do kilkadziesiąt lat.

Z pomiarów tych obliczamy przyspieszenie siły ciężkości w danym punkcie (wraz z jego błędem średnim), przyjmując uzyskaną wartość za podstawę do dalszych pomiarów względnych. Znając półokres wahan T i długość wahadła l wyznaczamy g w danym punkcie ze wzorów:

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\varphi^2}{16} + \dots \right).$$

Mierząc T_1 wahadłem do pomiarów względnych na stacji głównej, oraz znając g_1 na tym stanowisku z pomiarów bezwzględnych, wyznaczmy długość wahadła do pomiarów względ-

nych. Idąc na punkt dalszy, mierzymy tym wahadłem T_2 , skąd możemy obliczyć g_2 na tym punkcie ze wzoru:

$$g_2 : g_1 = T_1^2 : T_2^2, \text{ czyli } g_2 = \frac{T_1^2}{T_2^2} g_1.$$

Oczywiście zakładamy, że przyrząd w międzyczasie nie uległ zmianie.

Przyrząd powinna więc cechować stałość, łatwość przenoszenia, mała wrażliwość na czynniki zewnętrzne (temperatura, wilgoć itd.) szczególnie przy pomiarach interpolacyjnych.

Pomiary grawimetryczne należą do pomiarów bardzo precyzyjnych i żmudnych. Przede wszystkim przy pomiarach wahadłowych musi być wyznaczony z bardzo wielką dokładnością okres wahanja wahadła, o ile chcemy uzyskać wymaganą dokładność $\pm 0,1$ mgala, lub nawet większą.

Przy założeniu, że do pomiarów wahadłowych korzystamy z wahadła o półokresie wahań 1 sekunda, możemy przyjąć dokładność wyznaczenia czasu wahanja $1 \cdot 10^{-8}$ sek. (ażeby osiągnąć dokładność $\pm 0,02$ mgala).

Przy pomiarach wahadłowych — zarówno na punktach głównych, jak i na pośrednich — musimy uwzględnić wpływ powietrza, ruch statywu, wpływ temperatury, wpływ ruchu zegara, wpływ amplitudy wahanja, mikrosejsmiczne ruchy ziemi, i wiele innych czynników. A więc surowe pomiary musimy poprawić ze względu na te wpływy, a otrzymaną stąd wielkość T możemy wykorzystać do wyznaczenia g .

Oczywiście, każda stacja grawimetryczna musi mieć znaną wysokość ponad poziomem morza i (o ile to możliwe) dość dokładne współrzędne geograficzne.

Pomiary grawimetryczne powinny być rozłożone symetrycznie wzdłuż równoleżników i południków oraz (ze względu na późniejsze redukcje) rozmieszczone tak, ażeby był możliwy podział na stacje lądowe, przybrzeżne i morskie, łącznie ze stacjami na wyspach.

c. Instrumenty i ich dokładność

Pomiary bezwzględne oraz względne wykonywujemy tylko przy pomocy wahadeł (rewersyjnych, 4-wahadeł Sternecka itd.).

Na punktach pośrednich, do pomiarów interpolacyjnych używamy rozmaitych grawimetrów interpolacyjnych, których istnieje cały szereg, o dokładności od 1 do 0,01 mgala. Wymienimy niektóre z nich:

Grawimetr Haalcka, oparty na zasadzie barometrycznej; przyrząd ciężki — wymaga dobrych dróg do transportu, i daje wartość g z dokładnością 1 mgala. Zaletą tego instrumentu jest to, że można go używać do pomiarów grawimetrycznych na morzu.

Grawimetr Nörgaarda, oparty na zasadzie barometrycznej, może być stosowany do pomiarów na lądzie i na morzu.

Okolo 10 grawimetrów (opartych na zasadzie statycznej), przy pomocy których otrzymuje się g z dokładnością większą, niż 1 mgal; (grawimetry: Isinga i Ureliusa, Trumana, Mott-Smitha, Thyssena, Lindblada, Wrighta, Gulf Oil Refining Company, Humble Oil and Refining Company, Grafa).

Grawimetr Grafa daje dokładność okolo $\pm 0,1$ mgala, jest łatwy do transportu, zabiera mało czasu na wykonanie obserwacji, a więc ma wszystkie cechy wymagane od przyrządu interpolacyjnego na lądzie stałym. Zasięgiem swoim może objąć obszar państwa średniej wielkości, jak Polska, Francja, Rumunia itd.

W krajach mało uprzemysłowionych, na pustyniach i w kolo- niach przyrządami używanymi do wyznaczania g są grawimetry P. Lejaya lub F. Holwecka. Dokładność osiągana tymi instrumen- tami zawiera się w granicach od $\pm 1,0$ do $\pm 3,0$ mgala.

Wymienione wyżej instrumenty nadają się jedynie do wyko- nywania pomiarów na lądzie (z wyjątkiem grawimetru Haalcka i Nörgaarda).

Powierzchnia ziemi jest jednak w przeważającej części po- kryta wodami. Mimo to, dzięki F. A. Vening-Meineszowi, możemy przy pomocy jego podwójnego wahadła wykonywać pomiary przyspieszenia siły ciężkości, montując przyrząd w łodzi podwod- nej, która w czasie pomiaru zanurza się okolo 20—40 m pod po- wierzchnię wody. Takie pomiary muszą doznawać szeregu popra- wek, np. ze względu na ruch fal, kurs łodzi podwodnej i wiele innych przyczyn.

Dokładność osiągnięta podczas pomiarów podwodnych przez Vening-Meinesza wynosi okolo $\pm 4,0$ mgala.

Moim zdaniem grawimetry Haalcka i Nörgarda powinny pozwolić na wyznaczenie przyspieszenia siły ciężkości na morzu z dokładnością okolo $\pm 1,0$ — $\pm 2,0$ mgala.

Dotychczasowe grawimetry są oparte bądź na metodzie dy- namicznej bądź też statycznej; nie wprowadzono jeszcze w życie przyrządu pracującego na zasadzie dynamiczno-statycznej (prócz próby w Szwecji).

Teoretycznie wydaje mi się, że przyrząd Grafa można by przebudować, opierając się o zasadę dynamiczno-statyczną, lecz nie wiadomo, czy nie wynikłyby jakieś trudności konstrukcyjne.

Wiadomo jest, że każdy dobry przyrząd grawimetryczny w ostatecznej formie użytkowej musiał ulec szeregowi próbnych doświadczeń i przeróbek, wymagających kilku, a nawet kilkunastu lat.

Taki instrument można będzie wmontować do łodzi podwodnej, jako podwójny grawimetr Grafa, o czym bliżej będzie mowa w rozdziale VI. (Próby w Szwecji nie były wykonywane przy pomocy grawimetru Grafa).

Do lokalnych zagęszczeń można używać *wagi skręceń*, lecz efekt pomiarowy będzie bardzo mały z powodu trudności transportowych narzędzia i uciążliwych przygotowań na stanowisku.

Dla konstrukcji instrumentu, z góry musimy założyć, że dany przyrząd interpolacyjny musi pracować na określonym obszarze (np. jednego państwa), ażeby warunki klimatyczne, transportowe itd. były mniej więcej jednakowe.

Osobnym zagadnieniem będzie rozwiązanie tego problemu dla obszarów oceanicznych.

d. Gęstość punktów grawimetrycznych

Przy obecnej gęstości punktów głównych z pomiarów bezwzględnych i względnych, musimy stwierdzić, że liczba ich powinna być większa, zaś rozkład odpowiedniejszy.

Gęstość punktów grawimetrycznych powinna zależeć od rozkładu mas w skorupie ziemskiej. Pomiary powinny być wykonane i w miejscach o znacznych anomaliach przyspieszenia siły ciężkości.

Na podstawie dotychczasowych materiałów grawimetrycznych, można już mniej więcej określić położenie przyszłych stanowisk grawimetrycznych. W pierwszym etapie na powierzchni ziemi powinno być 12 500 punktów interpolacyjnych, co daje jeden punkt na około 40 000 km². Gęstość ta, w krajach w których przeprowadzono triangulację, będzie odpowiadała mniej więcej gęstości punktów Laplace'a.

W drugim etapie powinno się dążyć do osiągnięcia około 25 000 punktów. Materiał z pierwszego etapu zezwoli nam już na dość dobre wyznaczenie geoidy, co jest głównym zadaniem geodezji.

ROZDZIAŁ II

REDUKCJA POMIARÓW GRAWIMETRYCZNYCH NA GEOIDĘ

a. Metody, ich dokładność i zastosowania

Punkty grawimetryczne, na których wyznaczyliśmy g , zazwyczaj nie znajdują się na powierzchni mórz (w poziomie średnim mórz)—lecz w różnych wysokościach, i to na lądzie zazwyczaj ponad, zaś na morzach (i w depresjach) poniżej poziomu morza.

Wartości g uzyskane z pomiarów, przed użyciem ich do wyznaczenia geoidy, muszą doznać poprawek redukcyjnych.

Metod redukcji jest wiele, ale nie wszystkie nadają się do celów geodezyjnych: niektóre ze względu na niewystarczający stopień dokładności, inne — gdyż nie spełniają wymagań teorii potencjału; niektóre znowu nie znalazły zastosowania w geodezji ze względu na uciążliwość ich stosowania w praktyce.

W niniejszym rozdziale omówimy w skrócie metody redukcji z zaznaczeniem, które z nich nadają się do wyznaczenia geoidy i w jakim wypadku.

1. Redukcja Faye'a (redukcja wolno-powietrzna)

Przypuśćmy, że stacja grawimetryczna znajduje się w powietrzu na wysokości h ponad poziomem morza, t. zn., że pomiędzy stacją i poziomem morza nie ma żadnej masy ziemi. Uwzględniając wówczas tylko główny wyraz rozwinięcia dla g , otrzymamy przyspieszenia g_0 dla poziomu morza:

$$g_0 = k \frac{M}{r^2},$$

gdzie k jest stałą grawitacyjną, M jest masą ziemi, r jest odległością rzutu punktu na poziom morza od środka ziemi.

Tak więc na wysokości h nad poziomem morza będziemy mieli:

$$g_h = k \frac{M}{(r+h)^2} = k \frac{M}{r^2} \left[1 - \frac{2h}{r} + \dots \right] = g_0 \left(1 - \frac{2h}{r} + \dots \right)$$

Zatem

$$g_0 - g = \frac{2gh}{r} - \frac{3gh^2}{r^2} \dots = \frac{2gh}{r} \left[1 - \frac{3h}{2r} + \dots \right]$$

a w przybliżeniu

$$g_0 - g \cong \frac{2gh}{r} = 0,000\,308\,6\,h \text{ cm/sek}^2, \quad (h \text{ w metrach}),$$

lub

$$g_0 - g \cong 0,308\,6\,h \text{ mgala}, \quad (h \text{ w metrach}).$$

Dokładniejszy wzór ma postać:

$$\Delta g = g_0 - g = (0,000\,308\,6 - 0,000\,000\,21 \cos 2\varphi) h \text{ cm/sek}^2.$$

Przy założeniu, że pomiary grawimetryczne zostały wykonane z dokładnością $\pm 0,1$ mgala lub większą, należy przy tej redukcji znać wysokość stacji grawimetrycznej nad poziomem morza z dokładnością około $\pm 0,30$ m lub większą.

2. Redukcja Bouguera i redukcja topograficzna

Pomiędzy stanowiskiem grawimetrycznym w wysokości h a poziomem morza znajdują się jednak masy ziemskie.

Uwzględniając wpływ tych mas na wartość g , otrzymuje się wraz z poprawką Faye'a:

$$\Delta g' = g_0' - g = \frac{2gh}{r} - \frac{3}{2} \frac{\delta}{\delta_m} \frac{g}{r} h = \frac{2gh}{r} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\delta}{\delta_m} \right),$$

gdzie δ — gęstość mas ponad poziomem morza, zaś δ_m — średnia gęstość ziemi. Jest to pierwszy przybliżony wzór Bouguera.

Ponieważ w okolicy stanowiska na ogół teren nie jest równy, przeto trzeba jeszcze uwzględnić redukcję topograficzną. W tym celu teren w okolicy stacji dzielimy (na mapie) na walce o coraz to większych promieniach i podzielimy na 8 sektorów. W każdym sektorze poszczególnego walca wyznaczamy średnią wysokość i obliczamy wpływ na g mas, znajdujących się ponad stacją, o ile średnia wysokość sektora jest większa niż h , albo też obliczamy wpływ ubytku mas, gdy średnia wysokość sektora jest mniejsza niż h .

Sumując wpływ mas we wszystkich sektorach otrzymamy redukcję topograficzną, która po dodaniu do redukcji Bouguera daje tzw. poprawioną redukcję Bouguera:

$$g_0'' - g = \frac{2gh}{r} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial m} \right) + (g' - g),$$

gdzie

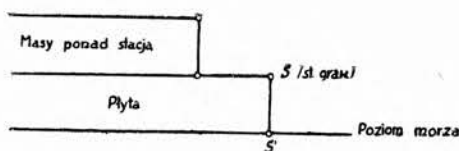
$$\Delta g'' = g' - g$$

jest redukcją topograficzną.

Widzimy, że redukcja Bouguera będzie wtedy dokładna, gdy będziemy znali dokładnie ∂ i ∂_m , tj. gęstość mas ponad poziomem morza i średnią gęstość ziemi. Redukcja ta będzie bardzo niedokładna gdy h jest duże, a przyjęte wartości ∂ i ∂_m nie odpowiadają rzeczywistości.

3. Redukcja Poincaré'go lub Preya

Biorąc pod uwagę rysunek obok, na tę redukcję składają się następujące czynności: Najpierw obliczamy topograficzną redukcję $\Delta g''_s$, następnie odejmujemy wpływ płyty, czyli uwzględniamy redukcję Bouguera $\Delta g'_s$, w dal-



Rys 1

szym ciągu uwzględniamy redukcję Faye'a Δg . Następnie zaś z powrotem uwzględniamy wpływ płyty, czyli ujemną redukcję Bouguera $\Delta g'_{s'}$ i redukcję topograficzną $\Delta g''_{s'}$.

Redukcja Poincaré'go będzie więc wynosiła:

$$\Delta g_{\text{Poincaré}} = \Delta g + \Delta g'_s \text{ (ujemne)} + \Delta g'_{s'} \text{ (ujemne)} + \Delta g''_s + \Delta g''_{s'} \text{ (ujemne)}.$$

Ostatnie dwa wyrazy możemy pominąć, ponieważ $\Delta g''_s \cong -\Delta g''_{s'}$. Ostatecznie otrzymamy:

$$\Delta g_{\text{Poincaré}} = \frac{2gh}{r} - (b + b'),$$

gdzie

$$b \cong b' = \Delta g'.$$

Widzimy, że przy tej redukcji pozostają nieuwzględnione masy ponad poziomem morza, nie będzie zatem można stosować

prawa Greena do wyznaczenia geoidy, czego nie wziął pod uwagę F. Hopfner.

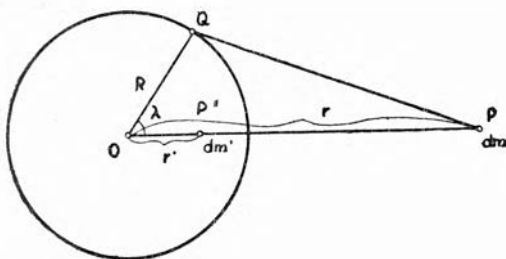
Dokładność omawianej redukcji zależy od wielkości h i od przyjętych wartości dla δ i δ_m .

4. Redukcja Rudzkiego

Metoda Rudzkiego daje możliwość rachunkowego przesunięcia mas, które znajdują się ponad geoidą, na geoidę lub do jej wnętrza, w taki sposób, że kształt geoidy przez tę operację nie zmieni się (lub zmieni się tak mało, że zmianę tę można pominąć); innymi słowy potencjał siły ciężkości ziemi na powierzchni geoidy nie zmieni się. (Natomiast zmieni się potencjał zewnątrz geoidy, oraz zmienia się przyspieszenie siły ciężkości na samej powierzchni geoidy).

W następstwie tej redukcji masa ziemi będzie nieco mniejsza. Ponieważ kształt geoidy mało się różni od kształtu elipsoidy obrotowej, lub nawet kuli, można wyprowadzić wzory dla tych powierzchni zamiast dla powierzchni geoidy.

Dla kuli



Rys. 2.

Niech będzie dany zewnątrz geoidy punkt P o masie dm . Wyobraźmy sobie, że masę tę przesunęliśmy wzdłuż linii PO do punktu P' , i niech teraz ta masa wynosi dm' . Z rysunku widzimy, że potencjał masy dm w punkcie P na dowolny punkt Q wynosi:

$$\frac{k dm}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2 r R \cos \lambda}},$$

zaś potencjał masy dm w punkcie P na dowolny punkt Q ,

$$\frac{k dm'}{\sqrt{r'^2 + R^2 - 2 r' R \cos \lambda}}.$$

Jeśli przez taką zamianę powierzchnia geoidy i potencjał na jej powierzchni mają być niezmienione, musi zachodzić równość

$$\frac{k dm}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2 r R \cos \lambda}} = \frac{k dm'}{\sqrt{r'^2 + R^2 - 2 r' R \cos \lambda}},$$

czyli

$$dm' = \frac{R}{r} dm \text{ i } r' = \frac{R^2}{r}.$$

Dla elipsoidy

Jeżeli geoidę zastąpimy elipsoidą i przyjmiemy, że V jest potencjałem ciężkościowym ziemi, A jest potencjałem mas zewnętrznych geoidy, I jest potencjałem mas przeniesionych do wnętrza albo potencjałem mas rozłożonych na powierzchni geoidy, W jest funkcją sił mas zamkniętych geoidą po całkowitej ich translokacji, to będziemy mieli:

$$W = V - A + I.$$

Oznaczając

$$g' = - \frac{\partial V}{\partial z},$$

otrzymamy według Rudzkiego:

$$g = g' - h \frac{\partial g}{\partial n} - \left(\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \right).$$

Ponieważ

$$- h \frac{\partial g}{\partial n} \approx \frac{2 g' h}{r},$$

oraz

$$\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial (I - A)}{\partial z} = \frac{\partial (I - A)}{\partial \rho} \cdot \frac{d \rho}{d n},$$

gdzie n — normalna do powierzchni, zaś ρ — promień wodzący, więc możemy obliczyć dla kuli:

$$I = \int_M \frac{dm'}{l'} = R \int_M \frac{dm}{r l'}; \quad A = \int_M \frac{dm}{l}.$$

Dla elipsoidy zaś:

$$I = \sum_{k=0}^{h=\infty} \beta_k \frac{R_k(\rho_0)}{S_k(\rho_0)} S_k(\rho) M_k(\mu) N_k(v) \int_M S_k(\rho') M_k(\mu') N_k(v') dm$$

$$A = \sum_{k=0}^{h=\infty} \beta_k R_k(\rho) M_k(\mu) N_k(v) \int_{M_1} S_k(\rho') M_k(\mu') N_k(v') dm +$$

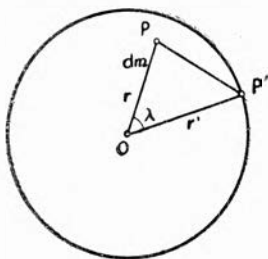
$$+ \sum_{k=0}^{h=\infty} \beta_k S_k(\rho) M_k(\mu) N_k(v) \int_{M_2} R_k(\rho') M_k(\mu') N_k(v') dm.$$

Wielkości tu podane zostaną objaśnione w III rozdziale.

Metoda Rudzkiego dotychczas nie znalazła jeszcze praktycznego zastosowania, lecz ostatnio w Czechosłowacji zaczęto ją stosować.

5. Dwie metody kondensacji Helmerta

Pierwsza metoda Helmerta



Rys. 3

W tej metodzie wszystkie masy, znajdujące się na zewnątrz geoidy, zostają przesunięte rachunkowo do głębokości 21 km (co mniej więcej odpowiada spłaszczeniu południka). W tym przypadku potencjał wynosi:

$$V = k \frac{dm}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \lambda}} = k \frac{dm}{r' \sqrt{1 - \frac{2r}{r'} \cos \lambda + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}}$$

przy czym $r' > r$.

Takie przesunięcie mas ma tę wadę, że powierzchnia badanej geoidy, po dokonaniu jej kondensacji, nieco się zmienia: według oszacowania Helmerta odstęp między powierzchniami wchodzącymi

w rachubę wynosi około 10 m. Zmiana siły ciężkości z tego powodu jest znaczna. Redukcja według metody kondensacji Helmerta jest jedną z redukcji izostatycznych.

Druga metoda Helmerta

Według drugiej metody redukcję przeprowadza się na geoidę; tę redukcję przeprowadzał już Stokes. Po dokonaniu redukcji, otrzymana geoida odbiega od rzeczywistej maksymalnie o 3 m, przeciętnie tylko o 1 m.

Obie metody Helmerta nie znalazły praktycznego zastosowania.

6. Metoda Brillouina

Brillouin przyjmuje taką równoległą powierzchnię, która znajduje się w odległości około 10 km

$$\left(\frac{100 \text{ m/sek}^2}{g \text{ (w m/sek}^2\text{)}} km \right)$$

ponad powierzchnię geoidy, i na tę powierzchnię redukuje obserwowane wartości g . Metoda ta nie nadaje się do naszego zadania.

7. Metoda Brunsa i Bowie'go

Po dokonaniu redukcji g na geoidę otrzymamy g_0 , zaś ze wzoru normalnego na przyspieszenie siły ciężkości na sferoidzie mamy γ .

Według uchwały Międzynarodowej Unii Geodezyjno-Geofizycznej, wzór do obliczenia γ ma postać:

$$\gamma_0 = 978,049 (1 + 0,005\,288\,4 \sin^2 \varphi - 0,000\,005\,9 \sin^2 2 \varphi).$$

Różnicę między tymi wartościami ($g_0 - \gamma$) nazywamy *anomalią przyspieszenia siły ciężkości*. Lecz tych wartości nie możemy ze sobą porównywać, gdyż należą one do dwóch różnych powierzchni (geoida i sferoida).

Pierwszy Stokes, a za nim Bruns, podał wzór na obliczenie odstępów N geoidy od sferoidy na podstawie anomalii przyspieszenia siły ciężkości ($g_0 - \gamma$).

Znając N , po dodaniu do wartości g na geoidzie redukcji Faye'a z przeciwnym znakiem, otrzymamy wartość g na sferoidzie.

Taką redukcję nazywamy popularnie *redukcją Bruns*.

W podobny sposób przeprowadza redukcję Bowie, lecz przenosi on przyspieszenie siły ciężkości z rzeczywistej geoidy na izostatycznie zdeformowaną.

Pomijając fakt, że wzory mają odwrotne znaki, zaznaczamy, że obie metody nie znalazły praktycznego zastosowania ze względu na nieznaną wielkość N , którą pragniemy uprzednio wyznaczyć.

8. Metoda izostazji

Obecnie przy wyznaczaniu geoidy z pomiarów grawimetrycznych stosuje się w geodezji tylko *hipotezę izostazji*, różnie sformułowaną przez poszczególnych badaczy.

Wielu geologów, sejsmologów i geofizyków zarzuca (stosowaniu przez geodetów tej hipotezy) zbyt formalne podejście do sprawy, trzeba jednak stwierdzić, że hipoteza izostazji została zaadoptowana przez świat geodezyjny, gdyż dotychczasowe obserwacje grawimetryczne w ogólności potwierdzają jej słusność.

Obecnie w geodezji istnieje rozbieżność poglądów, która z hipotez jest lepsza: Pratt-Hayforda, Airy-Heiskanena, czy Vening-Meinesza; oraz czy hipotezę izostazji można przyjmować na całym obszarze ziemi.

Przed przystąpieniem do opisu metod redukcji podamy zasadę izostazji.

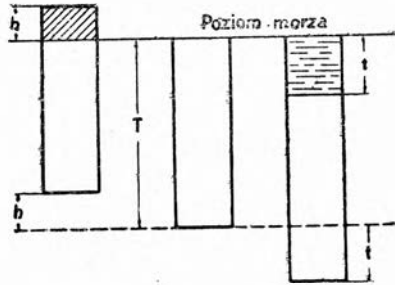
Przyjmuje się, że na pewnej głębokości T pod powierzchnią ziemi istnieje stan równowagi, skąd wynika, że pod górami znajduje się niedobór mas, zaś pod oceanami nadmiar mas.

Założenie Pratt-Hayforda

Przyjmuje się tu, że:

- 1) Kompensacja jest równomierna w tym sensie, że gęstość pod górami jest mniejsza, niż pod równinami.

- 2) Kompensacja jest całkowita, tzn. że każdemu wzniesieniu i każdej dolinie, chociażby one były małe, odpowiada kompensacyjny podziemny niedobór lub nadwyżka mas.
- 3) Warstwa kompensacyjna leży bezpośrednio pod górami.
- 4) Głębokość powierzchni wyrównawczej jest wszędzie jednaka.
- 5) Głębokość kompensacyjna jest liczona nie od poziomu morza, lecz od powierzchni fizycznej ziemi; według tego założenia pod górami o wysokości, na przykład 4 km, powierzchnia wyrównawcza leży o 9 km wyżej niż pod powierzchnią morza o głębokości 5 km.



Rys. 4

Koncepcja Hayforda

Niech δ oznacza gęstość masy górskiej, H wysokość, T głębokość do powierzchni wyrównawczej, δ' ujemną gęstość kompensowanych niedoborów mas. Wówczas:

$$\delta' = \frac{H}{T} \delta$$

i

$$Z = 2 \pi k \delta \{ \sqrt{H_2^2 + r_1^2} - \sqrt{H_2^2 + r_2^2} - \sqrt{H_1^2 + r_1^2} + \sqrt{H_1^2 + r_2^2} \},$$

gdzie Z oznacza pionowe przyciąganie pierścienia walca o promieniach r_2 i r_1 oraz wysokości $H_2 - H_1$.

Wzór ten możemy zastosować do wyznaczenia wpływu zarówno rzeczywistych jak i kompensacyjnych mas wewnątrz pierścienia walca.

Oznaczając przez Z_1 pierwszą część (rzeczywistą) przyciągania i przez Z_2 drugą część (kompensacyjną), mamy:

$$Z_1 = 2 \pi k \delta \{ \sqrt{H_2^2 + r_1^2} - \sqrt{H_2^2 + r_2^2} - \sqrt{H_1^2 + r_1^2} + \sqrt{H_1^2 + r_2^2} \},$$

$$Z_2 = -2 \pi k \frac{H}{T} \delta \{ \sqrt{T^2 + r_1^2} - \sqrt{T^2 + r_2^2} - \sqrt{H_1^2 + r_1^2} + \sqrt{H_1^2 + r_2^2} \}.$$

Przy $H_1 = 0$, mamy:

$$Z_1 = 2 \pi k \delta \left\{ \sqrt{H_2^2 + r_1^2} - \sqrt{H_2^2 + r_2^2} - r_1 + r_2 \right\},$$

$$Z_2 = -2 \pi k \frac{H}{T} \delta \left\{ \sqrt{T^2 + r_1^2} - \sqrt{T^2 + r_2^2} - r_1 + r_2 \right\}.$$

Gdy $r_1 = 0$ (tj. gdy walec jest pełny) i przy oznaczeniu $r_2 = r_1$ oraz $H_2 = H$, otrzymujemy:

$$Z_1 = 2 \pi k \delta \left\{ H + r - \sqrt{H^2 + r^2} \right\},$$

$$Z_2 = -2 \pi k \frac{H}{T} \delta \left\{ T + r - \sqrt{T^2 + r^2} \right\}.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń pomocniczych:

$$\operatorname{tg} x = \frac{H}{r} \quad \text{ i } \quad \operatorname{tg} y = \frac{T}{r},$$

będziemy mieli:

$$Z_1 = 2 \pi k \delta \left\{ 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\} H,$$

$$Z_2 = -2 \pi k \delta \left\{ 1 - \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right\} H.$$

W praktyce obliczenie przeprowadzamy w sposób następujący: dzielimy obszar wokół stacji grawimetrycznej, jako środka, na strefy przy pomocy kół współśrodkowych. Strefy z kolei dzielimy na sektory przy pomocy promieni wychodzących ze stacji grawimetrycznej, i wyznaczamy średnią wysokość obszaru dla każdego czworoboku podziałowego.

Hayford obliczył tablice poprawek na redukcję topograficzną oraz kompensację izostatyczną dla każdego sektora według argumentu wysokości odnośnego sektora. O ile chodzi o obszar mórz, to trzeba uwzględnić ujemny wpływ niedoboru mas wód i dodatni wpływ kompensacji nadwyżki mas stałych pod morzami.

Widzimy że przy metodzie izostazji nie mamy żadnego pominięcia mas, lecz tylko ich przemieszczenie, co powoduje małe zmiany powierzchni geoidy, i na tej podstawie możemy wykonać redukcję wokół stacji grawimetrycznej na całej powierzchni ziemi.

Dla początkowych stref (od A do 0) rachunek wykonuje się na płaszczyźnie, dla dalszych (od 18 do 1-ej strefy) uwzględnia się krzywiznę ziemi.

Oznaczając przez θ odległość kątową pomiędzy stacją A a kompensacyjnym elementem masy B, przez a łuk odpowiadający kątowi θ , przez h głębokość kompensowanego elementu masy oraz przez D odległość AB, to składowa pionowa przyciągania wyniesie:

$$dZ = \frac{dm \cdot \sin \beta}{D^2}$$

gdzie

$$D^2 = a^2 + h^2 - 2ah \sin \frac{\theta}{2}, \text{ zaś } \beta = \frac{\theta}{2} + \arcsin \frac{h \cos \frac{\theta}{2}}{D},$$

Zatem

$$dZ = E \cdot dm,$$

gdzie:

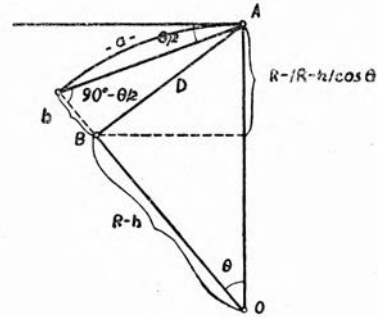
$$E = \frac{\frac{a^2}{2R} + h \cos \theta}{\left(a^2 + h^2 - 2ah \sin \frac{\theta}{2}\right)^{3/2}},$$

Jeżeli więc E pomnożymy przez $2\pi k \delta$, albo E' przez $2\pi k \delta'$, to otrzymamy wpływ pierścienia walca na przyspieszenie siły ciężkości.

W. D. Lambert i G. Cassinis obliczyli główne tablice izostacyjne, w których wielkość E , albo E' , jest rozwinięta, za pomocą funkcji kulistych, z uwzględnieniem wpływów małych wyrażen pominiętych w pierwotnych tablicach o dokładności 0,005 mgala. W praktyce jednak liczymy przy pomocy starych tabel, które dla obecnych pomiarów są wystarczająco dokładne.

Ostatecznie więc mamy:

$$g_i = g + \frac{2H}{r} g + \Delta g_i + \Delta g_i,$$



Rys 5

gdzie jest g zaobserwowaną wartością przyspieszenia, g_i izostatycznie zredukowaną,

$$\frac{2H}{r}g$$

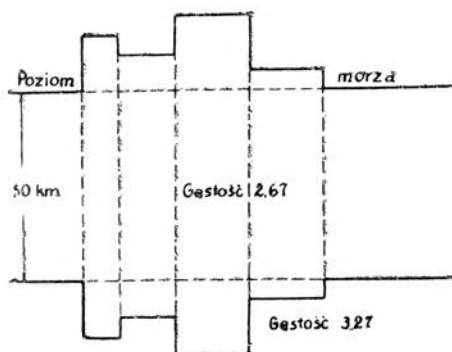
redukcją Faye'a, Δg_i poprawką topograficzną, oraz Δg_i poprawką izostatyczną.

Obecnie specjalny Instytut Izostatyczny w Helsinkach pod kierownictwem prof. dr. W. Heiskanena opracowuje tablice do redukcji izostatycznej, wprowadzając między innymi drobne poprawki w metodzie, podanej przez Hayforda, a mianowicie stosuje inny podział na strefy. Prócz tego Hayford do teoretycznego przyspieszenia γ_0 (na sferoidzie) dodawał poprawki z odwrotnym znakiem, i otrzymywał g_e dla miejsca obserwacji, wartość $g - g_e$ dawało mu anomalie przyspieszenia siły ciężkości; wartość ta w niczym nie różni się od $g_i - \gamma_0$, gdyż anomalia przyspieszenia siły ciężkości jest ta sama w obu przypadkach.

Hipoteza Airy

Airy przyjmuje, że bloki gór pływają w magmie, jakby w plastycznej masie, przy czym im góry są wyższe, tym są głębiej zanurzone.

Tu również dzieli się cały obszar wokół stacji grawimetrycznej na strefy i sektory, jak w metodzie Pratt-Hayforda.



Rys. 6

Hipoteza Airy

Dla stref od A do O wykonuje się rachunek jak poprzednio, bez uwzględnienia krzywizny ziemi. Dla zewnętrznych stref od 18 — 13 należy uwzględnić krzywiznę ziemi, jak w koncepcji Pratt-Hayforda. Dla najdalszych stref, od 12 do 1, redukcja według hipotezy Pratt-Hayforda (przy głębokości powierzchni wyrównawczej 2 T) jest prawie równa redukcji Airy (przy średniej kompensacyjnej głębokości T), tak że można używać poprzednio wspomnianych tablic.

Założenie Vening-Meinesza

F. A. Vening-Meinesz podał inną metodę redukcji izostaticznej. Według niej, masy leżące zewnątrz powierzchni mórz przemieszcza się rachunkowo do wnętrza skorupy ziemskiej; z powodu dodatkowego obciążenia masy zanurzają się więc tak głęboko w warstwie magmy, aż nastąpi równowaga hydrostatyczna.

Dalej Vening-Meinesz przyjął, że skorupa ziemska pod ciężarem gór zachowuje się, jak nieskończenie rozległa płyta, która ma stałą gęstość i swobodnie pływa w gęstszym płynie, zgodnie z prawami elastyczności.

Według tego założenia, t. zw. regionalnego, warstwa kompensacyjna nie tylko oddziałuje w kierunku pionowym, lecz i w poziomym i to tym dalej, im grubsza jest skorupa ziemska.

Niech będzie

$$i = \sqrt{\frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{E h^3}{n (d_m - d_k)}} ,$$

gdzie m oznacza współczynnik Poissona, E moduł elastyczności skorupy ziemskiej, d_m gęstość warstwy magmy, d_k gęstość skorupy ziemskiej, h grubość skorupy ziemskiej. Wówczas maksymalne zanurzenie Z_m skoncentrowanej pod punktem P masy wynosi:

$$Z_m = \frac{d_k}{8 (d_m - d_k) l^2} ,$$

zaś

w odległości $x = 0$	zanurzenie $Z = Z_m$
w odległości $x = l$	zanurzenie $Z = 0,647 Z_m$
w odległości $x = 3 l$	zanurzenie $Z = 0,066 Z_m$
w odległości $x = 3,887 l$	zanurzenie $Z = 0,000 Z_m$

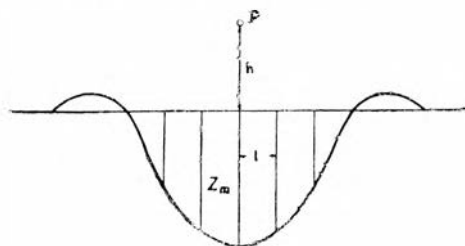


Fig. 2

W większych odległościach amplitudy odkształceń są bardzo małe, tak że można je pominąć.

Na podstawie tych warunków początkowych, pionowe przyciąganie wywierane przez zanurzone masy będzie funkcją wysokości lądu.

Vening-Meinesz robi dwa założenia.

1. że gęstość skorupy ziemskiej jest stała, tak że izostatyczna kompensacja zachodzi podobnie, jak w założeniu Airy-Heiskanena;
2. że gęstość skorupy ziemskiej stopniowo wzrasta, aż osiąga gęstość magmy.

Izostatyczna kompensacja zachodzi w całej skorupie ziemskiej, od górnej powierzchni aż do warstwy magmy; pod górami, w pewnej określonej głębokości, gęstość jest mniejsza niż pod równinami.

Vening-Meinesz przyjął za Jeffreysem, że grubość skorupy ziemskiej wynosi 25 km i obliczył dla obu założeń zanurzenie skorupy ziemskiej w warstwie magmy, jego wpływ na przyspieszenie siły ciężkości, oraz podał współczynniki F_{25} , F_{0-25} , P_{25} , P_{0-25} , przez które należy pomnożyć średnie wysokości rozmaitych stref Hayforda, lub izostatyczną redukcję Hayforda, aby otrzymać wpływ regionalnej kompensacji.

Vening-Meinesz podaje tablice dla

$$P_{25} = \frac{F_{25}}{F_H}; \quad P_{0-25} = \frac{F_{0-25}}{F_H},$$

gdzie F_H oznacza kompensację Hayforda dla $T = 114$ km.

W tych tablicach dla stref 18 — 1 jest zawarty wpływ redukcji topograficznej i kompensacji.

Na podstawie otrzymanych rezultatów sejsmicznych można stwierdzić, że kompensacja według pierwszego założenia jest słuszniejsza. Należy również zauważyć, że przyjmowanie wartości 25 km na grubość skorupy ziemskiej jest za małe.

Karol Jung z Poczdamu w swej publikacji zaleca całkowitą redukcję izostatyczną, która jednak według T. Niethammera daje tak małe poprawki, że praktycznie są one bez znaczenia.

Interesujące uwagi o izostazji podaje również Lambert i inni autorowie.

b. Uwagi

Według Heiskanena, na dokładność izostatycznej anomalii przyspieszenia siły ciężkości oprócz struktury skorupy ziemskiej mają wpływ.

- 1) dokładność wyznaczenia wysokości stacji;
- 2) wybór wzoru użytego do obliczenia γ ;
- 3) rodzaj zastosowanej redukcji izostatycznej (Pratta-Hayforda, Airy-Heiskanena, Vening-Meinesza);
- 4) wartość przyjętej grubości skorupy ziemskiej;
- 5) dokładność stojących do dyspozycji map;
- 6) dokładność wyznaczenia z map wysokości i głębokości;
- 7) dokładność użytych tablic redukcyjnych;
- 8) dokładność redukcyjnych map izostatycznych;
- 9) odstęp geoidy od sferoidy, który musi być uwzględniony przy wyznaczeniu wartości anomalii przyspieszenia siły ciężkości.

Obserwacje wykazują, że na Kaukazie, w Alpach, w Ameryce Północnej lepiej odpowiada hipoteza Airy-Heiskanena, niż Pratta-Hayforda.

Prócz tego z materiału obserwacyjnego wynika, że głębokość powierzchni wyrównawczej w metodzie Pratta-Hayforda, oraz gęstość skorupy ziemskiej według założenia Airy'ego, nie są jednakowe we wszystkich miejscach.

Pomiary sejsmiczne wskazują, że pierwsza nieciągłość gęstości ziemi występuje między 40 — 50 km pod poziomem morza, druga zaś na głębokości około 2900 km.

Geologowie nie mogą dostarczyć geodetom danych o rozkładzie mas skorupy ziemskiej do takiej głębokości, jaka jest im potrzebna. Wyznaczenie rozkładu mas powinni dokonać wspólnym wysiłkiem geodeci, geofizycy, seismolodzy, geolodzy itd.

Metoda izostazji jest tylko środkiem pomocniczym. Jeżeli bowiem całą ziemię pokryjemy punktami grawimetrycznymi i wykonamy izostatyczne redukcje dla wszystkich wyznaczonych wartości g , to w ostatecznym efekcie suma tych redukcji powinna wynieść zero.

Założenie że T jest stałe jest nieuzasadnione.

Obserwacje wskazują, że nie wszędzie jeszcze nastąpił idealny stan izostazji. Trzeba poza tym stwierdzić zmienność T wraz z szerokością geograficzną, oraz wziąć w rachubę niestałość gęstości skorupy ziemskiej i zakłócenie na obszarach wulkanicznych.

W celu zebrania dokładniejszego materiału do wyznaczenia rozkładu mas należy wykonać przy użyciu bardzo dokładnych instrumentów pomiary grawimetryczne w tunelach i kopalniach w różnych głębokościach; należy także przeprowadzić podobne pomiary w łodziach podwodnych również w różnych głębokościach o ile możliwe, na tych samych pionach. Równocześnie powinny być przeprowadzone pomiary sejsmiczne.

Wyżej opisane redukcje dostarczą nam anomalij przyspieszenia siły ciężkości, lub wartości przyspieszenia siły ciężkości, które następnie wykorzystujemy do wyznaczenia geoidy.

ROZDZIAŁ III

WYZNACZENIE GEOIDY Z POMIARÓW GRAWIMETRYCZNYCH

a. Podstawowe pojęcia z teorii potencjału.

Przed omówieniem metod wyznaczania geoidy na podstawie pomiarów przyspieszenia siły ciężkości musimy w skrócie podać niektóre podstawowe pojęcia z teorii potencjału, mające zastosowanie przy rozwiązywaniu naszego zadania.

1. Funkcje harmoniczne

Funkcję $V(x, y, z)$ nazywamy harmoniczną w obszarze T , jeżeli w każdym punkcie we wnętrzu tego obszaru spełnia ona równanie Laplace'a:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

2. Wzór Greena

Pomiędzy dwiema funkcjami $\psi(x, y, z)$ i $\varphi(x, y, z)$ według wzoru Greena zachodzi zależność:

$$\int_T (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) d\tau = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma \dots \quad (1)$$

gdzie $d\tau$ oznacza element objętości obszaru T ograniczony powierzchnią S , $d\sigma$ - element powierzchni S .

3. Funkcje kuliste

Rozpatrzmy harmoniczny wielomian $P_n(x, y, z)$ n -ego stopnia, będący jednorodną funkcją zmiennych x, y, z , czyli wielomian spełniający następujące równania:

$$\Delta P_n = \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$P_n(K_x, K_y, K_z) = K^n P_n(x, y, z).$$

Ilość takich wielomianów n -go stopnia, liniowo od siebie niezależnych, wynosi $2n + 1$.

Najogólniejszy harmoniczny i jednorodny wielomian n -go stopnia posiada postać:

$$P_n = \lambda_n^{(1)} P_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} P_n^{(2)} + \lambda_n^{(3)} P_n^{(3)} + \dots + \lambda_n^{(2n+1)} P_n^{(2n+1)}, \dots \quad (2)$$

gdzie $\lambda_n^{(k)}$ oznaczają rzeczywiste wybieralne współczynniki.

Powyższe wielomiany, przy obrocie układu współrzędnych, zostają harmoniczne i jednorodne.

W układzie współrzędnych biegunowych będzie:

$$\begin{aligned} P_n(x, y, z) &= r^n Y_n(\sin \delta \cos \varphi, \sin \delta \sin \varphi, \cos \delta) = \\ &= r^n Y_n(\sqrt{1-t^2} \cos \varphi, \sqrt{1-t^2} \sin \varphi, t), \end{aligned}$$

przy czym $t = \cos \delta$, czyli możemy napisać:

$$Y_n(\sin \delta \cos \varphi, \sin \delta \sin \varphi, \cos \delta) = Y_n(\delta, \varphi) = Y_n(t, \varphi)$$

Wielomiany Y_n jako funkcje zmiennych δ, φ , nazywamy funkcjami kulistymi.

Funkcja kulista posiada wartość harmonicznej i jednorodnej funkcji $P_n(x, y, z) = 1 \cdot Y_n = Y_n$ na kuli jednostkowej, a więc jest funkcją miejsca na tej kuli.

Najogólniejsza funkcja kulista n -go stopnia ma postać:

$$Y_n = \lambda_n^{(1)} Y_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} Y_n^{(2)} + \lambda_n^{(3)} Y_n^{(3)} + \dots + \lambda_n^{(2n+1)} Y_n^{(2n+1)}, \dots \quad (3)$$

a więc składa się z $2n + 1$ funkcji $Y_n^{(k)}$ od siebie liniowo niezależnych, o $2n + 1$ wybieralnych rzeczywistych współczynnikach $\lambda_n^{(k)}$.

Wartości funkcji kulistej pozostają niezmienione na kuli jednostkowej przy obrocie układu współrzędnych kartezjańskich lub biegunowych; a więc wartość funkcji $Y_n^{(p)}$ jest niezależna od wyboru układu współrzędnych ϑ, φ na kuli jednostkowej.

Ponieważ wielomian

$$P_n(x, y, z) = r^n Y_n(\vartheta, \varphi) = r^n Y_n(t, \varphi),$$

jako funkcja harmoniczna, powinien spełniać równanie Laplace'a, zatem funkcja kulista musi spełniać równanie:

$$\begin{aligned} n(n+1)Y_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ \text{lub} & \\ n(n+1)Y_n + \frac{\partial}{\partial t} \left[(1-t^2) \frac{\partial Y_n}{\partial t} \right] + \frac{1}{1-t^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (4) daje wielomian n -go stopnia Y_n , który jest jednorodny względem

$$\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta$$

lub względem

$$\sqrt{1-t^2} \cos \varphi, \sqrt{1-t^2} \sin \varphi, t.$$

Wyrażając współrzędne kartezjańskie x_1, y_1, z_1 na kuli jednostkowej przez:

$$x_1 = \sin \vartheta \cos \varphi = \sin \vartheta \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \sqrt{1-t^2} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$y_1 = \sin \vartheta \sin \varphi = \sin \vartheta \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = \sqrt{1-t^2} \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2},$$

$$z_1 = \cos \vartheta = \cos \vartheta = t$$

otrzymamy:

$$P_n(x_1, y_1, z_1) = Y_n = \sum_{p=-n}^{p=+n} X_n^{(p)} e^{ip\varphi}, \dots \quad (5)$$

gdzie $X_n^{(p)}$ zależy tylko od ϑ albo od t , a mianowicie jest wielomianem od $\cos \vartheta$, albo od t , oraz $\sin \vartheta$, albo od $\sqrt{1-t^2}$.

Wyrazy o parzystej potędze p zawierają $\sin \delta$, albo $\sqrt{1-t^2}$, zaś wyrazy o nieparzystej potędze zawierają $\cos \delta$, albo t .

Jeśli wartość (5) wstawimy w równanie (4), to otrzymamy:

$$\sum_{p=-n}^{p=n} \left\{ n(n+1) X_n^{(p)} + \frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dX_n^{(p)}}{dt} \right] - \frac{p^2}{1-t^2} X_n^{(p)} \right\} e^{ip\varphi} = 0, \quad (6)$$

Ponieważ równanie to powinno być niezależne od φ , więc

$$n(n+1) X_n^{(p)} + \frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dX_n^{(p)}}{dt} \right] - \frac{p^2}{1-t^2} X_n^{(p)} = 0, \quad (7)$$

jest to równanie różniczkowe 2. rzędu.

Ogólna całka tego równania jest przestępna. Lecz istnieje całka szczególna, która jest wielomianem wielkości $\sqrt{1-t^2}$, i która jest szukanym rozwiązaniem.

Ponieważ równanie różniczkowe przy zamianie p na $(-p)$ nie zmienia się, więc zachodzi relacja $X_n^{(-p)} = k X_n^{(p)}$.

Biorąc za p liczby całkowite pomiędzy $-n$ i n , otrzymamy $2n+1$ podstawowych funkcji kulistych

$$Y_n(t) = C X_n^{(p)} e^{ip\varphi}.$$

A więc dla $p = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ będzie $n+1$ funkcji o postaci:

$$X_n^{(0)}, X_n^{(1)} e^{i\varphi}, X_n^{(2)} e^{i2\varphi}, \dots, X_n^{(n)} e^{in\varphi}$$

zaś dla $p = -1, -2, -3, \dots, -n$ będzie n funkcji o postaci

$$X_n^{(1)} e^{-i\varphi}, X_n^{(2)} e^{-i2\varphi}, \dots, X_n^{(n)} e^{-in\varphi}.$$

Przez dodanie lub odjęcie tych $(n+1)$ i n funkcji, otrzymujemy $2n+1$ podstawowych funkcji kulistych $Y_n^{(p)}$, które są znane, pod nazwą funkcji Laplace'a:

$$X_n^{(0)}, X_n^{(1)} \cos \varphi, X_n^{(2)} \cos 2\varphi, \dots, X_n^{(p)} \cos p\varphi, \dots, X_n^{(n)} \cos n\varphi. \quad (8)$$

$$X_n^{(1)} \sin \varphi, X_n^{(2)} \sin 2\varphi, \dots, X_n^{(p)} \sin p\varphi, \dots, X_n^{(n)} \sin n\varphi.$$

Dalszym zadaniem jest znalezienie całki szczególnej $X_n^{(p)}$ równania różniczkowego (7), która jest jednorodnym wielomianem wielkości $\sqrt{1-t^2}$ oraz t .

Poincaré podał rozwiązanie tego równania, przedstawiając wielomian $X_n^{(p)}$ jako funkcję od $X_n^{(0)}$. Podstawiając w równaniu (7) $p=0$, otrzymamy liniowe równanie różniczkowe 2. stopnia:

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dX_n^{(0)}}{dt} \right] + n(n+1) X_n^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (9) jest identyczne z następującym równaniem:

$$(t^2-1) \frac{d^2 X_n^{(0)}}{dt^2} + 2t \frac{dX_n^{(0)}}{dt} - (n+1) X_n^{(0)} = 0, \quad (9a)$$

dla którego wyrażenie

$$X_n^{(0)} = C \frac{d^n (t^2-1)^n}{dt^n} \quad (9b)$$

jest całką szczególną. Po wyznaczeniu stałej C , mamy:

$$X_n^{(0)} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (t^2-1)^n}{dt^n}. \quad (10)$$

Te funkcję nazywamy wielomianem Legendre'a.

Równanie (10) jest prostą funkcją kulistą; przy pomocy prostych funkcji kulistych dadzą się wyrazić funkcje kuliste Laplace'a.

Pierwiastki równania $X_n^{(0)} = 0$, które jest równaniem n -go stopnia, są rzeczywiste i leżą między $+1$ i -1 ; łatwo to udowodnić, stosując do równania $(t^2-1)^n = 0$ twierdzenie Rolle'a, przy czym n pierwiastków ma wspólną wartość $+1$, zaś pozostałe n pierwiastków ma wspólną wartość -1 .

Różniczkując kolejno równanie $(t^2-1)^n$, otrzymujemy równania, które mają tylko pierwiastki rzeczywiste, leżące w przedziale $+1$ i -1 . Jest to ważne dla równania

$$\frac{d^n (t^2-1)^n}{dt^n} = 0,$$

a więc i dla równania $X_n^{(0)} = 0$. Pierwiastki tej funkcji są ponadto różne od siebie. Można udowodnić, że $X_n^{(0)}(t)$ znika dla $|t| < 1$ przy $n \rightarrow \infty$, ponieważ dla każdej wartości o wskaźniku n $X_n^{(0)}(+1) = +1$, a więc $X_n^{(0)}(+1)$ dla $n \rightarrow \infty$ ma graniczną wartość $+1$; natomiast $X_n^{(0)}(-1) = (-1)^n$ nie ma zatem określonej wartości granicznej.

Jeśli w równaniu różniczkowym (9) dopuścimy dla t wartości większe, od 1, to będzie można podać drugą całkę szczególną, która dla $t = 1$ i $t = -1$ będzie logarytmicznie nieskończoną, znikać zaś będzie dla $t \rightarrow \infty$.

Ta całka szczególna definiuje funkcje kuliste 2. rodzaju, które oznaczamy przez $Q_n^{(0)}$.

Funkcja kulista $Q_n^{(0)}$ musi spełniać równanie (9a), a więc:

$$(t^2 - 1) \frac{d^2 Q_n^{(0)}}{dt^2} + 2t \frac{d Q_n^{(0)}}{dt} - n(n+1) Q_n^{(0)} = 0. \quad (11)$$

W ostatecznym rozwiązaniu otrzymujemy:

$$Q_n^{(0)} = X_n^{(0)} \int_{\infty}^t \frac{-dt}{(t^2 - 1) X_n^{(0)^2}},$$

Dla $t \rightarrow \infty$ mamy:

$$Q_n^{(0)} = \frac{1}{(2n+1)t^{n+1}} \rightarrow 0.$$

Wartości funkcji kulistych $X_n^{(p)}$ mają postać:

$$X_n^{(p)} = \frac{1}{2^n (n+p)!} (t^2 - 1)^{p/2} \frac{d^{n+p} (t^2 - 1)^n}{dt^{n+p}}; \quad p = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (13)$$

lub

$$X_n^{(p)} = \frac{1}{2^n (n-p)!} (t^2 - 1)^{-p/2} \frac{d^{n-p} (t^2 - 1)^n}{dt^{n-p}}; \quad p = 1, 2, 3, \dots, n;$$

oraz

$$Q_n^{(p)} = X_n^{(p)} \int_{\infty}^t \frac{-dt}{(t^2 - 1) X_n^{(p)^2}}. \quad (14)$$

Jeśli są dane dwie ogólne funkcje kuliste $Y_n(\vartheta, \varphi)$ i $Y_{n'}(\vartheta, \varphi)$, rzędu n , i n' odpowiednio ($n \neq n'$), to całka rozpostarta na pole S na kuli jednostkowej wynosi:

$$\int_S Y_n Y_{n'} d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n Y_{n'} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0. \quad (15)$$

Przy pewnych założeniach funkcję $f(\delta, \varphi)$ można rozwinąć na szereg według ogólnych funkcji kulistych Y_n w formie:

$$f(\delta, \varphi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n(\delta, \varphi) + \dots, \quad (16)$$

gdzie ogólny wyraz jest podany przez równanie:

$$Y_n(\delta, \varphi) = \sum_{p=0}^{p=n} (A_n^{(p)} \cos p\varphi + B_n^{(p)} \sin p\varphi) X_n^{(p)}(\delta). \quad (17)$$

Wartość współczynników $A_n^{(p)}$ i $B_n^{(p)}$ bez trudności można podać, o ile funkcja $f(\delta, \varphi)$ na kuli jest wszędzie jednoznaczna, skończona i ciągła. Współczynniki $A_n^{(p)}$ i $B_n^{(p)}$ są określone wzorami:

$$A_n^{(p)} = (-1)^p \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-p)!(n+p)!}{(n!)^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\delta, \varphi) X_n^{(p)} \cos p\varphi \sin \delta d\delta d\varphi, \quad (18)$$

$$B_n^{(p)} = (-1)^p \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-p)!(n+p)!}{(n!)^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\delta, \varphi) X_n^{(p)} \sin p\varphi \sin \delta d\delta d\varphi. \quad (19)$$

4. Funkcje Lamé'go

Według określenia Poincaré'go funkcje Lamé'go pierwszego rodzaju są podstawowymi funkcjami dla elipsoidy, podobnie jak funkcje kuliste pierwszego rodzaju są podstawowymi funkcjami dla kuli.

W szczególnym przypadku elipsoidy obrotowej funkcje Lamé'go przechodzą w funkcje kuliste.

Równanie Laplace'a we współrzędnych eliptycznych (ρ, μ, ν) posiada formę:

$$\begin{aligned} (\nu^2 - \nu^2) A \frac{\partial}{\partial \rho} \left(A \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + (\nu^2 - \rho^2) B \frac{\partial}{\partial \mu} \left(B \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \\ + (\rho^2 - \mu^2) C \frac{\partial}{\partial \nu} \left(C \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$A^2 = \frac{(\rho^2 - a^2) (\rho^2 - b^2) (\rho^2 - c^2)}{\rho^2},$$

$$B^2 = \frac{(\mu^2 - a^2) (\mu^2 - b^2) (\mu^2 - c^2)}{\mu^2},$$

$$C^2 = \frac{(\nu^2 - a^2) (\nu^2 - b^2) (\nu^2 - c^2)}{\nu^2},$$

$$\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2} = \frac{(\mu^2 - \rho^2) (\nu^2 - \rho^2)}{(\rho^2 - a^2) (\rho^2 - b^2) (\rho^2 - c^2)}.$$

Odszukajmy dla równania Laplace'a rozwiązania o postaci:

$$V = R(\rho^2) M(\mu^2) N(\nu^2).$$

Każdą z funkcji $R(\rho^2)$, $M(\mu^2)$, $N(\nu^2)$ nazywamy funkcją Lamé'go.

Najogólniejsza funkcja n -go stopnia zawierająca funkcje Lamé'go posiada formę.

$$Q_n(x, y, z) = \sum_{i=1}^{i=2n+1} A_i R_n^{(i)} M_n^{(i)} N_n^{(i)}. \quad (3)$$

gdzie A_i oznacza stały rzeczywisty wybieralny współczynnik.

Funkcje Lamé'go drugiego rodzaju, które odpowiadają funkcjom kulistym drugiego rodzaju, mają postać:

$$S = R \int_{-\infty}^{\rho} \frac{2n+1}{R^2} \frac{\rho d\rho}{-1 \sqrt{(\rho^2 - a^2) (\rho^2 - b^2) (\rho^2 - c^2)}}. \quad (4)$$

Można udowodnić, że jest

$$MN = Y_n = \sum_{i=1}^{i=n} A_i M_n^{(i)} N_n^{(i)}, \quad (5)$$

Dla spłaszczonej elipsoidy obrotowej ($b = c$) otrzymuje się

$$M = h (1 - t^2)^{p/2} \frac{d^{n+p} (1 - t^2)^n}{dt^{n+p}} z \quad t = \sqrt{\frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - c^2}}, \quad (6)$$

$$N = \cos p \varphi, \quad (7)$$

lub

$$R = h (1 + s^2)^{p/2} \frac{d^{n+p} (1 + s^2)^n}{ds^{n+p}}, \quad (8)$$

przy czym

$$\sqrt{\frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - c^2}} = i s, \quad h = \text{stała}.$$

Z równania (4) dla $b = c$ przy zastosowaniu równania (8) można wyprowadzić dalsze wzory.

Weźmy pod uwagę dwie funkcje:

$$V_m = R_m^{(k)} M_m^{(k)} N_m^{(k)}$$

oraz

$$V_r = R_r^{(i)} M_r^{(i)} N_r^{(i)},$$

przy czym zakłada się $m \neq r$, lub jeżeli $m = r$, to $k \neq i$.

Stosując do tych funkcji twierdzenie całkowe Greena otrzymujemy:

$$\int_T (V_m \Delta V_r - V_r \Delta V_m) d\tau = \int_S \left(V_m \frac{\partial V_r}{\partial n} - V_r \frac{\partial V_m}{\partial n} \right) d\sigma,$$

a ponieważ

$$\Delta V_m = 0 \text{ i } \Delta V_r = 0,$$

to całka po lewej stronie znika, i otrzymujemy:

$$\int_{E_0} l (R_m^{(k)} M_m^{(k)} N_m^{(k)} R_r^{(i)} M_r^{(i)} N_r^{(i)} - R_r^{(i)} M_r^{(i)} N_r^{(i)} R_m^{(k)} M_m^{(k)} N_m^{(k)}) d\sigma = 0,$$

gdzie E_0 oznacza pole powierzchni elipsoidy, określonej przez $\rho = \rho_0$, zaś

$$l^2 = \frac{1}{(\rho^2 - \rho_0^2)(\rho^2 - \nu^2)}.$$

Ponieważ $R_m^{(k)}$, $R_r^{(i)}$, jak również ich pochodne, są stałe na powierzchni elipsoidy $\rho = \rho_0$, zaś dla tego przypadku l^2 przechodzi w

$$l_0^2 = \frac{1}{(\rho_0^2 - u^2)(\rho_0^2 - v^2)},$$

więc otrzymuje się

$$(R_m^{(k)} R_r^{(i)'} - R_r^{(i)} R_m^{(k)'}) \int_{E_0} l_0 M_m^{(k)} N_m^{(k)} M_r^{(i)} N_r^{(i)} d\sigma = 0,$$

skąd

$$\int_{E_0} M_m^{(k)} N_m^{(k)} M_r^{(i)} N_r^{(i)} l_0 d\sigma = 0,$$

przy założeniu, że $m \neq r$, oraz gdy $m = r$, to równocześnie jest $k \neq i$.

5. Zagadnienie Dirichleta

Istnieje w obszarze T jedna i tylko jedna funkcja harmoniczna, która (na swym brzegu) przyjmuje żądane wartości brzegowe.

Zagadnienie to jest ważne w przypadku, gdy obszar T znajduje się zewnątrz zamkniętej powierzchni S i rozciąga się do nieskończoności. Wtedy także w zewnętrznym obszarze T istnieje jedna i tylko jedna funkcja harmoniczna, która na zamkniętej powierzchni S przyjmuje żądane wartości i znika w nieskończoności.

6. Wyznaczenie funkcji harmonicznej z wartości brzegowych

Pierwszy przypadek

Niech będzie funkcja harmoniczna U w obszarze T ograniczonym ze wszystkich stron. Niech na jego brzegu S , w każdym punkcie, będą podane wartości funkcji U i jej pierwsze pochodne

$$\frac{\partial U}{\partial n}.$$

Szukana jest wartość funkcji U w punktach wewnątrz obszaru T względem S .

Rozwiązanie uzyskuje się przy pomocy wzoru Greena, w którym kładzie się $\varphi = U$ oraz

$$\psi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

przy czym (a, b, c) są to współrzędne punktu A wewnątrz obszaru T .

W tym przypadku wzór Greena prowadzi do wyrażenia:

$$\int_T (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) d\tau = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma - 4\pi \varphi', \quad (1)$$

przy czym $\varphi' = U(a, b, c)$.

Ponieważ wszędzie w obszarze T jest $\Delta U = 0$ oraz

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0,$$

to

$$U(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n_a} - U \frac{\partial}{\partial n_a} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma. \quad (2)$$

Wzór (2) podaje wyrażenie U w punktach wewnątrz obszaru T względem S , w zależności od wartości brzegowych U i

$$\frac{\partial U}{\partial n};$$

r oznacza odległość elementu powierzchni $d\sigma$ od punktu $A(a, b, c)$.

Drugi przypadek

Niech będzie dany zewnętrzny obszar T zamkniętej powierzchni S , oraz niech będzie dana funkcja harmoniczna U w obszarze T , przy czym są podane wartości U i

$$\frac{\partial U}{\partial n}$$

na brzegu S .

Szukana jest wartość U w punkcie $A(a, b, c)$ (punkt przyciągany) w zewnętrznym obszarze T względem S .

Dla szukanej wartości $U(a, b, c)$ otrzymujemy podobny wzór, jak w poprzednim wypadku, jeśli funkcja U i jej pochodne

$$\frac{\partial U}{\partial n}$$

znikają w nieskończoności w ten sposób, że wyrażenia

$$R U, R^2 \frac{\partial U}{\partial n}$$

są skończone dla $R \rightarrow \infty$.

$$\frac{\partial U}{\partial n}$$

oznacza pochodną względem normalnej zewnętrznej do obszaru T , skierowanej do wnętrza obszaru S . Ostateczny wzór ma postać

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n_i} - U \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma. \quad (3)$$

7. Pierwsza funkcja Greena

Wewnątrz obszaru

Jeśli funkcja U , harmoniczna w zamkniętym powierzchni S obszarze T , jest określona na brzegu tego obszaru, to według zagadnienia Dirichleta można określić funkcję U wewnątrz obszaru T .

Wzór

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma \quad (2) \text{ (pkt. 6)}$$

podaje wyrażenie $U(a, b, c)$ dla punktów wewnątrz obszaru T , w zależności od wartości brzegowych U i

$$\frac{\partial U}{\partial n}$$

dla powierzchni S .

Przy poprzednim więc założeniu zadanie nie da się rozwiązać przy pomocy zagadnienia Dirichleta

Green zauważył, że wzór (2) prowadzi do rozwiązywania problemu Dirichleta, jeżeli podana zostanie pewna funkcja

$$H_i^{(1)}(a, b, c; x, y, z)$$

o następujących własnościach:

- 1) $H_i^{(1)}$ jest funkcją harmoniczną wewnątrz obszaru T ,
- 2) $H_i^{(1)}$ na brzegu S przybiera wartości takie, jak funkcja

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Miedzy funkcją $H_i^{(1)}$ i funkcją harmoniczną U zachodzi związek:

$$\int_S \left[H_i^{(1)} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial H_i^{(1)}}{\partial n} \right] d\sigma = 0, \quad (4)$$

który wynika z wzoru całkowego Greena:

$$\int_T (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) d\tau = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (1)$$

jeśli wstawimy $\psi = H_i^{(1)}$, przy czym z założenia

$$\Delta H_i^{(1)} = 0. \text{ i } \Delta U = 0.$$

Mnożąc równanie (4) przez

$$\frac{1}{4\pi}$$

i odejmując od równania (2), z uwagi, że $H_i^{(1)}$ na powierzchni S jest równe $1/r$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U(a, b, c) &= \frac{1}{4\pi} \int_S U \left[\frac{\partial H_i^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(H_i^{(1)} - \frac{1}{r} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (5)$$

Przez wprowadzenie t. zw. pierwszej funkcji Greena

$$G_i^{(1)} = H_i^{(1)} - \frac{1}{r},$$

zamiast równania (5) otrzymujemy:

$$U(c, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S U \frac{\partial G_i^{(1)}}{\partial n} d\sigma. \quad (6)$$

Funkcja ta zezwala na obliczenie wartości U w punkcie (a, b, c) wewnątrz obszaru T , o ile jest znana pierwsza funkcja Greena $G_i^{(1)}$ dla wewnętrznego obszaru T , i o ile są dane wartości brzegowe funkcji U na powierzchni S .

Ze względu na podane dla funkcji $H_i^{(1)}$ warunki, pierwsza funkcja Greena dla wewnętrznego obszaru będzie scharakteryzowana przez następujące wartości: $G_i^{(1)}$ jest — z wyłączeniem jej bieguna (a, b, c) , w którym funkcja staje się nieskończoną — wewnątrz obszaru T względem S harmoniczna oraz znika na brzegu S obszaru T .

Zewnątrz obszaru

W podobny sposób rozwiązuje się problem Dirichleta dla obszaru T , który rozciąga się zewnątrz zamkniętej powierzchni S . W tym celu dla stałego punktu (a, b, c) , wprowadza się pomocniczą funkcję $H_a^{(1)}(a, b, c; x, y, z)$, która w zewnętrznym obszarze T jest harmoniczną i znika w nieskończoności w sposób, jak

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

a na brzegu powierzchni S przyjmuje wartość

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}};$$

zaś jej pierwsze pochodne powinny znikać w nieskończoności, jak

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pomiędzy tą funkcją $H_a^{(1)}$ a harmoniczną funkcją U zachodzi zależność

$$\int_S \left(H_a^{(1)} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial H_a^{(1)}}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

Pomiędzy tą funkcją $H_a^{(1)}$ i funkcją harmoniczną U zachodzi związek

$$\int_S \left(H_a^{(1)} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial H_a^{(1)}}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

Funkcja Greena $G_a^{(1)}$ jest, z wyłączeniem jej bieguna (a, b, c) gdzie staje się nieskończoną, wszędzie w zewnętrznym obszarze T harmoniczną, znika w nieskończoności, jak $1/r$, a w każdym punkcie na brzegu powierzchni S jest zerem.

Pochodna tej funkcji $G_a^{(1)}$ jest wzięta względem normalnej zewnętrznej do obszaru T w punktach na powierzchni S .

8. Druga funkcja Greena

Zewnętrzny obszar

Z wzoru (3)

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma$$

można wyeliminować pochodną

$$\frac{\partial U}{\partial n}$$

przez dobór odpowiedniej funkcji harmonicznego $H_a^{(1)}$. Również funkcja U daje się wyeliminować przez dobór innej odpowiedniej funkcji harmonicznego $H_a^{(2)}$.

Niech będzie $H_a^{(2)}(a, b, c; x, y, z)$ funkcją o następujących własnościach:

1. $H_a^{(2)}$ jest w zewnętrznym obszarze T harmoniczną i znika w nieskończoności jak $1/r$; jej pierwsze pochodne znikają w nieskończoności, jak $1/r^2$.

2. Na zamkniętej powierzchni powinno być:

$$\frac{\partial H_a^{(2)}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \right].$$

Pomiędzy tą funkcją $H_a^{(2)}$ i funkcją harmoniczną U zachodzi związek

$$\int_S \left(H_a^{(2)} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial H_a^{(2)}}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

Mnożąc te równanie przez $1/4\pi$ i odejmując je od równania (3) otrzymujemy:

$$U(a, b, c) = -1/4\pi \int_S \left(H_a^{(2)} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma.$$

Przez wprowadzenie drugiej funkcji Greena $G_a^{(2)} = H_a^{(2)} - 1/r$ dla zewnętrznego obszaru, będzie:

$$U(a, b, c) = -1/4\pi \int_S G_a^{(2)} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma. \quad (8)$$

Druga funkcja Greena $G_a^{(2)}$ dla zewnętrznego obszaru posiada następujące własności: jest harmoniczną zewnątrz zamkniętej powierzchni S z wyłączeniem jej bieguna (a, b, c) — w którym sama funkcja staje się nieskończona, znika w nieskończoności, jak

$$\frac{1}{r^3},$$

jej pochodna

$$\frac{\partial G_a^{(2)}}{\partial n}$$

znika w nieskończoności jak $1/r^2$, a w każdym punkcie powierzchni brzegowej S funkcja jest zerem.

Wewnątrz obszaru

Jeśli chcemy obliczyć wartości funkcji harmonicznego U wewnątrz obszaru T zamkniętej powierzchni S na podstawie wartości brzegowych pochodnej

$$\frac{\partial U}{\partial n}$$

na powierzchni S , to najpierw należy wyznaczyć funkcję

$$H_i^{(2)}(a, b, c; x, y, z)$$

o następujących własnościach:

1. $H_i^{(2)}$ jest harmoniczną wewnątrz obszaru T .
2. Na brzegu S jest

$$\frac{\partial H_i^{(2)}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) + c,$$

gdzie

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

zaś c określa równanie

$$c \int_S d\sigma = 4\pi.$$

W wyniku otrzymuje się:

$$U(a, b, c) = C - \frac{1}{4\pi} \int_S G_i^{(2)} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma \dots \quad (9)$$

przy czym

$$G_i^{(2)} = H_i^{(2)} - \frac{1}{r}$$

Druga funkcja Greena $G_i^{(2)}$ dla wewnętrznego obszaru T posiada następujące własności: $G_i^{(2)}$ jest harmoniczną wewnątrz obszaru T (z wyłączeniem jej bieguna, w którym sama funkcja staje się nieskończenie wielką), na powierzchni S pochodna

$$\frac{\partial G_i^{(2)}}{\partial n} = c = \frac{4\pi}{S},$$

gdzie S oznacza powierzchnię brzegu T .

Pochodne

$$\frac{\partial U}{\partial n}$$

znika w każdym punkcie powierzchni S , zatem

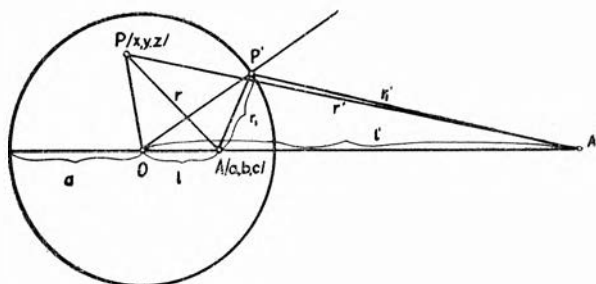
$$U = \text{Const.}$$

Funkcja U jest harmoniczną wewnątrz obszaru T .

9. Funkcje Greena dla kuli

Wewnątrz obszaru

Niech będzie dana kula o promieniu a oraz wewnątrz tej kuli punkt $A(a, b, c)$, jako biegun funkcji Greena.



Rys. 8

Oznaczając

$$PA = r; \quad OA = l; \quad PA' = r'; \quad P'A' = r'_1; \quad P'A = r_1; \quad OA' = l',$$

oraz wprowadzając warunek

$$OA \cdot OA' = r^2,$$

będzie

$$\frac{r_1}{r'_1} = \frac{l}{a}$$

lub

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{l}{a} \cdot \frac{1}{r'}.$$

Przyjmujemy że

$$H = \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{r'},$$

a więc

$$G = H - \frac{1}{r} = \frac{a}{l} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$$

Zewnątrz obszaru

W podobny sposób, jak wyżej, można skreślić

$$G_a = \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{r'} - \frac{1}{r},$$

lecz w tym przypadku punkt A znajduje się zewnątrz kuli.

Wzory całkowe Poissona dla kuli

Wprowadzając funkcję Greena dla kuli do równania

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S U \frac{\partial G_i}{\partial n} d\sigma$$

i uwzględniając, że na brzegu kuli $r = r_1$, i $r' = r_1'$, całkowy wzór Poissona dla obszaru wewnątrz kuli wyrazi się w formie:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi a} \int_S U \frac{a^2 - l^2}{r_1^3} d\sigma,$$

Dla obszaru zewnątrz będzie:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi a} \int_S U \frac{l^2 - a^2}{r_1^3} d\sigma,$$

przy czym w tym przypadku punkt $A(a, b, c)$ znajduje się zewnątrz kuli.

10. Zagadnienia wartości brzegowych teorii potencjału*Zewnątrz obszaru*

Niech będzie dana powierzchnia S zamknięta ze wszystkich stron. W wewnętrznym obszarze T_i tej powierzchni niech znajduje się masa przyciągająca; niech funkcja potencjalna V tej masy będzie funkcją harmoniczną w zewnętrznym obszarze T_a względem S .

1. Pierwsze zagadnienie wartości brzegowych

Jeżeli jest dana wartość funkcji potencjalnej V na powierzchni S , to wartość potencjału w punkcie (a, b, c) , znajdującym się w zewnętrznym obszarze T_a względem S , wyraża się przez następujące równanie:

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S V \frac{\partial G_a^{(1)}}{\partial n_i} d\sigma, \quad (10)$$

gdzie

$$G_a^{(1)}(a, b, c; x, y, z)$$

oznacza pierwszą funkcję Greena dla zewnętrznego obszaru T_a względem S z biegunem w punkcie $A(a, b, c)$, zaś n_i oznacza wewnętrzną normalną do powierzchni S .

2. Drugie zagadnienie wartości brzegowych

Jeżeli jest podana wartość pochodnej

$$\frac{\partial V}{\partial n_i}$$

na powierzchni S , to wartość potencjału V w punkcie (a, b, c) , znajdującym się w zewnętrznym obszarze T_a względem S , oblicza się wg wzoru:

$$V(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi} \int_S G_a^{(2)} \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma, \quad (11)$$

przy czym $G_a^{(2)}(a, b, c)$ oznacza drugą funkcję Greena dla zewnętrznego obszaru T_a względem S z biegunem w punkcie (a, b, c) .

3. Trzecie zagadnienie wartości brzegowych dla kuli

Jeśli V jest potencjałem pewnej niewiadomej masy rozłożonej na kuli, oraz gdy są dane wartości powierzchniowe V , to można obliczyć wartość V w zewnętrznym punkcie (a, b, c) względem kuli przy pomocy wzoru całkowego Poissona:

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi A} \int_S \frac{(r^2 - A^2)}{R^3} d\sigma, \quad (12)$$

przy czym R oznacza odległość elementu powierzchni $d\sigma$ od punktu (a, b, c) , r oznacza odległość punktu (a, b, c) od środka kuli, zaś A oznacza promień kuli.

Wewnątrz obszaru

Niech będzie dana powierzchnia S , ze wszystkich stron zamknięta, w zewnętrznym obszarze której leży przyciągająca masa, to funkcja potencjalna V tej masy w wewnętrznym obszarze T_i względem S jest funkcją harmoniczną.

1. Pierwsze zagadnienie wartości brzegowych

Niech będzie dana wartość funkcji potencjalnej V na powierzchni S , to wartość funkcji potencjalnej V w punkcie (a, b, c) wewnętrznego obszaru T_i względem S określa następujące równanie:

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S V \frac{\partial G_a^{(1)}}{\partial n} d\sigma, \quad (13)$$

przy czym

$$G_a^{(1)}(a, b, c; x, y, z)$$

oznacza pierwszą funkcję Greena dla wewnętrznego obszaru T_i względem S z biegunem w punkcie (a, b, c) , zaś n oznacza zewnętrzną normalną do powierzchni S .

2. Drugie zagadnienie wartości brzegowych

Niech będzie dana wartość pochodnej

$$\frac{\partial V}{\partial n}$$

we wszystkich punktach powierzchni S , to wartość potencjału V w punkcie (a, b, c) wewnętrznego obszaru T_i względem S wyraża się wzorem:

$$V(a, b, c) = c - \frac{1}{4\pi} \int_S G_i^{(2)} \frac{\partial V}{\partial n_a} d\sigma, \quad (14)$$

przy czym

$$G_i^{(2)}(a, b, c; x, y, z)$$

oznacza drugą funkcję Greena dla wewnętrznego obszaru T_i względem S z biegunem w punkcie (a, b, c) , c jest pewną stałą która w ogólności nie jest podana.

3. Prawo o stacjonarnym stanie temperatury kuli jednorodnej

Jeżeli jednorodna kula o powierzchni S znajduje się w stacjonarnym stanie temperatury, przy czym temperatura V kuli jest znana we wszystkich punktach powierzchni S , to jej temperatura w którymkolwiek punkcie (a, b, c) będzie wyrażona przez następujące równanie:

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi A_S} \int \frac{V'(A^2 - a^2)}{R^3} d\sigma, \quad (15)$$

gdzie A oznacza promień kuli, r odległość punktu $P(a, b, c)$ od środka kuli, R odległość punktu $P(a, b, c)$ od elementu $d\sigma$.

b. Metody rozwiązania zadania

Przypuśćmy, że mamy wystarczającą ilość pomierzonych punktów grawimetrycznych, odpowiednio rozmieszczonych po całej powierzchni ziemi. Wówczas po przeprowadzeniu redukcji dla g według sposobów, podanych w rozdziale II, będziemy mogli wyznaczyć geoidę względem obranej powierzchni sferoidy.

Do rozwiązania tego zadania służą 3 sposoby:

1. Zastosowanie wzoru całkowego Stokesa,
2. Zastosowanie rozwinięcia Δg przy pomocy funkcji kulistych i następnie obliczenie wzniesienia lub depresji geoidy względem przyjętej powierzchni sferoidy.
3. Rozwiązanie równania całkowego.

1. Wzór całkowity Stokesa

G. F. Stokes w swej pracy „On the variation of gravity of the surface of the earth” Trans. Cambridge Phil. Sec. 8.1849, podał metodę wyznaczenia geoidy przy założeniu, że pomiary grawimetryczne zostały wykonane na całym globie ziemskim.

Na podstawie pomiarów przyspieszenia siły ciężkości można wyznaczyć średnią wartość G , oraz anomalię przyspieszenia siły ciężkości Δg w każdym punkcie, przy czym

$$\Delta g = g - g_c,$$

zaś g_c oznacza przyspieszenie siły ciężkości, obliczone na podstawie międzynarodowej formuły na elipsoidzie ziemskiej, g oznacza przyspieszenie siły ciężkości, pomierzone i zredukowane na geoidę,

Niech r oznacza promień wodzący geoidy, który wyraża się (według Helmerta) przy zastosowaniu funkcyj kulistych za pomocą

$$r = R [1 - \frac{1}{2} c' (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi) + K_2 + \frac{1}{2} K_3 + \frac{1}{3} K_4 + \dots]$$

w którym R oznacza średni promień wodzący geoidy, przy czym

$$R = \frac{K_0}{W_0} (1 + \frac{1}{3} c').$$

Niech dalej promień sferoidy r_c wynosi:

$$r_c = R [1 + a' (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi)],$$

przy czym z twierdzenia Clairauta mamy:

$$a' = \frac{5}{2} c' - b'$$

gdzie

$$a' = \frac{a-b}{a}; \quad b' = \frac{g_{\text{bieg.}} - g_{\text{równ.}}}{g_{\text{równ.}}}, \quad c' = \frac{\omega^2 a}{g_{\text{równ.}}}.$$

Zatem

$$N = r - r_c = R \Delta U$$

jest wzniesieniem geoidy ponad powierzchnią ekwipotencjalnej sferoidy. Nie jest to wyrażenie całkiem ścisłe, ponieważ istnieje różnica kierunków normalnej do geoidy i normalnej do sferoidy. Różnica ta jednak wyraża się zaledwie w milimetrach, więc w praktyce ją pomijamy.

Z równania

$$N = r - r_c = R \cdot \Delta U$$

widzimy, że

$$\Delta U = (b' - 2c') (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi) + K_2 + \frac{1}{2} K_3 + \frac{1}{3} K_4 + \dots$$

Z drugiej strony, według Helmerta, Δg , wyrażone za pomocą funkcyj kulistych wynosi:

$$\Delta g = G \{b' - 2c' (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi) + K_2 + K_3 + K_4 + \dots\} = G \cdot F(\theta, \varphi),$$

jest zatem funkcją miejsca, przy czym θ, φ , są współrzędnymi biegunowymi.

Weźmy pod uwagę funkcję $f(\psi, \lambda)$, którą w ślad za Dirichletem możemy przedstawić, według teorii funkcji kulistych, w następującej postaci:

$$f(\psi, \lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\lambda' \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P_n f(\psi', \lambda') \cos \psi' d\psi',$$

gdzie ψ i λ oznaczają geocentryczną szerokość i długość.

Ponieważ element powierzchni na kuli o promieniu jednostkowym wynosi:

$$d\sigma' = \cos \psi' d\psi' d\lambda'$$

zatem będziemy mieli:

$$f(\psi, \lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n f(\psi', \lambda') d\sigma'.$$

Zastosowanie powyższego wyrażenia do wzoru na Δg daje nam:

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n \Delta g d\sigma',$$

przy czym całkowanie jest rozciągnięte po powierzchni kuli jednostkowej.

Określmy funkcję

$$K_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int \frac{\Delta g}{G} d\sigma'$$

Jeżeli wartość K_n wstawimy do równania:

$$N = R \cdot \Delta U = R \{ (b' - 2c') (1/3 - \sin^2 \varphi) + K_2 + 1/2 K_3 + \dots \},$$

to otrzymamy:

$$N = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n-1} \int P_n \frac{\Delta g}{G} d\sigma'.$$

Weźmy teraz pod uwagę szereg

$$S = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n \zeta^{n-1},$$

czyli

$$S = 5 P_2 \zeta + \frac{7}{2} P_3 \zeta^2 + \frac{9}{3} P_4 \zeta^3 + \dots$$

Zatem dla N otrzymamy wyrażenie w postaci:

$$N = \frac{R}{4\pi} \int \frac{\Delta g}{G} S_{\zeta=1} d\sigma$$

Z równania dla S wyprowadzamy:

$$\frac{dS}{d\zeta} = 5 P_2 + 7 P_3 \zeta + 9 P_4 \zeta^2 + \dots,$$

oraz

$$\frac{1}{2} \int_0^{\zeta} \zeta^{3/2} \frac{dS}{d\zeta} d\zeta = P_2 \zeta^{5/2} + P_3 \zeta^{7/2} + P_4 \zeta^{9/2} + \dots$$

Lecz

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta \cos \psi' + \zeta^2}} = 1 + P_1 \zeta + P_2 \zeta^2 + P_3 \zeta^3 + P_4 \zeta^4 + \dots,$$

więc

$$\frac{1}{2} \int_0^{\zeta} \zeta^{3/2} \frac{dS}{d\zeta} d\zeta = \sqrt{\zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta \cos \psi' + \zeta^2}} - 1 - P_1 \zeta \right),$$

przy czym

$$P_1 = \cos \psi'.$$

Oznaczając

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta \cos \psi' + \zeta^2}} - 1 - P_1 \zeta$$

mamy:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\zeta} \zeta^{3/2} \frac{dS}{d\zeta} d\zeta = \sqrt{\zeta} \cdot Z;$$

zatem

$$dS = 2 \zeta^{-3/2} d(Z \sqrt{\zeta}).$$

Całkując przez części otrzymamy:

$$S = 2 \frac{Z}{\zeta} + 3 \int_0^{\zeta} Z \zeta^{-2} d\zeta.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} S_{\zeta=1} &= 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2-2\cos\psi'}} - (1 + \cos\psi') \right] + 3 \int_0^1 Z \zeta^{-2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sin\psi'/2} - 2(1 + \cos\psi') + 3 \int_0^1 Z \zeta^{-2} d\zeta. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \int Z \zeta^{-2} d\zeta &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2\zeta \cos\psi' + \zeta^2}}{\zeta} - \\ &- \cos\psi' \ln \{2 - 2\zeta \cos\psi' + 2\sqrt{1 - 2\zeta \cos\psi' + \zeta^2}\} + c, \end{aligned}$$

więc będzie:

$$\begin{aligned} S_{\zeta=1} &= \operatorname{cosec}\psi'/2 - 2(1 + \cos\psi') + \\ &+ 3 \left\{ 1 - 2\sin\psi'/2 - \cos\psi' - \cos\psi' \ln \left(\frac{1 - \cos\psi'}{2} + \sin\psi'/2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} N &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda' \int_0^{\pi} \frac{\Delta g}{G} \{ \operatorname{cosec}\psi'/2 + 1 - 6\sin\psi'/2 - 5\cos\psi' - \\ &- 3\cos\psi' \ln(\sin\psi'/2 [1 + \sin\psi'/2]) \} \sin\psi' d\psi'. \end{aligned}$$

Widzimy, że wyrażenie w nawiasie jest zależne tylko od ψ' , a więc dla Δg możemy wziąć wartość średnią dla równoleżnika ψ' ; oznaczmy tę średnią przez $\Delta g_{\psi'}$, wtedy dla N otrzymamy wyrażenie:

$$\begin{aligned} N &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda' \int_0^{\pi} \frac{\Delta g_{\psi'}}{G} \{ \operatorname{cosec}\psi'/2 + 1 - 6\sin\psi'/2 - 5\cos\psi' - \\ &- 3\cos\psi' \ln(\sin\psi'/2 [1 + \sin\psi'/2]) \} \sin\psi' d\psi' = R \int_0^{\pi} \frac{\Delta g_{\psi'}}{G} \{ \operatorname{cosec}\psi'/2 + \\ &+ 1 - 6\sin\psi'/2 - 5\cos\psi' - 3\cos\psi' \ln(\sin\psi'/2 [1 + \sin\psi'/2]) \} \frac{\sin\psi'}{2} d\psi', \end{aligned}$$

lub

$$N = R \int_0^{\pi} \frac{\Delta g \psi'}{G} F d\psi',$$

gdzie F oznacza funkcję Stokesa,

$$F = \{\operatorname{cosec} \psi'/2 + 1 - 6 \sin \psi'/2 - 5 \cos \psi'/2 - \\ - 3 \cos \psi'/2 \ln [\sin \psi'/2 (1 + \sin \psi'/2)]\} \frac{\sin \psi'}{2}.$$

Wzór Stokesa zezwala nam na wyznaczenie kształtu geoidy bez znajomości rozkładu mas wewnątrz ziemi, co jest dużą zaletą metody. Dokładność wyznaczenia geoidy tą metodą wynosi około ± 4 m. Do tej pory przy stosowaniu tej metody postępowano w ten sposób, że wartości funkcji $F(\psi)$ były brane z odpowiednio obliczonych tablic. Zatem obliczenie N sprowadzało się do całki liczbowej.

2. Trzecie zagadnienie wartości brzegowych jako rozwiązanie problemu Stokesa

Zadanie to rozwiązali i podali N. Idelson i N. Malkin z Leningradu w rozprawie „Die Stokessche Formel in der Geodäsie als Lösung einer Randwertaufgabe“ Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd.20.1931 S. 156 — 160. Leipzig.

Zachowując określenia autorów, oznaczmy przez W potencjał geoidy, przez U potencjał elipsoidy ziemskiej i przez T różnicę $W - U$, zaś ρ niech oznacza promień wodzący geoidy. Można zauważyć, że jeżeli początek układu przyjmiemy w środku ciężkości ziemi, to w rozwinięciu wymienionych potencjałów, które dotyczą tej samej masy ziemskiej, wyrazy $1/\rho$ są sobie równe, zaś wyrazy

$$\frac{1}{\rho^2}$$

znikają.

Jest więc

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 T = 0. \quad (1)$$

Jeżeli przez γ oznaczmy normalne przyspieszenie siły ciężkości na elipsoidzie ziemskiej (odniesienia), przez g na geoidzie, to na

podstawie zasadniczego twierdzenia teoretycznej grawimetrii, sformułowanego przez Poincaré'go i Rudzkiego (już uprzednio zostało ono podane przez Stokesa, lecz nie w wyraźnej formie), otrzymujemy:

$$\gamma - g = -\Delta g = \frac{2T}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial \rho}. \quad (2)$$

Jeżeli na całej powierzchni ziemi znamy Δg (o ile zostały wykonane pomiary grawimetryczne) i jeżeli wyrazimy T , jako funkcję Δg otrzymamy rozwiązanie zadania odwrotnego względem (2), o które nam chodzi.

Ponieważ Δg jest funkcją (θ, φ) , możemy napisać

$$2T + \frac{\partial T}{\partial \rho} = f(\theta, \varphi). \quad (3)$$

Zadanie więc redukuje się do wyznaczenia funkcji T , która na zewnątrz jednostkowej kuli jest funkcją harmoniczną i znika w nieskończoności, zaś jej wartość na powierzchni tej kuli, w połączeniu z pochodną względem normalnej na podstawie wzoru (3), sprowadza się do znanej funkcji współrzędnych biegunowych (θ, φ) .

Jest to specjalny przypadek trzeciego zadania na wartości brzegowe, łatwy do rozwiązania według metody podanej przez Dini'ego.

Rozważmy funkcję:

$$2T + \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T) = v(\rho, \theta, \varphi),$$

która jest funkcją harmoniczną, o ile T jest funkcją harmoniczną. Na kuli jednostkowej sprowadza się ona do postaci:

$$2T + \frac{\partial T}{\partial \rho} = v(1, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Według znanego wzoru całkowego Poissona dla obszaru zewnętrznego mamy:

$$v(\rho, \theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi') \frac{\rho^2 - 1}{r^3} d\sigma', \quad (4)$$

przy czym

$$d\sigma' = \sin \Theta' d\Theta' d\varphi'; \quad r^2 = 1 - 2\rho \cos \psi + \rho^2;$$

$$\cos \psi = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos (\varphi - \varphi').$$

Przy całkowaniu po kuli jednostkowej, ρ możemy uważać za stałe, więc mamy:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T) = \frac{1}{4\pi} \int f(\Theta', \varphi') \frac{\rho^3 - \rho}{r^3} d\sigma';$$

i jeżeli funkcję całkujemy w granicach od ∞ do ρ , otrzymamy:

$$\rho^2 T \Big|_{\infty}^{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int f(\Theta', \varphi') \int_{\infty}^{\rho} \frac{\rho^3 - \rho}{r^3} d\rho d\sigma'. \quad (5)$$

Całkę nieokreśloną otrzymujemy łatwo, gdyż

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \frac{\rho - \cos \psi}{r^3}.$$

Można łatwo udowodnić, że

$$\frac{\rho^3 - \rho}{r^3} = - \frac{\rho}{r} - 2\rho^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

czyli

$$\int \frac{\rho^3 - \rho}{r^3} d\rho = - \frac{2\rho^3}{r} + 3r + 3 \cos \psi \ln (\rho - \cos \psi + r).$$

Dla $\rho \rightarrow \infty$ będzie

$$r \cong \rho - \cos \psi; \quad \frac{1}{r} \cong \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cos \psi; \quad \ln (\rho - \cos \psi + r) \cong \ln 2\rho$$

a więc

$$\int \frac{\rho^3 - \rho}{r^3} d\rho \cong \rho + 3 \cos \psi \ln 2\rho - \cos 5\psi.$$

Wstawiając to wyrażenie w równanie (5) i biorąc pod uwagę, że $\rho^2 T \rightarrow 0$ przy $\rho \rightarrow \infty$, otrzymamy ogólne rozwiązanie w formie:

$$\begin{aligned} \rho^2 T = \frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi') \left\{ \frac{-2\rho^2}{r} + 3\rho + 3\cos\psi \ln(\rho - \cos\psi + r) \right\} d\sigma' - \\ - 1/4\pi \int f(\theta', \varphi') \{ \rho + 3\cos\psi \ln 2\rho - 5\cos\psi \} d\sigma'. \end{aligned} \quad (6)$$

Ponieważ

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 T = 0,$$

więc otrzymujemy warunki:

$$\rho \int f(\theta', \varphi') d\sigma' = 0; \quad \ln \rho \int f(\theta', \varphi') \cos\psi d\sigma' = 0,$$

skąd wynikają dalsze warunki:

$$\int f(\theta', \varphi') d\sigma' = 0, \quad \int f(\theta', \varphi') \cos\psi d\sigma' = 0, \quad (7)$$

to znaczy, że w rozwinięciu $f(\theta, \varphi)$ według funkcji kulistych znikają wyrażenia zerowego i pierwszego rzędu.

Uwzględniając to, mamy:

$$\rho^3 T = \frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi') S(\rho, \psi) d\sigma', \quad (8)$$

gdzie

$$S(\rho, \psi) = -\frac{2\rho^2}{r} + 3\rho + 3\cos\psi \ln \frac{\rho - \cos\psi + r}{2\rho} - \rho + \rho \cos\psi.$$

Przy czym należy zauważyć, że

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} S(\rho, \psi) = 0.$$

Z równania (8) otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi') \frac{S(\rho, \psi)}{\rho^2} d\sigma'. \quad (9)$$

Jest to rozwiązanie trzeciego zadania na wartości brzegowe dla przypadku obszaru zewnętrznego.

Na powierzchni kuli jednostkowej, a więc gdy $\rho = 1$, mamy $r = 2 \sin \psi/2$, zaś równanie (9) przyjmie formę:

$$T(1, \theta, \varphi) \simeq \frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi') S(\psi) d\sigma', \quad (10)$$

przy czym według (2)

$$f(\theta', \varphi') = -\Delta g$$

oraz

$$S(\psi) = -1/\sin \psi/2 + 6 \sin \psi/2 + 3 \cos \psi \ln(\sin^2 \psi/2 + \sin \psi/2) - 1 + 5 \cos \psi.$$

$S(\psi)$ jest funkcją Stokesa, która tu spełnia tę samą rolę, co funkcja Greena przy rozwiązaniu zadania wartości brzegowych.

Jeżeli zaś znamy T , możemy wyznaczyć N , tj. odstęp między elipsoidą i geoidą na podstawie wzoru Brunsza:

$$N \simeq T/\gamma + \dots$$

3. Rozwiązanie drugiego zagadnienia na wartości brzegowe dla obszaru zewnątrz geoidy według Stokesa

Jeżeli masy zewnętrzne zostaną zredukowane na poziom geoidy lub przesunięte do jej wnętrza (np. metodami Rudzkiego), to wtedy powierzchnia geoidy będzie brzegiem mas ziemskich. Przy tym więc założeniu wyznaczenie geoidy jest drugim zagadnieniem wartości brzegowych.

Jeżeli jest znana masa M , jej prędkość kątowna obrotu ω i kształt powierzchni ekwipotencjalnej S , która obejmuje tę masę, to na zewnątrz S potencjał sił ciężkości jest znany.

Zakładając, że $f = 1$ (stała grawitacyjna) mamy

$$W = V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Na geoidzie S jest $W = C$.

Przedstawmy nasze równanie w następującej formie:

$$\Phi = V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - C; \quad (1)$$

funkcja Φ znika wtedy na powierzchni S .

Wewnątrz obszaru geoidy jest

$$\Delta \Phi = \Delta V + 2 \omega^2$$

więc

$$\Delta \Phi = -4 \pi \rho + 2 \omega^2 \quad (2)$$

Na powierzchni geoidy S będzie według równania (1) $\Phi = 0$ więc

$$V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - C = 0 \quad (3)$$

Z wzoru (2) mamy:

$$4 \pi \rho = 2 \omega^2 - \Delta \Phi \quad (4)$$

Mnożąc równanie (4) przez

$$\frac{d\tau}{r}$$

i całkując w obszarze T geoidy, zamykającej masę E_1 otrzymujemy

$$4 \pi V = 2 \omega^2 \int_T \frac{d\tau}{r} - \int_T \frac{\Delta \Phi}{r} d\tau. \quad (5)$$

Do drugiego wyrazu prawej strony równania stosujemy całkowite prawo Greena. Jeżeli oprócz tego pewien punkt A leży na powierzchni S , to w tym wypadku będzie:

$$\int_T \frac{\Delta \Phi}{r} d\tau = - \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} d\sigma,$$

przy czym przyjęliśmy $\phi = 1/r$, $\varphi = \Phi$, oraz $\Phi = 0$ na powierzchni S ; n_i oznacza normalną do powierzchni S , skierowaną do wnętrza obszaru.

Z równania (5) dla potencjału V_a zewnątrz geoidy otrzymujemy

$$4 \pi V_a = 2 \omega^2 \int_T \frac{d\tau}{r} + \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} d\sigma, \quad (6)$$

co w połączeniu z równaniem (1) daje:

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} d\sigma = 4 \pi C - 2 \pi \omega^2 (x^2 + y^2) - 2 \omega^2 \int_T \frac{d\tau}{r}. \quad (7)$$

Równanie (7) da możność obliczenia wartości C , a więc wartości potencjału geoidy, jeżeli będzie dana funkcja Φ .

Pochodna funkcji Φ względem normalnej wewnętrznej jest gęstością powierzchniową masy rozłożonej na powierzchni geoidy S . Prawa strona równania jest potencjałem tej więc rozłożonej na geoidzie masy i mas znajdujących się wewnątrz obszaru, jest więc potencjałem masy E_1 .

Dla wyznaczenia funkcji Φ wprowadzamy podaną masę E_1 . Ze względu na równanie (2) jest:

$$4 \pi E_1 = 4 \pi \int_T \rho d\tau = 2 \omega^2 \int_T d\tau - \int_T \Delta \Phi d\tau.$$

Do drugiego wyrazu po prawej stronie równania stosujemy całkowe prawo Greena, na podstawie którego otrzymujemy:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} d\tau = 4 \pi E_1 - 2 \omega^2.$$

Z tego równania wyznacza się Φ , w ten sposób ażeby we wszystkich punktach na geoidzie $\Phi = 0$.

Znając funkcję Φ , przy pomocy równań (6) i (7) możemy wyznaczyć potencjał zewnętrzny V_a i stałą C , jeżeli są podane E_1 , ω i S .

Metody geodezyjne i astronomiczne pozwalają wyznaczyć przyspieszenie siły ciężkości na geoidzie, prędkość kątową obrotu ziemi i przybliżony kształt geoidy, a mianowicie nasza powierzchnia S jest znana.

Pochodna funkcji Φ względem normalnej wewnętrznej do S jest identyczna z przyspieszeniem siły ciężkości na geoidzie, zatem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = g.$$

Równanie (6) w formie

$$4 \pi V_a = 2 \omega^2 \int_T \frac{d\tau}{r} + \int_S \frac{g}{r} d\tau$$

określa zatem potencjał zewnątrz geoidy na podstawie g , ω i S .

Równania (7) i (8) w postaci:

$$4\pi C = 2\pi\omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega^2 \int_T \frac{d\tau}{r} + \int_S \frac{g}{r} d\sigma,$$

$$4\pi E_1 = 2\omega^2 T + \int_S g d\sigma,$$

dają C , tj. wartość potencjału geoidy, oraz masę E_1 .

Rozwiązanie wymaga więc znajomości S , ω i wartości g w każdym punkcie na powierzchni S .

Rozwiązanie tego zadania, a mianowicie obliczenie E_1 z wyników pomiarów grawimetrycznych w praktyce wykonuje się według wzoru *Clairaulta*.

Jeżeli E_1 oznacza masę ziemi, Δ średnią gęstość ziemi, a promień równika elipsoidy oraz α spłaszczenia południka, to E_1 możemy wyznaczyć z wzoru:

$$E_1 = \frac{4\pi}{3} \Delta a^3 (1 - \alpha), \quad (9)$$

zaś

$$g = \frac{k^2 E_1}{a^2} \left\{ 1 + \alpha - \frac{3\varphi}{2} + \beta \sin^2 B \right\},$$

przy założeniu, że (stała grawitacyjna) k^2 jest znana, oraz wiedząc że

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \varphi = \frac{5\omega^2 a^3}{2E_1}$$

wyznaczymy β i φ .

4. Metoda Rudzkiego wyznaczenia geoidy

Po przeprowadzeniu redukcji g według jednej z metod Rudzkiego, podanych w rozdziale II-gim, geoida będzie brzegiem masy ziemskiej E_1 .

Jako powierzchnię odniesienia, wybiera Rudzki elipsoidę obrotową, która odpowiada następującym warunkom:

1. Osie tej elipsoidy są ρ_0 i $\sqrt{\rho_0^2 - a^2}$; środek jej pokrywa się ze środkiem ziemi, a mała oś pokrywa się z osią obrotu ziemi.

2. Powierzchnia tej elipsoidy jest powierzchnią ekwipotencjalną ziemi.
3. Jej masa E_1 jest równa masie geoidy E_1 .
4. Jeżeli przez γ oznaczymy przyspieszenia siły ciężkości na elipsoidzie, to g będzie przyspieszeniem siły ciężkości dla odpowiednich punktów geoidy. Elipsoida ta winna być taka, ażeby

$$\int_{E_0} (g - \gamma)^2 l d\sigma = \text{Minimum} \quad (1)$$

przy czym E_0 oznacza powierzchnię elipsoidy, zaś g i γ są to funkcje współrzędnych eliptycznych μ i ν , oraz

$$1/l^2 = (\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2).$$

Funkcja sił ciężkości na powierzchni elipsoidy dana jest przy pomocy równania:

$$V = A_0 S_0 M_0 N_0 + A_7 S_7 M_7 N_7 + 1/3 \omega^2 \rho^2 (1 - M_7 N_7), \quad (2)$$

gdzie

$$M_0 = N_0 = 1; \quad S_0 = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - c^2}},$$

$$S_7 = \left(\rho^2 - \frac{2}{3} c^2 \right) \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{(\rho^2 - \frac{2}{3} c^2) \sqrt{\rho^2 - c^2}};$$

$$M_7 = \frac{\mu^2}{c^2} - \frac{2}{3}; \quad N_7 = 1; \quad \mu = c \cos \varphi.$$

Stała A_0 i A_7 są określone za pomocą równań

$$A_0 = k M,$$

oraz

$$A_7 S_7 + 1/2 \omega^2 \rho_0^2 = 0, \quad \text{dla} \quad \rho = \rho_0.$$

Celem obliczenia γ na elipsoidzie wychodzimy z równania:

$$\gamma = - \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_0 = - \left[\frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n} \right]_0$$

dla $\rho = \rho_0$, przy czym n oznaczają normalną zewnętrzną dla elipsoidy.

Z równania (2) otrzymujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = A_0 \frac{\partial S_0}{\partial \rho} + A_7 \frac{\partial S_7}{\partial \rho} M_7 N_7 + \frac{2}{3} \omega^2 \rho (1 - M_7 N_7);$$

dla $\rho = \rho_0$ mamy więc:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_0 = A_0 \left(\frac{\partial S_0}{\partial \rho} \right)_0 + \frac{1}{3} \omega^2 \frac{\rho_0^2}{S_7^{(0)}} \left(\frac{\partial S_7}{\partial \rho} \right)_0 M_7 N_7 + \frac{2}{3} \omega^2 \rho_0 (1 - M_7 N_7);$$

stąd

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_0 &= A_0 \left(\frac{\partial S_0}{\partial \rho} \right)_0 + \omega^2 \rho_0 \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\rho_0}{S_7^{(0)}} \left(\frac{\partial S_7}{\partial \rho} \right)_0 \right] - \\ &\quad - \omega^2 \rho \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{S_7^{(0)}} \left(\frac{\partial S_7}{\partial \rho} \right)_0 \right] \cos^2 \hat{\sigma}. \end{aligned}$$

Dla równika ($\hat{\sigma} = \pi/2$) mamy:

$$\gamma = - A_0 \left(\frac{\partial S_0}{\partial \rho} \right)_0 - \omega^2 \rho_0 \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\rho_0}{S_7^{(0)}} \left(\frac{\partial S_7}{\partial \rho} \right)_0 \right] \quad (3)$$

ponieważ wtedy

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 1.$$

Oznaczając

$$\varphi_0 = \frac{\omega^2 \rho_0}{\gamma_0},$$

otrzymujemy:

$$\gamma = \gamma_0 \left\{ 1 + \varphi_0 \left[1 - \frac{\rho_0}{2 S_7^{(0)}} \left(\frac{\partial S_7}{\partial \rho} \right)_0 \right] \cos^2 \hat{\sigma} \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_0 \right\} \quad (4)$$

z warunku

$$\int_{E_0} (g - \gamma)^2 l d\sigma = \text{Min.}$$

otrzymujemy:

$$\int_{E_0} (g - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_0} l d\sigma = 0, \quad (5)$$

$$\int_{E_0} (g - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial n} l d\sigma = 0,$$

(ponieważ $l d\sigma$ jest niezależna od ρ); ρ_0 i a całkowicie określają $(g - \gamma)$.

Różnicę $g - \gamma$ można więc przedstawić w postaci szeregu złożonego z funkcji Lamé'go $M_\tau N_\tau$, mianowicie:

$$g - \gamma = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k M_k N_k. \quad (6)$$

Oznaczając

$$W = V + T, \quad (7)$$

gdzie W jest funkcją pola siły ciężkości geoidy, T jest różnicą wartości funkcji sił pola ciężkości geoidy i elipsoidy w odpowiadających sobie punktach na obu powierzchniach, otrzymamy według wzoru Brunsza:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad (8)$$

gdzie ζ jest odstępem powierzchni geoidy od elipsoidy.

(ζ mierzy się po normalnej do elipsoidy, zaś T należy brać dla wartości na geoidzie).

Z równania

$$g = - \frac{\partial W}{\partial n}$$

wynika

$$g = - \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n}.$$

W równaniu tym wartości obu pochodnym w otoczeniu $\rho = \rho_0$ rozwijamy według potęg $\delta\rho$ i otrzymujemy:

$$g = - \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right)_0 \delta\rho \right\} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_0 + \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right) \right]_0 \delta\rho \right\} - \frac{\partial T}{\partial n},$$

albo z wystarczającą dokładnością

$$g = - \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_0 - \left\{ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right)_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_0 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right) \right]_0 \right\} \delta\rho - \frac{\partial T}{\partial n},$$

Pierwszy wyraz prawej strony jest identyczny z γ , drugi zaś z pochodną

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n}.$$

Jeżeli oprócz tego odrzucimy wyrazy zawierające kwadraty spłaszczenia elipsoidy, oraz $d\rho$ zastąpimy przez ζ , to otrzymamy:

$$g - \gamma = - \frac{\partial T}{\partial n} + \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial n},$$

ponieważ $\zeta = T/\gamma$, więc będzie:

$$g - \gamma = - \frac{\partial T}{\partial n} + T/\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial n}. \quad (9)$$

Przypuśćmy, że wartość T na geoidzie została rozwinięta na szereg według funkcji Lamé'go:

$$T = T_0 + \sum_{k=0}^{k=\infty} B_k S_k M_k N_k \quad (10)$$

gdzie

$$T_0 = \text{const.}$$

Wstawiając to wyrażenie w równanie (9) otrzymamy:

$$g - \gamma = 1/\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial n} \left(T_0 + \sum_{k=0}^{k=\infty} B_k S_k M_k N_k \right) - \frac{\partial \rho}{\partial n} \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \frac{\partial S_k}{\partial \rho} M_k N_k.$$

Zatem dla $\rho = \rho_0$ mamy:

$$g - \gamma = \frac{T_0}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \left[1/\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial n} S_k^{(0)} - \left(\frac{\partial S_k}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} \right) \right] M_k N_k. \quad (11)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest funkcją miejsca na elipsoidzie. Wartości $(g - \gamma)$ podaje nam równanie (6). Wartość γ i jej pochodną określa pośrednio równanie (4); zaś wartości parametrów ρ_0 i a wyznacza się z równania (5). Równanie (11) jest środkiem pomocniczym do obliczenia stałej T_0 i współczynników

$$B_k \ (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Otrzymuje się szereg złożony z m wyrazów, które stanowią $m+1$ równań potrzebnych do obliczenia $m+1$ niewiadomych

$$T_0, B_1, B_2, B_3, \dots B_m.$$

Można więc obliczyć wartości

$$g - \gamma, \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial n}$$

co najmniej dla $m+1$ punktów rozłożonych no elipsoidzie $\rho = \rho_0$ i przy pomocy tych wartości ułożyć co najmniej $m+1$ równań, których rozwiązanie prowadzi do wartości

$$T_0, B_1, B_2, B_3, \dots B_m.$$

Znając te wartości, obliczymy resztę dla funkcji T na podstawie równania (10), w którym stała $B_0 = 0$, gdyż geoida i elipsoida posiadają tę samą masę.

Wzór Brunsza w formie równania (8) podaje nam wartość ζ , a więc tym samym wyznacza kształt geoidy.

5. Metoda Poincaré'go wyznaczenia geoidy

W metodzie Rudzkiego zostały pominięte wielkości małe rzędu kwadratu spłaszczenia. Celem uwzględnienia wpływu tych wielkości Poincaré wybrał, jako powierzchnię odniesienia, elipsoidę $\rho = \rho_0$ zewnątrz bryły ziemskiej, lecz dość blisko niej przebiegającą mającą środek w środku ciężkości ziemi. Jak rozważania wykażą, będzie to powierzchnia ekwipotencjonalna.

Niech P' oznacza punkt ziemi, P zaś na geoidzie. Odległość P' od elipsoidy niech będzie η , zaś ζ niech oznacza odległość P od elipsoidy, więc

$$h = \eta - \zeta \simeq P'P$$

(aż do wielkości małych rzędu kwadratu spłaszczenia włącznie).

Zakładamy, że g jest zredukowane na poziom geoidy według metody Rudzkiego, więc geoida będzie powierzchnią brzegową masy ziemskiej E_1 , zatem $P' \equiv P$; jest więc $\zeta = \eta$.

Nasze zadanie sprowadza się zatem do rozwiązywania zadania o wyznaczeniu potencjału siły ciężkości zewnątrz obszaru.

Potencjał V dla zewnętrznego obszaru elipsoidy $\rho = \rho_0$ wyraża równanie:

$$V = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k S_k M_k N_k \quad (1)$$

Wyobraźmy sobie również funkcję siły odśrodkowej, mianowicie jej wartość F_0 na elipsoidzie $\rho = \rho_0$, przedstawioną przez szereg

$$F_{00} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \lambda_k R_k^{(0)} M_k N_k. \quad (2)$$

Ponieważ

$$\frac{x^2}{\rho_0^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} - 1 = k(\rho^2 - \rho_0^2)(\eta^2 - \rho_0^2)(v^2 - \rho_0^2),$$

to przy odpowiednio dobranej stałej k można napisać równanie:

$$F = \sum_{k=0}^{k=\infty} \lambda_k R_k M_k N_k + k(\rho^2 - \rho_0^2)(\eta^2 - \rho_0^2)(v^2 - \rho_0^2) \quad (3)$$

Dla $\rho = \rho_0$, tj. na elipsoidzie odniesienia znika w tym równaniu drugi wyraz po prawej stronie, zaś pierwszy wyraz jest identyczny z F_{00} .

Potencjał siły ciężkości ziemi E_1 będzie przedstawiony przez następujące równania:

$$W = V + F, \text{ przy czym } (i = 1) \text{ oraz } g = - \frac{\partial W}{\partial n}$$

(n oznacza normalną zewnętrzną do geoidy).

Przy pominięciu wielkość rzędu ζ^2 można przyjąć

$$g = - \frac{\partial W}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n}$$

Oznaczając przez N składową prostopadłą przyspieszenia g na elipsoidzie $\rho = \rho_0$, oraz przez T składową styczną, będzie:

$$g^2 = N^2 + T^2.$$

Ponieważ T jest rzędu ζ , można przyjąć $g = N$.

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy geoida pokrywa się z elipsoidą odniesienia, tj. gdy $\eta = \zeta = 0$.

Przy tym założeniu elipsoida odniesienia jest *powierzchnią ekwipotencjalną*.

Dla tej elipsoidy jest spełnione równanie:

$$W_0 = V_0 + F_0 = C_0 \quad (C_0 \text{ jest const.}) \quad (4)$$

Ze względu na równania (1) i (2) dla $k = 1, 2, 3, \dots$ zachodzi:

$$a_k S_k^{(0)} + \lambda_k R_k^{(0)} = 0;$$

przy czym wskaźnik zero oznacza wartość na elipsoidzie odniesienia.

Stąd wynika, że wszystkie współczynniki z wyjątkiem a_0 , a_7 i a_8 , są zerami.

Przejdźmy do przypadku ogólnego.

Niech W_0, V_0, F_0, γ_0 oznaczają wartości dla szczególnego przypadku na elipsoidzie odniesienia $\rho = \rho_0$, zaś dla przypadku ogólnego niech będzie $W_{00}, V_{00}, F_{00}, \gamma_{00}$, to ze względu na równanie (4) jest:

$$W_{00} = V_{00} + F_{00} = C_{00}, \quad (5)$$

gdzie C_{00} oznacza stałą.

Przyspieszenie siły ciężkości γ w punktach elipsoidy odniesienia wprowadza się z równania

$$\gamma = - \left[\frac{\partial W}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n} \right]_{\rho=\rho_0} = - \left[\frac{\partial (V + F)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n} \right]_{\rho=\rho_0}, \quad (6)$$

lub krócej

$$\gamma = - \frac{\partial W_{00}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n}.$$

Oznaczając przez

$$\zeta' = \frac{\partial \rho}{\partial n} \cdot \zeta \quad (7)$$

i wstawiając

$$W = W_0 + \delta V,$$

oraz

$$V = V_0 + \delta V,$$

można napisać z dokładnością do wielkości rzędu ζ^2 ,

$$W_{00} = W_0 - \frac{\partial W_0}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n} \zeta,$$

i dalej

$$W_0 = W_{00} + \frac{\partial W_0}{\partial \rho} \cdot \zeta' = C_{00} + \frac{\partial W_0}{\partial \rho} \cdot \zeta'.$$

Przez różniczkowanie otrzymujemy:

$$\frac{\partial W_0}{\partial \rho} = \frac{\partial W_{00}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \zeta' = -\gamma \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 W_{00}}{\partial \rho^2} \zeta'.$$

Jest więc:

$$W = C_{00} + \frac{\partial W_0}{\partial \rho} \zeta' + \delta V = C_{00} - \gamma \zeta' \frac{\partial n}{\partial \rho} + \delta V = C_{00} - \gamma \zeta + \delta V' \quad (8)$$

oraz

$$\begin{aligned} g &= - \frac{\partial W_0}{\partial n} - \frac{\partial (\delta V)}{\partial n} = - \left[\frac{\partial W_0}{\partial \rho} + \frac{\partial (\delta V)}{\partial n} \right] \frac{\partial \rho}{\partial n} = \\ &= \gamma - \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n} \zeta' - \frac{\partial (\delta V)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n}. \end{aligned}$$

Można zatem napisać

$$g - \gamma = \frac{\partial (\delta V)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} - \zeta' \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)^2 \quad (9)$$

Drugi wyraz prawej strony równania jest tzw. „wzorem Brunsa”. Dla $\rho = \rho_0$ jest

$$\zeta = \frac{\delta V}{\gamma}, \quad (10)$$

przy czym γ obliczamy dla $\rho = \rho_0$ na elipsoidzie odniesienia z równania (6).

Jeżeli uda się nam obliczyć wartość δV dla $\rho = \rho_0$, to z równania (10) możemy określić ζ .

Wartość δV można wyznaczyć z równania (9).

Jeśli wstawimy wartość ζ z równania (10), do równania (9), otrzymamy:

$$g - \gamma = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)^2 \delta V - \frac{\partial (\delta V)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n}.$$

Wyrażenie

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial n} \simeq -\frac{\partial \gamma}{\partial n},$$

z dokładnością do wielkości małych rzędu wielkości spłaszczenia α , jest wielkością stałą, kładziemy więc je, jako równe $C + \alpha G$, zatem mamy.

$$g - \gamma + \left[(C + \alpha G) \delta V + \frac{\partial (\delta V)}{\partial \rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad (11)$$

C jest stałą, zaś G jest funkcją miejsca, zależną od współrzędnych u, v na elipsoidzie odniesienia.

Wartość δV odnosi się do elipsoidy odniesienia jednak jej pochodna odnosi się do punktu na geoidzie.

Wyobraźmy sobie funkcję δV , rozwiniętą na szereg według potęg α , mianowicie:

$$\delta V = v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \dots$$

to współczynniki są podane w postaci szeregów z funkcjami Lamé'go.

Ponieważ V zewnątrz elipsoidy odniesienia jest

$$V_i = \sum_{h=0}^{k=\infty} a_{h,i} S_h M_h N_h \quad (12)$$

przeto, wstawiając szereg potęgowy dla δV w równanie (11), otrzymamy:

$$g - \gamma = - \left(C v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial n}, \quad (13)$$

$$G v_0 \frac{\partial \rho}{\partial n} = - \left(C v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial n}, \quad (14)$$

$$G v_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} = - \left(C v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial n}, \quad (15)$$

.....

itd.

Celem rozwiązania tego systemu równań musimy $g - \gamma$ rozwinąć na szereg według wyrażeń $M_k N_k$, więc będzie:

$$g - \gamma = \frac{\partial \rho}{\partial n} \sum_{k=0}^{k=\infty} g_k M_k N_k$$

co z kolei wstawimy w równanie (13).

Z uwagi na równanie (12), w którym przyjmujemy $\rho = \rho_0$, i ponieważ funkcja resztująca ∂V w równaniach (10) i (11) musi przedstawiać wartości na elipsoidzie odniesienia, mamy:

$$g_k = - a_{k,0} \left[c S_k^{(0)} + \left(\frac{\partial S_k}{\partial \rho} \right)_0 \right].$$

Równanie (13) powinno być spełnione dla każdej wartości iloczynu $M_k N_k$; więc współczynniki o równych wskaźnikach k po obu stronach równania będą sobie równe. Powyższe równanie pozwala wyznaczyć współczynniki $a_{k,0}$, a tym samym funkcję v_0 .

Znając v_0 , znamy lewą stronę równania (14).

Ta strona równania będzie więc rozwinięta według iloczynu $M_k N_k$ podobnie, jak strona lewa równania (13); zatem w równaniu (14) obliczymy funkcję v_1 , podobnie jak w równaniu (13) obliczymy v_0 . W podobny sposób zostaną rozwiązane dalsze równania.

Jeśli wartości funkcji v_i dla $\rho = \rho_0$ są znane, można obliczyć wartość ∂V dla punktów elipsoidy odniesienia, zaś z „wzoru Brunsza” w formie równania (10) można obliczyć undulację ζ geoidy w odniesieniu do elipsoidy odniesienia.

W rozważaniach Rudzkiego i Poincaré’go powierzchnią odniesienia jest elipsoida, będąca powierzchnią ekwipotencjonalną. W obu przypadkach funkcja resztująca funkcji sił jest określona

na podstawie anomalii przyspieszenia siły ciężkości, zaś undulacja geoidy obliczona z wzoru *Brunsa* przy pomocy funkcji resztujących.

Rozważania Rudzkiego rozwiązują zadanie z pominięciem wielkości małych rzędu kwadratu spłaszczenia, zaś rozważania Poincarégo z pominięciem wielkości małych rzędu kwadratu undulacji, więc wielkości małe rzędu kwadratu spłaszczenia są w rozważaniach Poincarégo uwzględnione.

6. Wyznaczenie geoidy przy pomocy rozwinięcia szeregowego przyspieszenia siły ciężkości g i promienia wodzącego R geoidy według funkcji kulistych

Potencjał ciężkościowy W wyraża się wzorem:

$$W = V + 1/2 \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi', \quad (1)$$

gdzie V jest potencjałem przyciągania, zaś

$$1/2 \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi'$$

jest siłą odśrodkową.

Rozwijając potencjał V według funkcji kulistych, mamy:

$$V = \frac{K_0'}{r'} + \frac{K_2'}{r'^3} + \frac{K_4'}{r'^5} + \frac{K_6'}{r'^7} + \dots, \quad (2)$$

gdzie r' , φ' i λ' oznaczają odpowiednio promień, geocentryczną szerokość i długość punktu przyciągającego, zaś K_0' , K_2' , K_4' ... oznaczają funkcje kuliste zmiennych φ' , λ' zerowego, drugiego, trzeciego, itd. stopnia.

W geodezji dynamicznej podaje się wartość r' w postaci:

$$r' = \frac{1}{W} \left\{ K_0' + \frac{K_2'}{r'^2} + \frac{K_4'}{r'^4} + \frac{K_6'}{r'^6} + \dots + 1/2 \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi' \right\}. \quad (3)$$

Oznaczając przez R średni promień wodzący geoidy, przy czym

$$R = \frac{K_0'}{W_0} (1 + 1/2 c), \quad (4)$$

mamy:

$$r' = R \left\{ 1 + \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + \frac{K_2'}{K_0' R^2} + \frac{K_4'}{K_0' R^4} + \frac{K_6'}{K_0' R^6} + \dots \right\}. \quad (5)$$

gdzie

$$\frac{\omega^2 R^3}{K_0'} = c, \quad (6)$$

zaś

$$G = \frac{K_0'}{R^2} (1 - \frac{2}{3} c) \quad (7)$$

Funkcje kuliste mają postać:

$$\begin{aligned} K_2' &= p_{20} (\sin^2 \varphi' - \frac{1}{3}) + (p_{21} \cos \lambda' + q_{21} \sin \lambda') \sin \varphi' \cos \varphi' + \\ &\quad + (p_{22} \cos 2 \lambda' + q_{22} \sin 2 \lambda') \cos^2 \varphi' ; \\ K_3' &= p_{40} (\sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35}) + (p_{41} \cos \lambda' + q_{41} \sin \lambda') (\sin^3 \varphi' - \\ &\quad - \frac{3}{7} \sin \varphi') \cos \varphi' + (p_{42} \cos 2 \lambda' + q_{42} \sin 2 \lambda') (\sin^2 \varphi' - \frac{1}{7}) \cos^2 \varphi' + \\ &\quad + (p_{43} \cos 3 \lambda' + q_{43} \sin 3 \lambda') \sin \varphi' \cos \varphi' + (p_{44} \cos 4 \lambda' + q_{44} \sin 4 \lambda') \cos^4 \varphi' \\ &\quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Jak funkcję kulistą rzędu zerowego, można wprowadzić

$$K_0' = \text{const.}$$

Oznaczając

$$\frac{K_2'}{K_0' R^2} = k_2 ; \quad \frac{2 K_3'}{K_0' R^3} = k_3 ; \dots \quad (8)$$

otrzymamy:

$$g = G \{ 1 - 2 c (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi') + k_2 + k_3 + k_4 + \dots \}, \quad (9)$$

oraz

$$r' = R \{ 1 + (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi') + k_2 + \frac{1}{2} k_3 + \frac{1}{3} k_4 + \dots \}. \quad (10)$$

Oznaczając dalej:

$$g = \gamma + \Delta g, \quad (11)$$

gdzie

$$\gamma = G \{ 1 - b (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi') \}, \quad (12)$$

mamy

$$\Delta g = G \{ (b - 2 c) (\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi') + k_2 + k_3 + k_4 + \dots \} \quad (13)$$

oraz

$$r'_{\text{sferoidy}} = R \{1 + a (1/3 - \sin^2 \varphi')\}, \quad (14)$$

przy czym, według twierdzenia Clairauta,

$$a = \frac{5}{2} c - b.$$

Następnie mamy:

$$r'_{\text{geoidy}} = r'_{\text{sferoidy}} + N$$

Przez odjęcie równania (14) od równania (10) otrzymamy:

$$N = R \{(b - 2c) (1/3 - \sin^2 \varphi') + k_2 + 1/2 k_3 + 1/3 k_4 + \dots\}. \quad (16)$$

Wielkość N jest to wzniesienie geoidy ponad powierzchnię odniesienia, wyznaczone z taką dokładnością, jaką w tych wypadkach zachowano.

7. Metoda Pizzetti'ego wyznaczenia geoidy

P. Pizzetti w swej publikacji „Sopra il calcolo teorico delle deviazione dell'Geoide dell'Ellisoide” Acti della Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XLV.I.1911 wyprowadził wzór Stokesa bez użycia funkcji kulistych.

Obierzemy powierzchnię S , mało różniącą się od kuli której promień wynosi a ; niech początek układu współrzędnych biegunowych będzie w środku ziemi, zaś oś z niech pokrywa się z osią obrotu ziemi.

Niech równanie tej powierzchni ma postać:

$$r = \frac{a}{1 + \alpha t} = a(1 - \alpha t + \alpha^2 t^2 - \dots), \quad (1)$$

gdzie α jest wielkością stałą rzędu spłaszczenia, t jest funkcją zmiennych θ (dopełnienia szerokości geograficznej) i λ (długości geograficznej).

Funkcja t wraz z pierwszymi pochodnymi jest ciągła i skończona. Z drugiej strony równanie geoidy S_1 , mało różniącej się od S , ma postać:

$$r_1 = \frac{a}{1 + \alpha t + \beta n} = a[1 - \alpha t - \beta u + \alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta tu + \beta^2 u^2 \dots], \quad (2)$$

gdzie β jest stałą rzędu mniejszego niż α^2 , zaś u jest inną aniżeli t funkcją zmiennych θ i λ .

W rozważaniach naszych pomijamy wielkości rzędu

$$\alpha \beta, \beta^2, \beta \omega^2$$

(gdzie ω jest prędkością kątową obrotu ziemi).

Oznaczając przez n wewnętrzną normalną do S w punkcie A , przez n_1 wewnętrzną normalną do S_1 w punkcie A_1 , przy czym punkty A i A_1 leżą na tym samym promieniu wodzącym, możemy z równania (1) i (2) wyznaczyć z wystarczającą dokładnością odległość

$$A A_1 = r_1 - r = \Delta r = -\alpha \beta u. \quad (3)$$

Zakładając, że elipsoida odniesienia obejmuje całkowitą masę M ziemi, potencjał tej masy w punkcie $P(r, \theta, \lambda)$ wyrazi się wzorem:

$$f \frac{M}{r} + \alpha f V, \quad (4)$$

gdzie f jest stałą grawitacyjną; zaś dla punktów na powierzchni S_1 wyrazi się wzorem:

$$f \frac{M}{r_1} + \alpha f V',$$

przy czym V i V' są dla obszaru zewnętrznego funkcjami harmonicznymi.

Możemy następnie utworzyć funkcje sił dla punktów znajdujących się na powierzchni S lub na powierzchni S_1 , jeżeli do potencjałów dodamy odpowiednio funkcje siły odśrodkowej.

Ponieważ obie powierzchnie są powierzchniami ekwipotencjalnymi odpowiednich funkcji sił ciężkości o równej wartości W_0 , przeto funkcja sił na powierzchni S będzie:

$$f \frac{M}{r} + \alpha f V_s + \frac{\omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta = W_0, \quad (6_1)$$

zaś funkcja sił na powierzchni S_1 będzie:

$$f \frac{M}{r_1} + \alpha f V_{s_1} + \frac{\omega^2 r_1^2}{2} \sin^2 \theta = W_0. \quad (6_2)$$

Wartość funkcji V' w punkcie A możemy napisać w postaci:

$$V_{S'} = V_{S_1} + (r - r_1) \left(\frac{\partial V'}{\partial r} \right)_{S_1} + \dots$$

ponieważ

$$(r - r_1) = + a \beta u$$

przeto

$$V_{S'} = V_{S_1} + a \beta u \left(\frac{\partial V'}{\partial r} \right)_{S_1} + \dots$$

Przy pominięciu wielkości rzędu $\alpha \beta$, funkcja sił dla S_1 będzie

$$f \frac{M}{r_1} + \alpha f V_{S'} + \frac{\omega^2 r_1^2}{2} \sin^2 \theta = W_0.$$

Odejmując od tego równania pierwsze równanie (6), otrzymujemy:

$$f M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + \alpha f (V_{S'} - V_S) + \frac{\omega^2}{2} \sin^2 \theta (r_1^2 - r^2) = 0 \quad (7)$$

W przybliżeniu jest

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{1}{a} \beta u,$$

a ponieważ

$$\frac{\omega^2}{2} \sin^2 \theta (r_1^2 - r^2)$$

można pominąć, więc równanie (7) przejdzie w równanie:

$$\frac{M \beta u}{a} + \alpha (V_{S'} - V_S) = 0 \quad (8)$$

Ponieważ $V_{S'}$ i V_S są funkcjami harmonicznymi zewnątrz obszaru, to również $\alpha (V_{S'} - V_S)$ jest funkcją harmoniczną. Jeżeli więc oznaczymy

$$\alpha (V' - V) = \beta v_s,$$

gdzie v_s jest funkcją harmoniczną w obszarze zewnętrznym S , to równanie (8) przejdzie w równanie

$$\frac{M u}{a} + v_s = 0. \quad (9)$$

Oznaczmy składową przyspieszenia siły ciężkości g w kierunku promienia wodzącego przez $g_1 \cos(rn)$.

Tę składową otrzymamy, różniczkując cząstkowe równanie (6₁) według r , mianowicie:

$$g_s \cos(rn) = -f \frac{M}{r^2} + \alpha f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_s + \omega^2 r \sin^2 \Theta, \quad (10)$$

$$g_{s_1} \cos(rn_1) = -f \frac{M}{r_1^2} + \alpha f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{s_1} + \omega^2 r_1 \sin \Theta. \quad (11)$$

Odejmując (11) od (10), mamy:

$$\begin{aligned} g_{s_1} \cos(rn_1) - g_s \cos(rn) = & -fM \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \\ & + \alpha f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{s_1} - \alpha f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_s + \omega^2 \sin^2 \Theta (r_1 - r). \end{aligned} \quad (12)$$

W przybliżeniu można przyjąć, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{a^2} 2\beta u, \\ r_1 - r &= -a\beta u, \end{aligned}$$

mamy więc z wystarczającą dokładnością:

$$g_{s_1} - g_s = +2f \frac{M\beta u}{a^2} - \beta f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_s. \quad (13)$$

Wprowadzając następnie dla pozornej anomalii przyspieszenia siły ciężkości oznaczenie

$$\Delta g = g_{s_1} - g_s,$$

mamy:

$$\Delta g = 2f \frac{M\beta u}{a^2} - \beta f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_s,$$

a ponieważ

$$\frac{Mu}{a} = -v_s,$$

więc

$$\Delta g = -2f\beta \frac{v_s}{a} - \beta f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_s = -\beta f \left[\frac{2v_s}{a} + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_s \right]$$

Jeżeli v_s zastąpimy przez V_ζ tj. przez wartość na kuli o promieniu a przy pomocy relacji

$$v_s = V_\zeta + (r - a) \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_\zeta + \dots$$

gdzie

$$r - a = -a \alpha t,$$

to

$$v_s = V_\zeta - a \alpha t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_\zeta + \dots$$

Zatem równanie

$$\frac{M \beta u}{a} + \beta v_s = 0,$$

przejdzie w równanie

$$\frac{M \beta u}{a} + \beta \left[V_\zeta - a \alpha t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_\zeta \right] = 0$$

Następnie otrzymamy

$$\frac{M u}{a} + V_\zeta = 0, \quad (9')$$

oraz

$$\Delta g = -f \beta \left[\frac{2 V_\zeta}{a} + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_\zeta \right]. \quad (14)$$

Z teorii potencjału wiemy, że

$$\lim_{R \rightarrow \infty} W R = M,$$

gdzie W jest potencjałem ciężkościowym masy ziemskiej M .

Z równania (4) po pomnożeniu przez R mamy

$$W R = M + \alpha V R,$$

widzimy stąd, że

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R V = 0.$$

W analogiczny sposób można udowodnić, że

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R V' = 0$$

Na podstawie równań (3) oraz (9') otrzymujemy

$$\Delta r = -a\beta u = + \frac{a^2\beta}{M} V_z; \quad \Delta r = r_1 - r = \frac{a^2\beta}{M} v_z,$$

co łącznie z równaniem

$$(\Delta g)_z = - \frac{f\beta}{a^2} \left[2 V_z + a \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_z \right],$$

służy do rozwiązywania zadania.

W ostatecznej formie P. Pizzetti wyprowadza, używając podobnych wywodów, jak w metodzie 2 że

$$\Delta r_1 = r - r = \frac{a^3}{Mf} \int_0^\pi \Delta g_\delta F(\delta) d\delta,$$

gdzie

$$F(\delta) = \cos \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \sin \delta \left\{ 6 \sin \frac{\delta}{2} - 1 + \cos \rho \left[5 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \ln \left(\sin^2 \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \right) \right] \right\}.$$

8. Metoda B. Numerowa i D. Chramowa wyznaczenia geoidy.

B. Numerow i D. Chromow w pracy „Über die Bestimmung der Figur des Geoides aus Schweremessungen” (Gerlands Beiträge zur Geophysik 48 (1936). S 193-208. Leipzig) rozwiązyali ten problem przy założeniu że dane są wartości, g na powierzchni geoidy.

Autorzy zastosowali rozwinięcie przyspieszenia siły ciężkości g oraz promienia wodzącego R geoidy na szereg według funkcji kulistych szerokości i długości, z zachowaniem dokładności do wielkości małych rzędu kwadratu spłaszczenia włącznie.

Wyszli oni w zależności

$$g_n = (n - 1) r_n,$$

przy czym g_n i r_n są to współczynniki funkcji kulistych n -go rzędu w rozwinięciu przyspieszenia siły ciężkości i promienia wodzącego R geoidy.

Jeżeli w rozwinięciu g współczynniki będą określone na podstawie obserwowanych wartości przyśpieszenia siły ciężkości, to można obliczyć te współczynniki, które występują w rozwinięciu R .

W ten sposób będzie można wyznaczyć geoidę.

9. Metoda Vening-Meinesza wyznaczenia geoidy

F. A. Vening-Meinesz, w rozprawie „A formula expressing the deflection of the plumb-line in the gravity anomalies and some formulae for the gravity-field and the gravity potential outside the geoid” (Proc. Amsterdam Academy Vol. XXXI Nr 3. S. 315-331), przez sumowanie szeregu funkcji kulistych otrzymał:

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} S_{\Delta T} \Delta_R d\sigma,$$

gdzie

$$S_{\Delta T} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(2n+1)}{(n-1)} P_n \left(\frac{P}{\rho} \right)^{n+1};$$

lub

$$S_{\Delta T} = 2 \frac{R}{r} + \frac{R}{\rho} - 5 \frac{R^2}{\rho^2} \cos \psi - 3 \frac{Rr}{\rho^2} \cos \psi \ln \frac{[\rho - R \cos \psi + r]}{2\rho},$$

Widzimy, że ten wzór jest analogiczny do wzoru (9) z trzeciego zagadnienia na wartości brzegowe, które podali N. Idelson i N. Malkin, jeżeli przyjmiemy promień wodzący kuli $R = 1$ i

$$\Delta_R = \Delta g = -f(\Theta', \varphi').$$

Przy założeniu $\rho = 1$ i

$$r = 2 \sin \psi/2$$

równanie (1) redukuje się do wzoru Stokesa.

10. Uwaga N. Idelsona dotyczące wyznaczenia geoidy

N. Idelson, w pracy „Über die Bestimmung der Figur der Erde aus Schwerkraftmessungen” (Verhandlungen der 7 Tagung in Leningrad 1934 der Baltischen Geodätischen Kommission II Teil, Helsinki 1935), wykazał że *Bruns* przy końcu swojej dyskusji wyciągnął błędny wniosek, oraz że ten sam błąd *Brunsa* popełnił również F. Hopfner.

Niech całkowite działanie warstwy, tj. działanie wprost i pośrednio będzie

$$\delta g = + 2 \pi \mu + \frac{T}{2a} - \frac{2T}{a} = 2 \pi \mu - \frac{3T}{2a}, \quad (1)$$

gdzie

$$\frac{2T}{a}$$

oznacza tzw. wyraz Brunsza, podany już uprzednio przez Stokesa; niech dalej w równaniu (1) oznaczają: T potencjał górnej warstwy ziemi, μ gęstość powierzchniową, a promień kuli.

Jeżeli dla zregularyzowanej zamkniętej powierzchni S jest

$$T = \int_S \frac{\mu d\sigma}{r}, \quad (2)$$

przy czym $d\sigma$ oznacza element tej powierzchni, to

$$\delta g = 2 \pi \mu - \frac{3}{2a} \int_S \frac{\mu d\sigma}{r}. \quad (3)$$

Widzimy, że różnica

$$g - \gamma = - \frac{\partial T_e}{\partial n_e} - \frac{2T}{a} \quad (4)$$

jest taka sama jak u Stokesa, i

$$2 \pi \mu - \frac{3}{2a} \int_S \frac{\mu d\sigma}{r} = g - \gamma. \quad (5)$$

Redukcja Stokesa (według określenia N. Idelsona) jest związana tylko z redukcją wolnopowietrzną.

W rezultacie N. Idelson otrzymał:

$$\zeta \gamma = T = \frac{1}{4\pi} \int (g - \gamma) S(\psi) d\sigma, \quad (6)$$

gdzie ψ jest odległością sferyczną elementu $d\sigma$ od punktu A , zaś $S(\psi)$ jest funkcją Stokesa.

11. Uwaga J. de Graaff Huntera dotycząca wyznaczenia geoidy

J. de Graaff Hunter, w swej pracy „The Figure of the Earth from Gravity Observations and the Precision Obtainable” (Philos. Trans. of the Royal Society of London. Series A. Volume 231. Math. and Phys. Sciences. S. 377 — 431. London 1934 — 1935), wyprowadził zależność służącą do wyznaczenia undulacji geoidy, oraz wykazał analogię tej zależności do wzoru Stokesa; oprócz tego podał on dyskusji dokładność obliczenia wielkości promienia i undulacji.

12. Problem rzeczywistej ziemi

Metoda Malkina

W nowszych publikacjach o wyznaczeniu geoidy znajduje się omówienie rozwiązania bez użycia kompensacji; metoda ta prowadzi do t.zw. rzeczywistej ziemi. Ten problem omówił N. Malkin w artykule „Über die Bestimmung der Figur der Erde” (Gerlands Beiträge zur Geophysik 45 (1935) S 133 — 147. Leipzig 1935).

N. Malkin wychodzi z prawa *Chaslesa* i wyprowadza podstawowe równanie (w jego rozprawie oznaczone numerem 7) z dokładnością do ζ^2 :

$$g\zeta - 2U_e = \frac{1}{2\pi} \int \delta g \frac{d\sigma}{r} + \frac{1}{2\pi} \int g\zeta \left(2H + \frac{2\omega^2}{g} - \frac{\cos\delta}{r} \right) \frac{d\sigma}{r}. \quad (1)$$

W równaniu tym oznaczają: ζ odstęp między geoidą a powierzchnią odniesienia,

U_e' potencjał newtonowski zewnętrznych mas,

δg prawdziwą anomalię przyspieszenia siły ciężkości na geoidzie

$d\sigma$ element powierzchni,

r odległość między punktami przyciągającym i przyciąganym,

H średnią krzywiznę,

ω szybkość kątową

δ kąt między normalną i promieniem wodzącym w punkcie oddziaływającym,

g przyspieszenie siły ciężkości.

Jako niewiadome występują tu $g\zeta$ i δg .

W pierwszym przybliżeniu znajomość dokładnej gęstości skorupy ziemskiej nie jest konieczna.

Jeżeli nie istnieją żadne masy zewnątrz geoidy ($U_e' = 0$), to w przypadku kuli równanie redukuje się do wzoru Stokesa.

Malkin wykazał również, jak należy zmodyfikować wzór Stokesa, ażeby móc zastosować anomalie przyspieszenia siły ciężkości według Prey'a. Wskazał też na błąd w rozumowaniu Hopfnera.

Uwaga W. D. Lamberta

W. D. Lambert, w artykule „The analogue of Stokes's formula for the Prey and Bouguer gravity anomalies” (Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. 49 Heft 1/2 (1937), S. 199 — 209, Leipzig), na innej drodze potwierdził formułę Malkina i wskazał na pewien błąd w jego wywodach.

Uwaga K. Junga

K. Jung, w artykule „Bestimmung der Geoidundulationen aus Schweremessungen” (Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. 29 (1929) S. 26 — 62 Leipzig), wykazał że geoidę można także wyznaczyć i w tym przypadku, gdy istnieją masy zewnątrz niej.

W przypadku, gdy geoida jest powierzchnią brzegową, wzory K. Junga są identyczne z wzorami Hopfnera, który rozważa wyznaczenie geoidy z masami na zewnątrz niej.

K. Jung również wskazał na błąd Hopfnera.

Metoda Harold Jeffreysa

Przed N. Malkinem już Harold Jeffreys w swej pracy „An application of the free-air reduction of gravity” (Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. 31 (1931), S. 378 — 386, Leipzig) podaje nową metodę otrzymania wyrażenia Stokesa dla wyznaczenia geoidy, przy czym stosuje wzory Greena z uwzględnieniem tylko redukcji wolno-powietrznej. Jest to metoda przybliżona.

Jeffreys pod koniec swej pracy dochodzi do wniosku, że nie potrzeba stosować żadnej kondensacji, że przy wyznaczaniu kształtu ziemi z dokładnością do

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2$$

wystarczy stosować tylko redukcję wolno-powietrzną.

Metoda N. Mojsiejewa

N. Mojsiejew w artykule „Über die Bestimmung der Figur des Geoids der nichtregularisierten Erde” (Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. 42 (1934) S. 279 — 290) wyprowadził wzór na undulacje geoidy.

Niech ζ będzie pewną powierzchnią sferyczną; niech we wnętrzu tej powierzchni znajdują się pewne masy M_ζ . Zakładamy, że ζ jest powierzchnią ekwipotencjonalną pola sił, wywołanego przez masy M_ζ . Niech dalej E będzie pewną powierzchnią zewnątrz sfery (kuli) ζ , która w pewnych miejscach może się pokrywać z ζ .

W obszarze V_e , który jest ograniczony przez powierzchnie E i ζ , umieszczamy masy M_e . Gęstość ρ_e tych zewnętrznych mas zakłócających niech będzie znana w każdym punkcie obszaru V_e . Dalej Mojsiejew przyjmuje, że masy zakłócające M_i są rozłożone wewnątrz sfery odniesienia ζ .

Mojsiejew przyjął następujące oznaczenia:

$\pi_\zeta(P)$ — Potencjał masy M_ζ punktu P ,

$\pi_e(P)$ — Potencjał masy M_e na ten sam punkt,

$\pi_{Ee}(P)$ — Potencjał całkowitej masy M_ζ i M_e na punkt P ,

$\pi_i(P)$ — Potencjał masy M_i na punkt P ,

$\pi_{Ei}(P)$ — Potencjał całkowitej masy M_ζ i M_i na punkt P ,

$\frac{\partial \pi}{\partial R}$ — pochodna potencjału π w kierunku promienia wodzącego punktu P ,

R, λ, Θ — promień wodzący, długość i odległość biegunowa punktu P ,

R', λ', Θ' — odpowiednie wielkości dla punktu P' ,

$d v$ — element objętości,

$d \sigma$ — element powierzchni,

R_z — promień sfery ζ ,

R_E — promień wodzący punktu na fizycznej powierzchni E ,

k^2 — stała grawitacyjna,

g_z — skrócone oznaczenie dla wielkości

$$g_z = \left[\frac{\partial \pi_z}{\partial R} \right]_{R=R_z},$$

ψ — kąt pomiędzy promieniami wodzącymi punktów P i P' ,

$P_n(\psi)$ — Wielomian Legendre'a n -go rzędu,

ζ_1 — kula jednostkowa, koncentryczna do ζ ,

$d \sigma_1$ — element powierzchni kuli jednostkowej tj.

$$d \sigma_1 = \sin \Theta d \Theta d \lambda,$$

$$I_0(0) = \int_{\zeta_1} \int_{R=R_z}^{R_E} \rho e' R' d R' d \sigma_1 \quad \text{t. j. potencjał zewnętrznych}$$

mas zakłócających na centrum kuli ζ ,

$$\begin{aligned} S_\Delta &= [\Delta_B^p - \Delta^p] [\operatorname{cosec} \psi/2 - \ln(1 + \sin \psi/2)] - [\Delta_B^p + \Delta^p] \ln \sin \psi/2 = \\ &= \Delta^p [\operatorname{cosec} \psi/2 - \ln(1 + \sin \psi/2)] - \Delta^p \ln \sin \psi/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_\mu &= 2 \mu [\operatorname{cosec} \psi/2 - \ln(1 + \sin \psi/2)] + \\ &+ [2 \mu - 3 \mu(E)] \ln \sin \psi/2 - \frac{3 \mu}{4 \pi k^2} \omega^2 \sin^2 \Theta_i S_i(\psi) \end{aligned}$$

$$S_i(\psi) = \operatorname{cosec} \psi/2 - \ln(1 + \operatorname{cosec} \psi/2),$$

$$\Delta^F = \Delta_B^P - \Delta^B; \quad \Delta^P = \Delta_B^P + \Delta^B; \quad \Delta_B^P = \Delta^P - \Delta^B,$$

$$\Delta^P = \left[\frac{\partial (\pi \zeta + \pi i + \pi e)}{\partial R} \right]_{e+i} - \left[\frac{\partial \pi \zeta}{\partial R} \right]_{\zeta},$$

$$\Delta^B = \left[\frac{\partial (\pi \zeta + \pi i)}{\partial R} \right]_{e+i} - \left[\frac{\partial \pi \zeta}{\partial R} \right]_{\zeta} - 2 \pi k^2 \bar{\mu}(E) \zeta,$$

ω — prędkość kątowna,

$\bar{\mu}$ — średnia gęstość ziemi,

$\mu(E)$ — przeciętna gęstość zewnętrznej warstwy ziemi,

N. Mojsiejew wyprowadził wzór dla odstepu geoidy od powierzchni odniesienia ζ , w postaci:

$$\zeta = \frac{4 \pi k^2}{g(\zeta)} I_0(0) + \frac{R \zeta}{4 \pi g(\zeta)} \int_{\zeta_1} S_{\Delta} d \sigma_1 + \frac{k^2 R(\zeta)}{3 g(\zeta)} \int_{\zeta_1}^{\zeta} S_{\mu} d \sigma_1'. \quad (1)$$

Wzór N. Mojsiejewa jest przybliżony, podobnie jak wzór H. Jeffreysa.

c. Dokładność wyznaczenia geoidy przy pomocy omówionych metod

Przy pomocy wzoru całkowego Stokesa można wyznaczyć geoidę z dokładnością około $\pm 4,0$ m. Na dokładność tego wyznaczenia mają wpływ: rozmieszczenie i zagęszczenie punktów grawimetrycznych oraz dokładność wyznaczenia g ; te ostatnie stanowią podstawę do wyznaczenia wartości G i Δg ;

Mniej więcej z tą samą dokładnością można wyznaczyć geoidę przy pomocy rozwiązania trzeciego zagadnienia o wartościach brzegowych, jeśli wykorzystamy ten sam materiał pomiarowy.

Metodą Rudzkiego można wyznaczyć geoidę z dokładnością kilku metrów (z pominięciem wielkości rzędu kwadratu spłaszczenia).

Metodą Poincaré'go można wyznaczyć geoideę z dokładnością około ± 1 m. Przy rozwinięciu Δg na szereg według funkcyj kulistych, można wyznaczyć undulację geoidy z dokładnością kilku metrów. Lepsze wyniki daje metoda Pizzettie'go.

Mniej więcej tę samą dokładność kilku metrów daje rozwiązanie równania całkowego.

Przy rozważaniu rzeczywistej ziemi można wyznaczyć geoideę metodą Malkina, teoretycznie bezbłędnie. Dokładność wyznaczenia przy pomocy metod Jeffreysa i Mojsiejewa zawiera się w granicach kilku metrów; lecz przy tych metodach dużą rolę odgrywa wartości przyjętej gęstości skorupy ziemskiej.

Metoda Poincaré'go, wyprowadzona przy pomocy funkcji Lamé'go, nie znalazła dotychczas praktycznego zastosowania.

Pod względem dokładności na pierwszym planie znajduje się metoda Malkina.

Lepsze wyniki możemy osiągnąć tylko przez zwiększenie ilości punktów grawimetrycznych i równomierne ich rozmieszczenie na powierzchni ziemi, oraz zastosowanie właściwych metod redukcji.

ROZDZIAŁ IV

PORÓWNANIE PRAC O WYZNACZENIU GEOIDY

Jak już poprzednio zaznaczyłem, dotychczas mamy niewiele pomierzonych punktów grawimetrycznych (kilka tysięcy), zresztą na niektórych z tych punktów trzeba powtórzyć pomiary, niektóre zaś punkty szczególnie dawniejsze wogóle odrzucić.

Z pierwszych prac dotyczących wyznaczenia geoidy przy pomocy pomiarów grawimetrycznych należy wymienić prace wykonane w Instytucie Geodezyjnym w Poczdamie pod kierownictwem prof. Helmerta.

Wykorzystując bardzo małą ilość punktów, niekorzystnie przy tym rozmieszczonych na powierzchni ziemi, Helmert otrzymał geoidę z błędem $\pm 50 - 60$ m, wykazał przy tym, że undulacje geoidy względem elipsoidy ziemskiej Helmerta nie przekraczają 100 m.

Prócz tego pośrednio wzmianki o geoidzie napotykamy w pracach poświęconych obliczaniu spłaszczenia elipsoidy, wyznaczeniu normalnej wartości przyspieszenia siły ciężkości. Wynikające z tych prac odchylenia geoidy, w sensie wysokościowym, od przyjętej, elipsoidy ziemskiej jako powierzchni odniesienia, nie przekraczają kilkuset metrów.

W ostatnich czasach Ackerl wykonał obliczenie geoidy. Praca jego pochłonęła wiele czasu, ponieważ Ackerl uwzględnił przeszło 4000 punktów grawimetrycznych, zredukowanych według metody Preya, jednakowoż praca jego podaje błędne wyniki, wykazując undulacje geoidy do 1000 lub więcej metrów.

Ackerl popełnił błąd, ponieważ zastosował redukcję Preya, a obliczenie geoidy oparł na wzorze całkowym Stokesa,

A. Hirvonen z Instytutu Izostazji w Helsinkach wyznaczył geoidę na mocy całkowego wzoru Stokesa przy użyciu 62 punktów grawimetrycznych, i otrzymał średnie odchylenie geoidy od międzynarodowej elipsoidy Hayforda ($a = 6\,378\,388$ m, $\alpha = 1 : 297,0$) około ± 50 m. Maksymalne odchylenie przekracza w jednym tylko wypadku 100 m.

Poza tym w pracy J. de Graaff Huntera znajdujemy rozdział, który zawiera rozważania o dokładności Δg i Δr . J. de Graaff Hunter wyznaczył przy użyciu 1654 punktów grawimetrycznych Δr z błędem w granicach $\pm 7,0 - 10,0$ m.

Obecnie w Instytucie Izostazji w Helsinkach oblicza się geoidę z wszystkich dostępnych pomiarów przyspieszenia siły ciężkości. Wynik tej pracy ukaże się w najbliższej przyszłości.

Nad tym samym zagadnieniem są prowadzone również studia przez rosyjskich uczonych.

ROZDZIAŁ V

ZMIANY GEOIDY W CZASIE

W poprzednich rozdziałach rozpatrywaliśmy postawione zagadnienie w założeniu, że na wartość przyspieszenia siły ciężkości nie mają wpływu masy (księżyc, słońce, gwiazdy). W rzeczywistości tak nie jest, działają tutaj przede wszystkim masy ciał niebieskich, księżyc i słońce, a także znikomo mały wpływ wywierają i inne ciała. Prócz tego oddziałują także czynniki jak pomieszczenia mas wewnątrz ziemi, wiatry, prądy itd.

Rozpatrując działania księżyc i słońca zauważymy, że ich wpływ nie jest stały, lecz zmienia się w czasie.

Zmiany przyspieszenia siły ciężkości pod wpływem księżyc i słońca, obliczamy z wzoru:

$$\Delta g = f M \left(\frac{\cos z'}{r'^2} - \frac{\cos z}{r^2} \right)$$

lub w dalszym przybliżeniu

$$\Delta g = g \frac{M}{M_{\odot}} \sin^3 p \frac{1}{r^3} (3 \cos^2 z - 1) \text{ dla księżyc,}$$

oraz

$$\Delta g = g \frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} \sin^3 p_{\odot} (3 \cos^2 z - 1) \text{ dla słońca,}$$

gdzie

$$g = f \frac{M_{\oplus}}{R^2};$$

$M_{\oplus}$ = masa ziemi,

$M_{\text{☾}}$ = masa księżyca

$M_{\odot}$ = masa słońca,

R = średni promień ziemi,

r = średnia odległość ziemi od księżyca,

r' = średnia odległość ziemi od słońca;

$$\sin p_{\text{☾}} = \frac{R}{r}, \quad \sin p_{\odot} = \frac{R}{r'};$$

Widzimy, że wpływ księżyca i słońca zmienia *wielkość* i *kierunek przyspieszenia siły ciężkości*, co w konsekwencji zmienia też kształt geoidy.

Zmiana wartości przyspieszenia siły ciężkości pod wpływem masy księżyca wynosi maksymalnie 0,11 mgala, zaś pod wpływem masy słońca maksymalnie 0,05 mgala.

Wpływ innych ciał niebieskich jest znikomo mały, gdyż nie osiąga granicy dokładności przyjęty przez nas dla obserwacji grawimetrycznych.

Siły, które zmieniają kształt geoidy (księżyc słońce), powodują również ruch wód w morzach, i ujawniają się dla nas w formie *odpływów* i *przyptywów*; to zjawisko wywołuje w następstwie drugorzędne wpływy na zmianę przyspieszenia siły ciężkości i tym samym na kształt geoidy.

Pod wpływem działania przyptywu i odpływu według G. H. Darwina, geoida na biegunach leży po niżej około 0,28 m, zaś na równiku jest położona powyżej o 0,14 m, aniżeli w wypadku nieuwzględnienia tych działań.

Dalszymi przyczynami zmiany przyspieszenia siły ciężkości są: zmiany ciśnienia powietrza, wiatr, zmiany temperatury, obniżenie się intensywności nagrzewania ziemi przez słońce, translokacja i przemiany mas wewnątrz ziemi, różna zawartość soli w morzach itd.

Wpływy tych czynników na g nie dadzą się jeszcze ująć w jakieś ściślejsze liczby, są one jednak bardzo małe; tym nie mniej w dokładnych badaniach naukowych muszą być wzięte pod uwagę.

Widzimy że w rzeczywistości przyspieszenie siły ciężkości a wskutek tego i kształt geoidy jest nie tylko funkcją miejsca, lecz i funkcją czasu.

Przy przeprowadzaniu pomiarów grawimetrycznych celem wyznaczenia kształtu geoidy należy więc nie tylko dbać o wielką dokładność, ale również, o ile jest to możliwe, wykonać pomiary w odpowiednio krótkim czasie, i to tymi samymi lub o tej samej dokładności przyrządami. Następnie należy przeprowadzić jednolitą redukcję tych pomiarów, a później z tych danych — na podstawie metod podanych w rozdziale III — wyznaczyć kształt geoidy w odniesieniu do określonej epoki.

Dalszym zadaniem będzie ujęcie wymienionych powyżej ubocznych wpływów we wzory i wyznaczenie oddziaływania tych wpływów na zmianę geoidy, jako funkcję czasu, miejsca.

Stwierdziliśmy, że geoida zmienia się w czasie co z kolei wpływa na zmianę wyznaczenia elipsoidy ziemskiej.

Zmiany elipsoidy ziemskiej zaś są uwarunkowane zmianami spłaszczenia i wymiarami elipsoidy.

ROZDZIAŁ VI

ANALIZA PRAKTYCZNYCH ZASTOSOWAŃ METOD I NARZĘDZI ORAZ UWAGI KOŃCOWE

a. Podwójny grawimetr Grafa

Do wyznaczenia geoidy musimy znać wartość g dla całej powierzchni ziemi, z jednakową mniej więcej dokładnością; największą trudnością jest wyznaczenie g na morza, z tą samą dokładnością co na lądzie stałym.

Rozważając zagadnienie wyznaczenia geoidy z pomiarów grawimetrycznych widzimy, że na lądzie możemy wyznaczyć przyspieszenia siły ciężkości z dokładnością około $\pm 0,1$ mgala, lub nawet dokładniej. Natomiast na morzu przy pomocy metody Vening-Meinesza możemy wyznaczyć przyspieszenie siły ciężkości z dokładnością tylko około $\pm 4,0$ mgala.

Uważam za prawdopodobne, że przy pomocy statycznego grawimetru, opartego na zasadzie barometrycznej, Haalcka lub Noergaarda będziemy mogli otrzymać na morzu g z dokładnością ± 1 mgala.

Jestem zdania, że problem ten będzie można rozwiązać przy pomocy podwójnego grawimetru A. Grafa.

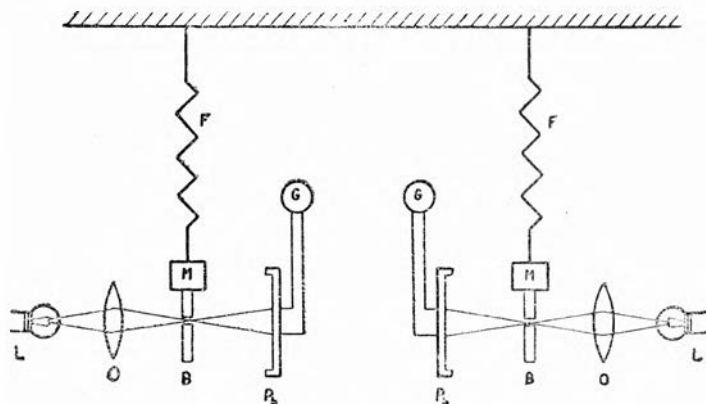
Jeśli grawimetr ten ulegnie modyfikacji i zostanie wmontowany do łodzi podwodnej, będzie funkcjonował analogicznie, jak wahadła w metodzie Vening-Meinesza. Zamiast 2 można stosować więcej np. 3 grawimetry A. Grafa. Jeżeli wszystkie te grawimetry będą zawieszone na wspólnej podstawie, to przy użyciu urządzeń do rejestrowania wydłużeń sprężyny pod wpływem zmiany siły ciężkości, wyznaczymy ostatecznie g .

Oczywiste jest, że te pojedyncze wahadła grawimetrów winny być jednakowej długości, wykonane z tego samego materiału i obciążone jednakową masą. Zredukowana długość wahadła powinna być taka ażeby półokres wahanja $T \cong 1$ sekunda.

Projekt budowy podwójnego grawimetru typu Grafa

Zasada budowy jest następująca:

Równe masy M są zawieszone na spiralnych sprężynach pionowych F .



Rys 9

Zmiany wydłużenia są mierzone na drodze fotoelektrycznej.

Do tego służy zasadniczo: lampa L soczewka O , przesłona B , komórka fotoelektryczna Ph i galwanometr G .

Gdy np. przy powiększaniu przyspieszenia siły ciężkości na pewnym punkcie, masa M opada niżej, przesłona B przepuszcza w porównaniu do pozycji wyjściowej mniejszą ilość światła do komórki, co jest rejestrowane przez prąd galwanometru.

Dla każdego grawimetru należy urządzić kilka przesłon do rejestracji:

Instrument powinien być zawieszony kardanowo, tak aby aparaty brały tylko mały udział w ruchach kołysania się łodzi. Cały instrument powinien być izolowany od wpływów zmiany ciśnienia powietrza, zmiany temperatury, a oprócz tego powinien posiadać czułe libele, rejestrowane drogą fotograficzną.

Obok instrumentu Grafa muszą być użyte również wahadła Vening-Meinesza. Instrument ten będzie funkcjonował podobnie, jak pionowy sejsmometr.

Oznaczając przez m całkowitą masę systemu wahadłowego (grawimetru), przy czym masa sprężyny winna być uwzględniona tylko w połowie, na całkowity nielumiony okres wahania T otrzymamy:

$$T = 2 T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{f}} = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{g} \cdot \frac{dl}{dm}}$$

gdzie f oznacza stałą sprężyny, L — długość zredukowanego wahadła, dl wydłużenie wahadła, o ile masę m zwiększymy o dodatkową masę dm .

Ponieważ

$$\frac{dm}{m} \simeq \frac{dg}{g}$$

można napisać

$$\frac{dl}{L} \simeq \frac{dg}{g}$$

przy czym

$$L = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \simeq T_0^2 \text{ m/sek}^2$$

Instrumentu tego będzie można używać również na lądzie w przypadku gdy warunki transportu nie będą uciążliwe.

Ze względu na redukcję pomiarów, jest konieczna znajomość głębokości zanurzenia łodzi podwodnej podczas obserwacji, znajomość szybkości i kursu łodzi, kierunku prądów morskich, głębokość morza oraz średniej szerokości i długości geograficznej miejsca łodzi podwodnej.

Dla wyznaczenia g z dokładnością około $\pm 0,1$ mgala, jest konieczna znajomość szybkości łodzi z dokładnością ± 25 m na godzinę

Głębokość morza wyznaczamy przy pomocy metody echa, lub obecnie przy pomocy radaru.

Metoda ta pozwoli nam na wyznaczenie g na otwartych morzach z dokładnością niewiele różną od dokładności wyznaczeń na stałym lądzie.

Chcę jeszcze zaznaczyć, że celem kontroli i porównania instrument ten można będzie skombinować z aparatem Vening-Meinesza.

b. Metoda geometryczno-grawimetryczna wyznaczenia geoidy

Celem całkowitego wyznaczenia geoidy winno się przeprowadzić przede wszystkim pomiary grawimetryczne, które następnie, zebrane grupowo pozwolą nam wyznaczyć w punktach pomiaru odstęp N geoidy od powierzchni odniesienia (elipsoidy międzynarodowej Hayforda).

Obliczenie N powinno być dokonane przy użyciu jednej z uprzednio podanych metod, możliwie bardzo dokładnie. Z tych obliczeń otrzymamy przynajmniej jeden punkt, ewentualnie niekiedy więcej, dla każdego kraju o znanym N . Następnie przy pomocy niwelacji astronomicznej powiążemy te punkty z sobą w sieć grawimetryczną i wyrównamy ją przy użyciu rachunku wyrównawczego.

Przeprowadzenie niwelacji astronomicznej będzie ułatwione w tych krajach, gdzie już przeprowadzono triangulację krajową

W jednym z głównych punktów grawimetrycznych w którym znamy N , (może to być główny punkt Laplace'a) przyłożymy elipsoidę odniesienia (międzynarodową elipsoidę Hayforda). Następnie będziemy mogli zredukować pomierzone bazy na poziom geoidy i obliczyć dla każdego punktu Laplace'a odchylenie pionu (z pomiarów geodezyjnych i astronomicznych), a w dalszym ciągu — obliczyć w tych punktach wzniesienie geoidy (dodatnie lub ujemne) względem elipsoidy odniesienia.

Dalszym etapem prac będzie przeprowadzenie gęstego *profilowania* przy pomocy niwelacji astronomicznej wzdłuż południków i równoleżników (jak to się już przeprowadza w Szwajcarii), a na podstawie tego materiału można będzie wyznaczyć N przez graficzne całkowanie, praktycznie we wszystkich punktach siatki.

Następnie rysujemy na mapach punkty i ich wyniosłości N względem elipsoidy odniesienia. Połączenia punktów o równych wartościach N dadzą nam obraz warstwiczny przebiegu geoidy względem elipsoidy odniesienia.

Muszę zaznaczyć, że profile geoidy (krzywizny lokalne) można również wyznaczyć przy użyciu wagi skręceń *Eötvösa*, lecz jak już na innym miejscu zaznaczyłem, wydajność pracy przy użyciu tego instrumentu jest bardzo mała.

Dokładność wyznaczenia geoidy metodą grawimetryczno-geometryczną zależy w pierwszym rzędzie od odpowiedniego rozłożenia pomiarów grawimetrycznych, od zastosowania odpowiednich wzorów redukcji i metod do wyznaczenia N , następnie od dokładności przeprowadzenia niwelacji astronomicznej.

Ta metoda ma wyższość nad innymi, czysto grawimetrycznymi, gdyż zezwala na takie zagęszczenie punktów na całym obszarze ziemi (na stałym lądzie), że w każdym punkcie da się wyznaczyć N przez interpolację.

Metoda wyznaczenia geoidy przy pomocy triangulacji nie może być stosowana dla całej ziemi, gdyż nie możemy obecnie przeznaczyć triangulacji z jednego kontynentu na drugi, ponieważ kontynenty są oddzielone od siebie oceanami, nie możemy więc pokryć całej powierzchni ziemi jedną siecią triangulacyjną. Ta przyczyna zmusza nas do stosowania metod grawimetrycznych. Niemniej triangulacja jest pomocna przy wyznaczeniu geoidy przez dostarczenie elipsoidy ziemskiej na podstawie pomiarów stopni południków (względnie równoleżników), i prace te winny być przeprowadzane obok prac grawimetrycznych w ramach porozumienia międzynarodowego.

Rozpracowanie metody geometryczno-grawimetrycznej będzie ułatwione, gdyż Instytut Izostazji w Helsinkach dostarczy nam w najbliższej przyszłości pewnych dość dobrze określonych wartości N (odstępu geoidy od elipsoidy odniesienia) dla znacznej

ilości punktów. Każdy prawie kraj będzie miał możliwość wykorzystania tego materiału do przeprowadzenia u siebie niwelacji astronomicznej.

Wyznaczenie geoidy, łącznie z niwelacją astronomiczną, będzie pierwszym krokiem do dalszego planowego rozłożenia punktów grawimetrycznych w celu pierwszego sprawdzenia założeń oraz przebiegu geoidy, jak również dostarczy dużo materiału do sprawdzenia, czy dane metody wyznaczenia geoidy zezwalają na taką dokładność, jaką można przewidywać teoretycznie.

Moim zdaniem, metoda ta nadaje się najlepiej do wyznaczenia geoidy

c. Uwagi dotyczące wyznaczenia geoidy

Po przeprowadzeniu pomiarów przyspieszenia siły ciężkości dla wielu punktów, które odpowiednio i równomiernie będą rozłożone na całej powierzchni ziemi, a których dokładność wyznaczenia będzie wystarczająca, możemy przy wykorzystaniu izostaticznej redukcji otrzymać wartości g na geoidzie.

Następnie można będzie obliczyć dla każdego punktu Δg . Wykorzystując ten materiał, można będzie wyznaczyć geoidę albo według metody Poincaré'ego, albo według zadania o wartościach brzegowych, albo wreszcie według metody Malkina (w ostatnim wypadku trzeba uwzględnić tylko redukcję wolno-powietrzną). Otrzymane wyniki z tych trzech metod dostarczą nam szeregu elementów, które posłużą do sprawdzenia izostazji, do wyznaczenia gęstości skorupy ziemskiej, wartości normalnej dla g , wielkości T , t. j. głębokości powierzchni wyrównawczej.

Dla nierzeczywistej (zregularyzowanej) ziemi winno się przeprowadzić redukcję izostaticzną trzema metodami: 1) Pratt-Hayforda, 2) Airy-Heiskanena i 3) Vening-Meinesza i co najmniej dla trzech różnych wartości T .

Tak zredukowane wartości g należy wykorzystać do wyznaczenia geoidy przy pomocy rozwiązania zadania o wartościach brzegowych.

Dla dalszej kontroli powinno się wyznaczyć geoidę metodą Malkina dla rzeczywistej (niezregularyzowanej) ziemi, wykorzystując jedynie redukcję wolno-powietrzną.

Przyjmując dla gęstości skorupy ziemskiej dwie lub trzy wartości mało się różniące od 2,72 — przez powyższą operację będzie można sprawdzić metodę niezregularyzowanej (rzeczywistej) ziemi.

Należy równocześnie przeprowadzić pomiary sejsmiczne, które dostarczą nam dokładniejszych wartości dla gęstości i grubości skorupy ziemskiej.

Przy obliczaniu musimy posługiwać się jednorodnym materiałem kartograficznym dla całej ziemi.

Widzimy, że tylko wysiłek wszystkich krajów może dostarczyć dobrego materiału do wyznaczenia geoidy.

d. Uwagi końcowe

Jeżeli będziemy mieli do dyspozycji sieć około 4000 punktów grawimetrycznych pomierzonych z dokładnością $\pm 0,1$ —1,0 mgala, to cały materiał obserwacyjny powinien być wysłany do opracowania Instytutowi Izostazji, w którym przy zastosowaniu izostatycznej redukcji wyznaczonoby geoidę na mocy wzoru całkowego Stokesa.

Obecna chwila stawia przed geodetami zadanie udoskonalenia instrumentów służących do pomiarów grawimetrycznych, dzięki czemu będziemy mogli osiągnąć lepszą dokładność i uniwersalność pomiarów tak na lądzie, jak i na morzu.

Następnie należy dążyć do skrócenia czasu pomiarów na każdej stacji, oraz osiągnąć łatwość użycia instrumentu podczas transportu. Wówczas będzie realna możliwość pokrycia w przeciągu niewielkiego czasu całej powierzchni ziemi punktami grawimetrycznymi i rychłego osiągnięcia pierwszego dokładniejszego wyznaczenia geoidy.

Chciałbym zaznaczyć, że takie pierwsze uniwersalne wyznaczenie geoidy byłoby wstępnym etapem, którego dalszy ciąg stanowiłoby drugie przybliżenie geometryczno-grawimetryczne, dające dokładniejsze wyniki.

Przechodząc do konstrukcji instrumentów musimy zaznaczyć, że winien pracować tylko na ograniczonym obszarze, np. jednego kraju, ażeby warunki klimatyczne i transportowe były mniej więcej jednakowe.

Innym problemem jest rozwiązanie zadania o geoidzie dla obszarów mórz i oceanów. Plan pomiarów winien być tak sporządzony, ażeby w drodze powrotnej można było powtórzyć pomiary na tych samych punktach, możliwie w takich samych warunkach.

Epoka pomiarów, metody i instrumenty oraz dokładność wyznaczenia winny być ustalone przez Międzynarodową Unię Geodezyjno-Geofizyczną. Z tym problemem wiąże się wybór głównych i pośrednich punktów grawimetrycznymi, oraz ich powiązanie w sieć grawimetryczną. Prace te powinny być koordynowane z pracami interpolacyjnymi.

Jedynie pod tymi warunkami można racjonalnie rozwiązać ten główny problem geodezji wyższej.

SPIS LITERATURY

- 1) *C. F. Baeschlin*: Höhere Geodäsie — Vorlesungen. Zürich 1943.
- 2) *A. Graff*: Ein neuer statischer Schwermesser zur Messung und Registrierung lokaler und zeitlicher Schwereänderungen. Zeitsch. f. Geophysik XIV. S. 152—172. Braunschweig 1938.
Ein neuer kleiner Schwermesser. Beiträge zur angewandten Geophysik. Bd. 10. S. 18—34. Leipzig 1943.
- 3) *J. de Graaff Hunter*: The Figure of the Earth from Gravity Observations and the Precision Obtainable. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Volume 234. Math. and Physical Sciences. London 1934—1935.
- 4) *F. R. Helmert*: Die math. und physik. Theorien d. höhoren Geodäsie Bd. II Leipzig 1884.
- 5) *W. Heiskanen*: Handbuch der Geophysik Bd. 1. S 731—951. Berlin 1936.
New Isostatic Tables for the Reduction of Gravity values calculated on the Basis of Airy's Hypotesis. Helsinki 1938.
Über die Struktur und Figur der Erde. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 57. S. 132—170. Leipzig 1941.
- 6) *R. A. Hirvonen*: Über die kontinentalen Undulationes des Geoides. Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. 40. S. 18 — 23. Leipzig 1933.
- 7) *F. Hopfner*: Physikalische Geodäsie. Leipzig 1934.
- 8) *N. Idelson i Malkin*: Die Stokesche Formel in der Geodäsie als Lösung einer Randwertaufgabe. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 29. S. 156—160. Leipzig 1931.
- 9) *N. Idelson*: Über die Bestimmung der Figur der Erde aus Schwerkraftmessungen. Verhandl. 7 Tagung der Balt. Geod. Kommission II. Teil. Helsinki 1935.
- 10) *Jordan-Eggert*: Handbuch der Vermessungskunde. Bd. III/2. 8. Aufl. Stuttgart 1941.
- 11) *Harold Jeffreys*: An application of the free—air reduction of gravity: Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 31. S. 378 — 386. Leipzig 1931.
- 12) *Karl Jung*: Die Bestimmung der Geoid-Undulationen aus Schwermessungen. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 29. S. 29—62. Leipzig 1931.
- 13) *O. D. Kellog*: Foundations of potential theory New York 1929.
- 14) *R. P. Pierre Lejay*: Etude gravimetrique des îles Philippines Shanghai 1939.

15) *Walter D. Lambert*: The analogue of Stokes's formula for the Prey and Bouguer gravity anomalies. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*. Bd. 49. S. 199—209. Leipzig 1937.

16) *F. A. Vening-Meinesz*: A formula expressing the deflection of the plumb-lines in the gravity anomalies and some formulae for the gravity — field and the gravity Potential outside the geoid. *Proceedings Vol. XXXI Nr 3* S. 315—331. Amsterdam 1928.

Une nouvelle méthode pour la réduction isostatique regionale de l'intensité de la pesanteur. *Bull. Géodésique Nr 29* Toulouse — Paris 1931.

17) *O. Meisser*: *Praktische Geophysik für Lehre, Forschung u. Praxis* Dresden u. Leipzig 1943.

18) *N. Malkin*: Über die Bestimmung der Figur der Erde, *Gerlands Beiträge zur Geophysik* Bd. 45. S. 133 — 147. Leipzig 1939.

19) *N. Moisseiev*: Über die Bestimmung der Figur des Geoides der nicht-regularisierten Erde. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, Bd. 42. S. 279—290. Leipzig 1934.

20) *Th. Niethammer*: Die Schwerebestimmung der Schweizer-wochen Geodätischen Kommission und ihre Ergebnisse, Schaffhausen 1921.

Zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung. Basel 1926.

21) *B. Numerow i D. Chramow*: Über die Bestimmung der Figur des Geoides aus Schweremessungen. *Gerlands Beiträge zur Geophysik* Bd. 48. S. 193—208. Leipzig 1936.

22) *P. Pizzetti*: *Sopra il calcolo teorica delle deviazioni dell'Geoide dell'Ellissoide*. Torino 1911.

23) *M. H. Poincaré*: Les mesures de gravité et la géodésie. *Bull. astr. Tome XVIII*. P. 5—39. Paris 1901.

24) *M. P. Rudzki*: Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité. *Bull. astr. Tome XXI*. P. 49—76. Paris 1905.

25) *G. G. Stokes*: On the Variation of Gravity of the Surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. London 1849.

26) *C. Somigliana*: Teoria generala dell Campo gravitazionale dell Ellissoide di rotatione. *Mem. d. Societa astr. Ital. Vol. IV*. p. 425—469. 1937.

27) *P. Tardi*: *Traité de Géodésie*. Paris 1934.

28) *A. Wangerin*: *Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen*. Berlin u. Leipzig 1922.

