PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO - BADAWCZEGO
PRZY GŁÓWNYM URZĘDZIE POMIARÓW KRAJU
Nr 7

Inż. STEFAN HAUSBRANDT

BEZPOŚREDNIA INTERPOLACJA WIELOMIANOWA

ze szczególnym uwzględnieniem

interpolacji funkcji dwóch argumentów ujęta krakowianowo,
oraz poprzedzona krótkim zarysem rachunku krakowianowego

WARSZAWA 1950 R.

Druk Pracowni Fotoreproduk. Urzędu Wojewódzkiego Poznańskiego Wydziału Pomiarów Nr. zam. 616-300-I. 1950 K-1849.

SPIS RZECZY.

L I T E R A T U R A.

Rachunek krakowianowy.

Prof.Edward Warchałowski - Zastosowanie krakowianów w rachunku wyrównawczym. Warszawa. 1939
Inż.Tadeusz Kochmański - Rachunek wyrównawczy w technice Gaussowskiej i krakowianowej. Kraków. 1945
Dr inż.E.Olszewski - Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą krakowianów. Warszawa. 1946
Prof.Tadeusz Banachiewicz - Algebra krakowianowa /w rękopisie/ Kraków. 1947
Dr Tadeusz Kochmański - Krakowiany nowa gałąź matematyki stosowanej Kraków 1947
Inż.S.Hausbrandt - Interpolacja bezpośrednia w ujęciu krakowianowym /światłodruk/. Warszawa.1947
Dr Wacław Sierpiński - Zasady algebry wyższej /rozdział II i V /. Warszawa, Wrocław. 1946

obcojęzyczna.

T.Banachiewicz - Sur la rèsolution numerique d'un système d'èquations linèaires Cracovie. 1937
" - Ètudes d'analyse pratique Cracovie. 1938
" - Contrôle des opèrations avec cracoviens /Acta astronomica/ Kraków. 1938
" - Resolution d'un systeme d'equations lineaires algebriques par division. Bruxelles. 1941
A. Chromiński - Application des cracoviens aux problèmes d'analyse pratique Cracovie. 1938

Interpolacja, matematyka stosowana.

A.Willers - Methoden der praktischen Analysis Berlin. 1928
W.M.Bradis - Teorja i praktika wyczislenij Moskwa. 1937
L.Schrutka - Leitfaden der Interpolation Wien. 1941

Rachunek wyrównawczy.

Prof.E.Warchałowski - Rachunek wyrównania według metody najmniejszych kwadratów. Warszawa. 1923
Dr T.M.Gołogórski - Rachunek wyrównawczy. Poznań, Warszawa. 1927
oraz cytowane pod "Rachunek wyrównawczy"- Warchałowski, Kochmański.

Matematyka tabel i wyznaczników.

Cours d'algèbre supèrieur par Joseph Neuberg professeur. Paris, Liège. 1907
Einführung in die höhere Mathematik von dr Emanuel Czuber. Leipzig, Berlin. 1921
Heinrich Dörrie - Determinanten München, Berlin. 1940
Dr Wacław Sierpiński - Zasady algebry wyższej. Warszawa, Wrocław. 1946

Geodezja.

Jordan - Handbuch der Vermessungskunde Stuttgart. 1916.
S.Hausbrandt - Transformacja spółrzędnych geograficznych przy pomocy interpolacji. /odbitka światłodrukowa dla Geodezyjnego Instytutu Naukowo Badawczego przy Głównym Urzędzie Pomiarów Kraju/ Warszawa. 1947

UWAGI WSTEPNE.

Interpolacja funkcji od dwóch argumentów zarówno w swej, mniej ważnej praktycznie, postaci ogólnej: "nieregularnej", jak i w nierównie ważniejszej praktycznie postaci szczególnej: "regularnej" / Δx=const, Δy=const / uważana jest powszechnie za czynność wybitnie uciążliwą.
Autorzy prac z matematyki stosowanej omawiając interpolację bądź wspominają tylko nawiasowo o funkcjach od dwóch argumentów /o funkcji od trzech argumentów nawet się nie wspomina/, podkreślając jej trudności, bądź też wogóle pomijają całkowicie ten problem. Tak np. A.Willers w "Methoden der praktischen Analysis" /Berlin, Lipsk 1928 / charakteryzuje interpolację tę w postaci ogólnej jako wybitnie uciążliwą /"ausserordentlich umständlich/ i ogranicza się do postaci szczegółowej, L.Schrutka w "Leitfaden der Interpolation" /Wiedeń 1941 / pomija wogóle zagadnienie interpolacji funkcji dwóch argumentów, pomimo bardzo szczegółowego rozpracowania tematu.
W.M.Bradis w pracy "Tieoria i praktika wyczislenij" /Moskwa 1937 / też nie zajmuje się problemem interpolacji funkcji dwóch argumentów, jakkolwiek rozpatruje nawet tak specjalne zagadnienie, jakim jest wyrównanie przybliżonych wartości elementów tablicy funkcyjnej metodą najmniejszych kwadratów, pomijane bardzo często w literaturze interpolacyjnej.
Również w literaturze krajowej zagadnienie interpolacji funkcji od dwóch argumentów jest - jeśli tak można się wyrazić - niepopularne. Nie wspomina o nim dr T.M.Gołogórski w swym "Rachunku wyrównawczym" /Poznań, Warszawa-1927 /, zaś w Roczniku Astronomicznym prof.F.Kępińskiego i inż.W.Szpunara /Warszawa 1946/ czytamy: "Moglibyśmy również zastosować dwuwymiarową budowę wzoru interpolacyjnego: $U=U_0 + n_x \cdot Du_{\frac{1}{2}0} + n_y Du_{0\frac{1}{2}} + \ldots$ $\quad n_x = \frac{x-x_0}{w_x}$,

$$n_y = \frac{y-y_0}{w_y} \qquad Du_{\frac{1}{2}0} = f/x_1 y_0/ - f/x_0 y_0/ \qquad Du_{0\frac{1}{2}} = f/x_0 y_1/ - f/x_0 y_0/$$

którego dalsze wyrazy wymagają użycia skomplikowanej symboliki. Jednakowoż sporządzanie takich tablic o 2ch argumentach ma sens praktyczny głównie wtedy, jeżeli korzystanie z nich oprzeć możemy na interpolacji liniowej."
Istotnie w ujęciu różnicowym interpolacja funkcji od dwóch argumentów jest czynnością wybitnie uciążliwą, a to zarówno z uwagi na wielorakość pojęciową, prowadzącą z konieczności do zagmatwanej symboliki, jak i na trudności w rachunku efektywnym, wynikające z długotrwałości rachunku i braku kontroli pracy.
Postaramy się wykazać, że - o ile zrezygnować z tradycyjnego ujmowania tematu w sposób różnicowy, a ująć go w sposób "bezpośredni", tzn. nie operować różnicami wartości funkcji, a bezpośrednio samymi wartościami funkcji - problem interpolacji funkcji od dwóch, a nawet trzech argumentów staje się bardzo prosty, a rachunek efektywny łatwy do wykonania.
Ponieważ w zagadnieniach interpolacyjnych stale operujemy uporządkowanymi zespołami liczb, za jakie uważać można wszelkie tablice funkcyjne, wygodnie jest przeprowadzając rozumowania i konstruując wzory, posługiwać się pojęciem liczb zespołowych.
To też przed przystąpieniem do zagadnień interpolacyjnych podamy szereg określeń i wynikających z nich związków, dotyczących liczb zespołowych. Pojęcia te w drobnej części zostały specjalnie skonstruowane na użytek zagadnień interpolacyjnych /mnożenie zupełne tablic, tablice osiowe/, w większości zaś zaczerpnięte zostały z rachunku krakowianowego.
Ponieważ rachunek krakowianowy, jako zupełnie młoda gałąź matematyki, podlega jeszcze i niewątpliwie jeszcze dłuższy czas podlegać będzie procesowi zrozumiałej ewolucji i to zarówno w dziedzinie pojęć jak i symboliki, użyte w niniejszej pracy określenia i symbole niezawsze będa zgodne z określeniami i symbolami, których używano w już istniejących publikacjach z dziedziny rachunku krakowianowego. Majac możność dzięki uprzejmości twórcy rachunku krakowianowego, prof.T.Banachiewicza, któremu na tym miejscu za tę uprzejmość składam serdeczne podziękowanie, zapoznania się częściowego z najpóźniejszymi osiągnięciami w dziedzinie krakowianowej, przedstawionymi

w niewykończonym jeszcze rękopisie prof.Banachiewicza; postanowiłem w dziedzinie symboliki stosować się ściśle do przyjętych tam oznaczeń, nawet w tych wypadkach, gdy symbolika innych źródeł wydaje mi się osobiście lepsza. /Tak np. transpozą krakowianu $\underline{k}$ znakuję za prof.Banachiewiczem $\tau\,\underline{k}$ gdzie τ jest krakowianem jednostkowym, pomimo wrażenia, że symbolika prof.Sierpińskiego, użyta w jego Zasadach Algebry Wyższej jest wyrazistsza, gdyż nie używa jednego symbolu dla dwóch pojęć, bądź co bądź odmiennych: czynności i liczby. Trudno jednak przewidzieć, czy w dalszym stadium rozwoju rachunku krakowianowego czynność transpozycji tak jak jest rozumiana obecnie - t.zn. jako zamiany kolumn na wiersze - nie stanie się pojęciem drugorzędnym, a głównym określeniem transpozycji krakowianu nie będzie właśnie jego przedmnożenie przez jednostkę./
Odkładając klasyfikację zagadnień interpolacyjnych i ich rozpatrzenie do czasu zapoznania się z podstawami rachunku krakowianowego, przystępujemy do podania podstawowych określeń.

R o z d z i a ł I.

Zasady rachunku krakowianowego.

Pojęcia podstawowe rachunku krakowianowego.

Zespół $n \times m$ wielkości /n.m.liczby naturalne/ algebraicznych, czyli "elementów", uporządkowanych w n kolumnach i m wierszach nazywać będziemy tablicą.
Schematem symbolicznym tablicy będzie schemat:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} \cdots & a_{nm} \end{matrix} \qquad \text{———————} \quad 1$$

w którym indeksy przy elementach mieć będą stale to samo znaczenie: pierwszy z nich symbolizuje numer kolejny kolumny, w której znajduje się dany element, drugi - numer wiersza. Element:

$$a_{ij} \qquad \text{———————} \quad 2$$

położony jest więc w i-tej kolumnie i j-tym wierszu. Tego rodzaju znakowanie odmienne od używanego w teorji wyznaczników, a przyjęte w rachunku krakowianowym jest tam dużo wygodniejsze ze względu na dominującą rolę kolumny w iloczynie.
Litera symboliczna elementu / a w schemacie1/, zaopatrzona w jeden tylko indeks i podkreślona, będzie symbolizować w skróceniu całą kolumnę, której numer porządkowy oznacza dany indeks.
A więc przy oznaczeniu /1/ symbol $\underline{a_3}$ oznacza zespół:

$$\begin{matrix} a_{31} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{3m} \end{matrix}$$

Ogólnie $\underline{a_i}$ symbolizuje zespół elementów i-tej kolumny, co zaznaczymy, łącząc znakiem równości identyczne co do treści pojęcia: zespół i jego jednogłoskowe oznaczenie:

$$\begin{matrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{matrix} = \underline{a_i} \qquad \text{———————} \quad 3$$

Tablicami krakowianowymi lub krakowianami nazywać będziemy tablice podlegające definicjom działań krakowianowych, które zaraz sformułujemy. Dla oznaczenia że dana tablica jest krakowianem podkreślamy symboliczne oznaczenie tablicy, jeżeli jest ono wyrażone przez pojedyńczą literę, zaś bierzemy w nawiasy gięte, jeżeli jest ono pełne, tzn. wyrażone przez zespół liter, lub zespół kolumn, lub zespół liczb w znaczeniu arytmetycznym. Są więc z oznaczenia krakowianami następujące tablice:

$$\begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{lub:} \quad \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{Bmatrix} \quad \text{inaczej:} \quad \{\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2\}, \quad \text{jeszcze inaczej:} \quad \underline{a} \qquad 4$$

Definicje działań krakowianowych.

I. Dwa krakowiany są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie odpowiadające sobie położeniem elementy tych krakowianów są wzajemnie równe:

$$\underline{a} = \underline{b} \quad \text{gdy:} \quad a_{ij} = b_{ij} \qquad 5$$

Z określenia wynika, że równymi mogą być tylko krakowiany równowymiarowe, oraz że równość krakowianowa równoznaczna jest tylu równościom algebraicznym, z ilu elementów składa się każdy z przyrównanych krakowianów.

II. Sumą /różnicą/ dwóch równowymiarowych krakowianów nazywamy krakowian, którego każdy element jest sumą /różnicą/ odpowiadających sobie położeniem elementów danych krakowianów /składników/:

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} \quad \text{gdy} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 6$$

Definicję można bez trudności rozszerzyć na dowolną skończoną ilość krakowianów.
Sumy krakowianów nierównowymiarowych nie definjujemy.

III. Iloczynem dwóch kolumn lub dwóch jednokolumnowych krakowianów - nazywamy sumę iloczynów odpowiadających sobie położeniem elementów tych kolumn. Z określenia wynika, że mnożyć przez siebie można tylko kolumny o jednakowej ilości elementów.

$$\underline{a}_i \; \underline{b}_j = a_{i1} \cdot b_{j1} + a_{i2} \cdot b_{j2} + \dots a_{im} b_{jm} \qquad 7$$

Iloczyn dwóch kolumn jest więc pojedyńczym elementem. Z punktu widzenia rachunku krakowianowego jest on właściwie jednoelementowym krakowianem. Należałoby więc np. pisać:

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \end{Bmatrix} = \underline{26} \qquad \text{lub:} \quad \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} = \underline{ac + bd}$$

Nie robimy tego w dalszym ciągu, utożsamiając jednoelementowy krakowian z wartością jego elementu. Iloczyn dwóch kolumn - jednokolumnowych krakowianów - jest oczywiście przemienny:

$$\underline{a}_i \cdot \underline{b}_j = \underline{b}_j \cdot \underline{a}_i = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \, b_{jk} \qquad 8$$

IV. Iloczynem krakowianu $\underline{a}$ przez krakowian $\underline{b}$ nazywamy krakowian $\underline{k}$, którego element położony w i-tej kolumnie j tym wierszu jest iloczynem i tej kolumny pierwszego czynnika /$\underline{a}$/ przez j tą kolumnę drugiego czynnika /$\underline{b}$/:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{k} \quad \text{gdy} \quad \underline{a}_i \cdot \underline{b}_j = k_{ij} \qquad 9$$

Z tego najistotniejszego w rachunku krakowianowym określenia wynikają oprócz całego szeregu specyficznych właściwości rachunku krakowianowego, które w dalszym ciągu będziemy rozpatrywać, następujące wnioski:

a/ mnożenie jest wykonalne tylko wtedy gdy oba czynniki mają jednakową ilość wierszy; ilość kolumn w obu czynnikach może natomiast być różna.

b/ iloczyn ma tyle kolumn ile kolumn ma pierwszy czynnik, oraz tyle wierszy, ile drugi czynnik ma kolumn.

Opierając się na określeniu realizujemy mnożenie krakowianowe jak następuje:

1/ mnożąc pierwszą kolumnę krakowianu a kolejno przez pierwszą, drugą ... ostatnią kolumnę krakowianu b, zapisujemy otrzymane wyniki jako pierwszy, drugi ... ostatni element pierwszej kolumny iloczynu,

2/ mnożąc drugą kolumnę krakowianu a kolejno przez pierwszą, drugą... ostatnią kolumnę krakowianu b, zapisujemy otrzymane wyniki jako pierwszy, drugi... ostatni element drugiej kolumny iloczynu i t.d. i t.d. wreszcie:

3/ mnożąc ostatnią kolumnę krakowianu a kolejno przez pierwszą, drugą... ostatnią kolumnę krakowianu b, zapisujemy otrzymane wyniki, jako pierwszy, drugi... ostatni element ostatniej kolumny iloczynu. Będzie więc np:

$$\left\{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 40 & 29 \\ 37 & 34 \\ 43 & 25 \end{matrix}\right\}$$

lub, jeżeli wykonamy mnożenie tych samych krakowianów, zmieniając porządek czynników:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 40 & 37 & 43 \\ 29 & 34 & 25 \end{matrix}\right\}$$

Jak widać z tego przykładu iloczyn krakowianów nie jest w znaczeniu algebraicznym przemienny.

V. Iloczyn dowolnej ilości czynników krakowianowych określamy jako krakowian otrzymany w drodze kolejnego mnożenia: pierwszego czynnika przez drugi; otrzymanego iloczynu przez trzeci, znalezionego iloczynu przez czwarty i t.d. co, symbolizując krakowian otrzymany w wyniku mnożenia przez ujęcie czynników w nawiasy, wyrazimy równaniem:

$$\underline{k} = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}\cdot\underline{d} \dots = /\,\underline{a}\;\underline{b}\,/\underline{c}\cdot\underline{d}\dots = /\,\underline{ab}\cdot\underline{c}/\underline{d}\dots \quad \text{—— 10}$$

Z definicji tej wynika, że mnożenie jest wykonalne, gdy pierwsze dwa czynniki są równowierszowe, zaś każdy następny czynnik ma tyle wierszy, ile poprzedzający go czynnik ma kolumn.
Iloczyn mieć będzie tyle kolumn, ile kolumn ma pierwszy czynnik, oraz tyle wierszy, ile ostatni czynnik ma kolumn.

Będzie więc np.

$$\left\{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 22 & 23 \\ 19 & 7 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 101 & 67 \\ 107 & 99 \end{matrix}\right\}$$

zaś mnożenie:

$$\left\{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix}\right\}$$

jest niewykonalne, gdyż trzeci czynnik ma 3 wiersze a drugi 2 kolumny.

VI. Transpozą krakowianu a nazywamy taki krakowian $\underline{b} = \tau\,\underline{a}$ /czytać b = transpoza a , lub b = tau a /, którego kolumny są równe odpowiadającym im kolejnością wierszom krakowianu a , czyli wyraźniej:

$$\underline{b} = \tau\,\underline{a}\ , \quad \text{gdy} \quad a_{ij} = b_{ji} \quad \text{—— 11}$$

Głoskę tau można traktować jako symbol analogiczny do symbolu f działania funkcyjnego. Zobaczymy zresztą wkrótce, że można ją też rozumieć jako czynnik.

Transpozą krakowianu: $\begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{Bmatrix}$ będzie krakowian: $\begin{Bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{Bmatrix}$ czyli mamy:

$$\tau \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{Bmatrix} \quad \text{jak również:} \quad \tau \begin{Bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{Bmatrix} \text{ i t.p.}$$

Nietrudno zauważyć, że transponując transpozę dowolnego krakowianu $\underline{a}$ otrzymamy tenże krakowian w postaci pierwotnej, co można wyrazić równaniem:

$$\tau\,/\tau\,\underline{a}\,/ = \underline{a}$$

VII. Krakowianem jednostkowym $\underline{\tau}$ lub krakowianem tau nazywamy krakowian posiadający równą ilość kolumn i wierszy - czyli krakowian "kwadrasty" którego elementy położone na głównej przekątnej, t.zn. elementy o wskaźniku kolumny równym wskaźnikowi wiersza, są jednościami, zaś pozostałe elementy zerami:

$$\underline{a} = \underline{\tau} \quad \text{gdy} \quad a_{ii} = 1 \qquad a_{ij} = 0 \ /i \neq j/ \text{ ——— } 12$$

Jest więc np. $\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \underline{\tau}$ lub: $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \underline{\tau}$ jak również: $\underline{1} = \underline{\tau}$ i t.p.

Wymiary krakowianu tau obieramy każdorazowo tak, aby działanie w którym ten krakowian występuje było wykonalne.

Ponieważ dalsze definicje działań krakowianowych /odwrotność, rozkład / są związane z wnioskami z podanych już definicji, porzucamy narazie dziedzinę definiowania i przechodzimy do wnioskowania. Wnioski z podanych już podstawowych określeń nazwiemy podstawowymi twierdzeniami krakowianowymi.

Podstawowe twierdzenia krakowianowe.

Łatwo sprawdzić że mnożenie krakowianowe naogół biorąc nie jest przemienne /por. np. przykład z IV /, co wyrazimy symbolicznie, pisząc:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \neq \underline{b} \cdot \underline{a} \text{ ——— } 13$$

Równie łatwo można sprawdzić, że mnożenie krakowianowe nie jest łączne, co wyrazimy pisząc:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} \neq \underline{a} \cdot /\underline{b} \cdot \underline{c}/ \text{ ——— } 14$$

Np. w przykładzie z V wykonaliśmy mnożenie: $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c} = /\underline{a}\underline{b}/\underline{c}$ - zgodnie z definicją mnożenia - natomiast wykonanie mnożenia $\underline{a}\ /\underline{b}\ \underline{c}/$ byłoby tam wogóle niewykonalne.

Stwierdzenia /13/ /14/ pomimo swej doniosłości nie mają praktycznego znaczenia przez swój negatywny charakter. Ostrzegają one tylko niejako przed stosowaniem reguł zwykłej algebry w działaniach krakowianowych. Do przeprowadzania działań konieczne są twierdzenia o charakterze pozytywnym, wskazujące jakie zasady obowiązywać będą w wyniku przyjętych definicji przy zmianie porządku czynników i przegrupowywaniu ich w zastępstwie zasady przemienności i łączności, obowiązujących w algebrze liczb pojedyńczych.

Jeżeli przytem krakowian ma być pojęciem nadrzędnym w stosunku do liczby pojedyńczej, winno się okazać, że zasady, obowiązujące przy zmianie porządku czynników i przegrupowywaniu ich, w razie założenia jednoelementowości krakowianów zamienią się na zasadę przemienności i łączności. Ponieważ stwierdziliśmy już, że rezultat mnożenia krakowianów zależny jest od kolejności czynników, słuszne będzie mówić o pomnożeniu krakowianu $\underline{a}$ przez krakowian $\underline{b}$ dającym w rezultacie iloczyn $\underline{ab}$, oraz o przedmnożeniu krakowianu $\underline{a}$ przez krakowian $\underline{b}$, dającym w rezultacie iloczyn $\underline{ba}$. Wykorzystamy tak fonetykę słowa pomnożyć i unikniemy potrzeby wprowadzenia pojęcia mnożenia przez lewy czynnik, względnie przez prawy czynnik, używanego w rachunku macierzy Cayleya /"Links Quotient i Rechts Quotient"/.

Twierdzenie o mnożeniu przez krakowian jednostkowy $\underline{\tau}$.

Krakowian pomnożony przez $\underline{\tau}$ nie zmienia swej wartości, krakowian przedmnożony przez $\underline{\tau}$ zamienia się na swą transpozę. /transponuje się/:

$$\underline{a} \cdot \underline{\tau} = \underline{a} \qquad \underline{\tau} \cdot \underline{a} = \tau\, \underline{a} \qquad \text{— 15}$$

Niech $\underline{a}$ będzie dowolnym krakowianem, tzn.

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{i1} \cdots & a_{j1} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{i2} & a_{j2} & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & a_{ii} & a_{ji} & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & a_{ij} & a_{jj} & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{im} & a_{jm} & a_{nm} \end{Bmatrix} \qquad \text{— 16}$$

zaś $\underline{b} = \underline{\tau}$ równowierszowym z krakowianem $\underline{a}$ krakowianem jednostkowym, t.zn.

$$\underline{b} = \underline{\tau} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{— 17}$$

Weźmy najpierw iloczyn $\underline{a} \cdot \underline{\tau} = \underline{a} \cdot \underline{b}$ ... Element ogólny tego iloczynu, tzn: element położony w jego i-tej kolumnie i j-tym wierszu będzie $\underline{a}_i\, \underline{b}_j$ czyli:

$$\begin{Bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{im} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = a_{ij}$$

Z identyczności tego "ogólnego elementu" iloczynu $\underline{a} \cdot \underline{\tau}$ z ogólnym elementem krakowianu $\underline{a}$ też równym a_{ij} wynika odrazu: $\underline{a} \cdot \underline{\tau} = \underline{a}$.

Weźmy teraz iloczyn $\underline{\tau} \cdot \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{a}$. Jego "element ogólny" będzie

$$\underline{b}_i\, \underline{a}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ a_{jj} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{Bmatrix} = a_{ji}$$

czyli w wyniku porównania go z elementem ogólnym krakowianu $\underline{a}$ równym a_{ij} /11/: $\underline{\tau} \cdot \underline{a} = \tau\, \underline{a}$.

Z twierdzenia /15/ widać, że symbol transpozycji τ postawiony przed krakowianem możemy też rozumieć, jako czynnik $\underline{\tau}$, figurujący w tymże miejscu.

Twierdzenie o transpozie iloczynu dwóch czynników.

Transpoza iloczynu dwóch czynników równa jest iloczynowi tych czynników przy zmianie kolejności mnożenia.

$$\tau /\underline{a}\, \underline{b}/ = \underline{b} \cdot \underline{a} \qquad \text{lub} \qquad \underline{a} \cdot \underline{b} = \tau /\underline{b}\, \underline{a}/ \qquad \text{— 18}$$

Rozpatrzmy iloczyny $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{ab}$ oraz $\underline{b}\cdot\underline{a}=\underline{ba}$. /Wykonalność mnożenia $\underline{a}\cdot\underline{b}$ skutkuje oczywiście wykonalność mnożenia $\underline{b}\cdot\underline{a}$, gdyż warunek obu tych wykonalności jest ten sam: równowierszowość $\underline{a}$ i $\underline{b}$/.
Element iloczynu $\underline{ab}$ położony w jego i-tej kolumnie i j tym wierszu _ oznaczymy go przez $/\underline{ab}/_{ij}$ _ będzie:

$$/\underline{ab}/_{ij} = \underline{a}_i\,\underline{b}_j$$

Element zaś iloczynu $\underline{ba}$ położony w jego j-tej kolumnie i i-tym wierszu- oznaczmy go przez $/\underline{ba}/_{ji}$ -będzie:

$$/\underline{ba}/_{ji} = \underline{b}_j\,\underline{a}_i = \underline{a}_i\,\underline{b}_j \quad /\text{por:}8/.$$

Mamy więc $/\underline{ab}/_{ij} = /\underline{ba}/_{ji}$, co oznacza, że krakowiany $\underline{ab} = \underline{a}\cdot\underline{b}$ oraz $\underline{ba} = \underline{b}\cdot\underline{a}$ są wzajemnie swymi transpozami /11/ i co wyraziliśmy równaniami /18/.

Twierdzenie o transpozie iloczynu trzech czynników.

Transpoza iloczynu trzech czynników równa jest iloczynowi tych czynników przy zmianie kolejności mnożenia, przyczem środkowy czynnik zamienia się na swą transpozę:

$$\tau/\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}/ = \underline{c}\cdot\tau\,\underline{b}\cdot\underline{a} \qquad 19$$

Ponieważ mamy $\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} = /\underline{ab}/\underline{c}$ będzie: $\tau/\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}/ = \tau/(\underline{ab})\,\underline{c}/ = \underline{c}\,/\underline{ab}/$ /na zasadzie 10 i 18/. Dla uzasadnienia słuszności twierdzenia /19/ wystarczy więc dowieść równości krakowianów $\underline{k}_1 = \underline{c}\cdot/\underline{ab}/$ oraz $\underline{k}_2 = /\underline{c}\,\tau\,\underline{b}/\underline{a}$ /ten ostatni jest na zasadzie określenia /10/ równy $\underline{c}\cdot\tau\,\underline{b}\cdot\underline{a}$/.
Dowiedzenie tej równości wymaga stwierdzenia, że element krakowianu $\underline{k}_1 = \underline{c}\,/\underline{ab}/$ położony w jego i-tej kolumnie i j-tym wierszu jest równy elementowi krakowianu $\underline{k}_2 = /\underline{c}\,\tau\,\underline{b}/\underline{a}$ położonemu w jego i-tej kolumnie i j-tym wierszu.
Weźmy więc jakiekolwiek krakowiany $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ spełniające warunek wykonalności mnożenia $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$, /t.zn. krakowiany $\underline{a}$ i $\underline{b}$ mają być równowierszowe, zaś krakowian $\underline{c}$ ma mieć tyle wierszy, ile $\underline{b}$ ma kolumn/ ×) symbolizujmy ich elementy i obliczmy "elementy ogólne" krakowianów $\underline{k}_1$ i $\underline{k}_2$. Niech więc będzie:

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{nm} \end{Bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{21}\cdots & b_{p1} \\ b_{12} & b_{22}\cdots & b_{p2} \\ \vdots & \vdots & \\ b_{1m} & b_{2m} & b_{pm} \end{Bmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{21}\cdots & c_{r1} \\ c_{12} & c_{22}\cdots & c_{r2} \\ \vdots & \vdots & \\ c_{1p} & c_{2p} & c_{rp} \end{Bmatrix}$$

lub krócej: $\underline{a} = \{\underline{a}_1\,\underline{a}_2\cdots\underline{a}_n\}$ $\underline{b} = \{\underline{b}_1\,\underline{b}_2\cdots\underline{b}_p\}$ $\underline{c} = \{\underline{c}_1\,\underline{c}_2\cdots\underline{c}_r\}$

Z oznaczeń tych wynika:

$$\tau\,\underline{b} = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{pm} \end{Bmatrix}$$

Dla znalezienia wartości ogólnego wyrazu krakowianu $\underline{k}_1 = \underline{c}\,/\underline{ab}/$- oznaczmy ten wyraz ogólny $/k_1/_{ij}$ - musimy obliczyć iloczyn i-tej kolumny krakowianu $\underline{c}$ przez j-tą kolumnę krakowianu $\underline{ab}$.
I-ta kolumna krakowianu $\underline{c}$ ma postać symboliczną:

$$\underline{c}_i = \begin{Bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{ip} \end{Bmatrix}$$

×) Wykonalność mnożenia $\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}$ skutkuje wykonalność mnożenia $\underline{c}\cdot\tau\,\underline{b}\cdot\underline{a}$ i równowymiarowość krakowianów $\tau/\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}/$ oraz $\underline{c}\,\tau\underline{b}\,\underline{a}$. Musi bowiem $\underline{c}$ mieć tyle wierszy ile $\underline{b}$ ma kolumn, czyli $\tau\underline{b}$ wierszy. Wynika stąd wykonalność mnożenia $\underline{c}\cdot\tau\,\underline{b}$. Musi dalej $\underline{a}$ mieć tyle wierszy, ile $\underline{b}$ ma wierszy, a więc $\tau\underline{b}$ kolumn; stąd już mamy wykonalność całego mnożenia $\underline{c}\,\tau\underline{b}\,\underline{a}$. Iloczyn $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ ma tyle kolumn, ile $\underline{a}$, oraz tyle wierszy, ile kolumn ma $\underline{c}$. /por. V str. 4/. Iloczyn $\underline{c}\,\tau\,\underline{b}\,\underline{a}$ ma tyle kolumn, ile $\underline{c}$ i tyle wierszy, ile $\underline{a}$ ma kolumn. Transpoza $\tau/\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}/$ będzie więc równowymiarowa z $\underline{c}\,\tau\underline{b}\,\underline{a}$.

J-ta kolumna krakowianu $\underline{ab}$ powstaje w drodze mnożenia j-tej kolumny krakowianu $\underline{a}$ przez wszystkie kolejne kolumny krakowianu $\underline{b}$, i w związku z tym ma postać symboliczną:

$$/\underline{ab}/_j = \begin{Bmatrix} \underline{a}_j\,\underline{b}_1 \\ \underline{a}_j\,\underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_j\,\underline{b}_p \end{Bmatrix}$$

Skąd otrzymamy wyraz ogólny krakowianu $\underline{k}_1$:

$$/k_1/_{ij} = \begin{Bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{ip} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a}_j\,\underline{b}_1 \\ \underline{a}_j\,\underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_j\,\underline{b}_p \end{Bmatrix}$$

Dla znalezienia wartości wyrazu ogólnego krakowianu $\underline{k}_2 = /\underline{c}\,\tau\,\underline{b}/\underline{a}$ - oznaczmy ten wyraz ogólny $/k_2/_{ij}$ - musimy obliczyć iloczyn i-tej kolumny krakowianu $/\underline{c}\,\tau\,\underline{b}$ /- oznaczmy ją $/\underline{c}\,\tau\,\underline{b}/_i$ przez j-tą kolumnę krakowianu $\underline{a}$. Ponieważ i-ta kolumna krakowianu $/\underline{c}\,\tau\,\underline{b}$ / powstaje w wyniku mnożenia i-tej kolumny krakowianu $\underline{c}$ przez kolejne kolumny krakowianu $\tau\underline{b}$ /napisaliśmy go wyraźnie/ otrzymamy:

$$/\underline{c}\,\tau\,\underline{b}/_i = \begin{Bmatrix} c_{i1}\,b_{11} + c_{i2}\,b_{21} + \dots + c_{ip}\,b_{p1} \\ c_{i1}\,b_{12} + c_{i2}\,b_{22} + \dots + c_{ip}\,b_{p2} \\ \text{-----------------} \\ c_{i1}\,b_{1m} + c_{i2}\,b_{2m} + \dots + c_{ip}\,b_{pm} \end{Bmatrix}$$

Że zaś j-tą kolumną krakowianu $\underline{a}$ jest:

$$\underline{a}_j = \begin{Bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{Bmatrix}$$

wyraz ogólny krakowianu $\underline{k}_2$ mieć będzie postać:

$$/k_2/_{ij} = \begin{Bmatrix} c_{i1}\,b_{11} + c_{i2}\,b_{21} + \dots\ c_{ip}\,b_{p1} \\ c_{i1}\,b_{12} + c_{i2}\,b_{22} + \dots\ c_{ip}\,b_{p2} \\ \text{-----------------} \\ c_{i1}\,b_{1m} + c_{i2}\,b_{2m} + \dots\ c_{ip}\,b_{pm} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \text{---} \\ a_{jm} \end{Bmatrix}$$

Realizując mnożenie otrzymamy - przy grupowaniu porządkującym względem $c_{i1}\ c_{i2} \dots c_{ip}$:

$$\begin{aligned} /k_2/_{ij} = {} & c_{i1}\,/b_{11}\,a_{j1} + b_{12}\,a_{j2} + \dots\ b_{1m}\,a_{jm}/ + \\ + {} & c_{i2}\,/b_{21}\,a_{j1} + b_{22}\,a_{j2} + \dots\ b_{2m}\,a_{jm}/ + \\ & \text{-----------------} \\ + {} & c_{ip}\,/b_{p1}\,a_{j1} + b_{p2}\,a_{j2} + \dots\ b_{pm}\,a_{jm}/ \end{aligned}$$

Lecz wyrazy ujęte w nawiasy są to, zgodnie z określeniem mnożenia kolumn, iloczyny:

$$\begin{matrix} \underline{b}_1\,\underline{a}_j \\ \underline{b}_2\,\underline{a}_j \\ \text{---} \\ \underline{b}_p\,\underline{a}_j \end{matrix}$$ lub z uwagi na przemienność iloczynu kolumnowego /8/: $$\begin{matrix} \underline{a}_j \cdot \underline{b}_1 \\ \underline{a}_j \cdot \underline{b}_2 \\ \text{---} \\ \underline{a}_j\ \ \underline{b}_p \end{matrix}$$

Pisząc więc wyraz ogólny pod postacią krakowianową otrzymamy:

$$/k_2/_{ij} = \begin{Bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{ip} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a}_j\,\underline{b}_1 \\ \underline{a}_j\,\underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_j\,\underline{b}_p \end{Bmatrix}$$

Porównując to z wyrazem krakowianu $\underline{k}_1$ stwierdzamy ich identyczność:

$$/k_1/_{ij} = /k_2/_{ij} \qquad \text{cdn:}^{x)}$$

Twierdzenie o transpozie iloczynu dowolnej liczby czynników.

Transpoza iloczynu równa jest iloczynowi tych czynników przy odwróceniu kolejności mnożenia przyczym skrajne czynniki pozostają bez zmiany, a środkowe zamieniają się na swe transpozy:

$$\tau /\underline{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 \cdots \underline{a}_p/ = \underline{a}_p \cdot \tau\underline{a}_{p-1} \cdots \tau\underline{a}_3 \cdot \tau\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1 \qquad 20$$

Wiemy, że wzór ten jest słuszny dla trzech czynników /19/. W celu wykazania jego ogólności wystarczy założyć jego ważność dla n czynników i wykazać, że będzie to skutkować ważność dla n+1 czynników.

Niech więc będzie: $\tau/\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_{n-1}\underline{a}_n/ = \underline{a}_n \cdot \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1$ — 21

Weźmy iloczyn /n+1/ czynników: $\underline{P} = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_n \cdot \underline{a}_{n+1}$

Z definicji mnożenia /10/wynika: $\underline{P} = /\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2/ \cdot \underline{a}_3 \cdots \underline{a}_n \cdot \underline{a}_{n+1}$

Ponieważ ten iloczyn zawiera n czynników, będzie na zasadzie założenia /21/:

$$\tau\underline{P} = \underline{a}_{n+1} \cdot \tau\underline{a}_n \cdots \tau\underline{a}_3 /\underline{a}_1 \underline{a}_2/$$

czyli, wykorzystując znów definicję mnożenia /10/:

$$\tau\underline{P} = /\underline{a}_{n+1} \cdot \tau\underline{a}_n \cdots \tau\underline{a}_3//\underline{a}_1 \underline{a}_2/$$

Transponując ten iloczyn dwóch czynników w myśl równania /18/ napiszemy:

$$\underline{P} = /\underline{a}_1 \underline{a}_2/ /\underline{a}_{n+1}\tau\underline{a}_n \cdots \tau\underline{a}_3/$$

czyli:

$$\underline{P} = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdot /\underline{a}_{n+1}\tau\underline{a}_n \cdots \tau\underline{a}_3/$$

Otrzymaliśmy iloczyn trzech czynników. Stosując do niego zasady transpozycji /19/ otrzymamy:

$$\tau\underline{P} = /\underline{a}_{n+1}\, \tau\underline{a}_n \cdots \tau\underline{a}_3/\, \tau\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1$$

Lub, opuszczając nawias, który niema istotnego znaczenia, gdyż zgodne z nim wykonanie wynika i tak z definicji mnożenia:

$$\tau\underline{P} = \underline{a}_{n+1}\, \tau\underline{a}_n \cdots \tau\underline{a}_3 \cdot \tau\underline{a}_2\, \underline{a}_1$$

Widzimy więc, że istotnie założenie słuszności wzoru /20/ dla n czynników skutkuje jego słuszność dla n+1 czynników. Ze słuszności dla n+3 wynika więc jego ogólność w znaczeniu słuszności dla $n \geqslant 3$.

Twierdzenie o łączeniu czynników czyli twierdzenie asocjatywne.

Iloczyn krakowianowy można zamienić przez iloczyn dwóch iloczynów krakowianowych, z których pierwszy obejmuje ciąg czynników początkowych występujących w kolejności niezmienionej, zaś drugi obejmuje resztę czynników w zmienionej kolejności, przyczym pierwszy czynnik drugiego z iloczynów / t.zn. dawny ostatni czynnik / zachowuje swa postać, zaś pozostałe czynniki drugiego iloczynu zostają transponowane:

$$\underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p \cdot \underline{a}_t \cdots \underline{a}_n = /\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p/ \cdot /\underline{a}_n \cdot \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_q/ \qquad 21$$

x) Opracowując dowody twierdzeń transpozycyjnych, asocjatywnego i dysocjatywnego w dużym stopniu opierałem się na pracy inż.T.Kochmańskiego: Rachunek wyrównawczy w technice gaussowskiej i krakowianowej /Kraków 1945 /. Nieco większym zmianom uległ dowód twierdzenia o transpozie iloczynu trzech czynników, który uważałem za wskazane zmodyfikować dla uniknięcia potrzeby wprowadzania symboliki wielokrotnego sumowania. W słownictwie posiłkuję się stale terminami przyjętymi we wspomnianej na wstępie pracy prof.Banachiewicza, mówiąc o "transpozie", a nie o "krakowianie transponowanym", o krakowianie "kwadrastym" a nie "kwadratowym" i t.p.

Szczególnie ważny przypadek, gdy pierwszy ciąg składa się z jednego elementu, można sformułować j.n. pierwszy element iloczynu krakowianowego można napisać przed nawiasem, w którym zamknięto pozostałe czynniki, zmieniając ich kolejność i transponując je wszystkie za wyjątkiem pierwszego /przed zmianą ostatniego/:

$$\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_n = \underline{a}_1 / \underline{a}_n \, \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_2 / \quad \text{——— 22}$$

Iloczyn $\underline{P} = \underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p \underline{a}_q \cdots \underline{a}_n$ możemy w zgodzie z określeniem /10/ napisać pod postacią:

$\underline{P} = /\underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p / \underline{a}_q \cdots \underline{a}_{n-1} \cdot \underline{a}_n$. Stosując twierdzenie o transpozie /20/ napiszemy:

$\tau\underline{P} = \underline{a}_n \cdot \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_q \cdot /\underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p/$, czyli, pamiętając o określeniu /10/:

$\tau\underline{P} = /\underline{a}_n \cdot \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_q / \cdot /\underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p /$. Transponując ten iloczyn dwóch czynników /18/otrzymamy:

$\underline{P} = /\underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p / \cdot / \underline{a}_n \, \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_q /$. c.n.d.

Zakładajac jednoelementowość pierwszej grupy czynników otrzymalibyśmy wzór /22/.
Dowód stanowi tu jak widać pierwszy etap dowodu o transpozie iloczynu dowolnej liczby czynników /20/.
Powtórzyliśmy go w całej rozciągłości ze względu na specjalną wagę twirdzenia o łączeniu.

Twierdzenie o rozłączaniu czynników czyli twierdzenie dysocjatywne.

Iloczyn dwóch iloczynów krakowianowych można zastąpić przez iloczyn szeregu poszczególnych czynników tych iloczynów, przyczem czynniki pierwszego iloczynu pozostają co do swej postaci i kolejności bez zmiany, zaś czynniki drugiego iloczynu zmieniają kolejność i zostają transponowane za wyjątkiem ostatniego z nich /t.zn.tego który był przed operacją rozłączenia w drugim iloczynie pierwszym czynnikiem/:

$$/\underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p / \; / \underline{a}_q \underline{a}_r \cdots \underline{a}_{n-1} \underline{a}_n / = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p \cdot \tau\underline{a}_n \cdot \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_r \cdot \underline{a}_q \quad \text{— 23}$$

Szczególnie ważny przypadek, gdy pierwszy iloczyn składa się z pojedyńczego czynnika można sformułować j.n. w iloczynie krakowianowym można pozostawiając czynnik przed nawiasem na miejscu usunąć nawias zmieniając jednocześnie kolejność czynników znawiasowanych i transponując je za wyjątkiem ostatniego /t.zn.przed zmianą pierwszego/.

$$\underline{a}_1 / \underline{a}_2 \underline{a}_3 \cdots \underline{a}_n / = \underline{a}_1 \cdot \tau\underline{a}_n \cdot \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_3 \cdot \underline{a}_2 \quad \text{——— 24}$$

Dowód sprowadza się do zastosowania twierdzenia asocjatywnego w stosunku do prawej strony równania 23 względnie 24.:

$$\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p \cdot \tau\underline{a}_n \, \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_r \underline{a}_q = /\underline{a}_1 \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_p / \cdot / \underline{a}_q \cdot \underline{a}_r \cdots \underline{a}_{n-1} \underline{a}_n /.$$

$$\underline{a}_1 \cdot \tau\underline{a}_n \cdot \tau\underline{a}_{n-1} \cdots \tau\underline{a}_3 \cdot \underline{a}_2 = \underline{a}_1 / \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 \cdots \underline{a}_{n-1} \cdot \underline{a}_n /.$$

U w a g a.

Rozpatrzone podstawowe twierdzenia krakowianowe: transpozycyjne, asocjatywne i dysocjatywne nie są specjalnie łatwe do przyswojenia pamięciowego. Nie stanowi to jednak żadnej przeszkody w stosowaniu praktycznym rachunku krakowianowego, do którego wystarcza opanowanie techniki mnożenia krakowianowego, czyli znajomość równania podstawowego /9/: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{k}$ gdy $a_i \cdot b_j = k_{ij}$ do przyswojenia bardzo łatwego. Zresztą, jak zobaczymy dalej, często można się obywać nawet bez pamiętania tego prostego wzoru podstawowego, a poprzestać na określeniu iloczynu dwóch kolumn i analogicznie sformułowanym określeniu iloczynu dwóch wierszy. Twierdzenia podstawowe są ważne jako element myślenia w teorji. Tam jednak nie trzeba się silić na pamięciowe opanowanie formuł: wystarcza świadomość możności dokonywania transpozycji, przegrupowań i łączeń. Przedewszystkim zaś przy operowaniu rachunkiem krakowianowym

w teorji nie wolno ani na chwilę zapominać o odrębności algebry krakowianowej od zwykłej; odrębności wynikającej z negacji związków: $ab = ba$ i $abcd = /ab//cd/$, mechaniczne stosowanie których jest w algebrze zwykłej nawykiem pożądanym, a w krakowianowej staje się źródłem błędów.
Przed przystąpieniem do dalszej grupy definicji teoretycznych, której następstwem będzie dalsza grupa twierdzeń podstawowych, przerobimy przykład dowodu krakowianowego, proponując czytelnikowi przetłomaczenie związku na język algebry zwykłej i skonstruowanie dowodu algebraicznego dla porównania nakładu pracy.
Przykład. Uzasadnić słuszność związku: $/\underline{ab}/^2 = \underline{a}\ /\tau\underline{b}/^2\ \underline{a}$ [przez $/\underline{ab}/^2$ rozumiemy $/ab/\cdot/ab/$], grającego dużą rolę w krakowianowym ujęciu metody najmniejszych kwadratów. x) Mamy $/\underline{ab}/\cdot/\underline{ab}/ = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\tau\underline{b}\cdot\underline{a}$ /na zasadzie twierdzenia dysocjatywnego/. Stosując do iloczynu pierwszych trzech czynników, które w iloczynie możemy oddzielić, pisząc: $/\underline{ab}//\underline{ab}/ = /\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\ \tau\underline{b}/\underline{a}$, twierdzenie asocjatywne, napiszemy: $\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\tau\underline{b} = \underline{a}/\tau\underline{b}\ \ \tau\underline{b}/$, skąd już mamy: $/\underline{a}\cdot\underline{b}/^2 = /\underline{ab}/\cdot/\underline{ab}/ = \underline{a}\ /\tau\underline{b}\ \ \tau\underline{b}\ /\underline{a} = \underline{a}/\tau\underline{b}\ /^2\underline{a}$ c.n.d.

Dalsze definicje działań krakowianowych.

VIII. Inwersem lub odwrotnością krakowianu $\underline{a}$ nazywamy taki krakowian $\underline{a}^{-1}$, który pomnożony, lub przedmnożony przez krakowian $\underline{a}$ daje w wyniku krakowian jednostkowy.

$$\underline{a}\cdot\underline{a}^{-1} = \tau \qquad \text{lub} \qquad \underline{a}^{-1}\cdot\underline{a} = \tau \tag{25}$$

/Określenie takie jest możliwe, bowiem pomnożenie i przedmnożenie, dające zasadniczo różne rezultaty /por.18/, będą tu dawały rezultat identyczny, gdyż krakowian jednostkowy po transpozycji zmianie nie ulega: $\tau\underline{\tau} = \underline{\tau}$/.

Łatwo zauważyć, że - w przeciwieństwie do liczb algebry zwykłej, posiadających jedną odwrotność, lub nie posiadających jej wcale /zero/ - algebra krakowianów poza odwrotnością jednoznaczną i nieistniejącą może mieć do czynienia z odwrotnością wieloznaczną. Wyjaśnijmy to bliżej. Zauważymy przedewszystkim, że krakowian $\underline{a}$ i jego odwrotność $\underline{a}^{-1}$ muszą posiadać nietylko równe ilości wierszy - co bezpośrednio wynika z założenia ich wymnażalności - ale i równe ilości kolumn. Ilość kolumn w iloczynie τ będzie bowiem równa ilość kolumn pierwszego czynnika, zaś równa jej /z uwagi na kwadratową postać $\underline{\tau}$/ ilość wierszy w iloczynie wyrażać będzie ilość kolumn drugiego czynnika. Oznaczmy teraz przez k ilość kolumn każdego czynnika, a jednocześnie ilość wierszy i kolumn iloczynu $\underline{\tau}$, zaś przez w wspólną ilość wierszy w czynnikach. Definicja mnożenia krakowianowego dostarczy nam k^2 związków między elementami krakowianu, jego odwrotności i jednostki τ. Jeżeli te związki mają jednoznacznie określić $k\cdot w$ elementów inwersu, musi być: $k^2 = kw$, t.zn. $k=w$. Krakowian posiadający równą ilość wierszy i kolumn, czyli "krakowian kwadrasty" - będzie więc posiadał inwers jednoznacznie wyznaczalny - oczywiście w założeniu, że związki wyznaczające elementy inwersu nie będą sprzeczne między sobą. Jeżeli ilość związków będzie mniejszą od ilości elementów podlegających wyznaczeniu t.zn. gdy $k^2 < kw$ czyli $k < w$ - możemy część elementów obierać dowolnie, a pozostałe wyznaczyć ze związków - oczywiście znów w założeniu, że związki nie są sprzeczne między sobą. Mamy więc tu odwrotność wieloznaczną. Jeżeli wreszcie ilość związków będzie większa od ilości elementów podlegających wyznaczeniu tj. gdy: $k^2 > kw$, czyli: $k > w$ - odwrotność nie istnieje.
Zilustrujemy to na przykładach:

$\underline{\underline{k=w}}$ krakowian kwadrasty $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{Bmatrix}$ posiada odwrotność: $\underline{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} 7/13 & -2/13 \\ 4/13 & 3/13 \end{Bmatrix}$ gdyż $\begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 7/13 & -2/13 \\ 4/13 & 3/13 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$

natomiast krakowian kwadrasty: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{Bmatrix}$ nie posiada odwrotności. Gdyby bowiem istniała taka odwrotność: $\begin{Bmatrix} x & z \\ y & u \end{Bmatrix}$

x) Por. prof. E. Warchałowski: zastosowanie krakowianów w rachunku wyrównawczym. Warszawa 1938 lub inż. T. Kochmański l. cit.

musiałoby być jednocześnie: $3x + 2y = 1$ /pierwsza kolumna przez pierwszą/, oraz $6x + 4y = 0$ t.j. $3x + 2y = 0$ /druga kolumna przez pierwszą/, co jest oczywiście niemożliwe.

$\underline{k < w}$

Krakowian: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{Bmatrix}$ posiada nieskończenie wiele odwrotności. Może być taką odwrotnością: $\underline{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7/9 & 2/3 & 19/9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -10/9 & -5/3 & -40/9 \end{Bmatrix}$

lub też: $\underline{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2/9 & 4/9 & 4/9 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/9 & 7/9 & -7/9 \end{Bmatrix}$ i t.p.: Będzie bowiem: $\begin{Bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7/9 & 2/3 & 19/9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -10/9 & 5/3 & -40/9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$

jak również: $\begin{Bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2/9 & 4/9 & 4/9 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/9 & 7/9 & -7/9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$

Natomiast krakowian: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{Bmatrix}$ nie będzie posiadał odwrotności. $\begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{Bmatrix}$ Istnienie takiej odwrotności: byłoby identyczne ze spełnieniem sprzecznych ze sobą równań: $3y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 = 1$ /iloczyn drugiej kolumny przez drugą/ oraz: $-3y_1 + y_2 - y_3 - 2y_4 = 0$ /iloczyn trzeciej kolumny przez drugą/.

$\underline{k > w}$

Krakowian: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 5 \end{Bmatrix}$ nie może posiadać odwrotności. Gdyby istniała jego odwrotność:

$\underline{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{Bmatrix}$ musiałoby być jednocześnie: $3x_1 + 7x_2 = 0$ t.zn. $x_1 = -\frac{7}{3}x_2$ oraz $6x_1 + 5x_2 = 0$ t.zn. $x_1 = -\frac{5}{6}x_2$

Wynikałoby stąd $x_2 = 0$. Podobnie doszlibyśmy do wniosku, że musi być $x_1 = 0$. Wówczas jednak nie mogłoby być $2x_1 + x_2 = 1$.

Niemożliwość istnienia odwrotności krakowianu $k > w$ /„krakowianu poziomego"/ nietrudno zresztą uzasadnić w sposób ogólny, opierając się na warunkach rozwiązalności układów równań liniowych. Tutaj traktujemy zagadnienie istnienia odwrotności w sposób przykładowy, gdyż niema ono w interpolacji znaczenia.

Istnienie odwrotności $\underline{a}^{-1} = \underline{\alpha}$ krakowianu $\underline{a}$: $/m > n/$.

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & a_{nm} \end{Bmatrix} \qquad \underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \alpha_{3m} & \alpha_{nm} \end{Bmatrix} \qquad 26$$

wymaga rozwiązalności układów równań algebraicznych, wynikających z założenia $\underline{\alpha} \cdot \underline{a} = \underline{\tau}$, to znaczy układów:

1/
$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \cdots a_{1m}\alpha_{1m} = 1 \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{12} + \cdots a_{2m}\alpha_{1m} = 0 \\ a_{31}\alpha_{11} + a_{32}\alpha_{12} + \cdots a_{3m}\alpha_{1m} = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{n1}\alpha_{11} + a_{n2}\alpha_{12} + \cdots a_{nm}\alpha_{1m} = 0 \end{cases}$$

$$2/\quad\begin{cases} a_{11}\alpha_{21} + a_{12}\alpha_{22} + \dots a_{1m}\alpha_{2m} = 0 \\ a_{21}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22} + \dots a_{2m}\alpha_{2m} = 1 \\ a_{31}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{22} + \dots a_{3m}\alpha_{2m} = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{n1}\alpha_{21} + a_{n2}\alpha_{22} + \dots a_{nm}\alpha_{2m} = 0 \end{cases}$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$n/\quad\begin{cases} a_{11}\alpha_{n1} + a_{12}\alpha_{n2} + \dots a_{1m}\alpha_{nm} = 0 \\ a_{21}\alpha_{n1} + a_{22}\alpha_{n2} + \dots a_{2m}\alpha_{nm} = 0 \\ a_{31}\alpha_{n1} + a_{32}\alpha_{n2} + \dots a_{3m}\alpha_{nm} = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{n1}\alpha_{n1} + a_{n2}\alpha_{n2} + \dots a_{nm}\alpha_{nm} = 1 \end{cases}$$

Wymaga to zbadania rozwiązalności tablicy spółczynnikowej wielokrotnej:

$$\begin{array}{cccc|c|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array} \qquad \text{———— } 27$$

co sprowadzić można do n krotnego rozwiązania zagadnienia rozwiązalności n równań o m niewiadomych którymkolwiek ze sposobów, stosowanych przez algebrę.x)

W praktyce rachunkowej, a więc i w zagadnieniach interpolacyjnych, stanowiących przedmiot niniejszej pracy, mamy do czynienia wyłącznie z odwrotnościami krakowianów kwadrastych.

W tym szczególnym przypadku tablica spółczynnikowa jest tablicą kwadratową, a jej rozwiązalność jest identyczna z niezerowością wyznacznika utworzonego z jej elementów.

Ten warunek istnienia odwrotności krakowianu kwadrastego, ujęty w równanie wyznacznikowe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{———— } 28$$

jak również wynikający w konsekwencji wyznacznikowego ujęcia sposób obliczenia elementów odwrotności jako stosunków odpowiednich minorów do wartości wyznacznika tabeli krakowianu podał pierwszy prof.E.Warchałowski w cytowanej już pracy " Zastosowanie krakowianów w rachunku wyrównawczym ".

Oznaczając przez $/ \underline{a} /$ wyznacznik tabeli krakowianu $\underline{a}$, oraz przez $/ a_{rs} /$ minor, odpowiadający elementowi a_{rs} mieć będziemy ogólnie dla elementu α_{rs} odwrotności: $\alpha_{rs} = \frac{|a_{rs}|}{|a|}$ ———— 29

Dla obliczenia tą drogą elementów odwrotności krakowianu $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$

znajdziemy wartość wyznacznika $/a/ = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$ oraz jego minorów:

$$|a_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11 \qquad |a_{21}| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad |a_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$|a_{21}| = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 24 \qquad |a_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -8 \qquad |a_{23}| = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4 \qquad |a_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$|a_{32}| = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad |a_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

x) Możliwość takiego badania bez oparcia o pojęcie wyznacznika omówiłem w pracy: Obliczenie wartości wyznaczników i rozwiązywanie układów równań liniowych zapomocą mnożenia redukcyjnego. Warszawa 1947./odbitka światłodrukowa/.

Dzieląc obliczone minory przez -4 znajdziemy elementy odwrotności:

$\alpha_{11} = {}^{11}\!/_4 \quad \alpha_{21} = -1 \quad \alpha_{31} = -{}^1\!/_4 \quad \alpha_{21} = -6 \quad \alpha_{22} = 2 \quad \alpha_{23} = 1 \quad \alpha_{31} = {}^3\!/_4 \quad \alpha_{32} = 0$

$$\alpha_{33} = -{}^1\!/_4 \quad \text{Stąd: } \underline{\alpha} = \underline{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} {}^{11}\!/_4 & -6 & {}^3\!/_4 \\ -1 & 2 & 0 \\ -{}^1\!/_4 & 1 & -{}^1\!/_4 \end{Bmatrix} \text{ kontrola} \begin{Bmatrix} {}^{11}\!/_4 & -6 & {}^3\!/_4 \\ -1 & 2 & 0 \\ -{}^1\!/_4 & 1 & -{}^1\!/_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

IX. Krakowianem kanonicznym nazywamy krakowian w każdym wierszu którego kończy się przynajmniej jedna kolumna, t.zn.krakowian w każdym wierszu którego istnieje przynajmniej jeden element niezerowy pod którym wszystkie elementy dalszych wierszy są zerowe.

Tak np: kanonicznymi będą krakowiany:

$$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Z określenia wynika że krakowianem kanonicznym może być krakowian kwadrasty lub poziomy, t.zn. zawierający więcej kolumn niż wierszy. Nie może natomiast być kanonicznym krakowian pionowy, t.zn. zawierający więcej wierszy niż kolumn.

Szczególnym wypadkiem krakowianu kanonicznego jest krakowian kanoniczny o postaci trójkątnej. Jest to krakowian posiadający w pierwszej kolumnie pierwszy element niezerowy przy następnych elementach zerowych, w drugiej kolumnie drugi element niezerowy przy następnych elementach zerowych i t.d.

Krakowianami kanonicznymi o postaci trójkątnej będą więc np. krakowiany:

$$\begin{Bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{Bmatrix}$$

X. Nazywamy czynnikami kanonicznymi dowolnego krakowianu $\underline{a}$ krakowiany kanoniczne $\underline{G}$ i $\underline{H}$ spełniające warunek:

$$\underline{G} \cdot \underline{H} = \underline{a} \qquad \text{———— } 30$$

W szczególności nazywamy czynnikami trójkątnymi krakowianu $\underline{a}$ krakowiany kanoniczne o postaci trójkątnej $\underline{g}$ i $\underline{h}$ spełniające warunek:

$$\underline{g} \cdot \underline{h} = \underline{a} \qquad \text{———— } 31$$

Czynność "rozłożenia krakowianu na czynniki kanoniczne" czyli znalezienia krakowianów G H spełniających warunek /30/, a w szczególności czynność "rozłożenia krakowianu na czynniki trójkątne" czyli znalezienia krakowianów $\underline{g}$ i $\underline{h}$ spełniających warunek /31/ odgrywa w teorji i praktyce rachunku krakowianowego specjalnie doniosłą rolę.

Ilości kolumn w czynnikach kanonicznych danego krakowianu $\underline{a}$ są zgóry wyznaczone przez następstwa definicji mnożenia: pierwszy czynnik kanoniczny musi mieć tyle kolumn, ile ich posiada krakowian $\underline{a}$, drugi czynnik kanoniczny musi mieć tyle kolumn ile wierszy posiada krakowian $\underline{a}$. Natomiast ilość wierszy czynników kanonicznych nie jest przez zagadnienie zgóry wyznaczona / poza zrozumiałym warunkiem, że ilość ta musi być w obu czynnikach ta sama /. Można wykazać / por. Banachiwicz. Algebra krakowianowa/, że każdy krakowian niezerowy, t.zn.: posiadający choć jeden różny od zera element, daje się rozłożyć na czynniki kanoniczne $\underline{G}$ i $\underline{H}$.

Dalsze twierdzenia podstawowe.

Twierdzenie o przemienności odwracania i transponowania krakowianu kwadrastego.
Dla krakowianu kwadrastego, posiadającego odwrotność, kolejność w wykonaniu działań: obliczenia odwrotności i transponowania jest dowolna; inaczej: transpoza odwrotności takiego krakowianu równa się odwrotności jego transpozy:

$$\tau\,/\underline{a}^{-1}/ = /\tau\,\underline{a}\,/^{-1} \qquad (32)$$

Niech odwrotnością krakowianu kwadrastego $\underline{a}$ będzie krakowian $\underline{a}^{-1}$, zaś odwrotnością transpozy tego krakowianu $\tau\,\underline{a}$ niech będzie krakowian $/\tau\,\underline{a}\,/^{-1}$. To znaczy zachodzą związki:

$$\underline{a}^{-1}\cdot\underline{a} = \underline{\tau} \qquad (33)$$

$$/\tau\,\underline{a}/^{-1}\cdot/\tau\,\underline{a}/ = \underline{\tau} \qquad (34)$$

Jeżeli pomnożymy drugie z tych równań przez $\underline{a}^{-1}$, co jest oczywiście wykonalne, gdyż wszystkie krakowiany w zagadnieniu są tu kwadraste i równowymiarowe, otrzymamy:

$$/\tau\,\underline{a}\,/^{-1}\cdot\tau\,\underline{a}\cdot\underline{a}^{-1} = \underline{\tau}\cdot\underline{a}^{-1} = \tau/\underline{a}^{-1}/$$

Po zastosowaniu twierdzenia asocjatywnego znajdziemy:

$$/\tau\,\underline{a}\,/^{-1}[\underline{a}^{-1}\cdot\underline{a}] = \tau/\underline{a}^{-1}/ \qquad (35)$$

i ostatecznie, uwzględniając /33/:

$$/\tau\,\underline{a}\,/^{-1}\cdot\underline{\tau} = \tau/\underline{a}^{-1}/$$

czyli: $$/\tau\,\underline{a}\,/^{-1} = \tau/\underline{a}^{-1}/ \quad \text{c.n.d.} \qquad (36)$$

Uwaga. W twierdzeniu zakładamy milcząco, że istnienie odwrotności krakowianu kwadrastego skutkować musi istnienie odwrotności jego transpozy. Założenie to jest oczywiście słuszne, gdyż warunkiem istnienia obu tych odwrotności jest niezerowość tego samego wyznacznika.

Twierdzenie o odwrotności iloczynu.
Jeżeli krakowiany kwadraste $\underline{a}$ i $\underline{b}$ posiadają odwrotności $\underline{a}^{-1}$, $\underline{b}^{-1}$, to iloczyn $\underline{a}\cdot\underline{b}$ posiada odwrotność $/\underline{ab}/^{-1}$, która równa się $\underline{a}^{-1}\cdot\underline{b}^{-1}$:

$$/\underline{ab}/^{-1} = \underline{a}^{-1}\cdot\underline{b}^{-1} \quad \text{/gdy } \underline{a} \text{ i } \underline{b} \text{ kwadraste i posiadają odwrotności/.} \qquad (38)$$

Stosując do iloczynu $\underline{a}^{-1}\cdot\underline{b}^{-1}\cdot/\underline{ab}/$ twierdzenie asocjatywne napiszemy:

$$\underline{a}^{-1}\underline{b}^{-1}\,/\underline{a}\,\underline{b}/ = \underline{a}^{-1}\left[\underline{a}\,\underline{b}\,\tau\,\underline{b}^{-1}\right] = \underline{a}^{-1}\left\{\underline{a}\left[\tau\,\underline{b}^{-1}\cdot\tau\,\underline{b}\right]\right\} = \underline{a}^{-1}[\underline{a}\cdot\underline{\tau}] = \underline{a}^{-1}\cdot\underline{a} = \underline{\tau}$$

i ostatecznie: $\underline{a}^{-1}\cdot\underline{b}^{-1} = \underline{\tau}\cdot\tau\,/\underline{ab}/^{-1} = /\underline{ab}/^{-1}$ c.n.d.

Z twierdzenia wynika bezpośrednio, że dla znalezienia odwrotności krakowianu kwadrastego wystarczy rozłożyć go na czynniki kanoniczne kwadraste, obliczyć ich odwrotności i znaleźć iloczyn tych odwrotności. Krakowiany z którymi będziemy mieli do czynienia w zagadnieniach interpolacyjnych dają się przytym - jak dalej zobaczymy - rozkładać na czynniki kanoniczne kwadraste o postaci trójkątnej, t.zn. na czynniki, które umówiliśmy się oznaczać $\underline{g}$ i $\underline{h}$.
Obliczenie odwrotności $\underline{a}^{-1}$ krakowianu $\underline{a} = \underline{g}\cdot\underline{h}$, wyrazimy więc wzorem:

$$\underline{a}^{-1} = \underline{g}^{-1}\cdot\underline{h}^{-1} \qquad (39)$$

stanowiącym szczególny wypadek twierdzenia o odwrotności iloczynu /38/

i dającym się wysłowić jn: odwrotność krakowianu kwadrastego, rozkładalnego na trójkątne czynniki kanoniczne jest iloczynem odwrotności tych czynników.

Twierdzenie o przenoszeniu ostatniego czynnika na drugą stronę równania. Jeżeli dwa iloczyny krakowianowe tworzą równanie i ostatni czynnik jednego z iloczynów jest krakowianem kwadrastym posiadającym odwrotność, można przenieść ten ostatni czynnik jako ostatni na drugą stronę równania transponując go i odwracając.

$$\underline{k}_1\ \underline{k}_2 = \underline{k}_3 \longrightarrow \underline{k}_1 = \underline{k}_3 \cdot \tau\, \underline{k}_2^{-1} \qquad 39^1$$

Niech będzie równanie: $\underline{k}_1\ \underline{k}_2 = \underline{k}_3$ gdzie $\underline{k}_1$ i $\underline{k}_3$ są krakowianami, lub iloczynami krakowianowymi, zaś $\underline{k}_2$ jest krakowianem kwadrastym, posiadającym odwrotność.
Transpoza tej odwrotności /jako odwrotność transpozy / będzie miała tyle wierszy, ile ich ma transpoza krakowianu $\underline{k}_2$, czyli tyle wierszy ile krakowian $\underline{k}_2$ ma kolumn. Ponieważ i iloczyn /$\underline{k}_1\ \underline{k}_2$ / musi posiadać tyle wierszy, ile krakowian $\underline{k}_2$ ma kolumn, krakowiany /$\underline{k}_1\ \underline{k}_2$ / oraz $\tau\ \underline{k}_2^{-1}$ są równowierszowe, a więc wymnażalne.
Możemy więc pomnożyć obie strony równania:

$\underline{k}_1\ \underline{k}_2 = \underline{k}_3$ przez $\tau\ \underline{k}_2^{-1}$. Otrzymamy:

$\underline{k}_1 \underline{k}_2\, \tau\, \underline{k}_2^{-1} = \underline{k}_3\, \tau\, \underline{k}_2^{-1}$ a po zastosowaniu twierdzenia asocjatywnego:

$\underline{k}_1\ /\tau\, \underline{k}_2^{-1}\ \ \tau\, \underline{k}_2/ = \underline{k}_3\ \ \tau\, \underline{k}_2^{-1}$ czyli $\underline{k}_1\ / (\tau \underline{k}_2)^{-1} (\tau \underline{k}_2) / = \underline{k}_3 \cdot \tau\, \underline{k}_2^{-1}$

lub: $\underline{k}_1\ \underline{\tau} = \underline{k}_3 \cdot \tau\ \underline{k}_2^{-1}$

a więc: $\underline{k}_1 = \underline{k}_3 \tau\, \underline{k}_2^{-1}$ c.n.d.

Twierdzenie jest podstawą metody rozwiązywania układu równań liniowych, zwanej " metodą nieoznaczoną".

Twierdzenie o obliczaniu wartości wyznacznika.

Jeżeli krakowian kwadrasty $\underline{a}$ utworzony z tabeli a wyznacznika / a / daje się rozłożyć na trójkątne czynniki kanoniczne kwadraste $\underline{g}\ \underline{h}$, wówczas wartość wyznacznika obliczyć można jako iloczyn elementów położonych na przekątnych głównych krakowianów $\underline{g}$ i $\underline{h}$, a w szczególności, gdy elementy na przekątnej krakowianu $\underline{g}$ przyjmiemy równe jednościom - wartość wyznacznika będzie iloczynem elementów na przekątnej czynnika kanonicznego $\underline{h}$.

$$\underline{a} = \underline{g}\ \underline{h} \qquad /a/ = \pi\, h_{ii}\ g_{ii} \qquad \text{a przy } g_{ii} = 1 \quad /a/ = \pi\, h_{ii} \qquad 40$$

Wiadomo, że mnożąc kolumnami dwie dane tabele wyznacznikowe np. / g / i / h / otrzymamy tabelę, której wyznacznik będzie iloczynem wyznaczników danych tabel*)

---

*) Por: prof.W.Sierpiński - Zasady algebry wyższej. Metoda Banachiewicza obliczenia wyznaczników.

Ponieważ definicja mnożenia krakowianowego pokrywa się z definicją mnożenia kolumnami tabel wyznacznikowych, mnożąc tabelę wyznacznika / g / identyczną z tabelą krakowianu g przez tabelę wyznacznika / h / identyczną z tabelą krakowianu h, otrzymamy tabelę wyznacznika identyczną z tabelą krakowianu a = g . h . Skoro zaś tabele krakowianów g . h są kanoniczne i trójkątne, t.zn. pod przekątną główną mają wyłącznie elementy zerowe a wartość wyznacznika o takiej tabeli równa jest iloczynowi elementów położonych na głównej przekątnej,*) możemy i wartość wyznacznika / a / obliczać jako iloczyn elementów na głównych przekątnych krakowianów g i h , na które rozłożyliśmy krakowian a . Jeżeli przytem będzie $g_{ii} = 1$ otrzymamy ostatecznie $/ a / = \pi h_{ii}$

Technika rachunkowa rozkładu na trójkątne czynniki kanoniczne g h .

Przed przystąpieniem do zbadania warunków rozkładalności krakowianu na trójkątne czynniki kanoniczne przerobimy przykład liczbowy takiego rozkładu. Ułatwi to następnie śledzenie dowodu twierdzenia o warunkach rozkładalności.
Zauważymy przedewszystkim, że przystępując do rozłożenia krakowianu na czynniki kanoniczne trójkątne założyć możemy dowolne - byle różne od zera - wartości elementów, położonych na głównej przekątnej jednego z czynników. Z reguły zakładamy tu jedności na głównej przekątnej pierwszego czynnika / g / . Ilość wierszy w czynnikach kanonicznych przyjmujemy równą ilość wierszy krakowianu rozkładanego na czynniki. Ponieważ ta ilość wierszy równa jest ilości kolumn drugiego czynnika - czynnik drugi / h / jest przy rozkładzie krakowianu na czynniki trójkątne zawsze krakowianem kwadrastym.

Schemat rozkładu na czynniki trójkątne możemy zilustrować poniższym rysunkiem.

$$\underset{\underline{g}}{\overset{n \text{ kolumn}}{\boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & x & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x \end{array}}}} \quad \underset{\underline{h}}{\overset{m \text{ kolumn}}{\boxed{\begin{array}{ccc} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{array}}}} \quad = \quad \underset{\underline{a}}{\overset{n \text{ kolumn}}{\boxed{\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \end{array}}}} \; \updownarrow \text{m wierszy}$$

w którym elementy szukane w zagadnieniu zasymbolizowaliśmy przez krzyżyki x x.

Ilość elementów szukanych równa jest tu ilości równań algebraicznych, dostarczonych przez równanie krakowianowe g . h = a.

Mamy bowiem w krakowianie g: $\frac{1+m}{2}$ m elementów danych, oraz

$nm - \frac{1+m}{2}$ m szukanych,

*) Por: prof.W.Sierpiński - Zasady algebry wyższej. Metoda Banachiewicza obliczenia wyznaczników.

w krakowianie $\underline{h}$: $\frac{1+m}{2}$ m elementów szukanych. Łączna ilość elementów szukanych wynosi więc: nm i równa jest ilości elementów krakowianu a. Że zaś każdy element krakowianu $\underline{a}$ dostarcza jednego równania: /9/

$$\underline{g_i\ \underline{h}_j = a_{ij}} \qquad 41$$

lub, w postaci algebraicznej:

$$\underline{g_{i1} \cdot h_{j1} + g_{i2} \cdot h_{j2} + \ldots g_{im} \cdot h_{jm} = a_{ij}} \qquad 42$$

zaś ogólna ilość elementów wynosi m x n - zadanie może być jednoznacznie rozwiązalne. Warunkiem rozwiązalności będzie zgodność mn równań typu /42/, co rozpatrzymy dalej.

Obecnie przystępujemy do rozwiązania zadania liczbowego. Rozwiązanie sprowadza się do stopniowego mnożenia każdej kolumny krakowianu $\underline{g}$ przez kolejne kolumny krakowianu $\underline{h}$. Każde mnożenie kolumny przez kolumnę pozwala na znalezienie jednego z brakujących w krakowianach $\underline{g}$ i $\underline{h}$ elementów. Znaleziony element wpisujemy natychmiast w odpowiednim polu tablicy. Rachunek najlepiej - nawet w wypadku najprostszych okrągłych liczb - prowadzić na arytmometrze, co pozwala na jednoczesne mnożenie i sumowanie. Dla uniknięcia pomyłek w wyborze kolumn dogodnie jest posługiwać się wskaźnikami, oznaczającymi mnożone kolumny /stalówka, zapałka i t.p./

Przykład liczbowy.

Rozłożyć na czynniki trójkątne krakowian: $\underline{a} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 4 & 14 \\ 4 & 13 & 23 & 58 \\ 2 & 5 & 11 & 40 \end{matrix} \right\}$

Schemat rozkładu będzie miał postać:

$\underline{g}$

1			
0	1		
0	0	1	

$\underline{h}$

0		
0	0	

$\underline{a}$

2	4	4	14
4	13	23	58
2	5	11	40

Ponieważ rezultatem mnożenia pierwszej kolumny krakowianu $\underline{g}$ przez pierwszą kolumnę krakowianu $\underline{h}$ ma być 2, brakującym elementem pierwszej kolumny krakowianu $\underline{h}$ musi być 2. Mamy bowiem 1.2+0.0+0.0 = 2. Liczbę 2 natychmiast wpisujemy w pierwszym polu pierwszej kolumny krakowianu $\underline{h}$, poczym przystępujemy do mnożenia pierwszej kolumny $\underline{g}$ przez drugą kolumnę $\underline{h}$. Z mnożenia tego wyciągamy wniosek, że pierwszym elementem drugiej kolumny $\underline{h}$ jest 4 /1.4+0.0+0.0 = 4./ Mnożenie pierwszej kolumny g przez trzecią $\underline{h}$ daje h_{31}= 2. Po przemnożeniu pierwszej kolumny $\underline{g}$ przez cały krakowian $\underline{h}$ schemat będzie już zawierał trzy poszukiwane wielkości h_{11} h_{21} h_{31}

1			
0	1		
0	0	1	

2	4	2
0		
0	0	

2	4	4	14
4	13	23	58
2	5	11	40

Mnożąc teraz drugą kolumnę krakowianu $\underline{g}$ przez: pierwszą, drugą, trzecią kolumnę $\underline{h}$ otrzymywać będziemy stopniowo $g_{21} \cdot 2 = 4$ t.zn. $g_{21} = 2$ dalej: $24 + 1.h_{22} = 13$ t.zn. $h_{22} = 5$ wreszcie: $22 + 1 \cdot h_{32} = 5$ t.j. $h_{32} = 1$.
Każde mnożenie kolumny przez kolumnę dostarcza po jednym elemencie brakującym, którego natychmiastowe wpisanie w odpowiednim polu umożliwia nam dalszy rachunek. Po przeprowadzeniu całego rachunku otrzymamy:

$$\underset{\underline{g}}{\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 7 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}\right\}} \cdot \underset{\underline{h}}{\left\{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}\right\}} = \underset{\underline{a}}{\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 4 & 14 \\ \hline 4 & 13 & 23 & 58 \\ \hline 2 & 5 & 11 & 40 \\ \hline \end{array}\right\}}$$

Twierdzenie o rozkładalności krakowianu na czynniki trójkątne.

Krakowian /kwadrasty lub poziomy / jest rozkładalny na trójkątne czynniki kanoniczne jeżeli każdy z wyznaczników głównych tego krakowianu jest różny od zera. Wyznacznikami głównymi krakowianu nazywamy przytem wyznaczniki, których tabele powstają z tabeli danego krakowianu i posiadają na głównej przekątnej 1,2,3....m kolejnych elementów głównej przekątnej krakowianu. Wyznaczniki główne krakowianu $\underline{a}$ oznaczać będziemy $/a_{11}/$ $/a_{22}/.../a_{mm}/$, krakowianyo o identycznych tabelach z tabelami wyznaczników głównych oznaczać będziemy $\underline{a}_{11}$ $\underline{a}_{22}...\underline{a}_{mm}$ i nazywać głównymi krakowianami wyznacznikowymi krakowianu.

Twierdzenie o rozkładalności można więc zasymbolizować j.n.:

$$\underline{a} = \underline{g} \cdot \underline{h} \longrightarrow /a_{ii}/ \neq 0 \qquad i = 1.2...m \qquad \text{------} \quad 43$$

gdzie krakowiany $\underline{g}$ i $\underline{h}$ są trójkątnymi czynnikami kanonicznymi krakowianu $\underline{a}$, przyczym $\underline{h}$ jest kwadrasty.

Wyznacznikami głównymi krakowianu $\underline{a}$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \;\ldots & a_{m1} & a_{(m+1)1} \;\ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{m2} & a_{(m+1)2} & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{m3} & a_{(m+1)3} & a_{n3} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{m4} & a_{(m+1)4} & a_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & a_{mm} & a_{(m+1)m} & a_{nm} \end{array}\right\} \quad \text{będą wyznaczniki } /a_{ii}/ \quad i=1.2.3...m \text{ --- } 44$$

to znaczy wyraźnie:

$$/a_{11}/ = a_{11} \qquad /a_{22}/ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad /a_{33}/ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{i t.d.}$$

W szczególności krakowian: $a = \left\{\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix}\right\}$ nie jest rozkładalny na czynniki kanoniczne trójkątne $\underline{g}$ $\underline{h}$

gdyż jeden z jego wyznaczników głównych jest zerem: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ choć drugi jest odmienny od zera:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.6.4 + 4.3.1 + 1.3.4 - 1.6.1 - 4.3.2 - 4.3.4 = -6.$$

Nierozkładalność tego krakowianu łatwo też skonstatować zestawiając schemat rozkładu:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1.5 & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0! & \\ \hline 0 & 0 & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 6 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

z którego zaraz wynika nierozkładalność /wyraz h_{22} musiałby być zerem/. Z nierozkładalności tej nie należy jednak wyciągać wniosków, dotyczących niestosowalności metody krakowianowego obliczania wartości wyznacznika w naszym przypadku. Wystarczy bowiem w naszym wypadku przestawić kolumnę drugą wyznacznika na miejsce trzeciej i odwrotnie i rozłożyć otrzymany tak krakowian $\underline{a}' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ na czynniki trójkątne. Otrzymamy:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0.5 & 1.5 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 3.5 \\ \hline 0 & 0 & 1.5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Skąd wartość wyznacznika: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2.2.1.5=6$ a więc: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6$,

co zresztą już obliczyliśmy.

Zatrzymaliśmy się dłużej nad wyjaśnieniem na przykładzie możliwej nierozkładalności krakowianu kwadrastego o niezerowym wyznaczniku, gdyż w kilku, wartościowych zresztą, pracach w naszej i obcojęzycznej literaturze krakowianowej autorzy podają niezerowość wyznacznika krakowianu kwadrastego jako wystarczający warunek rozkładalności na czynniki trójkątne.

Dla interpolacji sprawa jest zresztą bez większego znaczenia praktycznego.

Dowód twierdzenia o rozkładalności przeprowadzimy jak następuje. Rozkładalność krakowianu $\underline{a}$ na czynniki kanoniczne trójkątne jest identyczna ze spełnieniem równania:

$$\left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{m1} & g_{(m+1)1} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{32} & & g_{m2} & g_{(m+1)2} & & g_{n2} \\ & & g_{33} & & g_{m3} & g_{(m+1)3} & & g_{n3} \\ & & & & g_{m4} & g_{(m+1)4} & & g_{n4} \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & g_{mm} & g_{(m+1)m} & & g_{nm} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & \cdots & h_{m1} \\ & h_{22} & h_{32} & & h_{m2} \\ & & h_{33} & & h_{m3} \\ & & & & h_{m4} \\ & & & & \vdots \\ & & & & h_{mm} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} & a_{(m+1)1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & & a_{m2} & a_{(m+1)2} & & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & a_{m3} & a_{(m+1)3} & & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & & a_{mm} & a_{(m+1)m} & & a_{nm} \end{matrix}\right\} \quad \text{— 45}$$

w którym elementy na głównych przekątnych pierwszych dwu krakowianów mają być różne od zera t.zn.

$$g_{ii} \neq 0 \qquad h_{ii} \neq 0 \qquad \text{dla } i = 1.2.3 \ldots m \quad \text{— 46}$$

Równanie to jednak możemy - zupełnie nie zmieniając jego treści - napisać pod postacią następującego szeregu równań:

$$\begin{gathered} \{g_{11}\}\{h_{11}\} = \{a_{11}\} \\ \left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{21} \\ & g_{22} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h_{11} & h_{21} \\ & h_{22} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ & h_{22} & h_{32} \\ & & h_{33} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}\right\} \quad \text{— 47} \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ \left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{m1} \\ & g_{22} & g_{32} & \cdots & g_{m2} \\ & & g_{33} & \cdots & g_{m3} \\ & & & \ddots & \\ & & & & g_{mm} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & \cdots & h_{m1} \\ & h_{22} & h_{32} & \cdots & h_{m2} \\ & & h_{33} & \cdots & h_{m3} \\ & & & \ddots & \\ & & & & h_{mm} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & & a_{mm} \end{matrix}\right\} \end{gathered}$$

wyznaczających związki między elementami h kwadrastego krakowianu $\underline{h}$ oraz elementami g a występującymi w największym z wyznaczników głównych krakowianów $\underline{g}$ i $\underline{a}$, z dołączeniem szeregu równań:

$$\begin{Bmatrix} g_{(m+1)1} \\ g_{(m+1)2} \\ g_{(m+1)3} \\ \vdots \\ g_{(m+1)m} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & \cdots & h_{m1} \\ & h_{22} & h_{32} & \cdots & h_{m2} \\ & & h_{33} & \cdots & h_{m3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & h_{mm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{(m+1)1} \\ a_{(m+1)2} \\ a_{(m+1)3} \\ \vdots \\ a_{(m+1)m} \end{Bmatrix}$$

$$- - - - - - - - - - - - \qquad \text{———— } 48$$

$$\begin{Bmatrix} g_{n1} \\ g_{n2} \\ g_{n3} \\ \vdots \\ g_{nm} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & \cdots & h_{m1} \\ & h_{22} & h_{32} & \cdots & h_{m2} \\ & & h_{33} & \cdots & h_{m3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & h_{mm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{Bmatrix}$$

które wiążą elementy h kwadrastego krakowianu h z elementami g a krakowianów g a znajdującymi się poza ich wyznacznikami głównymi. Wartości g h a spełniające układ /47 48 / spełniać będą układ /45/ i odwrotnie. Układ /47 48 / pozwala zaś odrazu zauważyć, że rozkład krakowianu a na czynniki trójkątne możemy uważać za jednoczesne rozkładanie na czynniki trójkątne wszystkich głównych krakowianów wyznacznikowych krakowianu a /47/ z dołączeniem związków /48/. Skoro zaś rozkład krakowianu a na czynniki trójkątne jest uwarunkowany takimże rozkładem jego głównych krakowianów wyznacznikowych, zaś wartości wyznaczników o tabelach identycznych z tabelami tych krakowianów wyznacznikowych będą /por. twierdzenie o wartości wyznacznika /40//:

$$\begin{aligned} /a_{11}/ &= h_{11}\, g_{11} \\ /a_{22}/ &= h_{11}\, g_{11}\, h_{22}\, g_{22} \qquad \text{———— } 49 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ /a_{mm}/ &= h_{11}\, h_{22} \cdots h_{mm}\, g_{11}\, g_{22} \cdots g_{mm} \end{aligned}$$

przyczem /46/

$$\left.\begin{aligned} /a_{11}/ &\neq 0 \\ /a_{22}/ &\neq 0 \\ /a_{mm}/ &\neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{———— } 50$$

Widzimy, że warunek niezerowości wyznaczników głównych rozkładanego krakowianu istotnie jest konieczny. Przy zachowaniu tego warunku spełnią się też równania /48/, gdyż każde z równań grupy /48/ jest układem m równań o m niewiadomych i tym samym wyznaczniku głównym układu. Pisząc np. ostatnie równanie grupy /48/ pod postacią wyraźną układu równań algebraicznych o niewiadomych $g_{n1}\ g_{n2} - g_{nm}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} g_{n1} h_{11} &= a_{n1} \\ g_{n1} h_{21} + g_{n2} h_{22} &= a_{n2} \\ g_{n1} h_{31} + g_{n2} h_{32} + g_{n3} h_{33} &= a_{n3} \\ - - - - - - - - - - - &\quad \vdots \\ g_{n1} h_{m1} + g_{n2} h_{m2} + g_{n3} h_{m3} + \cdots g_{nm} h_{mm} &= a_{nm} \end{aligned}$$

Że zaś wartość wyznacznika tego /i innych grupy 48 / będzie:

$$\begin{vmatrix} h_{11} & & & \\ h_{21} & h_{22} & & \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ h_{m1} & h_{m2} & h_{m3} & h_{mm} \end{vmatrix} = h_{11}\, h_{22} \cdots h_{mm}$$

otrzymujemy jako warunek rozwiązalności grupy /48/ warunek $h_{11}\, h_{22} \ldots h_{mm} \neq 0$, który jest spełniony. Tym samym twierdzenie o rozkładalności zostało dowiedzione.

<u>Twierdzenie o odwrotności krakowianu kanonicznego kwadrastego w postaci trójkątnej.</u>
<u>Odwrotność kwadrastego krakowianu kanonicznego w postaci trójkątnej istnieje zawsze. Elementy położone nad główną przekątną tej odwrotności są zerami. Elementy położone na głównej przekątnej odwrotności są odwrotnościami odpowiadających elementów przekątnej głównej krakowianu.</u>

Oznaczając krakowian przez $\underline{k}$ a jego odwrotność przez $\underline{l}$, zasymbolizujemy twierdzenie równaniem:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} k_{11} & k_{21} & k_{31} & \ldots & k_{n1} \\ & k_{22} & k_{32} & & k_{n2} \\ & & k_{33} & & k_{n3} \\ & & \cdot & & \vdots \\ & & & & k_{nn} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccccc} l_{11} & & & & \\ l_{12} & l_{22} & & & \\ l_{13} & l_{23} & l_{31} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ l_{1n} & l_{2n} & l_{3n} & \ldots & l_{nn} \end{array}\right\} = \tau \quad \begin{array}{l} \text{możliwe zawsze} \\ \text{przy } k_{ii} \neq 0 \\ \text{i skutkuje } l_{ii} = \dfrac{1}{k_{ii}} \end{array} \qquad \text{—— 51}$$

Niech będzie krakowian kanoniczny kwadrasty o postaci trójkątnej $\underline{k}$ /51/. Oznaczmy przez $\underline{l}$ krakowian kwadrasty o takich samych wymiarach i zbadajmy możliwość istnienia elementów l_{ik} spełniających warunek:

$$\underline{k} \cdot \underline{l} = \underline{\tau} \quad \text{czyli wyraźnie:}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} k_{11} & k_{21} & k_{31} & \ldots & k_{n1} \\ & k_{22} & k_{32} & & k_{n2} \\ & & k_{33} & & k_{n3} \\ & & & & \vdots \\ & & & & k_{nn} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \ldots & l_{n1} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} & & l_{n2} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & l_{3n} & & l_{nn} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right\} \qquad \text{—— 52}$$

Mnożąc kolejno pierwszą kolumnę $\underline{k}$ przez kolumny $\underline{l}$ otrzymujemy zaraz:
$k_{11} \cdot l_{11} = 1$ oraz $k_{11} \cdot l_{21} = 0$ $\quad k_{11}\, l_{31} = 0 \ldots k_{11} \cdot l_{n1} = 0$ skąd, ponieważ z założenia $k_{11} \neq 0$, będzie

$$\underline{l_{11} = \frac{1}{k_{11}}} \qquad \underline{l_{21} = 0} \,/ \qquad \underline{l_{31} = 0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \underline{l_{n1} = 0}$$

Mnożąc drugą kolumnę $\underline{k}$ przez kolejne kolumny $\underline{l}$ otrzymywać będziemy:
$k_{21} \cdot l_{11} + k_{22} \cdot l_{12} = 0$ $\quad k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot l_{22} = 1$ $\quad k_{21} \cdot 0 + k_{22}\, l_{32} = 0 \ldots k_{21}\, l_{n1} + k_{22} l_{n2} = 0$
skąd, ponieważ $k_{22} \neq 0$, będzie

$$\underline{l_{22} = \frac{1}{k_{22}}} \qquad \underline{l_{32} = 0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \underline{l_{n2} = 0}$$

Zupełnie analogicznie mnożąc trzecią ...n tą kolumnę $\underline{k}$ przez kolejne kolumny $\underline{l}$ otrzymywać będziemy

$$\underline{l_{33} = \frac{1}{k_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad l_{n3} = 0}$$

$$- - - - - - - -$$

$$l_{nn} = \frac{1}{k_{nn}}$$

Widzimy więc, że o ile istnieje odwrotność $\underline{k}^{-1} = \underline{l}$ musi mieć kształt /51/ t.zn. elementy położone nad przekątną główną muszą być zerami, a elementy na na przekątnej głównej muszą być odwrotnościami odpowiadających elementów k_{ii}. Pozostaje uzasadnić pierwszą część twierdzenia, to znaczy wykazać że wszystkie elementy /schematu /51/ są zawsze wyznaczalne. Pisząc równanie /51/ pod postacią układów równań algebraicznych o niewiadomych l otrzymywać będziemy:

1/ dla układu niewiadomych $l_{11}\ l_{12} \dots l_{1n}$:

$$\left.\begin{aligned}
&k_{11}\, l_{11} &&= 1\\
&k_{21}\, l_{11} + k_{22}\, l_{12} &&= 0\\
&k_{31}\, l_{11} + k_{32}\, l_{12} + k_{33}\, l_{13} &&= 0\\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - &&\\
&k_{n1}\, l_{11} + k_{n2}\, l_{12} + k_{n3}\, l_{13} \dots\dots k_{nn}\, l_{1n} &&= 0
\end{aligned}\right\} \text{———— } 53$$

2/ dla układu niewiadomych $l_{22}\ l_{23} \dots l_{2n}$

$$\left.\begin{aligned}
&k_{22}\, l_{22} &&= 1\\
&k_{32}\, l_{22} + k_{33}\, l_{23} &&= 0\\
&- - - - - - - - - - - - - - - &&\\
&k_{n2}\, l_{22} + k_{n3}\, l_{23} \dots\dots k_{nm}\, l_{2n} &&= 0
\end{aligned}\right\} \text{———— } 54$$

i t.d.

Będą to wszystko układy o wyznacznikach trójkątnych posiadających na głównych przekątnych zespoły elementów k_{ii}, a więc zgodnie z założeniem $k_{ii} \neq 0$, będą to wyznaczniki niezerowe. Że zaś do wyznaczenia t niewiadomych z t równań niejednorodnych wystarcza niezerowość wyznacznika układu, wielkości l będą zawsze wyznaczalne. Łatwo przytem stwierdzić z pierwszych równań układów /53//54/, że będzie zawsze $l_{ii} = \dfrac{1}{k_{ii}}$ jak to już otrzymaliśmy poprzednio.

Technika obliczania odwrotności.

Widzieliśmy /39/, że odwrotność krakowianu kwadrastego wyrazić można jako iloczyn odwrotności jego czynników kanonicznych $\underline{g}$ $\underline{h}$. Ponieważ mnożenie krakowianowe jest, przy równowierszowości czynników, zawsze wykonalne, wynika stąd, że krakowian kwadrasty rozkładalny na czynniki $\underline{g}$ $\underline{h}$ ma zawsze odwrotność.
Obliczenie tej odwrotności wymaga 1/ rozłożenia krakowianu na czynniki kanoniczne, 2/ obliczenia odwrotności tych czynników i 3/ obliczenia iloczynu tych odwrotności. Pierwszą i trzecią z tych czynności umiemy wykonać. Drugą t.zn. obliczenie odwrotności krakowianu kanonicznego kwadrastego o postaci trójkątnej najwygodniej wykonać analogicznie do rozkładu na czynniki kanoniczne, to znaczy przygotowując schemat trzech krakowianów zagadnienia $\underline{k}$ $\underline{k}^{-1}$ i $\underline{T}$ w którym wypisujemy wszystkie wiadome bez rachunku elementy i wypełniając go stopniowo w drodze kolejnego mnożenia kolumn.

Taki schemat mieć będzie np: dla krakowianu $\underline{k}$ o czterech wierszach i kolumnach postać:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41}\\\hline 0 & k_{22} & k_{32} & k_{42}\\\hline 0 & 0 & k_{33} & k_{43}\\\hline 0 & 0 & 0 & k_{44}\\\hline\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \cdot & 0 & 0 & 0\\\hline \cdot & \cdot & 0 & 0\\\hline \cdot & \cdot & \cdot & 0\\\hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\\hline\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & 1\\\hline\end{array}$$

$$\underline{k} \qquad\qquad\qquad \underline{k}^{-1} \qquad\qquad\qquad \underline{T}$$

gdzie zasymbolizowano przez punkty elementy znajdowane w toku rachunku.

Przykłady najlepiej rzecz wyjaśnią.

Przykład liczbowy.

Obliczenie odwrotności krakowianu kanonicznego trójkątnego: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 5 & 14 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix}$ daje:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 5 & 14 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix}}_{\underline{a}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.20 & 0 & 0 & 0 \\ -0.70 & 0.25 & 0 & 0 \\ 3.00 & -1.50 & 1.00 & 0 \\ -1.75 & 0.75 & -0.50 & 0.25 \end{Bmatrix}}_{\underline{a}^{-1}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}}_{\underline{\tau}}$$

Przykład liczbowy.

Obliczenie odwrotności krakowianu kwadrastego: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 12 \end{Bmatrix}$

Rozpoczynamy od rozkładu na czynniki kanoniczne $\underline{g}\ \underline{h}$ otrzymując:

$$\overset{\underline{g}}{\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{h}}{\begin{Bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}} = \overset{\underline{a}}{\begin{Bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 12 \end{Bmatrix}}$$

Obliczenie odwrotności krakowianów $\underline{g}$ i $\underline{h}$ daje:

$$\overset{\underline{g}}{\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{g}^{-1}}{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{Bmatrix}} = \overset{\underline{\tau}}{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}}$$

oraz

$$\overset{\underline{h}}{\begin{Bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{h}^{-1}}{\begin{Bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.50 & 0 \\ -1.75 & 2.50 & -1.00 \end{Bmatrix}} = \overset{\underline{\tau}}{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}}$$

Stąd odwrotność $\underline{a}^{-1}$:

$$\overset{\underline{g}^{-1}}{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{h}^{-1}}{\begin{Bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.50 & 0 \\ -1.75 & 2.50 & -1.00 \end{Bmatrix}} = \overset{\underline{a}^{-1}}{\begin{Bmatrix} -8.00 & 5.00 & -1.75 \\ 11.50 & -7.00 & 2.50 \\ -5.00 & 3.00 & -1.00 \end{Bmatrix}}$$

Kontrolę rachunku stanowi stwierdzenie, że iloczyn krakowianu $\underline{a}$ i jego odwrotności jest jednostką krakowianową $\underline{\tau}$.

$$\begin{Bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 12 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -8.00 & 5.00 & -1.75 \\ 11.50 & -7.00 & 2.50 \\ -5.00 & 3.00 & -1.00 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Krakowianowe rozwiązania układu n równań liniowych o n niewiadomych.

Algebra krakowianu daje różne możliwości w rozwiązywaniu układów równań liniowych. Rozpatrzymy tu dwie metody, "metodę nieoznaczoną" i "metodę rozkładu na czynniki." Pierwsza z nich jest rachunkowo duża uciążliwsza od drugiej; ma jednak ona zaletę w niektórych zagadnieniach bardzo cenną: elementy krakowianu spółczynników wchodzą w działanie z elementami krakowianu wyrazów wolnych dopiero w końcowym stadium rachunku. W wypadku rozwiązywania grupy układów posiadających ten sam krakowian spółczynników metoda nieozna-

czona jest więc wysoce ekonomiczna.
W dalszym ciągu pracy stosowaliśmy tę metodę, rozwiązując zagadnienie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów tablic wielomianowych.
Metoda ta może też być cenna w tych zagadnieniach wyrównawczych, w których oprócz wartości niewiadomych z układu równań normalnych Gaussa poszukujemy średnich błędów tych niewiadomych. Mamy tam bowiem doczynienia z grupą układów, w których przy niezmieniającym się krakowianie spółczynników:

$$\underline{a} = \left\{ \begin{matrix} [aa] & [ab] & [ac] & \cdot \\ [ab] & [bb] & [bc] & \cdot \\ [ac] & [bc] & [cc] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\} \qquad 55$$

Występują kolejno różne krakowiany wyrazów wolnych:

$$\underline{l}_0 = \left\{ \begin{matrix} [al] \\ [bl] \\ [cl] \\ \vdots \end{matrix} \right\} \quad \underline{l}_1 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \quad \underline{l}_2 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \quad \underline{l}_3 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \cdots \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} = \underline{l}_n \qquad 56$$

Metoda rozkładu na czynniki jest w rachunku zwykłym dużo ekonomiczniejsza /jest to niewątpliwie najekonomiczniejsza z istniejących metod rachunkowych niemechanicznych /. Stosujemy ją w dalszym ciągu pracy dla rozwiązywania wielu zagadnień interpolacyjnych, nadając jej zresztą cokolwiek odmienną od klasycznej postać i nazywając metodą zerowania tablic /str. 29.

Omawiając obie metody będziemy zakładali, że wszystkie wyznaczniki główne krakowianu spółczynników są różne od zera to znaczy wyraźnie, że układ równań liniowych, który znakować będziemy j.n.:

$$\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots n_1 N = l_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots n_2 N = l_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots n_3 N = l_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \dots n_n N = l_n \end{matrix} \qquad 57$$

posiada krakowian spółczynników - oznaczać go będziemy przez $\underline{a}$ - t.j.:

$$\underline{a} = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & n_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & & n_n \end{matrix} \right\} \qquad 58$$

nietylko o niezerowym wyznaczniku: $/ a / = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & n_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & n_n \end{vmatrix} \neq 0$ — 59

lecz i niezerowych wyznacznikach

$$\left. \begin{matrix} /a_{11} / = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ /a_{22} / = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{i t.d.} \end{matrix} \right\} \qquad 60$$

Takie ograniczenie nie będzie miało znaczenia praktycznego, gdy stosując metody krakowianowe do pewnych układów typowych dla zagadnień interpolacyj-

nych /będą to układy o wyznaczniku Vandermonda i pokrewnych /stwierdzimy w formie ogólnej, że krakowiany tych układów posiadają własność niezerowości wyznaczników głównych. Ograniczenie przynosi zaś tę korzyść, że uwalnia nas od rozpatrywania zagadnienia przestawiania kolumn i wierszy niezerowego wyznacznika /a/, prowadzącego do niezerowości wszystkich wyznaczników $/a_{ii}/$ *) oraz pozwala na zmechanizowanie pracy rachunkowej.
Zauważymy jeszcze, że przy oznaczeniu przez $\underline{X}$ krakowianu niewiadomych zaś przez $\underline{1}$ krakowianu wyrazów wolnych, t.zn. wyraźnie:

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \\ N \end{Bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \underline{1} = \begin{Bmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ 1_3 \\ \vdots \\ 1_n \end{Bmatrix} \tag{61}$$

z zachowaniem dla krakowianu spółczynników oznaczenia $\underline{a}$ /58/ układ n równań liniowych o n niewiadomych /57/ przyjmuje postać równania krakowianowego:

$$\underline{X} \cdot \tau \underline{a} = \underline{1} \tag{62}$$

<u>Rozwiązanie układu n równań liniowych o n niewiadomych "metodą nieoznaczoną"</u>

Wynika z zastosowania do równania /62/ twierdzenia o przenoszeniu ostatniego czynnika na drugą stronę równania /str. 16/. Ponieważ zgodnie z ograniczeniem /59, 60 / krakowian kwadrasty $\underline{a}$ posiada odwrotność, a tymsamym posiada ją i krakowian $\tau\,\underline{a}$ /por: też /33// mamy odrazu:

$$\underline{x} = \underline{1} \cdot \underline{a}^{-1} \tag{63}$$

czyli: <u>krakowian niewiadomych jest iloczynem krakowianu wyrazów wolnych przez odwrotność krakowianu spółczynników.</u>

<u>Przykład liczbowy.</u>

Rozwiązać metodą nieoznaczoną układ równań:

$$\begin{aligned} 4x + 8y + 4z &= 12 \\ 2x + 6y + 8z &= -18 \\ -2x + y + 12z &= -61 \end{aligned}$$

Dla znalezienia rozwiązania /63/:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ -18 \\ -61 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -2 & +1 & 12 \end{Bmatrix}^{-1}$$

musimy obliczyć odwrotność krakowianu spółczynników, rozkładając go na czynniki, znajdując odwrotność tych czynników i obliczając ich iloczyn. Ponieważ te czynności w stosunku do krakowianu:

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 12 \end{Bmatrix}$$

Wykonaliśmy w przykładzie na str. 24 otrzymując:

$$\underline{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} -8.00 & 5.00 & -1.75 \\ 11.50 & -7.00 & 2.50 \\ -5.00 & 3.00 & -1.00 \end{Bmatrix}$$

Otrzymamy odrazu:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ -18 \\ -61 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -8.00 & 5.00 & -1.75 \\ 11.50 & -7.00 & 2.50 \\ -5.00 & 3.00 & -1.00 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

czyli $x = 2$ $y = 3$ $z = -5$

Kontrolę rachunku stanowi sprawdzenie, czy znaleziony krakowian niewiadomych spełnia równanie krakowianowe: $\underline{x} \cdot \tau\,\underline{a} = \underline{1}$ /62/, zastępujące dany w zagadnieniu układ równań algebraicznych. Otrzymamy:

---

*) O możliwości takiego przestawienia kolumn i wierszy niezerowego wyznacznika, które zamienia na niezerowe wszystkie wyznaczniki główne tabeli, wspomina prof. Sierpiński w Zasadach Algebry Wyższej, omawiając metodę Banachiewicza. Bliższe szczegóły ob: "Zur Berechnung der Determinanten" Banachiewicza /Acta Astronomica/.

$$\underline{x}\cdot\tau\underline{a} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix}\tau\begin{Bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ -18 \\ -61 \end{Bmatrix}$$

Wypisywanie tej kontroli w całej wyrazistości symboliki krakowianowej - jak to zrobiliśmy powyżej - niema zresztą żadnego celu. Wystarczy napisać znalezione niewiadome nad odpowiednimi kolumnami krakowianu spółczynnikowego i wykonać mnożenie wierszami.

Przykład liczbowy.

Weźmy teraz grupę układów: I II III IV o tych samych spółczynnikach przy niewiadomych:

	I	II	III	IV
$4x + 8y + 4z$	12	116	20	20
$2x + 6y + 8z$	-18	144	2	28
$-2x + y + 12z$	-61	145	-27	32

Odwrotność krakowianu spółczynników znamy już /str.24 /. Ponieważ rozwiązując kolejno układy o krakowianach wyrazów wolnych $\underline{I}$ $\underline{II}$ $\underline{III}$ $\underline{IV}$, będziemy mnożyli te krakowiany przez tę samą odwrotność $\underline{a}^{-1}$, możemy symbolizując przez $\underline{X}_I$ $\underline{X}_{II}$ $\underline{X}_{III}$ $\underline{X}_{IV}$ poszukiwane krakowiany niewiadomych układów I II III IV - napisać odrazu:

$$\{\underline{X}_I\ \underline{X}_{II}\ \underline{X}_{III}\ \underline{X}_{IV}\} = \{\underline{I}\ \underline{II}\ \underline{III}\ \underline{IV}\}\cdot\underline{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} 12 & 116 & 20 & 20 \\ -18 & 144 & 2 & 28 \\ -61 & 145 & -27 & 32 \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} -8.00 & 5.00 & -1.75 \\ 11.50 & -7.00 & 2.50 \\ -5.00 & 3.00 & -1.00 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{cccc} X_I & X_{II} & X_{III} & X_{IV} \\ \end{array}$$
$$= \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \\ -5 & 12 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$$

Kontrolą rozwiązania będzie, analogicznie jak w przykładzie poprzednim, obliczenie iloczynu $\{\underline{X}_I\ \underline{X}_{II}\ \underline{X}_{III}\ \underline{X}_{IV}\}\tau\underline{a}$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \\ -5 & 12 & -3 & 3 \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 & 116 & 20 & 20 \\ -18 & 144 & 2 & 28 \\ -61 & 145 & -27 & 32 \end{Bmatrix}$$

Rozwiązanie układu n równań liniowych o n niewiadomych metodą rozkładu na czynniki nie operuje - w przeciwieństwie do metody nieoznaczonej - krakowianem spółczynników $\underline{a}$ /58/ i krakowianami wyrazów wolnych $\underline{l}$ /61/, jako niezależnymi zespołami, działającymi na siebie dopiero w końcu rachunku /63/ lecz wprowadza pełny krakowian układu, t.zn: zespół wszystkich danych zagadnienia. Ten pełny krakowian układu, który symbolizować będziemy przez $\underline{p}$, określa dla układu /57/ równanie:

$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & n_1 & -l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & n_2 & -l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & n_3 & -l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_n & b_n & c_n & & n_n & l_n \end{Bmatrix} \qquad \text{———— 64}$$

Krakowian niewiadomych powiększony przez dopisanie jedności - zasymbolizujemy go dla odróżnienia od krakowianu $\underline{x}$ /61/ dużą literą $\underline{X}$ - to znaczy wyraźnie krakowian:

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \\ N \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{———— 65}$$

i pełny krakowian układu $\underline{p}$, związane są równaniem:

$$\underline{X} \cdot \tau \underline{p} = \underline{o} \qquad 66$$

stanowiącym krakowianowe ujęcie układu równań /57/, gdzie $\underline{O}$ oznacza krakowian zerowy, t.zn: krakowian, którego wszystkie elementy są zerami*).
Ponieważ krakowian $\underline{p}$ jest przy przyjętych przez nas założeniach /59,60/ rozkładalny na czynniki kanoniczne trójkątne $\underline{g}$ $\underline{h}$ /por.str. 25 / - przyczem pierwszy czynnik będzie zawierał n+1 , a drugi n kolumn - mamy:

$$\underline{p} = \underline{g} \cdot \underline{h} \qquad 67$$

skąd po podstawieniu do /66/.

$$\underline{X} /\tau(\underline{g} \cdot \underline{h})/= \underline{0} \quad \text{czyli} \quad \underline{X} /\underline{hg}/= \underline{0} \qquad 68$$

Lub po zastosowaniu twierdzenia dysocjatywnego:

$$\underline{X} \cdot \tau \underline{g} \cdot \underline{h} = 0 \quad \text{czyli} \quad /\underline{X}\, \tau \underline{g}/\underline{h} = \underline{0} \qquad 69$$

a po przeniesieniu posiadającego odwrotność krakowianu kwadrastego $\underline{h}$ na drugą stronę równania /37/:

$$\underline{X}\ \tau\underline{g} = \underline{0} \cdot \tau\underline{h}^{-1} = \underline{0}, \text{ czyli}$$

$$\underline{X} \cdot \tau\underline{g} = \underline{0} \qquad 70$$

Rozwiązanie sprowadza się więc do rozłożenia pełnego krakowianu układu na trójkątne czynniki kanoniczne /67/ i do wyznaczenia krakowianu niewiadomych /65/ z równania /70/. Ta ostatnia czynność nie przedstawia żadnych trudności gdyż $\underline{X}$ jest krakowianem jednokolumnowym a $\tau\underline{g}$ ma postać trójkątną: możemy więc stopniowo wyznaczać elementy krakowianu $\underline{X}$ mnożąc kolejno ten krakowian przez kolumny $\tau\underline{g}$ o coraz większej ilości elementów. Czynność jest zupełnie podobna do rozkładu z tym ułatwieniem, że wszystkie iloczyny kolumny przez kolumnę mają być zerami. Można zresztą nie rozwiązywać równania wyznaczającego $\underline{X}$ w wyraźnej postaci /70/, wymagającej napisania transpozy $\tau\underline{g}$, a poprostu po znalezieniu czynników kanonicznych $\underline{g}$ $\underline{h}$ dobrać w drodze mnożenia wierszami taki krakowian:

$$\{x \cdot y \quad z \cdots N \quad 1\} \qquad 71$$

aby jego iloczyn wierszowy przez każdy wiersz krakowianu $\underline{g}$ był zerem. Mnożenie $\underline{X}\tau\underline{g}$ kolumnami jest bowiem identyczne z mnożeniem $\tau\underline{x} \cdot \underline{g}$ wierszami. Przechodzimy do przykładu liczbowego.

Przykład liczbowy.

Rozwiązać metodą rozkładu na czynniki układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z + 2 = 0 \\ 4x + 15y + 26z + 25 = 0 \\ 7x + 21y + 19z + 27 = 0 \end{cases}$$

Rozkład na czynniki daje /wyrazy wolne są po lewej stronie równań, a nie jak w schemacie /57/ po prawej - niema więc potrzeby przy liczbach 2 25 27 zmieniać znaków/.

$$\overset{\underline{g}}{\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{h}}{\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Bmatrix}} = \overset{\underline{p}}{\begin{Bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 15 & 26 & 25 \\ 7 & 21 & 19 & 27 \end{Bmatrix}}$$

skąd niewiadome w postaci /71/

$$\{-44 \quad 17 \quad -4 \quad 1\} \cdot \underline{g} = \underline{o}$$

lub w postaci /70/:

$$\begin{Bmatrix} -44 \\ 17 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

*) W wypadku mogących zachodzić wątpliwości co do wymiarów krakowianu zerowego, można by to oznaczać stawiając przy symbolu $\underline{O}$ dwa wskaźniki, z których jeden określałby ilość kolumn, a drugi ilość wierszy.
Krakowian zerowy posiada pewne właściwości, zrozumiałe bez omówienia, np:

$$\underline{a} \cdot \underline{o} = \underline{o} \cdot \underline{a} = \underline{o}$$

Gdy przy kwadrasłym $\underline{a}$, będzie $\underline{x} \cdot \underline{a} = \underline{o}$, musi być $\underline{X} = \underline{o}$ /gdyż $\underline{X} = \underline{o} \cdot \tau\underline{a}^{-1}$/.
Ogólnie z równania: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{o}$ nie wynika natomiast, koniecznie: $\underline{a} = o$ lub $\underline{b} = o$

$$\left(\text{np. } \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -6 \\ 3 \end{Bmatrix} = \underline{o}\right)$$

Kontrolę najwygodniej przeprowadzić mnożąc wiersz /71/ t.zn: $\{-44 \quad 17 \quad -4 \quad 1\}$ przez kolejne wiersze krakowianu $\underline{p}$, co jest pojęciowo identyczne z mnożeniem /66/ a nie wymaga wypisania transpozy $\tau\underline{p}$.

Metoda zerowania tablic /wariant metody rozkładu na czynniki kanoniczne trójkątne/.

Można wykazać, że przy równowierszowości krakowianów $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}$ oraz równokolumnowości krakowianów $\underline{a}$ i $\underline{c}$ i równokolumnowości krakowianów $\underline{b}$ i $\underline{d}$ zachodzi związek:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c} \cdot \underline{d} = \begin{Bmatrix} a \\ c \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} \qquad \text{———— } 72$$

to znaczy że sumę iloczynów krakowianów można zastąpić przez iloczyn krakowianów utworzonych w drodze kolumnowania odpowiadających sobie kolejnością czynników tych iloczynów.

Tak np. zamiast:
$$\begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33 & 43 \\ 29 & 15 \\ 27 & 25 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 42 & 42 \\ 18 & 60 \\ 33 & 45 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 75 & 85 \\ 47 & 75 \\ 60 & 70 \end{Bmatrix}$$

mamy :
$$\begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 & 85 \\ 47 & 75 \\ 60 & 70 \end{Bmatrix}$$

Niech $\underline{a}$ i $\underline{c}$ mają po n kolumn, zaś $\underline{b}$ i $\underline{d}$ po m kolumn. Wówczas będzie:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c}\ \underline{d} = \{\underline{a}_1\ \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_n\}\{\underline{b}_1 \cdots \underline{b}_m\} + \{\underline{c}_1\ \underline{c}_2 \cdots \underline{c}_n\}\{\underline{d}_1 \cdots \underline{d}_m\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} (\underline{a}_1\underline{b}_1) & (\underline{a}_2\underline{b}_1) \cdots & (\underline{a}_n\underline{b}_1) \\ (\underline{a}_1\underline{b}_2) & (\underline{a}_2\underline{b}_2) \cdots & (\underline{a}_n\underline{b}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\underline{a}_1\underline{b}_m) & (\underline{a}_2\underline{b}_m) & (\underline{a}_n\underline{b}_m) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\underline{c}_1\underline{d}_1) & (\underline{c}_2\underline{d}_1) \cdots & (\underline{c}_n\underline{d}_1) \\ (\underline{c}_1\underline{d}_2) & (\underline{c}_2\underline{d}_2) \cdots & (\underline{c}_n\underline{d}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\underline{c}_1\underline{d}_m) & (\underline{c}_2\underline{d}_m) & (\underline{c}_n\underline{d}_m) \end{Bmatrix}$$

czyli po dodaniu:
$$\underline{ab} + \underline{cd} = \begin{Bmatrix} (\underline{a}_1\underline{b}_1 + \underline{c}_1\underline{d}_1) \cdots\cdots (\underline{a}_n\underline{b}_1 + \underline{c}_n\underline{d}_1) \\ (\underline{a}_1\underline{b}_2 + \underline{c}_1\underline{d}_2) \cdots\cdots (\underline{a}_n\underline{b}_2 + \underline{c}_n\underline{d}_2) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (\underline{a}_1\underline{b}_m + \underline{c}_1\underline{d}_m) \cdots\cdots (\underline{a}_n\underline{b}_m + \underline{c}_n\underline{d}_m) \end{Bmatrix} \text{ —— } 73$$

Mamy z drugiej strony:
$$\begin{Bmatrix} a \\ c \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{a}_1\ \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_n \\ \underline{c}_1\ \underline{c}_2 \cdots \underline{c}_n \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{b}_1\ \underline{b}_2 \cdots \underline{b}_m \\ \underline{d}_1\ \underline{d}_2 \cdots \underline{d}_m \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} (\underline{a}_1\underline{b}_1 + \underline{c}_1\underline{d}_1) \cdots\cdots (\underline{a}_n\underline{b}_1 + \underline{c}_n\underline{d}_1) \\ (\underline{a}_1\underline{b}_2 + \underline{c}_1\underline{d}_2) \cdots\cdots (\underline{a}_n\underline{b}_2 + \underline{c}_n\underline{d}_2) \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ (\underline{a}_1\underline{b}_m + \underline{c}_1\underline{d}_m) \cdots\cdots (\underline{a}_n\underline{b}_m + \underline{c}_n\underline{d}_m) \end{Bmatrix} \qquad \text{———— } 74$$

gdzie symbolizujemy przez $\underline{k}_i$ i tą kolumnę krakowianu $\underline{k}$ /$\underline{k} = \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}$/.
Z porównania /73/ i /74/ wynika słuszność uzasadnianego związku /72/.

Zastosowanie związku /72/ do metody rozkładu na czynniki pozwala na skonstruowanie takiego układu tablic krakowianowych, który pozwala na rozwiązanie układu równań bez posiłkowania się bezpośredniego definicją mnożenia krakowianowego /9/, a wyłącznie w drodze zerowania kolumn i wierszy, to znaczy takiego dobierania brakujących elementów w pewnym układzie tablic, aby iloczyn każdej kolumny pewnej tablicy przez każdą kolumnę drugiej był zerem, oraz iloczyn każdego wiersza pewnej tablicy przez każdy wiersz innej był zerem.
Pisząc mianowicie równanie /67/ pod postacią:

$$\underline{p}\tau = \underline{g} \cdot \underline{h}$$

lub: $$\underline{p}(-\tau) + \underline{g} \cdot \underline{h} = \underline{0} \; ^{*)}$$

i stosując związek /72/ otrzymamy:

$$\left\{\begin{matrix} \underline{p} \\ \underline{g} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -\tau \\ \underline{h} \end{matrix}\right\} = \underline{0}$$

co ujęte w jedno podwójne równanie zerujące ze związkiem /70/ daje:

$$\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} \underline{p} \\ \underline{g} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -\tau \\ \underline{h} \end{matrix}\right\} = \underline{0} \\ \cdot \\ \{\underline{x}\} \\ \shortparallel \\ \underline{0} \end{matrix} \qquad\qquad 75$$

Można to wysłowić jak następuje: dla rozwiązania układu n równań o n niewiadomych, spełniającego warunek niezerowości wyznaczników /59 60/ należy:

1/ Zestawić trzy tablice I II III, z których pierwszą stanowi pełna tablica spółczynnikowa układu skolumnowana ze schematem czynnika kanonicznego $\underline{g}$, drugą - ujemna jednostka krakowianowa $-\tau$ skolumnowana ze schematem czynnika kanonicznego $\underline{h}$, wreszcie trzecią - schemat wiersza zawierający n wolnych miejsc i jedność na n + 1 miejscu. Tablice I i II grupujemy szeregowo, III umieszczamy pod pierwszą.

2/ Tak dobrać brakujące elementy w tablicach, aby iloczyn każdej kolumny pierwszej tablicy przez każdą kolumnę drugiej tablicy był zerem; oraz aby iloczyn każdego wiersza III tablicy przez każdy wiersz pierwszej był zerem. Wartości niewiadomych odczytujemy z tablicy III, przyczem wartości ich zostają obliczone w procesie wymnażania tablicy III przez dolną połowę tablicy I, zaś skontrolowane w procesie wymnażania tablicy III przez górną połowę tablicy I.

Dla układu trzech równań mielibyśmy schemat:

$$\begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -1_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -1_3 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{matrix}} \\ \cdot & \\ \text{III} \; \boxed{\begin{matrix} x & y & z & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{matrix}} & \end{array}$$

np. dla układu:
$2x+4y+8z+6 = 0$
$5x+13y+29z+18 = 0$
$4x+10y+17z+24 = 0$

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & & \text{II} \\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 5 & 13 & 29 & 18 \\ 4 & 10 & 17 & 24 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix}} & \cdot & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix}} \\ \cdot & & \\ \text{III} \; \boxed{\begin{matrix} 3 & -7 & 2 & 1 \end{matrix}} & & \end{array}$$

t.zn. $x=3$ $y=-7$ $z=2$

---

*) Symbolem $-\tau$ oznaczamy krakowian kwadrasty, którego elementy na przekątnej głównej są równe minus jedności, a pozostałe elementy równe zeru.

Parę uwag o innych metodach krakowianowego rozwiązywania układów równań liniowych.

Poza metodami, które opisaliśmy powyżej szczegółowo, znane są w obecnym stanie rachunku krakowianowego jeszcze dwie metody rozwiązywania układów równań liniowych ; z których jedna opiera się na pojęciu pierwiastka krakowianowego, a druga na pojęciu dzielenia krakowianów. Ponieważ zagadnienia interpolacyjne obchodzą się zarówno bez pojęcia pierwiastka jak i bez pojęcia dzielenia - nie uważaliśmy za potrzebne omawiać szczegółowo te metody. Metoda pierwiastka jest zresztą pojęciowo bardzo zbliżona do metody rozkładu na czynniki kanoniczne i sprowadza się do rozłożenia pełnego krakowianu na czynniki $\{\underline{h}'\}$ i $\{\underline{h}'\,\underline{1}'\}$ gdzie $\underline{h}'$ jest krakowianem kanonicznym trójkątnej postaci. Identyczność części elementów krakowianu $\{\underline{h}'\,\underline{1}'\}$ z elementami krakowianu $\underline{h}'$ powoduje tu pewną oszczędność w czynnościach rachunkowych i w ilości zapisów. Metoda ta wymaga natomiast obliczania pierwiastka kwadratowego z n elementów liczbowych, czego w zwykłej metodzie rozkładu nie mamy. Ponadto metoda ta daje się zastosować tylko do układów symetrycznych i stanowi raczej specyficzną metodę rozwiązywania układów normalnych metody najmniejszych kwadratów, w której przynosi wybitne korzyści w dziedzinie obliczania błędów średnich. Metoda oparta na pojęciu dzielenia krakowianów korzyści techniczno-rachunkowych nie przynosi, jest natomiast interesująca przez swą większą ogólność. Szczegóły dotyczące metody pierwiastka krakowianowego - poza obcojęzycznymi publikacjami twórcy metody prof.T.Banachiewicza - znaleźć można w cytowanych już pracach polskich prof.E.Warchałowskiego i inż.Kochmańskiego. Algebraiczne ujęcie metody pierwiastka krakowianowego podaję w artykule "Algebraiczne ujęcie algorytmu Banachiewicza" /Przegląd Geodezyjny N.II.12 Warszawa 1947/, oraz w odbitce światłodrukowej: " Rozwiązywanie układów równań normalnych Gaussa z jednoczesnym obliczeniem średnich błędów niewiadomych przy pomocy algorytmu Banachiewicza" /Warszawa 1947. Geodezyjny Instytut Naukowo-Badawczy/. Metoda dzielenia podana jest w " Resolution d'un systeme d'equations lineaires algebriques pardivision /T.Banachiewicz Kraków, Bruxelles 1941/, oraz w Algebrze krakowianowej prof.T.Banachiewicza /w rękopisie/.

Krakowiany typu Vandermonde'a i ich rozkładalność na trójkątne czynniki kanoniczne.

Krakowianem potęgowym lub krakowianem typu Vandermonde'a będziemy nazywali krakowian n wierszowy którego poszczególne wiersze zawierają po n elementów, stanowiących uporządkowane kolejne potęgi zerową, pierwszą ... /n - 1/ szą różnych wielkości np:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1, & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{Bmatrix} \quad \text{a ogólnie:} \quad \underline{V} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^{n-1} \end{Bmatrix} \qquad -76$$

$$x_i \neq x_k$$

Ponieważ wszystkie wyznaczniki główne /patrz str.25 / krakowianu typu Vandermonda są wyznacznikami Vandermonda, zaś wyznacznik Vandermonda jest iloczynem różnic elementów jego drugiej kolumny: *)

*) Weźmy wyznacznik Vandermonda /np.z 76/.Można go uważać za wielomian $W/x_2/$. Jeżeli w wyznaczniku zamienimy x_2 na x_1 wartość jego będzie zerem /dwa identyczne wiersze/.x_1 jest więc pierwiastkiem wielomianu $W/x_2/$,który musi być wobec tego podzielny przez $/x_2 - x_1/$.Stosując takie rozumowanie dla $x_3 x_4 \dots x_n$ dojdziemy do wniosku,że wyznacznik jest też podzielny przez:$/x_3-x_1//x_4-x_1/\dots/x_n-x_1/$.Musi być więc podzielny przez iloczyn: $p_1=/x_2-x_1//x_3-x_1/\dots/x_n-x_1/$. Takie rozumowanie, sprowadzające się do porównywania i-tego wiersza z pierwszym /i=2.3..n/ możemy jednak przeprowadzić równie dobrze porównując i-ty wiersz z drugim /i=3.4..n/i t.d.co doprowadzi nas do wniosku o podzielności wyznacznika przez iloczyny:$p_2=/x_3-x_2//x_4-x_2/\dots/x_n-x_2/$ $p_3=/x_4-x_3//x_5-x_3/\dots/x_n-x_3/\dots$ $p_{n-1}=/x_n-x_{n-1}/$. Wielomian jest więc podzielny przez $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$, który to iloczyn napisaliśmy w wyrażeniu /77/grupując dla przejrzystości iloczyny $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ w poszczególnych wierszach. Łatwo też wykazać,że jest $/V/ = p_1 p_2 \dots p_{n-1} = P$

$$
/V/ = \begin{array}{l}
/x_2 - x_1/\ /x_3 - x_1/ \ldots /x_n - x_1/ \\
\qquad\quad /x_3 - x_2/ \ldots /x_n - x_2/ \\
\qquad\quad - - - - - - - \\
\qquad\qquad\qquad /x_n - x_{n-1}/
\end{array} \qquad \text{———} \quad 77
$$

który przy założeniu $x_i \neq x_k$ nie może być zerem; żaden z wyznaczników głównych krakowianu Vandermonda nie jest zerem. Wynika stąd, że krakowian Vandermonda jest zawsze rozkładalny na trójkątne czynniki kanoniczne.
Tym samym do każdego układu równań liniowych, którego wyznacznik jest wyznacznikiem Vandermonda możemy stosować metodę odwrotnościową /"nieoznaczoną "/ lub metodę rozkładu na czynniki kanoniczne względnie jej variant: metodę zerowania tablic.

Podwójnym krakowianem potęgowym lub podwójnym krakowianem typu Vandermonda będziemy nazywali krakowian $n \times m$ wierszowy którego poszczególne wiersze zawierają iloczyny niewyższych od $n - 1$ potęg zmiennej x przez niewyższe od $m - 1$ potęgi zmiennej y, uporządkowane jak następuje:

$$
\underline{\underline{V}} = \left\{ \begin{array}{l}
1\ x_0\ x_0^2 \ldots x_0^{n-1}\ \ y_0\ \ y_0x_0\ \ y_0x_0^2 \ldots y_0x_0^{n-1} \qquad y_0^2\ \ y_0^2x_0\ \ y_0^2x_0^2 \ldots y_0^2x_0^{n-1} \ldots\ y_0^{m-1}\ \ y_0^{m-1}x_0\ \ y_0^{m-1}x_0^2 \ldots y_0^{m-1}x_0^{n-1} \\
1\ x_1\ x_1^2 \ldots x_1^{n-1}\ \ y_0\ \ y_0x_1\ \ y_0x_1^2 \ldots y_0x_1^{n-1} \qquad y_0^2\ \ y_0^2x_1\ \ y_0^2x_1^2 \ldots y_0^2x_1^{n-1} \ldots\ y_0^{m-1}\ \ y_0^{m-1}x_1\ \ y_0^{m-1}x_1^2\ \ y_0^{m-1}x_1^{n-1} \\
1\ x_2\ x_2^2 \ldots x_2^{n-1}\ \ y_0\ \ y_0x_2\ \ y_0x_2^2 \ldots y_0x_2^{n-1} \qquad y_0^2\ \ y_0^2x_2\ \ y_0^2x_2^2 \ldots y_0^2x_2^{n-1} \ldots\ y_0^{m-1}\ \ y_0^{m-1}x_2\ \ y_0^{m-1}x_2^2\ \ y_0^{m-1}x_2^{n-1} \\
1\ x_3\ x_3^2 \ldots x_3^{n-1}\ \ y_0\ \ y_0x_3\ \ y_0x_3^2 \ldots y_0x_3^{n-1} \qquad y_0^2\ \ y_0^2x_3\ \ y_0^2x_3^2 \ldots y_0^2x_3^{n-1} \ldots\ y_0^{m-1}\ \ y_0^{m-1}x_3\ \ y_0^{m-1}x_3^2\ \ y_0^{m-1}x_3^{n-1} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
1\ x_{n-1}\ x_{n-1}^2 \ldots x_{n-1}^{n-1}\ \ y_0\ \ y_0x_{n-1}\ \ y_0x_{n-1}^2\ \ y_0x_{n-1}^{n-1} \qquad y_0^2\ \ y_0^2x_{n-1}\ \ y_0^2x_{n-1}^2\ \ y_0^2x_{n-1} \ldots\ y_0^{m-1}\ \ y_0^{m-1}x_{n-1}\ \ y_0^{m-1}x_{n-1}^2\ \ y_0^{m-1}x_{n-1}^{n-1} \\
1\ x_0 \qquad\qquad\quad y_1 \\
1\ x_1 \qquad\qquad\quad y_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
1\ x_{n-1} \qquad\qquad y_1 \\
- - - - - - - - - - - - - - - \\
1\ x_0 \qquad\qquad\quad y_{m-1} \\
1\ x_1 \qquad\qquad\quad y_{m-1} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
1\ x_{n-1} \qquad\qquad y_{m-1}
\end{array} \right\} \quad - 78
$$

$x_i \neq x_k \quad i.k \ldots 0.1.2.\, n-1 \qquad\qquad y_p \neq y_q \quad p.q \ldots 0.1.2 \ldots m-1$

Porządek potęg i wskaźników podwójnego krakowianu potęgowego dobrze uzmysławia następujący schemat, według którego zresztą zestawiać będziemy przy interpolacji krakowiany tego rodzaju.

1/ Utwórzmy tablicę pisząc pod postacią osi kolumnowej kolejne potęgi zmiennej x zaś pod postacią osi wierszowej kolejne potęgi zmiennej y:

$$
\begin{array}{l|l}
 & 1 \quad y \quad y^2 \ldots y^{m-1} \\
\hline
1 & \\
x & \\
x^2 & \\
\vdots & \\
x^{n-1} &
\end{array} \qquad \text{———} \quad 79
$$

---

gdyż iloczyn pierwszych wyrazów różnic /77/ równy jest: $x_2 x_3^2 x_4^3 \ldots x_n^{n-1}$ czyli wyrazowi głównemu wyznacznika /76/
Dowód wzorowano na dowodzie użytym w "Cours d'Algèbre supèrieure" J.Neuberg /Paris. Liège 1907/.

i wypełniając pola tej tablicy przez iloczyny potęgi x napisanej w wierszu, charakteryzującym dane pole przez potęgę y napisaną w kolumnie, charakteryzującej dane pole. Jeżeli elementy takiej "tablicy osiowej:"

$$\begin{array}{llll} 1 & y & y^2 \ldots\ldots & y^{m-1} \\ x & xy & xy^2 \ldots\ldots & xy^{m-1} \\ x^2 & x^2y & x^2y^2 \ldots\ldots & x^2y^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x^{n-1} & x^{n-1}y & x^{n-1}y^2 \ldots\ldots & x^{n-1}y^{m-1} \end{array} \qquad \text{———} \quad 80$$

rozwiniemy kolumnami w wiersz otrzymamy:

$$\underline{1 \quad x \quad x^2 \ldots x_n^{n-1} \quad y \quad xy \quad x^2y \ldots x^{n-1}y \quad y^2 \; xy^2 \; x^2y^2 \ldots x^{n-1}y^2 \ldots y^{m-1} \; xy^{m-1} \; x^2y^{m-1} \ldots}$$

$$\ldots \underline{x^{n-1} \; y^{m-1}} \qquad \text{———} \quad 81$$

czyli schemat kolejności w jakiej w każdym wierszu krakowianu /78/ występują potęgi zmiennych x y.

2/ Utwórzmy tablicę pisząc pod postacią osi kolumnowej kolejne wyrazy zmiennej x zaś pod postacią osi wierszowej kolejne wyrazy zmiennej y:

$$\begin{array}{c|cccc} & y_0 & y_1 & y_2 & \ldots \; y_{m-1} \\ \hline x_0 & & & & \\ x_1 & & & & \\ x_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ x_{n-1} & & & & \end{array} \qquad \text{———} \quad 82$$

i wypełniając pola tej tablicy przez iloczyny odpowiednich wielkości /analogicznie jak poprzednio/.
Jeżeli elementy takiej "tablicy osiowej":

$$\begin{array}{ccccc} x_0y_0 & x_0y_1 & x_0y_2 & \ldots & x_0y_{m-1} \\ x_1y_0 & x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_{m-1} \\ x_2y_0 & x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}y_0 & x_{n-1}y_1 & x_{n-1}y_2 & & x_{n-1}y_{m-1} \end{array} \qquad \text{———} \quad 83$$

rozwiniemy kolumnami w wiersz, otrzymamy :

$$\underline{x_0y_0 \quad x_1y_0 \quad x_2y_0 \ldots x_{n-1}y_0 \quad x_0y_1 \quad x_1y_1 \ldots x_{n-1}y_1 \quad x_0y_2 \; x_1y_2 \ldots x_{n-1}y_2 \quad x_0y_{m-1} \; x_1y_{m-1} \ldots}$$

$$\ldots \underline{x_{n-1} \; y_{m-1}} \qquad \text{———} \quad 84$$

czyli schemat kolejności, w jakiej w poszczególnych wierszach krakowianu /78 / występują zmienne $x_i y_k$.
Dalszych kolumn krakowianu $\underline{V}$ w schemacie /78/ nie piszemy. Są one dla zagadnienia nieistotne.
Dla przykładu zestawimy krakowian podwójny Vandermonda, którego poszczególne wiersze zawierają iloczyny niewyższych od 2 potęg x przez niewyższe od 1 potęgi y /t.zn. n = 3 m = 2 /.

Ze schematu

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & y \\ \hline 1 & 1 & y \\ x & x & xy \\ x^2 & x^2 & x^2y \end{array}$$

otrzymamy kolejność potęg: $1 \quad x \quad x^2 \quad y \quad xy \quad x^2y$

zaś ze schematu:

$$\begin{array}{c|cc} & y_0 & y_1 \\ \hline x_0 & x_0 y_0 & x_0 y_1 \\ x_1 & x_1 y_0 & x_1 y_1 \\ x_2 & x_2 y_0 & x_2 y_1 \end{array}$$

otrzymamy kolejność zmiennych w poszczególnych wierszach:

$x_0 y_0 \quad x_1 y_0 \quad x_2 y_0 \quad x_0 y_1 \quad x_1 y_1 \quad x_2 y_1$

Krakowian ma więc postać:

$$\underline{\underline{V}} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 & x_0 y_0 & x_0^2 \; y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_0 & x_1 y_0 & x_1^2 \; y_0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_0 & x_2 y_0 & x_2^2 \; y_0 \\ 1 & x_0 & x_0^2 & y_1 & x_0 y_1 & x_0^2 \; y_1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 \; y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_1 & x_2 y_1 & x_2^2 \; y_1 \end{array} \right\} \qquad 85$$

Można wykazać, że krakowian podwójny Vandermonda jest zawsze rozkładalny na czynniki $\underline{g}$ $\underline{h}$. Wynika stąd, że do każdego układu równań liniowych, którego wyznacznik jest wyznacznikiem podwójnym Vandermonda można stosować metodę odwrotnościową /nieoznaczoną/, lub metodę rozkładu, względnie jej wariant: metodę zerowania tablic.

Dla udowodnienia rozkładalności krakowianu $\underline{\underline{V}}$ na czynniki kanoniczne $\underline{g}$ i $\underline{h}$ wystarczy wykazać, że żaden z wyznaczników głównych tego krakowianu nie jest zerem. Wyznaczniki główne krakowianu $\underline{\underline{V}}$ mogą być jednak bądź wyznacznikami zwykłymi Vandermonda /np: $\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$ w krakowianie /85//, bądź "wyznacznikami podwójnymi Vandermonda" /np: $\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_0 \\ 1 & x_0 & x_0^2 & y_1 \end{vmatrix}$ i dalsze w krakowianie /85//.

O pierwszych wiemy już że nie mogą być wyznacznikami zerowymi. Pozostaje więc wykazać że jakikolwiek byłby wyznacznik podwójny Vandermonda, wartość jego będzie różna od zera.

Dla obliczenia wartości tego rodzaju wyznacznika możemy traktować go kolejno jako wielomian względem: $x_1 \; x_2 \dots x_{n-1} \; y_1 \; y_2 \dots y_{m-1}$. Traktowanie wyznacznika jako wielomianu $W/x_1/$ doprowadzi nas do wniosku o jego podzielności przez $/x_1 - x_0/^m$. x_0 jest bowiem m krotnym pierwiastkiem jego wielomianu, gdyż przybiera on wartość zera przy zmianie x_1 na x_0 w wierszu drugim każdej z m grup na które podzielić można wiersze wyznacznika, zaliczając do jednej grupy wiersze o identycznych wskaźnikach przy zmiennej y. Zupełnie podobnie dojdziemy do wniosku o podzielności wyznacznika przez: $/x_2 - x_0/^m \dots /x_{n-1} - x_0/^m$ a także przez: $/x_2 - x_1/^m /x_3 - x_1/^m \dots /x_{n-1} - x_1/^m$ przez: $/x_3 - x_2/^m \dots /x_{n-1} - x_2/^m$ i t.d. i t.d. aż do $/x_{n-1} - x_{n-2}/^m$. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla zmiennej y dojdziemy do wniosku o podzielności wielomianu przez $/y_1 - y_0/^n /y_2 - y_0/^n \dots /y_{m-1} - y_0/^n$, dalej przez: $/y_2 - y_1/^n /y_3 - y_1/^n \dots /y_{m-1} - y_1/^n$ i t.d. i t.d. wreszcie $/y_{m-1} - y_{m-2}/^n$. Wyznacznik musi więc być podzielny przez iloczyn czynników:

$$P = \begin{array}{r} /x_1 - x_0/^m /x_2 - x_0/^m /x_3 - x_0/^m \dots /x_{n-1} - x_0/^m \\ /x_2 - x_1/^m /x_3 - x_1/^m \dots /x_{n-1} - x_1/^m \\ /x_3 - x_2/^m \dots /x_{n-1} - x_2/^m \\ \\ /x_{n-1} - x_{n-2}/^m \\ /y_1 - y_0/^n /y_2 - y_0/^n /y_3 - y_0/^n \dots /y_{m-1} - y_0/^n \\ /y_2 - y_1/^n /y_3 - y_1/^n \dots /y_{m-1} - y_1/^n \\ /y_3 - y_2/^n \dots /y_{m-1} - y_2/^n \\ \\ /y_{m-1} - y_{m-2}/^n \end{array} \qquad 86$$

Wyznacznik nie może przytem zawierać innych czynników, gdyż musi w wypadku jednej zmiennej przybierać postać /77/. Możemy więc otrzymany iloczyn uważać za wartość wyznacznika podwójnego Vandermonda, co oznaczymy krótko:

$$|\underline{\underline{V}}| = p \qquad \text{———} \quad 87$$

Wartość p nie może być oczywiście przy założeniu $x_i \neq x_k \quad y_p \neq y_q$ /i k ...0.1.2...n-1 p.q...0.12...m-1 / zerem cnd.

<u>**Przykład.**</u>

Obliczając wzorem /86, 87 / wartość wyznacznika /85/ otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
& /x_1 - x_0/^2 /x_2 - x_0/^2 \\
& \qquad /x_2 - x_1/^2 \\
& \qquad /y_1 - y_0/^3
\end{aligned}
$$

$$\text{lub } |\underline{\underline{V}}| = /x - x_0/^2 /x_2 - x_0/^2 /x_2 - x_1/^2 /y_1 - y_0/^3 \quad \text{np: } |\underline{\underline{V}}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 9 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 3 & 9 & 5 & 15 & 45 \end{vmatrix} =$$

$$= /2 - 1/^2 /3 - 1/^2 /3 - 2/^2 /5 - 3/^3 = 1.4.1.8 = 32.$$

Obliczając wartość tego wyznacznika metodą rozkładu na czynniki otrzymamy:

$$
\underset{\underline{g}}{\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}} \cdot
\underset{\underline{h}}{\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix}} =
\underset{\underline{\underline{v}}}{\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 9 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 3 & 9 & 5 & 15 & 45 \end{Bmatrix}}
$$

$$\text{skąd} = |\underline{\underline{V}}| = 1.1.2.2.2.4 = 32$$

<u>Układ zjednostkowany trzech równań.</u>

Szczególną postacią układu trzech równań liniowych jest występujący często w zagadnieniach interpolacyjnych "układ zjednostkowany", t.zn. układ w którym wszystkie spółczynniki przy jednej z niewiadomych są jednościami. Przyjmując tę niewiadomą za ostatnią z kolejności i symbolizując niewiadome literami A B C , zaś spółczynniki literami $x_i\, y_i$, wreszcie wyrazy wolne literą U_i /i = 1.2.3 / napiszemy układ zjednostkowany i jego rozwiązanie krakowianowe pod postacią:

$$
\begin{aligned}
Ax_1 + By_1 + C &= U_1 \\
Ax_2 + By_2 + C &= U_2 \\
Ax_3 + By_3 + C &= U_3
\end{aligned}
\qquad
\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} =
\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}
\begin{Bmatrix} y_2 & x_3 & -y_2 x_3 \\ y_3 & x_1 & -y_3 x_1 \\ y_1 & x_2 & -y_1 x_2 \\ -y_3 & -x_2 & y_3 x_2 \\ -y_1 & -x_3 & y_1 x_3 \\ -y_2 & -x_1 & \underline{y_2 x_1} \\ & & s \end{Bmatrix} \frac{1}{s} \qquad \text{———} \quad 88
$$

gdzie s jest sumą elementów ostatniej kolumny drugiego krakowianu.

Słuszność tego związku można np: uzasadnić pisząc rozwiązanie układu pod postacią wyznacznikową i rozwijając wyznaczniki w schemat Sarrusa. Łatwo zauważyć że porządek wskaźników przy symbolach U y x w kolejnych wierszach jest dla pierwszych trzech wierszy kołowy prosty /1 2 3, 2 3 1, 3 1 2 /, dla następnych - kołowy odwrotny /1 3 2, 2 1 3, 3 2 1 /, przyczym znaki elementów y x są przy porządku odwrotnym ujemne. Elementy trzeciej kolumny są iloczynami elementów kolumn pierwszej i drugiej, przyczem znaki ich w

pierwszych trzech elementach są zmienione.

Przykład Liczbowy.

Dla układu równań zjednostkowanego:

$$\left.\begin{array}{l} 5u + 3v + w = 31 \\ 4u + 2v + w = 24 \\ 3u + 7v + w = 35 \end{array}\right\}$$

wygodnie jest powtarzać dwa pierwsze równania, podpisując pod układem:

$$\begin{array}{cccc} 5 & 3 & 1 & 31 \\ 4 & 2 & 1 & 24 \end{array}$$

Pozwala to na prędkie zestawienie trójkolumnowego krakowianu /88/, gdyż elementy o wskaźnikach z uporządkowaniem prostym znajdą się na przekątnych /, zaś elementy o wskaźnikach z uporządkowaniem odwrotnym - znajdą się na przekątnych \ /kolumnę jedynek traktujemy tu jak nieistniejącą /. Mamy więc:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31 \\ 24 \\ 35 \\ 31 \\ 24 \\ 35 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 7 & 5 & -35 \\ 3 & 4 & -12 \\ -7 & -4 & 28 \\ -3 & -3 & 9 \\ -2 & -5 & 10 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ -6 \end{array} \left(\frac{1}{6}\right) = \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

t.zn. $u = 4$ $v = 3$ $w = 2$.

Rachunek, po zestawieniu trójkolumnowego krakowianu, rozpoczynamy od zesumowania elementów ostatniej kolumny z zapisaniem rezultatu /-6/. Dalsze działania są czysto arytmometryczne, t.zn. nie wymagają zapisywania faz pośrednich rachunku. Po przemnożeniu kolumny wyrazów wolnych przez pierwszą kolumnę krakowianu trójkolumnowego nie należy oczywiście kasować, ani odczytywać licznika rezultatów. Kasujemy tylko licznik obrotów i po nastawieniu sumy /-6/ - przeprowadzamy odrazu dzielenie /lewo względnie prawoobrotowe - gdy w rezultatach przy rozpoczynaniu dzielenia mamy liczbę ujemną/. Kasowanie następuje dopiero z chwilą zapisania rezultatu dzielenia, którym jest pierwsza niewiadoma układu.

Mnożenie zupełne tablic.

Sumę, różnicę, iloczyn, iloraz tablic możemy też zdefiniować jako tablicę, której poszczególne elementy są sumami, różnicami, iloczynami, ilorazami odpowiadających sobie położeniem elementów tych tablic. Z takiej definicji wynika wykonalność działań tylko w wypadku równowymiarowości tablic.

Iloczynem tablic: $t_1 t_2$:

$$t_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad t_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{mn} \end{bmatrix}$$

będzie więc tablica

$$t_3 = t_1\, t_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots c_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad c_{ik} = a_{ik}\, b_{ik} \qquad \text{—— 89}$$

Np. iloczynem tablic: $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ będzie tablica:

$$\begin{bmatrix} 6 & 20 & 0 \\ 3 & 12 & -2 \end{bmatrix} \text{ i t.p.}$$

Takie mnożenie zupełne tablic jest oczywiście i przemienne i łączne t.zn.

$$t_1\ t_2 = t_2\ t_1$$

$$t_1\ t_2\ t_3 = t_1/t_2\,t_3/ = /t_1\,t_2/t_3 \qquad \text{—— 90}$$

niema więc potrzeby specjalnie oznaczać symbol tablicy, jak to robimy w tablicach krakowianowych, gdyż symbolem tym można operować, jak liczbą algebry zwykłej, pomimo że jest on symbolem liczby zespołowej. Ujęcie zespołu elementów tablicy w nawiasy prostokątne ma symbolizować, że tablica ta jest zespołem podlegającym takim "działaniom zupełnym", w szczególności działaniu mnożenia zupełnego, którym będziemy się posługiwać w pewnych działaniach interpolacyjnych. Wprowadzimy jeszcze jeden symbol: tablicę zaopatrzoną z prawej strony u dołu wskaźnikiem $_\Sigma$. Umówimy się że tak oznaczona tablica:

$$t_\Sigma = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_\Sigma \qquad \text{———} \; 91$$

nie oznacza już zespołu, lecz - podobnie jak wyznacznik, pewną liczbę algebraiczną, która jest funkcją elementów zespołu, a mianowicie ich sumę. Jest więc wyraźnie:

$$t_\Sigma = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_\Sigma = a_{11} + a_{12} + \cdots a_{1n} + \cdots\cdots + a_{m1} + a_{m2} + \cdots a_{mn} = \Sigma a_{ik} \text{ —— } 92$$

$$\text{Np: } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_\Sigma = 2 + 3 + 1 + 4 = 10 \quad \text{lub: } \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right)_\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_\Sigma = 16 \text{ i t.p.}$$

Tablicą osiową będziemy nazywali tablicę której każdy element może być uważany za iloczyn dwóch liczb: liczby przyporządkowej kolumnie danego elementu - nazwiemy ją liczbą nagłówkową kolumny, oraz liczby przyporządkowej wierszowi danego elementu - nazwiemy ją liczbą nagłówkową wiersza.
Jeżeli przy pewnej tablicy osiowej wypiszemy elementy nagłówkowe kolumn i wierszy, będziemy samą tablicę wyraźnie oddzielać od jej osi: kolumny nagłówkowej i wiersza nagłówkowego. Np.

$$t = \begin{array}{c|cc} & 4 & 2 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ 3 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{array} \qquad \text{lub:} \qquad t = \begin{array}{c|ccc|} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 10 \\ \hline \end{array} \quad \text{i t.d.}$$

Ogólnym oznaczeniem symbolicznym tablicy osiowej będzie oznaczenie:

$$t = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & \cdots\cdots \; y_m \\ \hline x_1 & x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots\cdots x_1 y_m \\ x_2 & x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots\cdots x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n y_1 & x_n y_2 & x_n y_m \end{array} = \boxed{x \,\lfloor\, y} \qquad \text{———} \; 93$$

Tablicami osiowymi posługiwaliśmy się już przy omawianiu podwójnych krakowianów typu Vandermonda /str.33,34 /. Użyjemy jeszcze tego pojęcia przy interpolacji funkcji dwóch argumentów.

Nietrudno też zauważyć że wielomian dwóch zmiennych $W / x\ y /$ można przedstawić jako iloczyn zupełny dwóch tablic, z których jedna jest "tablicą potęgową", t.zn. tablicą osiową o osiach $1\ x\ x^2 \cdots$ oraz $1\ y\ y^2 \cdots$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & y & y^2 \cdots \\ \hline 1 & 1 & y & y^2 \cdots \\ x & x & xy & xy^2 \cdots \\ x^2 & x^2 & x^2 y & x^2 y^2 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \qquad \text{———} \; 94$$

zaś druga "tablicą spółczynnikową" t.zn. zespołem spółczynników przy odnośnych iloczynach: (1) (x) (x^2) (y) ... uporządkowanym w tenże sposób:

$$s = \begin{array}{c|cccc} & 1 & y & y^2 & \\ \hline 1 & 1 & y & y^2 & \\ x & x & xy & xy^2 & \\ x^2 & x & x^2y & x^2y^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \qquad \text{———— 95}$$

Wielomian pojmowany jako zespół będzie iloczynem zupełnym tablicy potęgowej przez tablicę spółczynnikową:

$$\left[W\,/x\ y\,/\right] = p.s. \qquad \text{———— 96}$$

Wartością jaką przybiera wielomian będzie suma elementów tablicy ps czyli w przyjętym oznaczeniu $/ps\,/_{\Sigma}$.

<u>Rozwiązanie dowolnego rozwiązalnego układu n równań o n niewiadomych przy pomocy rozkładu na trójkątne czynniki kanoniczne /lub innych metod opartych na pojęciu rozkładu /.</u>

Wiadomo że rozwiązalność układu:

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + \dots\dots = l_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2u + \dots\dots = l_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + \dots\dots = l_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4u + \dots\dots = l_4 \\ - \end{array}$$

zapomocą rozkładu na trójkątne czynniki kanoniczne wymaga aby w krakowianie spółczynnikowym:

$$\underline{a} = \left\{ \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ - & - & - & - \end{array} \right\} \qquad \text{———— 97}$$

wszystkie wyznaczniki, których pierwszym elementem pierwszej kolumny jest pierwszy element pierwszej kolumny tego krakowianu, były różne od zera. Przy niezerowości największego wymiarami z tych wyznaczników /wynikającej z założenia rozwiązalności układu/ można wprawdzie w drodze przestawiania kolumn i wierszy krakowianu $\underline{a}$ zamienić go na taki krakowian $\underline{a}'$, który będzie rozkładalny na czynniki trójkątne; jednak postępowanie takie nie jest w praktyce rachunkowej wygodne. Również nie jest wygodne zrezygnowanie z rozkładu na czynniki trójkątne i rozwiązywanie zagadnienia w oparciu o pojęcie rozkładu na czynniki kanoniczne w uogólnionym znaczeniu tego pojęcia. Istnieje natomiast stosunkowo prosta metoda ogólna - t.zn. nie wymagająca prób rachunkowych, ani też stosowania uciążliwych kryteriów - pozwalająca na rozwiązanie dowolnego rozwiązalnego układu przy pomocy rozkładu na trójkątne czynniki kanoniczne w drodze przekształcenia pełnego krakowianu układu $\underline{p}$

$$\underline{p} = \left\{ \begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \dots\dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots\dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots\dots & l_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & \dots\dots & l_4 \\ - & - & - & - & - & - \end{array} \right\} \qquad \text{———— 98}$$

na pełny krakowian równoważnego mu układu, rozkładalny zawsze na trójkątne czynniki kanoniczne. Takim "zastępczym krakowianem" π będzie poprostu iloczyn pełnego krakowianu danego układu przez jego krakowian spółczynnikowy /równoważność układów p π z uwagi na liniowość przekształcenia wątpliwości nie ulega /:

$$\underline{\pi} = \underline{p}\cdot\underline{a} \quad \text{lub wyraźnie} \quad \underline{\pi} = \left\{\begin{matrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & \cdots & -[al] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] & \cdots & -[bl] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] & \cdots & -[cl] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & \cdots & -[dl] \\ - & - & - & - & - & - \end{matrix}\right\} \qquad 99$$

znany w metodzie najmniejszych kwadratów.

Przekształcenie krakowianu $\underline{p}$ na krakowian $\underline{\pi}$ wymaga wprawdzie dodatkowej pracy rachunkowej - jest to jednak praca zupełnie zautomatyzowana, w dodatku dająca się, dzięki krakowianowym kontrolom sumowym, bezustannie sprawdzać. Dla uzasadnienia słuszności takiej metody, którą nazwać by można "metodą przekształcenia symetrycznego" i która może być oczywiście użyta i do obliczenia wyznaczników metodą Banachiewicza /otrzymamy tu kwadrat wartości wyznacznika /, wystarczy wykazać że niezerowość wyznacznika głównego układu, to znaczy warunek:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ - & - & - & - \\ a_n & \cdots & & \end{vmatrix} \neq 0$$

pociąga za sobą niezerowość wszystkich wyznaczników utworzonych z tablicy krakowianu π /mających za pierwszy element pierwszej kolumny - pierwszy element pierwszej kolumny tej tablicy: $[aa]$ / , to znaczy niezerowości:

$$\left|[aa]\right| \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] \end{vmatrix} \neq 0 \text{ itd}$$

itd.

Załóżmy dla dowodu, że tak nie jest, to znaczy, że któryś z tych wyznaczników, pomimo związku $D \neq 0$, jest zerem.
Niech więc będzie:

$$\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & - \\ [ab] & [bb] & [bc] & - \\ [ac] & [bc] & [cc] & - \\ - & - & - & - \end{vmatrix} = 0$$

gdzie napisany wyznacznik ma symbolizować dowolny z wyznaczników, utworzonych z tablicy π , np. wyznacznik p-tego stopnia.
Ponieważ dostatecznym i koniecznym warunkiem zerowości wyznacznika p-tego stopnia jest istnienie p liczb λ_i /i = 1.2...p / z których przynajmniej jedna jest różna od zera, i które po wymnożeniu przez każdy wiersz /ew: kolumnę / wyznacznika i zesumowaniu dają zero /por: Cours d'algebre superieure par Joseph Neuberg, Paris, Liège 1907 /, musiałoby być:

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1[aa] + \lambda_2[ab] + \lambda_3[ac] \cdots = 0 \\ \lambda_1[ab] + \lambda_2[bb] + \lambda_3[bc] \cdots = 0 \\ \lambda_1[ac] + \lambda_2[bc] + \lambda_3[cc] \cdots = 0 \end{matrix}\right\} \text{ to znaczy:}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda_1(a_1 a_1 + a_2 a_2 \dots) + \lambda_2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots) + \lambda_3(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots) \dots = 0 & \lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_p \\
\lambda_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 \dots) + \lambda_2(b_1 b_1 + b_2 b_2 + \dots) + \lambda_3(b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots) \dots = 0 & a_1\ a_2 \dots a_n \\
\lambda_1(a_1 c_1 + a_2 c_2 \dots) + \lambda_2(b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots) + \lambda_3(c_1 c_1 + c_2 c_2 + \dots) \dots = 0 & b_1\ b_2 \dots b_n \\
- & \dots
\end{array}
$$

Stąd jednak wynika p równań:

$$
\begin{array}{l}
a_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 \dots) + a_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3) \dots + a_n(a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2 + c_n\lambda_3 \dots) = 0 \\
b_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 \dots) + b_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3) \dots + b_n(a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2 + c_n\lambda_3 \dots) = 0 \\
c_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 \dots) + c_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3) \dots + c_n(a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2 + c_n\lambda_3 \dots) = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
\end{array}
$$

Jeżeli którakolwiek z wielkości $a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 + c_i\lambda_3$ - jest różna od zera napisane ostatnio związki stanowią dowód zerowości wyznacznika D, co byłoby sprzeczne z założeniem. Pozostaje więc założyć, że wszystkie wielkości:

$a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 + c_i\lambda_3 \dots$ są zerami /i =1.2...n/

Ma więc być:

$$
\begin{array}{l}
a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 \dots + p_1\lambda_p = 0 \\
a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3 \dots + p_2\lambda_p = 0 \\
a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 \dots + p_3\lambda_p = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - \\
a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2 + c_n\lambda_3 \dots + p_n\lambda_p = 0
\end{array}
$$

przy przynajmniej jednym λ różnym od zera.
Jest to układ n równań jednorodnych o p niewiadomych /n> p /, posiadający jak wiadomo rozwiązania niezerowe tylko przy założeniu liniowej zależności kolumn. Taka zależność pociągałaby jednak znów za sobą sprzeczną z założeniem zerowość wyznacznika D. Wynika stąd niemożliwość założenia zerowości któregokolwiek z wyznaczników, utworzonych z tablicy krakowianu $\underline{\pi}$, a więc niezerowość ich wszystkich cnd.

<u>Przykład liczbowy.</u>

Zamiast układu równań:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
4x & + & 8y & + & 2z & + & u & = & 26 \\
6x & + & 10y & + & 8z & + & 3u & = & 58 \\
2x & + & 4y & + & z & + & u & = & 15 \\
3x & + & 2y & + & z & + & 2u & = & 19
\end{array}
$$

o pełnym krakowianie układu: $\underline{p} = \begin{Bmatrix} 4 & 8 & 2 & 1 & -26 \\ 6 & 10 & 8 & 3 & -58 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & -15 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -19 \end{Bmatrix}$ i krakowianie spół-

czynnikowym: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} 4 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 10 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$, który to układ równań nie daje się rozwiązać przy pomocy rozkładu na trójkątne czynniki kanoniczne /z uwagi na: $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 10 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ /, możemy rozwiązać układ o pełnym krakowianie: $\underline{\pi} = \underline{p} \cdot \underline{a}$

wyraźnie: $\underline{\pi} = \begin{Bmatrix} 4 & 8 & 2 & 1 & -26 \\ 6 & 10 & 8 & 3 & -58 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & -15 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -19 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 10 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 65 & 106 & 61 & 30 & -539 \\ 106 & 184 & 102 & 46 & -886 \\ 61 & 102 & 70 & 29 & -550 \\ 30 & 46 & 29 & 15 & -253 \end{Bmatrix}$

otrzymując:

65	106	61	30	-539
106	184	102	46	-886
61	102	70	29	-550
30	46	29	15	-253
1	1.6308	0.9385	0.4615	-8.2923
0	1	0.2262	-0.2621	-0.6301
0	0	1	0.1239	-3.4956
0	0	0	1	-3.9982

-1	0	0	0
0	-1	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	-1
65	106	61	30
0	11.1352	2.5212	-2.9240
0	0	12.1812	1.5064
0	0	0	0.2020

$\to 0$

•

2.00	1.00	3.00	4.00	1

$\downarrow$ 0

Rozwiązanie metodą rozkładu na trójkątne czynniki kanoniczne prowadzimy w schemacie zerujących się tablic:

$$\boxed{\frac{\pi}{g}\ \|} \cdot \boxed{\frac{\tau}{h}\ \|} \to 0$$

$$\boxed{x\ \|\|}$$

$\downarrow$ 0

Porządek rozpatrywania zagadnień interpolacyjnych.

Rozpatrując zagadnienia interpolacyjne, które ograniczamy do interpolacji wielomianowej /"parabolicznej"/, będziemy je szeregować według ważności praktycznej; to znaczy w pierwszym rzędzie rozpatrywać będziemy zagadnienia interpolacji "regularnej", t.j. interpolacji mającej za podstawę tablicę funkcyjną, sporządzoną dla równych odstępów argumentu, względnie argumentów:

$$\Delta x = \text{const}:$$

$$\text{względnie: } \Delta x = \text{const}_1 \qquad \Delta y = \text{const}_2$$

Po rozpatrzeniu zagadnień opartych na regularnej tablicy funkcyjnej przechodzić będziemy do ogólniejszej postaci, nie narzucającej ograniczenia równoodległości argumentów, nazywając taką interpolację "nieregularną". Takie uszeregowanie materiału nie jest może słuszne z punktu widzenia myślenia matematycznego, które wymagałoby raczej odwrotnego porządku; uzasadnione jest jednak przez nierównie większą doniosłość interpolacji regularnej w zagadnieniach technicznych, którym ma służyć niniejsza praca. Charakter techniczny pracy, jak również konieczność ograniczenia jej rozmiarów spowodowały też pominięcie rozważań matematycznych, dotyczących pojęcia "reszt" szeregów interpolacyjnych. Rozpatrzono zato stosunkowo obszernie zagadnienia: kryteriów obrania rzędu interpolacji, ustalenia wartości maksymalnej różnicy między wartościami funkcji wyinterpolowanymi przy pomocy wielomianu o większej i mniejszej ilości parametrów, przybliżonego ustalenia wartości zespołów spółczynników Lagrange'a /"krakowianów interpolacyjnych"/ i inne zagadnienia o nieulegającej wątpliwości doniosłości praktycznej, pomijane w literaturze interpolacyjnej. Obranie za punkt wyjścia interpolacji Lagrange'owskiej z pominięciem interpolacji przy pomocy wzoru Newtona spowodowane jest większą przydatnością wzoru Lagrange'a do rachunków mechanicznych, wynikającą z wyraźnego rozgraniczenia we wzorze Lagrange'a zespołu funkcyjnego od zespołu czynników interpolacyjnych.

R o z d z i a ł II.

Interpolacja funkcji jednego argumentu.

Interpolacja funkcji jednego argumentu w postaci regularnej.

Rozpoczniemy od omówienia interpolacji bezpośredniej funkcji jednego argu-

mentu, która z natury rzeczy musi być podstawą interpolacji funkcji wielu argumentów.
Jeżeli w znanym wzorze interpolacyjnym Lagrange'a:*)

$$u = \frac{\cancel{(x-x_0)}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{\cancel{(x_0-x_0)}(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}U_0 + \frac{(x-x_0)\cancel{(x-x_1)}(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cancel{(x_1-x_1)}(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}U_1 + \cdots$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\cancel{(x-x_n)}}{(x_n-x_0)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\cancel{(x_n-x_n)}}U_n$$

założyć jednostajność przyrostu argumentu, t.zn. przyjąć:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 \cdots\cdots = x_n - x_{n-1} = \Delta$$

oraz gdy argument x wyrazić przez ułamek interpolacyjny /"fazę"/ k :

$$k = \frac{x - x_0}{\Delta}$$

otrzymamy po prostych przekształceniach algebraicznych:**)

$$u = \frac{\cancel{(0-k)}(1-k)(2-k)\cdots(n-k)}{\cancel{(0-0)}(1-0)(2-0)\cdots(n-0)}U_0 + \frac{(0-k)\cancel{(1-k)}(2-k)\cdots(n-k)}{(0-1)\cancel{(1-1)}(2-1)\cdots(n-1)}U_1 + \cdots$$

$$\frac{(0-k)(1-k)(2-k)\cdots(n-1-k)\cancel{(n-k)}}{(0-n)(1-n)(2-n)\quad(n-1-n)\cancel{(n-n)}}U_n$$

lub oznaczając:

$$A_i = \frac{(0-k)(1-k)(2-k)\cdots\cancel{(i-k)}\cdots(n-k)}{(0-i)(1-i)(2-i)\cdots\cancel{(i-i)}\cdots(n-i)} \qquad 100$$

$$\underline{U = A_0U_0 + A_1U_1 + A_2U_2 + \cdots A_nU_n} \qquad 101$$

czyli pod postacią iloczynu krakowianowego:

$$\boxed{U = \left\{\begin{bmatrix}A_0\\A_1\\\vdots\\A_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_0\\U_1\\\vdots\\U_n\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{albo:} \quad U = \underline{A}\cdot\underline{U}} \qquad 102$$

/Symbolika krakowianowa nie przynosi tu jeszcze żadnej korzyści. Wprowadzam ją odrazu dla nawiązania do wzorów interpolacyjnych dla funkcji od dwóch argumentów, gdzie symbolika algebry liczb pojedyńczych staje się nadmiernie skomplikowana/.
Jeżeli nazwać "krakowianem interpolacyjnym" zespół $\underline{A}$ spółczynników przekształconego wzoru Lagrange'a, który to zespół po obraniu rzędu interpolacji staje się zbiorem elementów zależnych funkcjonalnie od jednej tylko zmiennej k; zaś "krakowianem tablicowym " - zespół $\underline{U}$ tych wartości funkcji,

*) Wzór Lagrange'a piszemy pod postacią, która wydaje nam się nieco przejrzystrzą od ogólnie przyjętej, umieszczając stale w liczniku iloczyny wszystkich różnic między wartością argumentu daną w zagadnieniu interpolacyjnym i wartościami danymi w tablicy funkcyjnej, a w mianowniku iloczyny wszystkich różnic między i-tą wartością z tablicy, a wszystkimi wartościami tablicy, i skreślając następnie $\cancel{\frac{x - x_i}{x_i - x_i}}$.

**) $\Delta . k = x - x_0$ t.j. $x = k.\Delta + x_0$ skąd

$$\begin{aligned} x - x_1 &= k.\Delta + /x_0 - x_1/ = \Delta/k - 1/ \\ x - x_2 &= \Delta/k - 2/ \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x - x_n &= \Delta/k - n/ \end{aligned}$$

które używamy do interpolacji, otrzymany wzór podstawowy dla interpolacji bezpośredniej funkcji od jednego argumentu z regularnej tablicy funkcyjnej, da się wysłowić jak następuje:

Wartość funkcji jednego argumentu, obliczona w drodze bezpośredniej interpolacji wielomianowej, jest iloczynem krakowianu interpolacyjnego, obliczonego dla ułamka interpolacyjnego odpowiadającego wartości argumentu, przez krakowian tablicowy.

Obliczanie krakowianu interpolacyjnego na podstawie wzoru na ogólny element tego krakowianu /100/ przy każdorazowym rachunku byłoby czynnością wybitnie uciążliwą.
Nic jednak nie stoi na przeszkodzie do stabelaryzowania wartości tych krakowianów, tymbardziej, że posługiwanie się taką tablicą przy odszukiwaniu krakowianów dla wartości pośrednich ułamka interpolacyjnego jest - przy odpowiednim zagęszczeniu tablicy - bardzo proste.
Przed omówieniem szczegółów dotyczących tablic wartości krakowianów interpolacyjnych, podamy jeszcze wzory na krakowiany interpolacyjne interpolacji różnych rzędów. Będziemy przytem nazywać interpolacją dwu - trzy - cztero - ogólnie n - wyrazową lub n - parametrową interpolację przy pomocy wielomianu algebraicznego pierwszego, drugiego, trzeciego - ogólnie n - 1 stopnia.

Realizując wzór /100/ na ogólny element krakowianu interpolacji n - wyrazowej, znajdziemy kolejno dla różnych rzędów interpolacji:

Interpolacja dwuwyrazowa /n = 1 /

$$A_0 = \frac{\cancel{(0-k)}\,(1-k)}{\cancel{(0-0)}\,(1-0)} = 1 - k \qquad\qquad A_1 = \frac{(0-k)\,\cancel{(1-k)}}{(0-1)\,\cancel{(1-1)}} = k$$

$$U = \begin{Bmatrix} (1-k) \\ k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{Bmatrix} \qquad \text{———— } 103$$

Interpolując dwuwyrazowo /"liniowo" / przy pomocy interpolacji bezpośredniej należy więc poprostu zesumować iloczyn spełnienia ułamka interpolacyjnego do jedności przez wartość funkcji"początkową" z iloczynem ułamka interpolacyjnego przez wartość funkcji "końcową".
Wszelkie rozważania czy ze wzrostem wartości argumentu funkcja rośnie czy maleje, niezbędne w interpolacji różnicowej, są tu zbyteczne.

Znajdując cotg 20 05'12".35 z tablicy

α	cotg α
20°05'00	2.7350934
10	2.7346823
20	2.7342713
30	2.7338604
..	....

napiszemy /k = 0.235/: $\text{cotg } 20^\circ 05' 12''35 = \begin{Bmatrix} 0.765 \\ 0.235 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.7346823 \\ 2.7342713 \end{Bmatrix} = 2.7345857.$

Zbyteczne podkreślać, że wypisywanie krakowianów jest w rachunku praktycznym zbędne. Cała czynność sprowadzi się do nastawienia w liczniku nastawień arytmometru wartości "początkowej" /2.734 6823 /, nadania obrotów, określających spełnienie ułamka do jedności /0.765/, nastawieniu wartości "końcowej" /2.734 2713/ i nadaniu obrotów, określających

---

skąd pierwszy ułamek: $\dfrac{\Delta(k-1)\,\Delta(k-2)\ldots\Delta(k-n)}{(-\Delta)\,(-2\Delta)\quad(-n\Delta}=\dfrac{(1-k)\,(2-k)\ldots(n-k)}{(1-0)\,(2-0)\ldots(n-0)}$

następny ułamek: $\dfrac{\Delta\cdot k\cdot\Delta(k-2)\ldots\Delta(k-n)}{\Delta\cdot(-\Delta)\ldots(-(n-1)\Delta)}=\dfrac{(0-k)\,(2-k)\ldots(n-k)}{(0-1)\,(2-1)\ldots(n-1)}$ i t.d.

ułamek /0.235/. W liczniku rezultatów arytmometru odczytamy rezultat /2.734 5857/, w liczniku obrotów jedność /0.765 + 0.235 /, jako kontrolę czynności mnożenia.

Interpolacja trójwyrazowa /n = 2 /.

$$A_0 = \frac{\cancel{(0-k)}\,(1-k)\,(2-k)}{\cancel{(0-0)}\,(1-0)\,(2-0)} = \frac{(1-k)\,(2-k)}{2}$$

$$A_1 = \frac{(0-k)\,\cancel{(1-k)}\,(2-k)}{(0-1)\,\cancel{(1-1)}\,(2-1)} = \frac{-(0-k)\,(2-k)}{1} \qquad U = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & (1-k)\,(2-k) \\ -1 & (0-k)\,(2-k) \\ \frac{1}{2} & (0-k)\,(1-k) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \qquad 104$$

$$A_2 = \frac{(0-k)\,(1-k)\,\cancel{(2-k)}}{(0-2)\,(1-2)\,\cancel{(2-2)}} = \frac{(0-k)\,(1-k)}{2}$$

Przykład liczbowy na interpolację trójwyrazową podamy w dalszym ciągu - po omówieniu tablic krakowianów interpolacyjnych. Tu zauważymy tylko, że podobnie jak w interpolacji dwuwyrazowej, suma elementów krakowianu interpolacyjnego jest jednością. Ta zależność:

$$\boxed{\Sigma A = 1} \qquad 105$$

stanowiąca cenną kontrolę rachunku jest przytem zupełnie ogólna, t.zn. odnosi się do interpolacji bezpośredniej dowolnego rzędu. *)

Interpolacja czterowyrazowa /n = 3 /

$$A_0 = \frac{\cancel{(0-k)}\,(1-k)\,(2-k)\,(3-k)}{\cancel{(0-0)}\,(1-0)\,(2-0)\,(3-0)} = \frac{(1-k)\,(2-k)\,(3-k)}{6}$$

$$A_1 = \frac{(0-k)\,\cancel{(1-k)}\,(2-k)\,(3-k)}{(0-1)\,\cancel{(1-1)}\,(2-1)\,(3-1)} = \frac{(0-k)\,(2-k)\,(3-k)}{-2} \qquad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & (1-k)(2-k)(3-k) \\ -\frac{1}{2} & (0-k)(2-k)(3-k) \\ \frac{1}{2} & (0-k)(1-k)(3-k) \\ -\frac{1}{6} & (0-k)(1-k)(2-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad 106$$

$$A_2 = \frac{(0-k)\,(1-k)\,\cancel{(2-k)}\,(3-k)}{(0-2)\,(1-2)\,\cancel{(2-2)}\,(3-2)} = \frac{(0-k)\,(1-k)\,(3-k)}{2}$$

$$A_3 = \frac{(0-k)\,(1-k)\,(2-k)\,\cancel{(3-k)}}{(0-3)\,(1-3)\,(2-3)\,\cancel{(3-3)}} = \frac{(0-k)\,(1-k)\,(2-k)}{-6}$$

Interpolacja pięciowyrazowa /n = 4 /

Dla interpolacji pięciowyrazowej otrzymalibyśmy:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & (1-k)\,(2-k)\,(3-k)\,(4-k) \\ -\frac{1}{6} & (0-k)\,(2-k)\,(3-k)\,(4-k) \\ \frac{1}{4} & (0-k)\,(1-k)\,(3-k)\,(4-k) \\ -\frac{1}{6} & (0-k)\,(1-k)\,(2-k)\,(4-k) \\ \frac{1}{24} & (0-k)\,(1-k)\,(2-k)\,(3-k) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \qquad 107$$

Tablice krakowianów interpolacyjnych.

Dla ułatwienia efektywnego wykonania interpolacji bezpośredniej wygodnie jest stabelaryzować krakowiany interpolacyjne $\underline{A}$ dla interpolacji rzędów mających znaczenie praktyczne. Ponieważ interpolacja dwuwyrazowa nie wchodzi tu w rachubę, gdyż jej krakowiany interpolacyjne $\underline{A} = \begin{Bmatrix} 1-k \\ k \end{Bmatrix}$ zbyt są proste, aby je warto tabelaryzować: może być mowa tylko o tablicy interpolacji trójwyrazowej i czterowyrazowej.

*) Z ogólności wzoru Lagrange'a wynika, że będzie on słuszny i w wypadku $U_0 = U_1 = U_2 = \dots U_n$. Wówczas szereg interpolacyjny będzie miał postać: $U = A_0U_0 + A_1U_0 + \dots A_nU_0 = /A_0 + A_1 + \dots A_n/U_0 = U_0\,\Sigma A$.
Skąd, ponieważ musi być wówczas $U = U_0$, wynika odrazu $\Sigma A = 1$.

Na końcu pracy /str. 107,112/ podaję krakowiany $\underline{A}$ tych interpolacji dla wartości argumentu k od 0 do 1 w przedziałach co 0.001 dla interpolacji trójwyrazowej i co 0.01 dla czterowyrazowej.
Krakowianów dla wartości ułamka, zawartej pomiędzy wartościami podanymi w tablicy nie trzeba obliczać w drodze interpolacji /byłoby to bardzo kłopotliwe/; wystarczy skorygować elementy krakowianu podanego w tablicy dla ułamka k, mniejszego od ułamka zadanego: k + Δ k, zmniejszając pierwszy z tych elementów, zaś zwiększając drugi o Δ k, przy pozostawieniu pozostałych elementów bez zmiany.

Dla interpolacji trójwyrazowej zasymbolizujemy to zrozumiałymi bez omówień równaniami:

$$\boxed{\underline{A}/k/ = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \qquad \underline{A}/k + \Delta k/ = \begin{Bmatrix} A_0 - \Delta k \\ A_1 + \Delta k \\ A_2 \end{Bmatrix}} \qquad \text{—— 108}$$

dla interpolacji czterowyrazowej równaniami:

$$\underline{A}/k/ = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \qquad \underline{A}/k + \Delta k/ = \begin{Bmatrix} A_0 - \Delta k \\ A_1 + \Delta k \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{—— 109}$$

Posługiwanie się takimi uproszczonymi krakowianami interpolacyjnymi skutkować będzie w obliczeniu funkcji błędy p których maksymalne wartości wyniosą /zakładamy posługiwanie się tablicami podanymi na str. 107, 112 i przyjmujemy że Δ k jest nie większe od przedziału tablicy/:

dla interpolacji trójwyrazowej: $$\boxed{p_{max} = \begin{Bmatrix} 0.0005 \\ -0.0010 \\ 0.0005 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}} \qquad \text{—— 110}$$

dla interpolacji czterowyrazowej: $$p_{max} = \begin{Bmatrix} -0.0083 \\ 0.0200 \\ -0.0150 \\ 0.0033 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{—— 111}$$

Wzory te wynikają z porównania wartości funkcji wyinterpolowanej przy pomocy ścisłej wartości krakowianu interpolacyjnego dla ułamka k+ Δ k z wartością funkcji wyinterpolowanej przy pomocy założonej przybliżonej wartości krakowianu interpolacyjnego.
Oznaczając pierwszą wartość funkcji przez U drugą przez U' otrzymamy np: dla interpolacji trójwyrazowej /104 i 108 /:

$$u = \left[1 - 1.5/k + \Delta k/ + 0.5/k + \Delta k/^2\right] U_0 + \left[2/k + \Delta k/ - /k + \Delta k/^2\right] U_1 + $$
$$+ \left[-0.5/k + \Delta k/ + 0.5/k + \Delta k/^2\right] U_2$$

$$u' = \left[1 - 1.5\,k + 0.5k^2 - \Delta k\right] U_0 + \left[2k - k^2 + \Delta k\right] U_1 + \left[-0.5k + 0.5k^2\right] U_2$$

Doprowadzając pierwsze z tych równań do postaci:

$$u = \left[1 - 1.5k + 0.5k^2\right] U_0 + \left[-1.5\,\Delta k + k\,\Delta k + 0.5\,\Delta k^2\right] U_0 + \left[2k - k^2\right] U_1 + \left[2\Delta k - 2k\,\Delta k - \Delta k^2\right] U_1 +$$
$$+ \left[-0.5k + 0.5k^2\right] U_2 + \left[-0.5\,\Delta k + k\,\Delta k + 0.5\,\Delta k^2\right] U_2$$

zaś drugie do postaci:

$$u' = \left[1 - 1,5k + 0.5k^2\right] U_0 + /-\Delta k/ U_0 + \left[2k - k^2\right] U_1 + \Delta k . U_1 + \left[-0.5k + 0.5k^2\right] U_2$$

otrzymamy różnicę: $\Delta u = u - u' = \left[-0.5\,\Delta k + k\,\Delta k + 0.5\,\Delta k^2\right] U_0 + \left[\Delta k - 2k\,\Delta k - \Delta k^2\right] U_1 +$

$$+ \left[-0.5\,\Delta k + k\,\Delta k + 0.5\,\Delta k^2\right] U_2$$

czyli: $\Delta U = \Delta k \left[k + 0.5\,\Delta k - 0.5\right]\left[U_0 - 2U_1 + U_2\right]$

Ponieważ zaś zakres zmienności ułamka interpolacyjnego w zastosowaniu praktycznym wyznaczają wartości graniczne 0 i 1, pierwszy nawias nie przekroczy wartości bezwzględnej $0{,}5+0{,}5\,\Delta k$, skąd, przy oznaczeniu przez p błędu uproszczonej interpolacji trójwyrazowej, napisać możemy:

$$p \leq 0.5\,\Delta k\,/1+\Delta k/\left[U_0 - 2U_1 + U_2\right],$$

lub, jeżeli pominąć wyrazy drugiego rzędu względem Δk:

$$p \leq \Delta k\left[0{,}5\,U_0 - U_1 + 0.5\,U_2\right]$$

a w postaci krakowianowej: $p \leq \Delta k \begin{Bmatrix} 0.5\,U_0 \\ -1.0\,U_1 \\ 0.5\,U_2 \end{Bmatrix}$

Stosując ten wzór do naszych tablic krakowianów interpolacyjnych tj. zakładając $\Delta k \leq 0.001$ otrzymamy ostatecznie:

$$p \leq \begin{Bmatrix} 0.0005 \\ -0.0010 \\ 0.0005 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad \text{c.n.d.}$$

W analogiczny sposób otrzymać można dla interpolacji czterowyrazowej wzór ogólny:

$$p' \leq \Delta k \begin{Bmatrix} -0.83 \\ 2.00 \\ -1.50 \\ 0.33 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

z którego po skonkretyzowaniu dla naszych tablic przez założenie $\Delta k \leq 0.01$ znajdziemy:

$$p' \leq \begin{Bmatrix} -0.0083 \\ 0.0200 \\ -0.0150 \\ 0.0033 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Przykład liczbowy.

Posiłkując się tablicą pierwiastków sześciennych:

x	$\sqrt[3]{x}$
. . .	. . . . . .
150	5.313 293
151	5.325 074
152	5.336 803
153	5.348 481
154	5.360 108
155	5.371 685
156	5.383 213
. . .	. . . . . .

znaleźć przy pomocy interpolacji trójwyrazowej $\sqrt[3]{151.712}$. Dla ułamka interpolacyjnego k=0.712 znajdziemy w tablicy krakowian interpolacyjny:

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.185\ 4720 \\ 0.917\ 0560 \\ -0.102\ 5280 \end{Bmatrix}$$

mnożąc go przez krakowian tablicowy:

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} 5.325\ 074 \\ 5.336\ 803 \\ 5.348\ 481 \end{Bmatrix}$$ znajdziemy $\underline{A}\cdot\underline{U} = \sqrt[3]{151.712} =$ $= 5.333\ 430.$

Chcąc rozwiązać to samo zadanie przy pomocy interpolacji czterowyrazowej, dla której w tablicach podano krakowiany w odstępach ułamka interpolacyjnego 0.01, znaleźlibyśmy krakowian dla k = 0.71:

$$\underline{A}\ /0.71/ = \begin{Bmatrix} 0.1427815 \\ 1.0487055 \\ -0.2357555 \\ 0.0442685 \end{Bmatrix}$$

i skorygowali go według podanych wskazówek, tj.zmniejszając pierwszy, a zwiększając drugi element o 0.002. Mnożąc tak skorygowany krakowian $\underline{A}$ przez krakowian tablicowy $\underline{U}$, znajdziemy:

$$\sqrt[3]{151.712} = \left\{\begin{matrix} 0.1407815 \\ 1.0507055 \\ -0.2357555 \\ 0.0442685 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 5.325074 \\ 5.336803 \\ 5.348481 \\ 5.360108 \end{matrix}\right\} = 5.333430$$

Interpolacja czterowyrazowa dała ten sam wynik, co trójwyrazowa. Interpolacja dwuwyrazowa byłaby tu za mało dokładna. Otrzymalibyśmy przy jej zastosowaniu:

$$\left\{\begin{matrix} 5.325\ 074 \\ 5.336\ 803 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 0.288 \\ 0.712 \end{matrix}\right\} = 5.333\ 425$$

t.zn.dokładność tablicy nie byłaby już dostatecznie wykorzystana /co oczywiście nie wyklucza możliwości przydatności takiego rezultatu do konkretnych celów praktycznych /.

Kryteria, pozwalające na właściwe obranie rzędu interpolacji przy pracy na określonej tablicy funkcyjnej omówimy szczegółowo dalej.

Gdybyśmy pragnęli zorientować się jakie maksymalne zniekształcenia rezultatu może wywołać praca przez zastosowanie uproszczonych krakowianów interpolacyjnych, znaleźlibyśmy stosując wzory /110, 111 /.

W interpolacji trójwyrazowej /przy pomocy naszej tablicy t.j.dla k co 0.001/:

$$p_3 \leqq \left\{\begin{matrix} 0.0005 \\ -0.0010 \\ 0.0005 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 5.325\ 074 \\ 5.336\ 803 \\ 5.348\ 481 \end{matrix}\right\} \quad \text{t.j.} \quad p_4 \leqq 0{,}000\ 00002$$

W interpolacji czterowyrazowej /przy pomocy naszej tablicy, t.j. dla k co 0.01/:

$$p_4 \leqq \left\{\begin{matrix} -0.0083 \\ 0.0200 \\ -0.0150 \\ 0.0033 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 5.325\ 074 \\ 5.336\ 803 \\ 5.348\ 481 \\ 5.360\ 108 \end{matrix}\right\} \quad \text{t.j.} \quad p_4 \leqq 0{,}000\ 0009$$

Dla interpolacji trójwyrazowej użycie uproszczonego krakowianu nie wywołałoby więc żadnych ujemnych skutków. Przy interpolacji czterowyrazowej mogłoby w najgorszym razie skutkować zniekształcenie o jedność ostatniej cyfry rezultatu.

Błędy porównawcze interpolacji.

Nazwijmy błędem porównawczym interpolacji n wyrazowej i oznaczmy przez E_n maksymalną wartość różnicy między wartością funkcji wyinterpolowaną z pewnej tablicy funkcyjnej przy pomocy interpolacji n wyrazowej, a wartością funkcji wyinterpolowaną z tejże tablicy funkcyjnej przy pomocy interpolacji $n+1$ wyrazowej, przy założeniu że ułamek interpolacyjny k nie przekracza jedności. Błędy porównawcze wynoszą:

Dla interpolacji dwuwyrazowej:
$$\pm E_2 = \pm\left\{\begin{matrix} 0.125 \\ -0.250 \\ 0.125 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{matrix}\right\}$$

Dla interpolacji trójwyrazowej:
$$\pm E_3 = \pm\left\{\begin{matrix} 0.06415 \\ -0.19245 \\ 0.19245 \\ -0.06415 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{matrix}\right\}$$

Dla interpolacji czterowyrazowej:
$$\pm E_4 = \pm\left\{\begin{matrix} +0.041667 \\ -0.166667 \\ 0.250000 \\ -0.166667 \\ 0.041667 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{matrix}\right\}$$

Uzasadnienie słuszności wzorów sprowadza się do obliczenia odnośnych różnic w oparciu o wzory /103,104,106,107 / i poszukiwaniu maksimum.

<u>Przykład liczbowy.</u> Interpolując z tablicy funkcyjnej poprzedniego przykładu przy pomocy interpolacji trójwyrazowej popełniać będziemy błędy:

$$\pm E_3 = \pm \begin{Bmatrix} 0.06415 \\ -0.19245 \\ 0.19245 \\ -0.06415 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.313293 \\ 5.325074 \\ 5.336803 \\ 5.348481 \end{Bmatrix} = \pm\, 0.00000007$$

t.zn.: uwzględniając ilość cyfr tablicy - interpolacja ta jest "bezbłędna", t.zn.: interpolacja czterowyrazowa da identyczne rezultaty.

Dla interpolacji dwuwyrazowej mielibyśmy:

$$\pm E_2 = \pm \begin{Bmatrix} 0.125 \\ -0.250 \\ 0.125 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.313293 \\ 5.325074 \\ 5.336803 \end{Bmatrix} = \pm\, 0.000\,007$$

Interpolacja rzędów wyższych. Zagęszczanie tablic funkcyjnych.

Obliczanie krakowianów interpolacyjnych nie przedstawia zasadniczych trudności. Otrzymane powyżej wzory /104, 107 / można oczywiście uogólnić, co zresztą niema znaczenia praktycznego.*)
Terenem stosowalności interpolacji wyższych rzędów są przedewszystkim prace, związane z zagęszczeniem tablic funkcyjnych funkcji, których postać algebraiczna jest wybitnie skomplikowana. Niekiedy może się okazać ekonomicznym nawet stosowanie interpolacji siedmiowyrazowej.

Zagęszczanie dziesiętne tablic funkcyjnych czyli wstawienie między zerowy i pierwszy wyraz krakowianu:

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix}$$

dziewięciu nowych wartości - oznaczmy je przez U_{01} U_{02} ...U_{09}, zaś zestawiony z nich krakowian przez $\underline{U_{\bar{x}}}$, t.zn. wyraźnie:

$$\underline{U_{\bar{x}}} = \begin{Bmatrix} U_{01} \\ U_{02} \\ \vdots \\ U_{09} \end{Bmatrix}$$

-wymaga znajomości krakowianów interpolacyjnych dla k = 0,1 0,2 0,3 ... ...0,9 - w ogólnej ilości 9. Oznaczmy te krakowiany przez $\underline{A_{0.1}}$ $\underline{A_{0.2}}$ ... ...$\underline{A_{0.9}}$, zaś przez $\underline{A_{\bar{x}}}$ dziewięciokolumnowy krakowian, utworzony przez ich kolejne zestawienie, t.zn.

$$\underline{A_{\bar{x}}} = \left\{ \underline{A_{0.1}} \;\; \underline{A_{0.2}} \cdots\cdots \underline{A_{0.9}} \right\} \qquad\text{———} \quad 112$$

Zadanie zagęszczenia dziesiętnego tablicy funkcyjnej wyrazi się przy tych oznaczeniach równaniem:

$$\underline{U_{\bar{x}}} = \underline{U} \cdot \underline{A_{\bar{x}}}$$

Poniżej podajemy takie "krakowiany zagęszczenia dziesiętnego" dla interpolacji trój-siedmiowyrazowej, zaopatrując je w kontrolujące kolumny sumowe.

---

*) Taki wzór na krakowian /n+1/ wyrazowej interpolacji, t.zn. - interpolacji przy pomocy wielomianu n-tego stopnia, dla ułamka interpolacyjnego k miałby postać:

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} 1 & (1-k) & (2-k) & (3-k) & \cdots & (i-k) & \cdots & (n-k) & (-1)^0 \frac{1}{n!} \\ (0-k) & 1 & (2-k) & (3-k) & \cdots & (i-k) & \cdots & (n-k) & (-1)^1 \frac{1}{1(n-1)!} \\ (0-k) & (1-k) & 1 & (3-k) & \cdots & (i-k) & \cdots & (n-k) & (-1)^2 \frac{1}{1.2(n-2)!} \\ (0-k) & (1-k) & (2-k) & 1 & \cdots & (i-k) & \cdots & (n-k) & (-1)^3 \frac{1}{1,2,3(n-3)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (0-k) & (1-k) & (2-k) & (3-k) & \cdots & 1 & \cdots & (n-k) & (-1)^i \frac{1}{1,2,3\ldots i\,(n-i)!} \\ (0-k) & (1-k) & (2-k) & (3-k) & \cdots & (i-k) & \cdots & 1 & (-1)^n \frac{1}{1,2,3\ldots n} \end{Bmatrix}$$

Dla interpolacji trójwyrazowej:

$$\underline{A_{\bar{x}}} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc|c} 0.855 & 0.720 & 0.595 & 0.480 & 0.375 & 0.280 & 0.195 & 0.120 & 0.055 & 3.675 \\ 0.190 & 0.360 & 0.510 & 0.640 & 0.750 & 0.840 & 0.910 & 0.960 & 0.990 & 6.150 \\ -0.045 & -0.080 & -0.105 & -0.120 & -0.125 & -0.120 & -0.105 & -0.080 & -0.045 & -0.825 \end{array} \right\} \tag{113}$$

Dla interpolacji czterowyrazowej:

$$\underline{A_{\bar{x}}} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc|c} 0.8265 & 0.6720 & 0.5355 & 0.4160 & 0.3125 & 0.2240 & 0.1495 & 0.0880 & 0.0385 & 3.2625 \\ 0.2755 & 0.5040 & 0.6885 & 0.8320 & 0.9375 & 1.0080 & 1.0465 & 1.0560 & 1.0395 & 7.3875 \\ -0.1305 & -0.2240 & -0.2835 & -0.3120 & -0.3125 & -0.2880 & -0.2415 & -0.1760 & -0.0945 & -2.0625 \\ 0.0285 & 0.0480 & 0.0595 & 0.0640 & 0.0625 & 0.0560 & 0.0455 & 0.0320 & 0.0165 & 0.4125 \end{array} \right\} \tag{114}$$

Dla interpolacji pięciowyrazowej:

$$\underline{A_{\bar{x}}} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc|c} 0.805\,8375 & 0.638\,4000 & 0.495\,3375 & 0.374\,4000 & 0.273\,4375 & 0.190\,4000 & 0.123\,3375 & 0.070\,4000 & 0.029\,8375 & 3.001\,3875 \\ 0.358\,1500 & 0.638\,4000 & 0.849\,1500 & 0.998\,4000 & 1.093\,7500 & 1.142\,4000 & 1.151\,1500 & 1.126\,4000 & 1.074\,1500 & 8.431\,9500 \\ -0.254\,4750 & -0.425\,6000 & -0.524\,4750 & -0.561\,6000 & -0.546\,8750 & -0.489\,6000 & -0.398\,4750 & -0.281\,6000 & -0.146\,4750 & -3.629\,1750 \\ 0.111\,1500 & 0.182\,4000 & 0.220\,1500 & 0.230\,4000 & 0.218\,7500 & 0.190\,4000 & 0.150\,1500 & 0.102\,4000 & 0.051\,1500 & 1.456\,9500 \\ -0.020\,6625 & -0.033\,6000 & -0.040\,1625 & -0.041\,6000 & -0.039\,0625 & -0.033\,6000 & -0.026\,1625 & -0.017\,6000 & -0.008\,6625 & -0.261\,1125 \end{array} \right\} \tag{115}$$

Dla interpolacji sześciowyrazowej:

$$\underline{A_{\bar{x}}} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc|c} 0.7897\,2075 & 0.6128\,6400 & 0.4656\,1725 & 0.3444\,4800 & 0.2460\,9375 & 0.1675\,5200 & 0.1060\,7025 & 0.0591\,3600 & 0.0244\,6675 & 2.8159\,6875 \\ 0.4387\,3375 & 0.7660\,8000 & 0.9977\,5125 & 1.1481\,6000 & 1.2304\,6875 & 1.2566\,4000 & 1.2374\,8625 & 1.1827\,2000 & 1.1010\,0375 & 9.3590\,4375 \\ -0.4156\,4250 & -0.6809\,6000 & -0.8216\,7750 & -0.8611\,2000 & -0.8203\,1250 & -0.7180\,8000 & -0.5711\,4750 & -0.3942\,4000 & -0.2001\,8250 & -5.4833\,6250 \\ 0.2723\,1750 & 0.4377\,6000 & 0.5173\,5250 & 0.5299\,2000 & 0.4921\,8750 & 0.4188\,8000 & 0.3228\,2250 & 0.2150\,4000 & 0.1048\,5750 & 3.3111\,3750 \\ -0.1012\,4625 & -0.1612\,8000 & -0.1887\,6375 & -0.1913\,6000 & -0.1757\,8125 & -0.1478\,4000 & -0.1124\,9875 & -0.0739\,2000 & -0.0355\,1625 & -1.1882\,0625 \\ 0.0161\,1675 & 0.0255\,3600 & 0.0297\,2025 & 0.0299\,5200 & 0.0273\,4375 & 0.0228\,4800 & 0.0172\,6725 & 0.0112\,6400 & 0.0053\,7075 & 0.1854\,1875 \end{array} \right\} \tag{116}$$

Dla interpolacji siedmiowyrazowej:

$$\underline{A_{\bar{x}}} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc|c} 0.77655\,87375 & 0.59243\,52000 & 0.44233\,63875 & 0.32148\,48000 & 0.22558\,59375 & 0.15079\,68000 & 0.09369\,53875 & 0.05125\,12000 & 0.02079\,67375 & 2.67494\,11875 \\ 0.51770\,58250 & 0.88865\,28000 & 1.13743\,64250 & 1.28593\,92000 & 1.35351\,56250 & 1.35717\,12000 & 1.31173\,54250 & 1.23002\,88000 & 1.12302\,38250 & 10.20520\,91250 \\ -0.61307\,26875 & -0.98739\,20000 & -1.17089\,04375 & -1.20556\,80000 & -1.12792\,96875 & -0.96940\,80000 & -0.75677\,04375 & -0.51251\,20000 & -0.25523\,26875 & -7.59877\,59375 \\ 0.53555\,77500 & 0.84633\,60000 & 0.98296\,97500 & 0.98918\,40000 & 0.90234\,37500 & 0.75398\,40000 & 0.57031\,97500 & 0.37273\,60000 & 0.17825\,77500 & 6.13168\,87500 \\ -0.29867\,64375 & -0.46771\,20000 & -0.53797\,66875 & -0.53580\,80000 & -0.48339\,84375 & -0.39916\,80000 & -0.29812\,16875 & -0.19219\,20000 & -0.09056\,64375 & -3.30361\,96875 \\ 0.09508\,88250 & 0.14810\,88000 & 0.16940\,54250 & 0.16773\,12000 & 0.15039\,06250 & 0.12337\,92000 & 0.09151\,64250 & 0.05857\,28000 & 0.02739\,08250 & 1.03158\,41250 \\ -0.01316\,20125 & -0.02042\,88000 & -0.02328\,08625 & -0.02296\,32000 & -0.02050\,78125 & -0.01675\,52000 & -0.01237\,48625 & -0.00788\,48000 & -0.00367\,00125 & -0.14102\,75625 \end{array} \right\} \tag{117}$$

Cel zaopatrzenia tych krakowianów w kolumny sumowe jest zrozumiały: oprócz kontroli bezbłędnego mnożenia krakowianu $\underline{U}$ przez każdą poszczególną kolumnę krakowianu $\underline{A_x}$ - stwierdzeniem czego jest ukazywanie się, po przemnożeniu przez każdą kolumnę, liczb szeregu naturalnego w liczniku obrotów arytmometru / $\Sigma A = 1$ /; otrzymujemy kontrolę bezbłędnego ustawiania czynników przez stwierdzenie zgodności sumy dziewięciu elementów obliczonego krakowianu z jego ostatnim - dziesiątym elementem, obliczonym w drodze mnożenia. Ta wyczerpująca kontrola rachunkowa w połączeniu z prostotą postępowania powoduje możność powierzania pracy zagęszczenia tablicy funkcyjnej personelowi niefachowemu, czego nie można stosować przy interpolacji różnicowej wyższych rzędów.

Zilustrujemy jeszcze na przykładzie liczbowym zagęszczenie dziesiętne tablicy funkcyjnej, poczem przejdziemy do omówienia kryteriów, pozwalających na właściwe obranie rzędu interpolacji.

Przykład liczbowy.

Obliczyć siedmiocyfrowe wartości funkcji $u = \sin x$ zapomocą interpolacji czterowyrazowej w przedziałach co $0^\circ\!,1$, mając dane siedmiocyfrowe wartości tej funkcji co 1°, Obliczenie przeprowadzimy między 1° i 2° t.zn. dla $1^\circ\!,1 \quad 1^\circ\!,2 \ldots 1^\circ\!,9$. /Chcąc mieć dokładną siódmą cyfrę, należałoby wychodzić z wartości ośmiocyfrowych/. Ponieważ dla $1^\circ\ 2^\circ\ 3^\circ\ 4^\circ$ sin: wynosi odpowiednio: 0.017 4524 0.034 8995 0.052 3360 oraz 0.069 7565 otrzymamy mnożąc krakowian zestawiony z tych wartości przez krakowian dziesiętny interpolacji czterowyrazowej:

$$\begin{Bmatrix} 0.017\ 4524 \\ 0.034\ 8995 \\ 0.052\ 3360 \\ 0.069\ 7565 \end{Bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr|r} 0.8265 & 0.6720 & 0.5355 & 0.4160 & 0.3125 & 0.2240 & 0.1495 & 0.0880 & 0.0385 & 3.2625 \\ 0.2755 & 0.5040 & 0.6885 & 0.8320 & 0.9375 & 1.0080 & 1.0465 & 1.0560 & 1.0395 & 7.3875 \\ -0.1305 & -0.2240 & -0.2835 & -0.3120 & -0.3125 & -0.2880 & -0.2415 & -0.1760 & 0.0945 & -2.0625 \\ 0.0285 & 0.0480 & 0.0595 & 0.0640 & 0.0625 & 0.0560 & 0.0455 & 0.0320 & 0.0165 & 0.4125 \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.019\ 1974 \\ 0.020\ 9424 \\ 0.022\ 6873 \\ 0.024\ 4322 \\ 0.026\ 1769 \\ 0.027\ 9216 \\ 0.029\ 6662 \\ 0.031\ 4108 \\ 0.033\ 1552 \\ ------ \\ 0.235\ 5901 \end{Bmatrix}$$

Kryteria właściwego obrania rzędu interpolacji.

Twierdzenie.

Jeżeli $U_0 U_1 U_2 \ldots U_n$ są wartościami jakie przybiera n parametrowy wielomian /t.zn. wielomian n-1 stopnia /, gdy zmienna niezależna przybiera szereg wartości, tworzących postęp arytmetyczny, zaś $N_0 N_1 N_2 \ldots N_n$ są iloczynami spółczynników dwumianowych $\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \ldots \binom{n}{n}$ przez kolejne potęgi minus jedności: $/-1/^n \ /-1/^{n-1} \ldots /-1/^\circ$, wówczas:

$$\underline{U_0 N_0 + U_1 N_1 + U_2 N_2 + \ldots U_n N_n = 0} \qquad \text{——— /118 /}$$

Oznaczając przez $\underline{U}$ krakowian wartości, jakie przybiera n parametrowy wielomian, gdy zmienna niezależna przybiera szereg wartości, tworzących postęp arytmetyczny - nazwijmy ten krakowian "krakowianem funkcyjnym regularnej tablicy wielomianowej" - zaś przez $\underline{N}$ krakowian zestawiony z iloczynów spółczynników dwumianowych przez kolejne potęgi minus jedności nazwijmy ten krakowian "krakowianem Newtonowskim" możemy napisać twierdzenie /118/ pod postacią:

$$\boxed{\underline{U} \cdot \underline{N} = 0} \qquad \text{——— /118 /}$$

i wysłowić j.n. <u>iloczyn krakowianu funkcyjnego regularnej tablicy wielomianowej przez krakowian newtonowski jest zerem.</u>
Wartości krakowianów newtonowskich, które nazwać by można też, "krakowianami sprawdzającymi położenie n+1 punktów na n parametrowej krzywej ", lub "krakowianami sprawdzającymi interpolacji n-wyrazowej", podajemy poniżej dla wartości n od 1 do 10.

<u>Tabelka krakowianów Newtonowskich.</u>

n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N =	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10
		1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45
			1	-4	10	-20	35	-56	84	-120
				1	-5	15	-35	70	-126	210
					1	-6	21	-56	126	-252
						1	-7	28	-84	210
							1	-8	36	-120
								1	-9	45
									1	-10
										1

—119

Bezwzględne wartości elementów tych krakowianów tworzą się według znanego schematu powstawania spółczynników dwumianowych: pierwsze i ostatnie elementy w każdym krakowianie są jednościami /co do wartości bezwzględnej /, każdy pośredni element dowolnego krakowianu jest sumą dwóch elementów poprzedzającego go krakowianu: elementu sąsiadującego i napisanego bezpośrednio ponad nim. Po obliczeniu w schemacie wszystkich elementów w wartościach bezwzględnych stawiamy znaki.

Dowód twierdzenia /118/ przeprowadzimy jak następuje: zestawmy schemat kolejnych różnic dla wielomianu $u=f/x/$: $U_0=f/x_0/$ $U_1=f/x_0+\Delta/$ $U_2=f/x+2\Delta/$ otrzymamy:

$$
\begin{array}{lllll}
U_0 & & & & \\
 & U_1-U_0 & & & \\
U_1 & & U_2-2U_1+U_0 & & \\
 & U_2-U_1 & & U_3-3U_2+3U_1-U_0 & \\
U_2 & & U_3-2U_2+U_1 & & U_4-4U_3+6U_2-4U_1+U_0 \\
 & U_3-U_2 & & U_4-3U_3+3U_2-U_1 & \\
U_3 & & U_4-2U_3+U_2 & & \text{i t.d.} \\
 & U_4-U_3 & & & \\
U_4 & & & &
\end{array}
$$

Jeżeli dany wielomian jest wielomianem jednoparametrowym /t.zn:wielkością stałą/ będą zerami pierwsze różnice schematu: $U_1-U_0=0$ czyli $\begin{Bmatrix}U_0\\U_1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}=0.$
Jeżeli wielomian jest wielomianem dwuparametrowym /funkcją liniową/, będą zerami drugie różnice: $U_2-2U_1+U_0=0$ **t.j.** $\begin{Bmatrix}U_0\\U_1\\U_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}=0.$

Dla wielomianu trójparametrowego /trójmian kwadratowy/ będą zerami trzecie różnice: $U_3-3U_2+3U_1-U_0=0$ **t.j.** $\begin{Bmatrix}U_0\\U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\+3\\-3\\+1\end{Bmatrix}=0$ **i t.d.**

Ponieważ otrzymywane zespoły są zespołami spółczynników dwumianowych o zmiennych znakach, twierdzenie jest słuszne.
Twierdzenie stosować będziemy, jako kryterium obrania rzędu interpolacji w drodze stwierdzenia czy tablicę funkcyjną, z której mamy interpolować

możemy uważać za zespół wielomianów n parametrowych.

Przykład liczbowy.

Przy pomocy krakowianów N stwierdzimy z łatwością, że funkcja stabelaryzowana w tablicy:

x	U
10	1751
12	2793
14	4179
16	5957
18	8175
20	10881

jest wielomianem czteroparametrowym - czyli trzeciego stopnia - lub ściślej, że w punktach x=10,12,14 ...wartości stabelaryzowanej funkcji są równe wartościom wielomianu, wyznaczonego przez tablicę, a dającego się określić przez cztery parametry.
Sprawdzając bowiem przy pomocy krakowianu N dla interpolacji trójwyrazowej otrzymamy /rachunek przeprowadza się oczywiście maszynowo nic nie zapisując w toku pracy/.

$$\begin{Bmatrix}1751\\2793\\4179\\5957\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{Bmatrix} = 48 \neq 0$$ zaś biorąc N dla interpolacji czterowyrazowej znajdziemy: $$\begin{Bmatrix}1751\\2793\\4179\\5957\\8175\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{Bmatrix} = 0$$

Gdybyśmy mieli wątpliwości czy i ostatni punkt /x=20 u=10881 / położony jest na tejże czteroparametrowej krzywej, wystarczy "przesunąć krakowian sprawdzający wzdłuż tablicy" t.zn. znaleźć iloczyn:

$$\begin{Bmatrix}2793\\4179\\5957\\8175\\10881\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{Bmatrix} = 0$$

który upewni nas że tablica jest bezbłędnie stabelaryzowaną wartością czteroparametrowego wielomianu algebraicznego. Jeżeli więc mamy interpolować między wartościami tablicy wystarczy posługiwać się interpolacją czterowyrazową.

Tak np: chcąc znaleźć wartość funkcji dla wartości argumentu x=12.6 czyli dla $k = \frac{0.6}{2} = 0.3$ weźmiemy krakowian interpolacji czterowyrazowej dla k=0.3 /str. 112 / i obliczymy:

$$u\,/\,^{12.6}\,/ = \begin{Bmatrix}0.5355\\0.6885\\-0.2835\\0.0595\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2793\\4179\\5957\\8175\end{Bmatrix} = 3170.496$$

Poprawianie błędów w tablicach funkcyjnych, lub uzupełnianie tablic funkcyjnych /pozycje nieczytelne, obserwacje niedokonane, lub jawnie błędne i t.p. / należą też do zagadnień dających się łatwo rozwiązać przy pomocy równania /118/ U . N = 0

W tych wypadkach w równaniu tym znany jest krakowian N , oraz krakowian U za wyjątkiem jednego elementu.

Oznaczając przez e ten nieznany element krakowianu U - niech będzie to i-ty element - mamy do rozwiązania równanie:

$$\boxed{\begin{Bmatrix}N_0\\N_1\\N_2\\\vdots\\N_i\\\vdots\\N_n\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_0\\U_1\\U_2\\\vdots\\e\\\vdots\\U_n\end{Bmatrix} = 0} \qquad (120)$$

które rozwiązuje się bezpośrednio przy pomocy arytmometru przez wykonanie bez kasowania licznika rezultatów i zapisywania poszczególnych faz rachunku - mnożeń: $N_0 U_0$ $N_1 U_1 \dots N_n U_n$, skasowanie licznika obrotów, nastawienie w liczniku nastawień wielkości N_i i nadawanie obrotów aż do otrzymania zer w liczniku rezultatów. Szukaną wartość $U_i = e$ wykaże licznik obrotów.

Przykład liczbowy.

Jeżeli po sprawdzeniu przy pomocy krakowianów $\underline{N}$, że stabelaryzowana w tablicy:

x	U
25	1024
30	1369
35	1764
40	2209
45	2704
50	3429
55	3844

funkcja jest wielomianem trzyparametrowym, gdyż mamy:

$$\begin{Bmatrix} 1024 \\ 1369 \\ 1764 \\ 2209 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{przy:} \quad \begin{Bmatrix} 1024 \\ 1369 \\ 1764 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 50 \neq 0,$$

zaczniemy sprawdzać stabelaryzowane wartości "przesuwając krakowian $N = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$ wzdłuż tablicy" t.zn. mnożąc przez ten krakowian kolejno zespoły:

$$\begin{Bmatrix} 1369 \\ 1764 \\ 2209 \\ 2704 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1764 \\ 2209 \\ 2704 \\ 3429 \end{Bmatrix} \quad \text{znajdziemy:} \quad \begin{Bmatrix} 1369 \\ 1764 \\ 2209 \\ 2704 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

lecz: $\begin{Bmatrix} 1764 \\ 2209 \\ 2704 \\ 3429 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 180 \neq 0.$ Wnioskujemy stąd odrazu, że wartość funkcji $U/50/ = 3429$ jest błędna.

Rozwiązując w opisany wyżej sposób równanie: $\begin{Bmatrix} 1764 \\ 2209 \\ 2704 \\ e \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$ znajdziemy $e = 3249.$

Wartość 3429, wpisaną do tablicy funkcyjnej należy więc poprawić, wpisując jej miejsce 3249. Upewnia nas o tym jeszcze ostatnie sprawdzenie:

$$\begin{Bmatrix} 2209 \\ 2704 \\ 3249 \\ 3844 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

W praktyce rachunkowej z reguły operujemy liczbami "zaokrąglonymi", t.zn. liczbami których ostatnia cyfra znana jest z przybliżeniem, zawierającym się w granicach -0.5 do +0.5 jednostek rzędu tej cyfry. Chociaż więc nawet stabelaryzowana funkcja jest wielomianem algebraicznym - względnie rozwinięciem pewnej funkcji w szereg potęgowy - nie możemy oczekiwać ścisłego spełnienia się równania $\underline{U}.\underline{N}=0$. Jeżeli zaś tablica funkcyjna stanowi zbiór wartości obserwowanych - do błędów zaokrągleń dołączą się błędy obserwacji i tym mniej możemy oczekiwać ścisłego spełnienia się równania $\underline{U}.\underline{N}=0$.

Ujęcie wpływu błędów zaokrągleń nie przedstawia trudności. Jeżeli oznaczymy przez p rząd ostatniej cyfry podanej w tabeli - przyczem przyjmujemy że rząd ten jest równy dla każdej stabelaryzowanej liczby - wówczas musi być dla całkowitego błędu E:

$$\boxed{E \leqq \pm 0.5\, p\, \Sigma|N|} \qquad \text{———} \quad 121$$

gdzie $\Sigma|N|$ jest sumą bezwzględnych wartości elementów krakowianu $\underline{N}$. Stwierdzenie spełnienia tego warunku przy operowaniu na danej tablicy przy pomocy krakowianu sprawdzającego $\underline{N}$ interpolacji i-wyrazowej przy niespełnieniu analogicznego warunku dla interpolacji /i-1 / wyrazpwej - upoważnia nas w zupełności do określania wartości pośrednich z tej tablicy przy pomocy interpolacji i-wyrazowej.

Przykład liczbowy.

Badanie tablicy:

x	U
-4	0.5
-3	5.0
-2	11.4
-1	19.8
0	30.2
1	42.6
2	57.1
3	73.5

przy pomocy krakowianu sprawdzającego interpolacji dwuwyrazowej daje:

$$\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 5.0 \\ 11.4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1.9 \quad \text{że zaś:} \quad 0.05.4=0.2$$ - przechodzimy

do badania przy pomocy krakowianu interpolacji trójwyrazowej. Otrzymamy przy badaniu całej tablicy:

$$\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 5.0 \\ 11.4 \\ 19.8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.1 \quad \text{oraz:} \quad \begin{Bmatrix} 30.2 \\ 42.6 \\ 57.1 \\ 73.5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.2$$

jak również:

$$\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 11.4 \\ 30.2 \\ 57.1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.2$$

Ponieważ wartości bezwzględne otrzymanych różnic są mniejsze od 0.05.8=0.4, przypisujemy je wpływom błędów zaokrągleń przy sporządzaniu tablicy funkcyjnej i uważamy funkcję za trzyparametrowy wielomian /krzywą drugiego stopnia/, co upoważnia nas do stosowania interpolacji trójwyrazowej.

Jasną jest rzeczą, że krzywą n parametrową możemy też traktować jako krzywą m parametrową, gdzie $m > n$, przyczem /m-n/ parametrów musi być zerami. /Tak np. krzywą $3x^2 + 5x + 4$ możemy uważać za krzywą $0.x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ /. Wysławiając to językiem interpolacji powiemy, że zamiast właściwej dla danej tablicy funkcyjnej interpolacji n wyrazowej możemy zastosować zawsze interpolację m wyrazową, przyczem $m > n$.
Takie postępowanie w praktyce rachunkowej niema oczywiście żadnego celu - przysparza bowiem tylko pracy. Może ono jednak stanowić punkt wyjścia przy badaniu błędów obserwacji w tablicach funkcyjnych, które powstały przez stabelaryzowanie wartości pewnych obserwacji, do czego zaraz przejdziemy. Tu zauważymy tylko, że, jeżeli badamy pewną funkcję przy pomocy krakowianów sprawdzających $\underline{N}$ i, po ustaleniu właściwego rzędu interpolacji n, rozpoczniemy badać ją przy pomocy krakowianów wyższych rzędów: n+1 n+2..., możemy z reguły oczekiwać, że iloczyny $\underline{U}.\underline{N}$ będą się stawać co do swej bezwzględnej wartości coraz większe. Wynika to z tablicy /119/ w której ze wzrostem rzędu interpolacji $|N|$ wzrasta. Powiedzieliśmy "z reguły" - wszystko bowiem zależy tu od układu błędów zaokrągleń w poszczególnych wartościach U.

Jeżeli np: zastosujemy takie postępowanie dla tablicy, badanej w ostatnim przykładzie, znajdziemy:

$$\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 5.0 \\ 11.4 \\ 19.8 \\ 30.2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.1 \quad \begin{Bmatrix} 19.8 \\ 30.2 \\ 42.6 \\ 57.1 \\ 73.5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.3 \quad \text{oraz} \quad \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 5.0 \\ 11.4 \\ 19.8 \\ 30.2 \\ 42.6 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \\ 10 \\ -5 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.1 \quad \begin{Bmatrix} 11.4 \\ 19.8 \\ 30.2 \\ 42.6 \\ 57.1 \\ 73.5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \\ 10 \\ -5 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.4$$

$$\text{wreszcie:}\quad \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 5.0 \\ 11.4 \\ 19.8 \\ 30.2 \\ 42.6 \\ 57.1 \\ 73.5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 7 \\ -21 \\ 35 \\ -35 \\ 21 \\ -7 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.5$$

Wzrastanie wpływu błędów zaokrągleń jest tu wyraźnie widoczne.

Nakoniec zauważymy, że jeżeli badanie pewnej tablicy funkcyjnej ma wyłącznie na celu obranie rzędu interpolacji - badać należy w granicach jaknajwęższych, t.zn. sprawdzać warunek $\underline{UN} \cong 0$ obierając za elementy krakowianu $\underline{U}$ elementy sąsiadujące w tabeli. Jeżeli natomiast celem badania jest ustalenie rzędu stabelaryzowanego wielomianu, należy tak obierać elementy krakowianu $\underline{U}$, aby, zachowując oczywiście warunek jednakowych odstępów argumentu, ująć w jednym badaniu możliwie całą tablicę. Tak np: badając tablicę:

x	U
0	7
1	17
2	27
3	38
4	49
5	59
6	71
7	82
8	93
9	105
10	117

a/ dla określenia rzędu interpolacji

$$\text{znajdziemy:}\quad \begin{Bmatrix} 7 \\ 17 \\ 27 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} 38 \\ 49 \\ 59 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -1$$

i t.d. Stosować można interpolację dwuwyrazową, choć funkcja nie jest, jak zobaczymy, liniowa.

b/ dla określenia rzędu wielomianu

$$\text{znajdziemy:}\quad \begin{Bmatrix} 7 \\ 59 \\ 117 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 6,$$ co znacznie przekracza błąd zaokrągleń $0.5 \times 4 = 2$.

$$\text{Badając dalej znajdujemy:}\quad \begin{Bmatrix} 7 \\ 38 \\ 71 \\ 105 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = -1,$$ co nie przekracza już błędu zaokrąglenia $8 \times 0.5 = 4$.

Wielomian jest więc trzyparametrowy /kwadratowy/.

Wyrównanie błędów w tablicach funkcyjnych metodą najmniejszych kwadratów.

Niech tablica funkcyjna:

$$\Delta x = \text{const:}\quad \begin{array}{c|c} x & U \\ \hline x_0 & U_0 \\ x_1 & U_1 \\ x_2 & U_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & U_n \end{array} \qquad\qquad 122$$

będzie tablicą, zawierającą obserwowane wartości m - parametrowego wielomianu /względnie funkcji o kształcie bliżej nieznanym, którą chcemy przez taki wielomian zastąpić /, przyczem:

$$m+1 \leq n \qquad\qquad 123$$

t.zn. ilość elementów "krakowianu sprawdzającego" $\underline{N}$ jest równa lub mniejsza od ilości elementów tablicy.

Wszystkie iloczyny $\underline{U}$ i $\underline{N}$, jakie możemy utworzyć, przesuwając krakowian $\underline{N}$ wzdłuż krakowianu $\underline{U}$, czyli wszystkie elementy iloczynu krakowianowego:

$$\left\{\begin{matrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} N_0 & & & \\ N_1 & N_0 & & \\ \vdots & N_1 & \ddots & \\ N_m & \vdots & \ddots & N_0 \\ & N_m & & N_1 \\ & & & \vdots \\ & & & N_m \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \underline{N} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \underline{N} \end{matrix}\right\} \qquad 124$$

winny być zerami. Ponieważ jednak wielkości U_i obciążone są błędami obserwacji, obliczając powyższy iloczyn otrzymamy w wyniku obliczenia zamiast krakowianu zerowego, krakowian odchyłkowy $\underline{\Delta}$ złożony z elementów - ogólnie biorąc - różnych od zera.

$$\underline{\Delta} = \left\{\begin{matrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \underline{N} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \underline{N} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \\ \Delta_m \end{matrix}\right\} \qquad 125$$

Aby zamienić ten krakowian na krakowian zerowy trzeba każdej obserwacji U_i nadać poprawkę v_i przyczem - zgodnie z wymaganiem metody najmniejszych kwadratów - suma kwadratów tych poprawek musi być najmniejszością. Aby spełnione były te warunki wyrównania:

$$\left\{\begin{matrix} U_0 + v_0 \\ U_1 + v_1 \\ U_2 + v_2 \\ \vdots \\ U_n + v_n \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \underline{N} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \underline{N} \end{matrix}\right\} = 0 \qquad \left\{\begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}\right\}^2 = \text{minimum} \qquad 126$$

poprawki v muszą być obliczone z równania:

$$\left\{\begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \tau\underline{N} & & & \\ & \tau\underline{N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau\underline{N} \end{matrix}\right\} \qquad 127$$

gdzie $\underline{N}$ oznacza transpozę krakowianu $\underline{N}$, zaś $k_0 k_1 \dots k_m$ są "korelatami" obliczonymi z układu równań normalnych, których tabelę spółczynnikową stanowi iloczyn:

$$\left\{\begin{matrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{N} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{N} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{N} \end{matrix}\right\}^2 \qquad 128$$

zaś kolumnę wyrazów wolnych krakowian: $\underline{\Delta}$ *)

---

*) Równanie /126/ napisane pod postacią algebraiczną jest układem "równań warunkowych".

$$\begin{aligned} v_0 N_0 + v_1 N_1 + v_2 N_2 + \dots v_m N_m \quad & + \Delta_1 = 0 \\ v_1 N_0 + v_2 N_1 + \dots v_m N_{m-1} + v_{m+1} N_m \quad & + \Delta_2 = 0 \\ v_2 N_0 + \dots v_m N_{m-2} + v_{m+1} N_{m-1} + v_{m+2} N_m \dots \quad & + \Delta_3 = 0 \end{aligned}$$

Aczkolwiek rozwiązanie zagadnienia w tej formie nie jest specjalnie skomplikowane, jednak pochłania ono stosunkowo dużo czasu. Można tu jednak doprowadzić do nierównie prostszej postaci, pozwalającej przy użyciu odpowiednich tablic, na rozwiązywanie tego rodzaju zagadnień, wymagających przy stosowaniu zwykłych metod rachunkowych kilku <u>godzin</u> czasu - w przeciągu kilku lub kilkunastu <u>minut</u>.
Umożliwia to "metoda nieoznaczona" krakowianowego rozwiązywania równań. Jeżeli mianowicie napiszemy równania korelat w kształcie krakowianowym:

$$\begin{Bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{Bmatrix} \tau \left[\begin{Bmatrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{N} \end{Bmatrix}\right]^2 + \begin{Bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{———} \quad 129$$

i rozwiążemy je symbolicznie "metodą nieoznaczoną", otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \underline{N} & & & \\ & \underline{N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{N} \end{Bmatrix}^2\right]^{-1} \qquad \text{———} \quad 130$$

lub, wprowadzając krótsze, zrozumiałe bez specjalnych omówień, oznaczenia:

$$\underline{K} = - \underline{\Delta} \cdot \left(\underline{N}_N^2\right)^{-1} \qquad \text{———} \quad 131$$

Podstawiając to wyrażenie na krakowian korelat do równania /127/ które można też napisać w zrozumiałym skrócie:

$$\underline{v} = \underline{k} \cdot \tau \underline{N}_N$$

znajdziemy:

$$\underline{v} = - \underline{\Delta} \cdot / N_N^2 /^{-1} \tau \underline{N}_N \qquad 132$$

---

gdzie $\Delta_1 = U_0 N_0 + U_1 N_1 + U_2 N_2 + \dots U_m N_m$

" $\Delta_2 = U_1 N_0 + U_2 N_1 + \dots U_m N_{m-1} + U_{m+1} N_m$

" $\Delta_3 \quad U_2 N_0 + \dots U_m N_{m-2} + U_{m+1} N_{m-1} + U_{m+2} N_m$

- -

stanowiącego odpowiednik równań symbolizowanych w metodzie najmniejszych kwadratów jn:

$$r \begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n + \Delta_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots b_n v_n + \Delta_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots c_n v_n + \Delta_3 = 0 \end{cases}$$

Spełnienie tego układu przy zachowaniu warunku $\Sigma v^2 =$ minimum wymaga jak wiadomo obliczenia nieoznaczonych czynników $k_1 k_2 \dots k_r$

- - - - - - - - - - - - - - -

zwanych korelatami z układu równań:

$$r \begin{cases} [aa] k_1 + [ab] k_2 + \dots [ar] k_r + \Delta_1 = 0 \\ [ab] k_1 + [bb] k_2 + \dots [br] k_r + \Delta_2 = 0 \\ [ar] k_1 + [br] k_2 + \dots [rr] k_r + \Delta_r = 0 \end{cases}$$

i obliczenia poprawek V z układu równań poprawek

$$\begin{cases} v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots r_1 k_r \\ v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots r_2 k_r \\ v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \dots r_3 k_r \\ - - - - - - - - - - - - \\ v_n = a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \dots r_n k_r \end{cases}$$

Konkretyzując tę drogę ogólną dla naszego przypadku otrzymamy:

$$\left.\begin{matrix} [aa] = N_0^2 + N_1^2 + \dots N_m^2 \\ [ab] = N_1 N_0 + N_2 N_1 + \dots N_m N_{m-1} \\ [ac] = N_2 N_0 + N_3 N_1 + \dots N_m N_{m-2} \\ \text{i t.d.} \end{matrix}\right\}$$

czyli: krakowian spółczynników równań korelat będzie iloczynem krakowianowym.

$$\begin{Bmatrix} N_0 & & \\ N_1 & N_0 & \ddots \\ N_m & N_1 & \\ & N_m & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_0 & \\ N_1 & N_0 \\ N_m & \\ & N_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{N} & & \\ & \underline{N} & \\ & & \underline{N} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{N} & & \\ & \underline{N} & \\ & & \underline{N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{N} & & \\ & \underline{N} & \\ & & \underline{N} \end{Bmatrix}^2$$

Wyrażając krakowianowo równania poprawek otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_0 & N_1 & N_2 & N_3 & & & \\ & N_0 & N_1 & N_2 & & & \\ & & N_0 & N_1 & N_2 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & N_0 & N_1 \dots & N_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tau N & & & \\ & \tau N & & \\ & & \tau N & \\ & & & \ddots \\ & & & & \tau N \end{Bmatrix}$$

Wyrażając jeszcze krakowian odchyłkowy przez krakowian obserwacji $\underline{U}$ t.zn. $\underline{\Delta} = \underline{U}\,\underline{N}_N$ /równanie 125 /, napiszemy po podstawieniu:

$$\underline{v} = {}^{-}\underline{U}\,\underline{N}_N\,/\underline{N}_N^2/^{-1}\,\tau\underline{N}_N \qquad\text{———————— 133}$$

Oddzielając wreszcie krakowian obserwacji od pozostałych czynników w myśl twierdzenia o łączeniu napiszemy ostatecznie:

$$\boxed{\underline{v} = \underline{U}\left({}_{-}\tau\underline{N}_N\,\tau\left[\left(\underline{N}_N^2\right)\right]^{-1}\tau\underline{N}_N\right)} \qquad\text{———————— 134}$$

Iloczyn krakowianowy ujęty w nawiasy jest zależny funkcjonalnie od dwóch zmiennych o bardzo nieznacznym zakresie zmienności: od ilości elementów e w opracowywanej tablicy funkcyjnej i od ilości parametrów p przyjętego przy wyrównaniu wielomianu. Te bowiem wielkości e i p definjują w zupełności krakowian $\underline{N}_N$. Wynika stąd możliwość stabelaryzowania kilkunastu wartości liczbowych, jakie, praktycznie rzecz biorąc, może przybierać iloczyn krakowianowy wzoru /134/, ujęty w nawiasy. Jeżeli symbolizujemy ujęty w nawiasy krakowian, jako zależny funkcjonalnie od e i p przez $\underline{F}$ /pe/ t.j. gdy oznaczymy:

$$\underline{F}\,/pe/ = {}^{-}\tau\underline{N}_N\tau\left(\left(\underline{N}_N^2\right)^{-1}\right)\tau\underline{N}_N \quad\text{lub wyraźniej:}\ {}^{-}\underline{F}/ep/ =$$

$$\left\{\begin{matrix} N_0 & N_1 & N_2\ldots & & & \\ & N_0 & N_1 & N_2\ldots & & \\ & & N_0 & N_1 & N_2\ldots & \\ & & & \ddots & & \\ & & & N_0 & N_1 & N_2 \end{matrix}\right\}\tau\left[\left(\left\{\begin{matrix} N_0 & & \\ N_1 & N_0 & \\ N_2 & N_1 & N_0 \\ & N_2 & N_1 \\ & & N_2 \end{matrix}\right\}^2\right)^{-1}\right]\left\{\begin{matrix} N_0 & N_1 & N_2 & & & \\ & N_0 & N_1 & N_2 & & \\ & & N_0 & N_1 & N_2 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & N_0 & N_1 & N_2 \end{matrix}\right\} \qquad\text{——135}$$

Wówczas na obliczenie krakowianu poprawek otrzymamy prosty wzór:

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{matrix}\right\}\ \underline{F}\,/pe/} \qquad\text{———————— 136}$$

który jako reguła rachunkowa daje się wysłowić j.n. krakowian poprawek jakie należy dodawać do obserwowanych elementów tablicy wielomianowej dla ich wyrównania metodą najmniejszych kwadratów jest iloczynem krakowianu tych elementów przez krakowian $\underline{F}$/pe/ , odszukany z tablicy zawierającej zbiór krakowianów $\underline{F}$/pe/ według argumentów: e = ilość elementów tablicy funkcyjnej , p=ilość parametrów wielomianu /jego stopień + 1 /

Na str:115,117 podajemy zbiór krakowianów $\underline{F}$/pe/. Układanie tego rodzaju zbiorów krakowianowych jest oczywiście sprawą stosunkowo mozolną, jednak to samo można powiedzieć o wszelkich tabelach funkcyjnych. Operacje natomiast rachunkowe, potrzebne do rozwiązania zagadnienia wyrównania metodą najmniejszych kwadratów obserwacyjnych tablic wielomianowych, sprowadzają się wyłącznie do wykonania jednego mnożenia krakowianowego.

Przykład liczbowy.

/Treść zaczerpnięta z pracy dr.T.M.Gołogórskiego:"Rachunek wyrównawczy - podręcznik dla doświadczalników i przyrodników". Poznań, Warszawa, Wilno, Lublin 1927 /.

Między zawartością bezpostaciowego kwasu krzemowego w ziemi x /zawartość wyrażona w procentach suchej masy /, a pojemnością wody w ziemi U skonstatowano zależność, którą charakteryzuje następująca doświadczalna tablica funkcyjna:

x	U
0	24.72
2	26.56
4	28.14
6	34.11
8	38.41
10	42.51

Należy przeprowadzić wyrównanie danych obserwacyjnych U, stawiając założenie, że między U i x zachodzi związek trzeciego stopnia:

$$U = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ponieważ ilość parametrów wynosi 4 zaś ilość obserwacji 6, weźmiemy krakowian $\underline{F}$ /4,6 /. W praktyce przepisywanie krakowianu $\underline{F}$ niema oczywiście celu. Najwygodniej jest napisać krakowian $\underline{U}$ na pasku kartonu, który dla wykonania mnożenia $\underline{U} \cdot \underline{F}$ nasuwamy na tablicę krakowianów $\underline{F}$. Tutaj dla wyrazistości wypisujemy całe działanie.

Otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24.72 \\ 26.56 \\ 28.14 \\ 34.11 \\ 38.41 \\ 42.51 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.03969 & 0.12699 & -0.11111 & -0.03174 & 0.08730 & -0.03175 \\ 0.12699 & -0.42064 & 0.41271 & 0.01586 & -0.22222 & 0.08730 \\ -0.11111 & 0.41271 & -0.53971 & 0.25399 & 0.01586 & -0.03174 \\ -0.03174 & 0.01586 & 0.25399 & -0.53971 & 0.41271 & -0.11111 \\ 0.08730 & -0.22222 & 0.01586 & 0.41271 & -0.42064 & 0.12699 \\ -0.03175 & 0.08730 & -0.03174 & -0.11111 & 0.12699 & -0.03969 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.19 \\ -0.70 \\ 0.95 \\ -0.50 \\ 0.02 \\ 0.04 \end{Bmatrix}$$

Suma kwadratów poprawek wynosi $\underline{v}^2 = 1.6806$

Stąd błąd średni pojedyńczej obserwacji: $m_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{e-p}} = \sqrt{\frac{1.6806}{2}} = \pm 0.9$

/jest to zresztą oczywiście łączny błąd i obserwacji i założenia takiego, a nie innego związku funkcyjnego /.
Ostatecznie więc wyrównana tablica mieć będzie postać: /T_1/:

T_1

x	U
0	24.91
2	25.86
4	29.09
6	33.61
8	38.43
10	42.55

Dla porównania przytaczamy też wyrównaną tablicę otrzymaną w cytowanej pracy dr.Gołogórskiego w wyniku nierównie mozolniejszego postępowania rachunkowego, nie opartego na warunku minimum sumy kwadratów poprawek /T_2/:

T_2

x	U	poprawki
0	24.44	-0.28
2	26.90	+0.34
4	29.89	+1.75
6	33.43	-0.68
8	37.54	-0.87
10	42.24	-0.27

Suma kwadratów poprawek wynosi tu: 4.5487

Chcąc sprawdzić rachunek wystarczy stwierdzić, że otrzymana w wyniku wyrównania tablica jest czteroparametrowym wielomianem, czyli, że zachodzi związek $\underline{U} \cdot \underline{N} = \underline{0}$.

Otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} 24.91 \\ 25.86 \\ 29.09 \\ 33.61 \\ 38.43 \\ 42.55 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \\ -4 & 1 \\ 6 & -4 \\ -4 & 6 \\ 1 & -4 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ -0.01 \end{Bmatrix} \simeq \underline{0}$$

Z tablicy wielomianowej - oczywiście po jej wyrównaniu, jeśli jest to tablica obserwacyjna - można określić parametry wielomianu. W wyniku tego

można zastąpić tabelą funkcyjną przez krótszy od niej zbiór liczb, napisany w formie równania. Równanie takie ma oczywiście wartość tylko w granicach wartości zmiennych, określonych przez obserwację.
Do celów rachunkowych takie "przekształcenie tablicy funkcyjnej na szereg potęgowy" nie jest właściwie celowe, gdyż potrzebne wartości funkcji prościej otrzymuje się bezpośrednio z tablicy w drodze interpolacji. Do celów teoretycznych zaś takie wyrażenie zmienności pod postacią równania jest o tyle - pomimo przejrzystości - niebezpieczne, że sugeruje przez ogólność postaci znajomość prawa zmienności poza granicami doświadczenia. Przekształcenie tablic funkcyjnych na szeregi potęgowe rozpatrujemy w dalszym ciągu. Liczbowe obliczenie parametrów wyrównanej tu tablicy wykonano na str. 63 .

<u>Obliczenie parametrów wielomianu czyli przekształcenie tablicy funkcyjnej na skończony szereg potęgowy.</u> *)

Po stwierdzeniu, że pewna tablica funkcyjna wyznacza wielomian p parametrowy /czyli stopnia $n=p-1$ /, co wywnioskujemy z równania $\underline{U}\cdot\underline{N}=0$, w którym $\underline{U}$ będzie $p+1= n+2$ wyrazowym krakowianem "tablicowym" , zaś $\underline{N}$ tyleż wyrazowym krakowianem "Newtonowskim"; postawić można pytanie: jakie są wielkości parametrów /spółczynników wielomianu, reprezentowanego przez tablicę funkcyjną? W zadaniu mamy więc daną tablicę funkcyjną:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta = \text{const.} \qquad \begin{array}{c|c} x & U \\ \hline x_0 & U_0 \\ x_1 & U_1 \\ x_2 & U_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & U_n \end{array} \qquad \text{——— } 137$$

zaś szukamy spółczynników a wielomianu:

$$U = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad \text{——— } 138$$

spełniającego warunki:

$$\begin{array}{l} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots a_1 x_0 + a_0 = U_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots a_1 x_1 + a_0 = U_1 \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots a_1 x_n + a_0 = U_n \end{array} \qquad \text{——— } 139$$

Rozwiązanie zagadnienia w sposób zupełnie ogólny, t.zn. jako układu n+1 równań o n+1 niewiadomych: $a_0 a_1 \dots a_n$ nie jest w wypadku interpolacji regularnej wskazane, gdyż przez niewykorzystanie cechy regularności /$\Delta x=\text{const}$/ nie byłoby ekonomiczne. **)
Rozwiązanie wykorzystujące cechę regularności może się tu odbywać pod różnymi postaciami formalnymi. Dość wygodne - zwłaszcza przy większej ilości parametrów - jest /z uwagi na ogólność i przejrzystość formy postępowania/ rozwiązanie sprowadzające się do wielokrotnego wykorzystania następującej własności: <u>spółczynnik przy najwyższej potędze zmiennej niezależnej jest ilorazem otrzymanym z podzielenia iloczynu krakowianowego $\underline{N}\,\underline{U}$ przez iloczyn krakowianowy $\underline{N}\ \underline{X}^n$</u>:

$$\boxed{a_n = \frac{\underline{N}\ \underline{U}}{\underline{N}\ \underline{X}^n}\ , \text{ lub inaczej } a_n = \frac{\alpha}{\beta} \text{ gdzie } \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix} = \underline{N}\cdot\begin{Bmatrix}\underline{U}\ \underline{X}^n\end{Bmatrix}} \qquad \text{——— } 140$$

przyczem dla $p=n+1$ parametrowego wielomianu /wielomianu n - tego stopnia/ $\underline{U}$ jest pelementowym krakowianem tablicowym, $\underline{N}$ tyleż elementowym krakowianem Newtonowskim, a $\underline{X}$ tyleż elementowym krakowianem potęgowym, czyli wyraźnie:

*) To znaczy na wielomian uporządkowany według potęg X.

**) Nie jest zresztą wykluczone, że w pewnych wypadkach /okrągłe liczby/ rozwiązanie metodą ogólną, którą opisujemy na str. 74 , może okazać się ekonomiczniejsze.

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \qquad \underline{N} = \begin{Bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{Bmatrix} \qquad \underline{X}^n = \begin{Bmatrix} X_0^n \\ X_1^n \\ \vdots \\ X_n^n \end{Bmatrix} \qquad \text{—— 141}$$

przyczem, "krakowiany newtonowskie" $\underline{N}$ najwygodniej brać z tabelki na str.

Uzasadnienie można przeprowadzić jn. przedstawmy lewe strony równań układu /139/ jako sumy wielkości $a_n x_i^n$ /$i=0.1.2...n$/ oraz wielomianów stopnia $n-1$ t.zn. n-parametrowych:

$$U_i' = a_{n-1} x_i^{n-1} + \ldots\ldots a_1 x_i + a_0$$

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} a_n\ X_0^n + U_0' &= U_0 \\ a_n\ X_1^n + U_1' &= U_1 \\ - - - - - - &- - \\ a_n\ X_n^n + U_n' &= U_n \end{aligned}$$

Mnożąc kolejne równania tego układu przez elementy krakowianu Newtonowskiego o $n+1$ wyrazach i sumując otrzymamy:

$$a_n \sum_{i=0}^{i=n} x_i^n N_i + \sum_0^n U_i' N_i = \sum_0^n U_i N_i \qquad \text{—— 142}$$

Że zaś U_i' $i=0$ $i=n$ jest zbiorem wartości n-parametrowych wielomianów, drugi wyraz zamieni się na zero, skąd:

$$\boxed{a_n = \frac{\Sigma\ U_i N_i}{\Sigma\ X_i^n N_i}}$$

lub w postaci krakowianowej: $a_n = \dfrac{\underline{N}\ \underline{U}}{\underline{N}\ \underline{X}^n}$ cnd.

Przytoczona własność /140/ pozwala na stopniowe wyznaczenie wszystkich spółczynników wielomianu /138/ ujętego w tablicę funkcyjną /137/. Jeżeli bowiem po znalezieniu spółczynnika przy najwyższej potędze zmiennej "zredukujemy" tablicę funkcyjną, odejmując od każdego jej elementu prócz ostatniego iloczyn tego spółczynnika przez najwyższą potęgę odpowiadającego argumentu, czyli jeżeli tablicę U o krakowianie: $\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix}$ przekształcimy na tablicę "zredukowaną" U o krakowianie:

$$\underline{U}' = \begin{Bmatrix} U_0 - a_n\ x_0^n \\ U_1 - a_n\ x_1^n \\ - - - - - \\ U_{n-1}\ \ a_n\ x_{n-1}^n \end{Bmatrix} \qquad \text{—— 143}$$

pozostaje, dla wyznaczenia spółczynnika przy następnej potędze zmiennej, powtórzyć opisane już postępowanie, biorąc do mnożenia krakowian Newtonowski o mniejszej o jedność ilości elementów.

Tablica U' reprezentuje bowiem układ:

$$\left.\begin{aligned} a_{n-1} x_0^{n-1} + a_{n-2} x_0^{n-2} + \ldots a_0 &= /U_0 - a_n x_0^n / = U_0' \\ a_{n-1} x_1^{n-1} + a_{n-2} x_1^{n-2} + \ldots a_0 &= /U_1 - a_n x_1^n / = U_1' \\ - - - - - - - - - - &- - - - - - - - \\ a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} + a_{n-2} x_{n-1}^{n-2} + \ldots a_0 &= /U_{n-1} - a_n x_{n-1}^n / = U_{n-1}' \end{aligned}\right\} \qquad \text{—— 144}$$

który będzie układem zupełnie analogicznym do układu /139/: stopień i ilość równań w układzie będzie o jedność niższy, spółczynniki pozostają te same.

Po znalezieniu spółczynnika a_{n-1} redukujemy układ po raz drugi i.t.d. aż do obliczenia wszystkich kolejnych spółczynników.
Rachunek wygodnie jest ująć w schemat, zastosowany w poniższym przykładzie liczbowym.

Przykład liczbowy.

Określić stopień wielomianu, stabelaryzowanego w **tablicy i wyznaczyć jego spółczynniki.**

x	U
3	2197
5	4913
7	9261
9	15625
11	24389
13	35937
15	50653

Badanie przy pomocy krakowianów $\underline{N}$ daje: $\begin{Bmatrix} 2197 \\ 4913 \\ 9261 \\ 15625 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $384 \neq 0$ **zaś:**

$$\begin{Bmatrix} 2197 \\ 4913 \\ 9261 \\ 15625 \\ 24389 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{również:} \quad \begin{Bmatrix} 9261 \\ 15625 \\ 24389 \\ 35937 \\ 50653 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Wielomian jest więc wielomianem czteroparametrowym czyli trzeciego stopnia. Do wyznaczenia jego spółczynników weźmiemy cztery pierwsze elementy danej tablicy, czyli krakowian:

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} 2197 \\ 4913 \\ 9261 \\ 15625 \end{Bmatrix}$$

Spółczynnik przy najwyższej potędze zmiennej $/x^3/$ **znajdziemy j.n. /140/**

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2197 & 27 \\ 4913 & 125 \\ 9261 & 343 \\ 15625 & 729 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 384 \\ 48 \end{Bmatrix} \quad a_3 = \frac{384}{48} = 8$$

Redukcja daje: $\underline{U}' = \begin{Bmatrix} 2197 - 8.3^3 \\ 4913 - 8.5^3 \\ 9261 - 8.7^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2197 - 8.27 \\ 4913 - 8.125 \\ 9261 - 8.343 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1981 \\ 3913 \\ 6517 \end{Bmatrix}$

Obliczając następny spółczynnik $/x^2/$ napiszemy:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1981 & 9 \\ 3913 & 25 \\ 6517 & 49 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 672 \\ 8 \end{Bmatrix} \quad a_2 = \frac{672}{8} = 84$$

Następna redukcja daje: $\underline{U}'' = \begin{Bmatrix} 1981 - 84.3^2 \\ 3913 - 84.5^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1981 - 84.9 \\ 3913 - 84.25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1225 \\ 1813 \end{Bmatrix}$

W **dalszym ciągu znajdziemy spółczynnik** $/x^1/$:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1225 & 3 \\ 1813 & 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 588 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad a_1 = \frac{588}{2} = 294$$

Wreszcie ostatnia redukcja: $\underline{U}''' = \{1225 - 294.3^1\} = \{343\}$ **i ostatni spółczynnik:** $a_3 = \{343\}\ \frac{1}{2^0} = 343$

Wielomian stabelaryzowany ma więc postać algebraiczną:

$$U = 8\,x^3 + 84\,x^2 + 294\,x + 343.$$

W schemacie, wygodnym zwłaszcza w wypadku wielomianów wysokich stopni, rachunek miałby następujący przebieg:

X	U	N	X^3	U'	N'	X^2	U''	N''	X	U'''	N'''	X^0		
3	2197	-1	27	1981	1	9	1225	-1	3	343	1	$3^0 = 1$		
5	4913	3	125	3913	-2	25	1813	1	5					
7	9261	-3	343	6517	1	49								
9	15625	1	729											

$U \cdot N = 384$	$U'N' = 672$	$U'' \cdot N'' = 588$	$U'''N''' = 343$	
$N\,X^3 = 48$	$N'X^2 = 8$	$N''\,X = 2$	$N'''X^0 = 1$	
$a_3 = 8$	$a_2 = 84$	$a_1 = 294$	$a_0 = 343$	skąd

$$U = 8\,x^3 + 84\,x^2 + 294\,x + 343.$$

Inna postać rozwiązania zagadnienia obliczenia parametrów wielomianu.

Dość wygodna jest też postać gotowych wzorów dla całego krakowianu spółczynników. Otrzymać ją można rozwiązując zagadnienie algebraicznie i wyrażając rozwiązanie pod postacią krakowianową. Przy oznaczeniu przez r odwrotności stałej różnicy tablicowej Δ t.zn.

$$r = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \qquad \text{——— } 145$$

wzory takie wyglądają jak następuje:

Dla wielomianów dwuparametrowych:
/ funkcja liniowa /

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ X_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -r & 1 \\ r & 0 \\ 0 & -a_1 \end{Bmatrix} \qquad \text{——— } 146$$

Dla wielomianów trójparametrowych:
/"parabola kwadratowa"/

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ X_0 \\ X_0^2 \\ \Delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} r^2 & -r & 1 \\ -\,r^2 & r & \\ \frac{1}{2} r^2 & & \\ & -2\,a_2 & -a_1 \\ & & -a_2 \\ & -a_2 & \end{Bmatrix} \qquad \text{——— } 147$$

Dla wielomianów czteroparametrowych:
/"parabola sześcienna"/

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ X_0 \\ X_0^2 \\ X_0^3 \\ \Delta \\ \Delta^2 \\ X_0\Delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{6} r^3 & \frac{1}{2} r^2 & -r & 1 \\ \frac{1}{2} r^3 & -\,r^2 & r & \\ -\frac{1}{2} r^3 & \frac{1}{2} r^2 & & \\ \frac{1}{6} r^3 & & & \\ & -3\,a_3 & -2a_2 & -a_1 \\ & & -3a_3 & -a_2 \\ & & & -a_3 \\ & -3a_3 & -a_2 & \\ & & -a_3 & \\ & & -3a_3 & \end{Bmatrix} \qquad 148$$

Realizując te iloczyny krakowianowe wpisujemy najpierw wszystkie elementy pierwszego czynnika, oraz te elementy drugiego, które są już liczbowo znane, zapisując chwilowo nieznane pod postacią symboliczną. W miarę postępu obliczenia zastępujemy je potem liczbami.

Przykład liczbowy.

Dla czteroparametrowego wielomianu /por.str. 59 /, biorąc np: pierwsze cztery pozycje tablicy funkcyjnej:

X	U
0	24.91
2	25.86
4	29.09
6	33.61
8	38.43
10	42.55

napiszemy:

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24.91 \\ 25.86 \\ 29.09 \\ 33.61 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.020833 & 0.125000 & -0.500000 & 1 \\ 0.062500 & -0.250000 & 0.500000 & \\ -0.062500 & 0.125000 & & \\ 0.020833 & & & \\ & \overset{-3a_3}{+0.061884} & \overset{-2a_2}{-0.817536} & \overset{-a_1}{+0.260024} \\ & & \overset{-3a_3}{+0.061884} & \overset{-a_2}{-0.408768} \\ & & & \overset{-a_3}{+0.020628} \\ & \overset{-3a_3}{+0.061884} & \overset{-a_2}{-0.408768} & \\ & & \overset{-a_3}{+0.020628} & \\ & & \overset{-3a_3}{+0.061884} & \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.020628 \\ 0.408768 \\ -0.260024 \\ 24.91 \end{Bmatrix}$$

Równanie ma więc postać: $U = -0.02063\ X^3 + 0.40877\ X^2 - 0.26002\ x + 24.91000.$

Przekształcenie tabel funkcyjnych na szeregi potęgowe lepiej dokonywać j.n.

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad \underline{S} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{Bmatrix} \quad \underline{V} = \begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & & x_n^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix}$$

funkcyjny   spółczynnikowy   Vandermonda

t.zn. $\underline{S}\ \tau\underline{V} = \underline{U}$ skąd: $\boxed{\underline{S} = \underline{U}\ \underline{V}^{-1}}$

Interpolacja funkcji jednego argumentu w postaci nieregularnej /ogólnej/.

Przekształcenie nieregularnej tablicy wielomianowej na regularną.

Jeżeli czynności interpolacyjnego określania wartości, jaką przybiera wielomian:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n\ x^n \qquad \text{——— } 149$$

scharakteryzowany przez nieregularną tablicę funkcyjną:

x	U
x_0	U_0
x_1	U_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	U_n

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \neq \text{const.} \qquad \text{——— } 150$$

dla określonych wartości argumentu, mają być wykonywane wielokrotnie - najbardziej celową drogą jest przekształcenie tablicy nieregularnej na regularną i wykonywanie następnie czynności interpolacyjnych przez stosowanie wzorów interpolacji regularnej.

Nowe równoodległe wartości argumentu - będziemy je oznaczali przez $y_0\ y_1 \dots y_m$ lepiej przytem tak obrać, aby ich wartości krańcowe nie przekraczały granic zmienności wyznaczonych przez ciąg $x_0 x_1 \dots x_n$

Jeżeli oznaczymy przez $U_0'\ U_1' \dots U_m'$ nowe wartości wielomianu, t.zn. wartości jakie przybiera on dla wartości zmiennej x równych: $y_0\ y_1 \dots y_m$, wówczas zagadnienie zestawienia regularnej tablicy funkcyjnej:

$$\begin{array}{c|c} x & U \\ \hline y_0 & U_0' \\ y_1 & U_1' \\ \vdots & \vdots \\ y_m & U_m' \end{array} \qquad \Delta y = y_i - y_{i-1} = \text{const.} \quad \text{———— 151}$$

sprowadzi się w terminologii rachunku krakowianowego do obliczenia krakowianu $\underline{U}'$ na podstawie znajomości krakowianów: $\underline{U}$ $\underline{x}$ $\underline{y}$ gdzie wyraźnie:

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{Bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \underline{U}' = \begin{Bmatrix} U_0' \\ U_1' \\ \vdots \\ U_m' \end{Bmatrix} \quad \text{———— 152}$$

Rozpoczniemy od wprowadzenia definicji pewnego przydatnego w zagadnieniu krakowianu, który nazwiemy "krakowianem porównawczym dwóch kolumn", poczem podamy wzory, rozwiązujące zagadnienie i przerobimy przykłady liczbowe, pozostawiając na koniec uzasadnienie teoretyczne.

Określenie.

Będziemy nazywać krakowianem porównawczym kolumny $\underline{x}$ i kolumny $\underline{y}$ i znakować przez $\underline{K}_{xy}$ krakowian:

$$\boxed{\underline{K}_{xy} = \begin{Bmatrix} y_0 & y_1 & y_m \\ (y_0-x_0) & (y_1-x_0) & (y_m-x_0) \\ (y_0-x_1)(y_0-x_0) & (y_1-x_1)(y_1-x_0) & (y_m-x_1)(y_m-x_0) \\ (y_0-x_2)(y_0-x_1)(y_0-x_0) & (y_1-x_2)(y_1-x_1)(y_1-x_0) & (y_m-x_2)(y_m-x_1)(y_m-x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_0-x_{n-1})\cdots\cdots(y_0-x_0) & (y_1-x_{n-1})\cdots\cdots(y_1-x_0) & (y_m-x_{n-1})\cdots\cdots(y_m-x_0) \end{Bmatrix}} \text{—153}$$

t.j. krakowian który zbudować można w następujący sposób:

1/ oznaczyć układ osiowy, którego oś kolumnową stanowi kolumna $\underline{x}$ bez ostatniego elementu, zaś oś wierszową kolejne elementy kolumny $\underline{y}$ rozpisanej w wiersz.

Pola tablicy ograniczonej przez taki układ osiowy:

$$\begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{array} \begin{Bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots\cdots & y_m \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{Bmatrix} \quad \text{———— 154}$$

stanowić będą po wypełnieniu łącznie z elementami osi wierszowej krakowian $\underline{K}_{xy}$. Wypełnienie pól tablicy - najwygodniej prowadzić je kolumnami - podlega następującym regułom:

a/ w pierwszym wierszu wpisujemy różnicę między spółrzędną kolumnową i wierszową danego pola, /a więc np: w pierwszym wierszu drugiej kolumny: $y_1 - x_0$ /.

b/ W każdym następnym wierszu wpisujemy różnicę między spółrzędną kolumnową i wierszową danego pola, pomnożoną przez element znajdujący się bezpośrednio nad obliczonym elementem. / a więc np: w drugim wierszu drugiej kolumny: $/y_1 - x_1//y_1 - x_0//$.

Szczególnym przypadkiem krakowianu porównawczego będzie krakowian K_{xx} otrzymywany przy identyczności obu kolumn. Z określenia wynika, że będzie to zawsze krakowian kwadrasty o postaci trójkątnej /z zerami pod główną przekątną/.

Ilustrując sposób obliczenia krakowianu porównawczego napiszemy np:

$$\text{dla kolumn:}\quad \begin{matrix}3\\4\\5\\8\\10\end{matrix} \quad \text{oraz:} \quad \begin{matrix}6\\8\\12\\15\\20\end{matrix} \qquad \underline{K}_{ab} = \begin{array}{r} \\ 3\\ 4\\ 5\\ 8\end{array}\left\{\begin{array}{rrrrr} 6 & 8 & 12 & 15 & 20\\ 3 & 5 & 9 & 12 & 17\\ 6 & 20 & 72 & 132 & 272\\ 6 & 60 & 504 & 1320 & 4080\\ -12 & 0 & 2016 & 9240 & 48960 \end{array}\right\}$$

$$\text{dla kolumn:}\quad \begin{matrix}6\\8\\12\\15\\20\end{matrix} \quad \text{oraz:} \quad \begin{matrix}3\\4\\5\\8\\10\end{matrix} \qquad \underline{K}_{ba} = \begin{array}{r} \\ 6\\ 8\\ 12\\ 15\end{array}\left\{\begin{array}{rrrrr} 3 & 4 & 5 & 8 & 10\\ -3 & -2 & -1 & 2 & 4\\ 15 & 8 & 3 & 0 & 8\\ -135 & -64 & -21 & 0 & -16\\ 1620 & 704 & 210 & 0 & 80 \end{array}\right\}$$

$$\text{dla kolumn identycznych np:}\quad \begin{matrix}3 & 3\\6 & 6\\8 & 8\\12 & 12\end{matrix} \qquad \text{będzie } \underline{K}_{aa} = \begin{array}{r} \\ 3\\ 6\\ 8\end{array}\left\{\begin{array}{rrrr} 3 & 6 & 8 & 12\\ 0 & 3 & 5 & 9\\ 0 & 0 & 10 & 54\\ 0 & 0 & 0 & 216 \end{array}\right\}$$

W konsekwencji wprowadzonych określeń otrzymać można następującą regułę przekształcania tablicy nieregularnej na regularną, a właściwie ogólnie: regułę przekształcania tabeli wielomianowej o argumentach $\underline{x}$ na tabelę wielomianową o argumentach $\underline{y}$:

dla przekształcenia tabeli wielomianowej o argumentach $\underline{x}$ na tabelę wielomianową o argumentach $\underline{y}$ należy krakowian wartości wielomianu pierwszej tabeli $\underline{U}$ pomnożyć przez krakowian przekształcający, równy iloczynowi krakowianu porównawczego kolumny $\underline{x}$ i kolumny $\underline{y}$ przez odwrotność krakowianu porównawczego kolumny $\underline{x}$ i kolumny $\underline{x}$.

Otrzymamy w wyniku mnożenia krakowian $\underline{U}'$ będzie krakowianem tabeli o argumentach $\underline{y}$:

$$\boxed{\underline{U}' = \underline{U} \cdot \left(\underline{K}_{xy} \cdot \underline{K}_{xx}^{-1}\right)} \qquad 155$$

Suma elementów każdej kolumny krakowianu przekształcającego $\underline{P} = \underline{K}_{xy} \cdot \underline{K}_{xx}^{-1}$ winna być jednością:

$$\Sigma p_i = 1 \qquad 156$$

Odwrotność znajduje się łatwo - bezpośrednio z określenia odwrotności: $\underline{a} \cdot \underline{a}^{-1} = \tau$ - gdyż krakowian $\underline{K}_{xx}$, jak to już zauważyliśmy, zawsze będzie krakowianem kwadrastym o postaci trójkątnej.

Przykład liczbowy.

Zamienić tabelę:

x	U
3	1
5	125
9	2197
13	9261

na tabelę o argumentach:

4
6
8
10

Znajdujemy $\underline{K_{xx}^{-1}}$ z równania:

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{array} \overset{\underline{K_{xx}}}{\begin{Bmatrix} 3 & 5 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 24 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 320 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{K_{xx}^{-1}}}{\begin{bmatrix} 0.333333 & 0 & 0 & 0 \\ -0.833333 & 0.500000 & 0 & 0 \\ 0.083333 & -0.125000 & 0.041667 & 0 \\ -0.008333 & 0.015625 & -0.010417 & 0.003125 \end{bmatrix}} = \overset{\underline{I}}{\begin{Bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{Bmatrix}}$$

Obliczamy krak.przeksz. $\underline{P}$ z równania:

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{array} \overset{\underline{K_{xy}}}{\begin{Bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 15 & 35 \\ 5 & -9 & -15 & 35 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{K_{xx}^{-1}}}{\begin{Bmatrix} & " & & " & \end{Bmatrix}} =$$

$$\underline{K_{xy}} \cdot \underline{K_{xx}^{-1}} = \underline{P}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.375001 & -0.175005 & -0.125010 & 0.125000 \\ 0.703125 & 0.984375 & 0.390625 & -0.328125 \\ 0.093751 & 0.218755 & 0.781260 & 1.093750 \\ 0.015625 & -0.028125 & -0.046875 & 0.109375 \end{Bmatrix}$$

i po skontrolowaniu, że suma elementów krakowianu przekształcającego w każdej kolumnie: 1 1 1 1

znajdujemy tablicę przekształconą: $\underline{U}$

$$\underline{U} \qquad \underline{P} \qquad = \underline{U'}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 125 \\ 2197 \\ 9261 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} & " & & " & \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27 \\ 343 \\ 1331 \\ 3375 \end{Bmatrix}$$

Mamy więc ostatecznie:

/x/	U
4	27
6	343
8	1331
10	3375

Obliczenie krakowianu przekształcającego $\underline{P} = \underline{K_{xy}}\ \underline{K_{xx}^{-1}}$ jest skontrolowane przez otrzymanie jedności, jako sum elementów jego kolumn. Mnożenie $\underline{U} \cdot \underline{P} = \underline{U'}$ skontroluje licznik obrotu arytmometru na którym, w razie nastawiania w liczniku nastawień wielkości U_i otrzymywać będziemy po przemnożeniu każdej kolumny - liczby szeregu naturalnego.

Sposób postępowania nie zmieni się w niczym, gdy ilości elementów w tabelach funkcyjnych są różne. Weźmy przypadek, gdy ilość elementów w tabeli przekształconej jest mniejsza:

Przykład liczbowy:

Zamienić tabelę:

x	U
4	80
7	194
12	504

na tabelę o argumentach: 6, 10

Jak poprzednio znajdujemy najpierw $\underline{K_{xx}^{-1}}$ z równania:

$$\begin{array}{c}\\ 4\\ 7\end{array}\underset{K_{xx}}{\begin{Bmatrix} 4 & 7 & 12\\ 0 & 3 & 8\\ 0 & 0 & 40\end{Bmatrix}}\cdot\underset{K_{xx}^{-1}}{\begin{Bmatrix} 0.250000 & 0 & 0\\ -0.583333 & 0.333333 & 0\\ 0.041667 & -0.066667 & 0.025000\end{Bmatrix}} = \underset{\tau}{\begin{Bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{Bmatrix}}$$

Poczem obliczamy krakowian przekształcający P z równania:

$$\begin{array}{c}\\ 4\\ 7\end{array}\underset{K_{xy}}{\begin{Bmatrix} 6 & 10\\ 2 & 6\\ -2 & 18\end{Bmatrix}}\cdot\underset{K_{xx}^{-1}}{\begin{Bmatrix} & '' & & '' & \end{Bmatrix}} = \underset{P}{\begin{Bmatrix} 0.25 & -0.25\\ 0.80 & 0.80\\ -0.05 & 0.45\end{Bmatrix}}$$

i po skontrolowaniu, że suma elementów krakowianu przekształcającego w każdej kolumnie: 1 1

znajdujemy tablicę przekształconą $\underline{U}' = \underline{U} \cdot \underline{P}$

$$\underline{U}' = \begin{Bmatrix} 80\\ 194\\ 504\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} '' & & '' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150\\ 362\end{Bmatrix}$$

	/x/	U
	6	150
t.zn.	10	362

Weźmy jeszcze ten sam przykład, zakładając większą ilość elementów w tabeli przekształconej.
Weźmiemy przytem elementy rozłożone nieregularnie.

Przykład liczbowy.

Zamienić tabelę:

x	U
4	80
7	194
12	504

na tabelę o argumentach: 5, 6, 8, 11

Krakowian porównawczy $\underline{K_{xx}}$ i jego odwrotność $\underline{K_{xx}^{-1}}$ obliczyliśmy już dla identycznej tablicy $\underline{U}$ w poprzednim przykładzie - nie będziemy więc tych czynności powtarzać, a zestawimy odrazu krakowian porównawczy $\underline{K_{xy}}$ i znajdziemy:

$$\begin{array}{c}\\ 4\\ 7\end{array}\begin{Bmatrix} 5 & 6 & 8 & 11\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ -2 & -2 & 4 & 28\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 0.250000 & 0 & 0\\ -0.583333 & 0.333333 & 0\\ 0.041667 & -0.066667 & 0.025000\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.583333 & 0.250000 & -0.166664 & -0.166654\\ 0.466667 & 0.800000 & 1.066664 & 0.466654\\ -0.050000 & -0.050000 & 0.100000 & 0.700000\end{Bmatrix}$$

poczem po skontrolowaniu: 1 1 1 1

$$\underline{U}' = \begin{Bmatrix} 80\\ 194\\ 504\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} '' & & '' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 112\\ 150\\ 244\\ 430\end{Bmatrix}$$

Szczególnym wypadkiem będzie jednokolumnowość drugiej tabeli. Jest to wypadek interpolowania dla pojedyńczego elementu. Rozwiążemy taki przykład metodą ogólną, nadmieniając, że istnieje możliwość cokolwiek krótszego rozwiązania, którą rozpatrzymy oddzielnie w dalszym ciągu /str. 72 wzór 174 /.

Przykład liczbowy.

Wyinterpolować z tabeli:

x	U
5	112
10	962
17	4840
20	7912

wartość wielomianu U' dla wartości zmiennej $x = y = 15$.

Rachunek odwrotności krakowianu $\underline{K_{xx}}$ daje:

$$\begin{array}{c} \\ 5 \\ 10 \\ 17 \end{array} \overset{\underline{K_{xx}}}{\begin{Bmatrix} 5 & 10 & 17 & 220 \\ 0 & 5 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 84 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 450 \end{Bmatrix}} \cdot \overset{\underline{K_{xx}^{-1}}}{\begin{Bmatrix} 0.200000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.400000 & 0.200000 & 0 & 0 \\ 0.016667 & -0.028571 & 0.011905 & 0 \\ -0.001111 & 0.002857 & -0.003968 & 0.002222 \end{Bmatrix}} = \overset{\underline{\tau}}{\begin{Bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{Bmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} \\ 5 \\ 10 \\ 17 \end{array} \overset{\underline{K_{xy}}}{\begin{Bmatrix} 15 \\ 10 \\ 50 \\ -100 \end{Bmatrix}} \overset{\underline{K_{xx}^{-1}}}{\begin{Bmatrix} \quad " \quad & \quad " \quad \end{Bmatrix}} = \overset{\underline{P}}{\begin{Bmatrix} -0.05558 \\ 0.28575 \\ 0.99205 \\ -0.22222 \end{Bmatrix}}$$

$$1.$$

i ostatecznie $$U' = \begin{Bmatrix} 112 \\ 962 \\ 4840 \\ 7912 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \quad \end{Bmatrix} = 3312$$

Uzasadnienie teoretyczne reguły przekształcania tabeli wielomianowej.

Weźmy wielomian stopnia n zmiennej x /149/, który tu przepisujemy:

$$U = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots a_n x^n \qquad \text{———} \quad 157$$

przybierający dla wartości $x = x_i$ /$i = 0.1.2\ldots n$/ wartość $U = U_i$, t.zn. spełniający tablicę funkcyjną:

x	U
x_0	U_0
x_1	U_1
x_2	U_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	U_n

——— 158

Napiszmy ten wielomian pod postacią:

$$U = \alpha_0 U_0 + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots\ldots \alpha_n U_n$$

czyli:*) $$u = \underline{\alpha} \cdot \underline{U} = \underline{U} \cdot \underline{\alpha} \qquad \text{———} \quad 159$$

gdzie wyraźnie:

$$\underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} \qquad \underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \qquad \text{———} \quad 160$$

i postawmy sobie najpierw za zadanie znaleźć wartość krakowianu $\underline{\alpha}$, czyli jego elementów $\alpha_0\ \alpha_1 \ldots \alpha_n$ wyrażając ten zespół - znany w algebrze jako zespół spółczynników wzoru interpolacyjnego Lagrange'a - pod postacią równania krakowianowego, wiążącego elementy tablicy $x_0\ x_1 \ldots x_n$ z wartością zmiennej. Weźmy w tym celu zespół $n+1$ wielomianów zmiennej x stopnia niewyższego od n , czyli zespół wielomianów, które wolno nam uważać za wielomiany stopnia n.

*) Piszemy tu $\alpha \cdot U = U \cdot \alpha$. Obydwa krakowiany są tu bowiem jednokolumnowe, a w tym wypadku przemienność iloczynu oczywiście istnieje, na co zresztą już zwracaliśmy uwagę na str.

Niech będą to wielomiany następujące:

$$U^{0} = x \qquad U^{(I)} = (x - x_0) \qquad U^{(II)} = (x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots U^{(n)} = (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1}) \qquad\text{———— 161}$$

Zestawmy teraz krakowian którego poszczególnymi kolumnami będą zespoły wartości, jakie przybierają obrane wielomiany /161/, gdy argument x przybiera kolejno wartości $x_0 x_1 x_2 \ldots x_n$.
Otrzymamy, pisząc to wyraźnie:

Argument: Wielomiany:

$$\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \quad \left\{\begin{array}{cccc} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & (x_1 - x_0) & 0 & 0 \\ x_2 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & (x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{array}\right\} \quad 162$$

Każda kolumna w napisanym powyżej krakowianie jest zespołem wartości przybieranych przez pewien wielomian stopnia n, gdy wartość argumentu staje się kolejno równą $x_0 x_1 \ldots x_n$.
Jeżeli jednak taki właśnie zespół przedmnożymy przez krakowian α otrzymamy w wyniku mnożenia wartość wielomianu /por.159/. Wynika stąd że przedmnażając cały krakowian /162/ przez krakowian α otrzymamy w wyniku mnożenia skolumnowany zespół wielomianów /161/. Mamy więc:

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccccc} x_0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ x_1 & (x_1 - x_0) & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_1) \quad 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_n & (x_n - x_0) & (x_n - x_0) & (x_n - x_1) \quad . & (x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} x \\ (x - x_0) \\ (x - x_0)\,(x - x_1) \\ - - - - - \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad\text{———— 163}$$

lub, po przeniesieniu na drugą stronę równania kwadrastego krakowianu lewej strony równania przy przetransponowaniu i odwróceniu:

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} x \\ (x - x_0) \\ (x - x_0)(x - x_1) \\ - - - - - \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots\ldots\ldots & x_n \\ 0 & (x_1 - x_0) & (x_2 - x_0) & & (x_n - x_0) \\ 0 & 0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & (x_n - x_0)(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & (x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{array}\right\}^{-1} 144$$

Ostatni krakowian jest jednak krakowianem porównawczym kolumny x i kolumny x, który znakowaliśmy $\underline{K_{xx}}$ /por.określenie 153 /. Mamy więc ostatecznie dla określenia zespołu czynników Lagrange'a równanie:

$$\boxed{\underline{\alpha} = \left\{\begin{array}{c} x \\ (x - x_0) \\ (x - x_0)(x - x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \end{array}\right\} \cdot \underline{K_{xx}}^{-1}} \qquad\text{———— 165}$$

które pozwala na napisanie szeregu interpolacyjnego Lagrange'a /159/ pod postacią:

$$u = \underline{U}\left(\left\{\begin{array}{c} x \\ (x-x_0) \\ (x-x_0)\,(x-x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_{n-1}) \end{array}\right\} \cdot \underline{K_{xx}^{-1}}\right) = \underline{U} \cdot \tau\, \underline{K_{xx}^{-1}} \cdot \left\{\begin{array}{c} x \\ (x-x_0) \\ (x-x_0)\,(x-x_1) \\ \\ (x-x_0)\,(x-x_1)\;\cdots\;(x-x_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad 166$$

Powróćmy teraz do przekształcenia tablicy wielomianowej o argumentach x na tablicę o argumentach y, to znaczy tablicy:

$$\begin{array}{c|c} x & U \\ \hline x_0 & U_0 \\ x_1 & U_1 \\ x_2 & U_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & U_n \end{array} \quad \text{na tablicę:} \quad \begin{array}{c|c} y & U \\ \hline y_0 & U_0' \\ y_1 & U_1' \\ y_2 & U_2' \\ \vdots & \vdots \\ y_m & U_m' \end{array} \qquad 167$$

Nadając zmiennej x w równaniu /166/ kolejno wartości: $y_0\ y_1\ y_2 \cdots y_m$ otrzymywać będziemy wartości jakie wielomian U przybiera przy tych wartościach zmiennej, to znaczy wartości $U_0'\ U_1' \cdots U_m'$. Wyrażą to równania:

$$u_0' = \underline{U} \cdot \tau\, \underline{K_{xx}^{-1}} \cdot \left\{\begin{array}{c} y_0 \\ y_0 - x_0 \\ (y_0 - x_0)\,(y_0 - x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (y_0 - x_0)\,(y_0 - x_1)\;\cdots\;(y_0 - x_{n-1}) \end{array}\right\}$$

$$U_1' = \underline{U} \cdot \tau\, \underline{K_{xx}^{-1}} \cdot \left\{\begin{array}{c} y_1 \\ (y_1 - x_0) \\ (y_1 - x_0)\,(y_1 - x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (y_1 - x_0)\,(y_1 - x_1)\;\cdots\;(y_1 - x_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad 168$$

- -

$$U_m' = \underline{U} \cdot \tau\, \underline{K_{xx}^{-1}} \cdot \left\{\begin{array}{c} y_m \\ (y_m - x_0) \\ (y_m - x_0)\,(y_m - x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (y_m - x_0)\,(y_m - x_1)\;\cdots\;(y_m - x_{n-1}) \end{array}\right\}$$

co można na podstawie definicji mnożenia krakowianowego napisać pod postacią jednego równania:

$$\underline{U'} = \underline{U} \cdot \tau\, \underline{K_{xx}^{-1}} \left\{\begin{array}{c|c|c} y_0 & y_1 & y_m \\ y_0 - x_0 & y_1 - x_0 & (y_m - x_0) \\ (y_0 - x_0)\,(y_0 - x_1) & y_1 - x_0\ \ y_1 - x_1 & (y_m - x_0)\,(y_m - x_1) \\ (y_0 - x_0)\,(y_0 - x_1)\cdots(y_0 - x_{n-1}) & (y_1 - x_0)\,(y_1 - x_1)\cdots(y_1 - x_{n-1}) & (y_m - x_0)\,(y_m - x_1)\cdots(y_m - x_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad 169$$

gdzie $\underline{U'}$ ma znaczenie określone wzorem /152/, to znaczy jest kolumną: $\left\{\begin{array}{c} U_0' \\ U_1' \\ U_m' \end{array}\right\}$, 170

Ponieważ zaś ostatni krakowian równania /169/, nazwany przez nas krakowianem porównawczym kolumny $\underline{x}$ i kolumny $\underline{y}$, oznaczyliśmy $\underline{K_{xy}}$ /153/, otrzymamy:

$$\underline{u'} = \underline{U} \cdot \tau\, \underline{K_{xx}^{-1}} \cdot \underline{K_{xy}} \qquad 171$$

lub, po zastosowaniu twierdzenia asocjatywnego:

$$\boxed{\underline{u}' = \underline{U} \bullet \left(\underline{K}_{xy} \bullet \underline{K}_{xx}^{-1}\right) = \underline{U} \bullet \underline{P}} \qquad \text{——— } 172$$

co jest już ostateczną postacią równania przekształcającego tabelę o argumentach x na tabelę o argumentach y /155/. Z ogólności otrzymanego wzoru wynika, że musi on być słuszny i dla szczególnego wypadku gdy wszystkie wartości wielomianu U w tablicy $\underline{U}$ są sobie równe: $u_0 = u_1 \dots = u_n$. Lecz wówczas muszą być równe tej samej wartości wszystkie wielomiany tablicy $\underline{U}'$ t.zn.: $U_0' = U_1' = \dots U_m' = U_0$. Że zaś dowolny z tych wielomianów np: U_i' otrzymujemy w drodze mnożenia krakowianu $\underline{U}$ przez określoną /i-tą / kolumnę krakowianu $\underline{P}$ /172/, musi zachodzić - przy oznaczeniu przez $p_0\ p_1 \dots p_n$ elementów tej kolumny - równanie:

$$u_0 p + u_0 p_1 + u_0 p_2 \dots + u_0 p_n = U_0 \quad \text{to znaczy:} \quad U_0 \Sigma p = U_0$$

Wymaga to istnienia związku: $\Sigma p_i = 1$ w każdej kolumnie krakowianu przekształcającego $\underline{P}$. Ten związek:

$$\boxed{\Sigma p_i = 1} \qquad \text{——— } 173$$

wykorzystywaliśmy dla kontroli obliczenia elementów krakowianu przekształcającego $\underline{P}$. /str. 66 /

Interpolacja dla pojedyńczego argumentu - oznaczmy wartość jego przez y , przy zachowaniu oznaczenia x_i dla argumentów tablicy danej w zagadnieniu /167 / - może być oczywiście dokonana na zasadzie wzoru ogólnego /172 /t.j. jako przekształcenie /n+1 /elementowej tablicy $\underline{U}$ na jednoelementową tablicę U.'
Krakowian porównawczy $\underline{K}_{xy}$ będzie wówczas jednokolumnowym krakowianem - mamy jedną tylko wartość y - i mieć będzie postać:

$$K_{xy} = \left\{ \begin{matrix} y \\ (y-x_0) \\ (y-x_0)\ (y-x_1) \\ \dots\dots\dots \\ (y-x_0)(y-x_1)(y-x_2) \dots (y-x_{n-1}) \end{matrix} \right\}$$

Tak postąpiliśmy w przykładzie liczbowym na str. 69.
Zagadnienie interpolacji dla pojedyńczego argumentu można jednak rozwiązać nieco krócej, omijając potrzebę bezpośredniego obliczenia odwrotności, a obliczając krakowian $\underline{\alpha}$ z równania /165/ napisanego pod postacią:

$$\underline{\alpha} \bullet \tau \underline{K}_{xx} = \underline{K}_{xy} \qquad \text{——— } 174$$

w drodze mnożenia i znajdując: $\underline{u' = \underline{\alpha} \bullet \underline{U}}$ $\underline{\text{przyczem } \Sigma\alpha_i = 1 \text{ /kontrola/}}$

Przykład liczbowy:

Wyinterpolować z tablicy: wartość U=U' dla x=y=10.

x	u
4	80
7	194
12	504

$$\text{Mamy } \underline{K}_{xx} = \begin{array}{r} \\ 4 \\ 7 \end{array} \left\{ \begin{matrix} 4 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 40 \end{matrix} \right\} \quad \text{t.zn. } \tau \underline{K}_{xx} = \left\{ \begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 12 & 8 & 40 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{dalej } \underline{K}_{xy} = \begin{array}{r} \\ 4 \\ 7 \end{array} \left\{ \begin{matrix} 10 \\ 6 \\ 18 \end{matrix} \right\}. \text{ Z równania /174/: } \underset{\underline{\alpha}}{\left\{ \begin{matrix} -0.25 \\ 0.80 \\ 0.45 \end{matrix} \right\}} \underset{\tau \underline{K}_{xx}}{\left\{ \begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 12 & 8 & 40 \end{matrix} \right\}} = \underset{\underline{K}_{xy}}{\left\{ \begin{matrix} 10 \\ 6 \\ 18 \end{matrix} \right\}}$$

$$\text{skąd } U' = \underline{\alpha} \bullet \underline{U} = \left\{ \begin{matrix} -0.25 \\ 0.80 \\ 0.45 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 80 \\ 194 \\ 504 \end{matrix} \right\} = 362.$$

Obliczenie parametrów wielomianu z tablicy nieregularnej.

Pomimo, że obliczenie parametrów wielomianu bezpośrednio z tablicy nieregularnej jest stosunkowo uciążliwe - i praktyczniej jest przekształcić tablicę na regularną poczem określać parametry jednym z rozpatrzonych uprzednio sposobów /str.63 /, podamy też sposób rozwiązania bezpośredniego.
Opiera się on na następującym rozumowaniu: Wyraz wolny, czyli spółczynnik a_0 wielomianu:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \qquad 175$$

jest wartością jaką przybiera wielomian dla zerowej wartości zmiennej niezależnej.
Krakowian porównawczy $\underline{K}_{xy}$ /por.str.65 określenie 153 / dla tej zerowej wartości zmiennej niezależnej $x=y=0$ przybierze wartość $\underline{K}_{x0}$:

$$\underline{K}_{x0} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ -x_0 \\ x_0 x_1 \\ -x_0 x_1 x_2 \\ \vdots \\ (-1)^n x_0 x_1 \ldots x_{n-1} \end{matrix}\right\} \qquad 176$$

Jeżeli więc w równaniu zasadniczym /155/: $U' = \underline{U} \,/\underline{K}_{xy} \cdot \underline{K}_{xx}^{-1}/$ wyrażającym wartość krakowianu wielomianów - względnie przy jednokolumnowości $\underline{K}_{xy}$ wartość wielomianu U' - podstawimy $\underline{K}_{xy} = \underline{K}_{x0}$, otrzymamy wyraz wolny a_0. Mamy wtedy:

$$\boxed{a_0 = \underline{U} \,/\underline{K}_{x0} \cdot \underline{K}_{xx}^{-1}/} \qquad 177$$

$$\text{lub } a_0 = \underline{U} \cdot \underline{K} \qquad 178$$

gdzie oznaczyliśmy przez K iloczyn krakowianów, które w dalszym toku rozumowania nie będą ulegać zmianie:

$$\underline{K} = \underline{K}_{x0} \cdot \underline{K}_{xx}^{-1}$$

Po znalezieniu spółczynnika a_0 możemy jednak "obniżyć stopień wielomianu", to znaczy odjąć od każdej wartości U_i krakowianu $\underline{U}$ wartość a_0 i podzielić rezultat przez odpowiednią wartość argumentu x_i /$x_i \neq 0$ /.
Taki "zredukowany" krakowian $\underline{U}$ - oznaczmy go np: przez $\underline{U}'$, t.zn.wyraźnie:

$$\underline{U}' = \left\{\begin{matrix} U_0' \\ U_1' \\ \vdots \\ U_n' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{x_0}/U_0 - a_0/ \\ \frac{1}{x_1}/U_1 - a_0/ \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n}/U_n - a_0/ \end{matrix}\right\}$$

jest zespołem wielomianów: $U' = a_1 + a_2 x + \ldots a_n x^{n-1}$

o wyrazie wolnym a_1. Możemy więc dla znalezienia wartości a_1 postąpić zupełnie tak samo, jak postąpiliśmy poprzednio dla znalezienia wartości a_0 t.zn: pomnożyć zredukowany krakowian $\underline{U}'$ przez krakowian $\underline{K}$, który - z uwagi na niezmienność argumentów - zmianie nie ulega. Otrzymujemy więc:

$$a_1 = \underline{U}' \cdot \underline{K} \qquad 179$$

Powtarzając n krotnie takie postępowanie, otrzymamy kolejno wszystkie parametry a_i wielomianu.
Warto przypomnieć, że suma elementów krakowianu $\underline{K} = \underline{K}_{x0} \underline{K}_{xx}^{-1}$ musi być jednością, co służy stale jako kontrola mnożenia.

$$\Sigma K_i = 1 \qquad 180$$

Obliczenie wygodnie jest uschematyzować.

Przykład liczbowy.

Znaleźć parametry tablicy:

x	U
3	1
5	125
9	2197
13	9261

Mamy $\underline{K_{xo}} = \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 9 \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \\ -135 \end{Bmatrix}$

oraz z równania:

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{array} \underset{\underline{K_{xx}}}{\begin{Bmatrix} 3 & 5 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 24 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 320 \end{Bmatrix}} \underset{\underline{K_{xx}^{-1}}}{\begin{Bmatrix} 0.333333 & 0 & 0 & 0 \\ -0.833333 & 0.500000 & 0 & 0 \\ 0.083333 & -0.125000 & 0.041667 & 0 \\ -0.008333 & 0.015625 & -0.010417 & 0.003125 \end{Bmatrix}} = \underset{\underline{\tau}}{\begin{Bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{Bmatrix}}$$

$\underline{\tau}$ wartość $\underline{K_{xx}^{-1}}$

Stąd $\underline{K} = \underline{K_{xo}} \cdot \underline{K_{xx}^{-1}}$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \\ -135 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} & " & & " & \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.8731 \\ -5.4810 \\ 2.0292 \\ -0.4213 \end{Bmatrix} = \underline{K}$$

kontrola: 1.

Dalszy rachunek prowadzimy w schemacie, niewymagającym bliższych wyjaśnień.

X	$\frac{1}{x}$	$\underline{K}$	$\underline{U}$	$a_0 = UK$	$U_i - a_0$	$\frac{1}{x}(U_i - a_0) = U'$	$a_1 = \underline{U'}\underline{K}$	$U'_i - a_1$	$\frac{1}{x}(U'_i - a_1) = \underline{U''}$	$a_2 = \underline{U''}\underline{K}$	$U''_i - a_2$	$\frac{1}{x}(U''_i - a_2) = U'''$	$a_3 = \underline{U'''}\underline{K}$
3	0.33333	-4.8731	1	-125	126	42	150	-108	-36	-60	24	8	8
5	0.20000	-5.4810	125		250	50		-100	-20		40	8	
9	0.11111	2.0292	2197		2322	258		108	12		72	8	
13	0.07692	-0.4213	9261		9386	722		572	44		104	8	
		1											

Ostatecznie więc: $U = -125 + 150\,x - 60\,x^2 + 8\,x^3$.

Obliczenie parametrów wielomianu zapomocą zerowania tablic.

Szybką a przedewszystkim przejrzystą metodą określenia spółczynników wielomianu:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n \qquad (181)$$

danego pod postacią tablicy funkcyjnej:

x	U
x_0	U_0
x_1	U_1
x_2	U_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	U_n

(182)

jest też metoda zerowania tablic. Dla obliczenia spółczynników wielomianu zapomocą tej metody, stanowiącej jak to już mówiliśmy w rozdziale 1 jedynie swoiste uschematyzowanie rozwiązania układu równań liniowych przez rozkład na czynniki kanoniczne, należy:

1. Zestawić krakowian $\underline{I}$, powstający przez skolumnowanie kolejnych potęg argumentów oraz odpowiadających im wartości funkcji ze znakiem przeciwnym ze schematem krakowianu kanonicznego $\underline{g}$ o ilości wierszy równej ilości argumentów.
2. Zestawić krakowian II, powstający przez skolumnowanie ujemnego krakowianu jednostkowego - $\underline{\tau}$ o ilości wierszy równej ilości argumentów ze schematem krakowianu kanonicznego $\underline{h}$ również o ilości wierszy równej ilości argumentów.
3. Dokonać zzerowania tych tablic, to znaczy tak dobrać brakujące elementy

w krakowianach I i II, aby I x II = 0, t.zn.: aby iloczyn każdej kolumny krakowianu I przez każdą kolumnę krakowianu II był zerem. /Praca zerowania jest zupełnie automatyczna i sprowadza się do kolejnego mnożenia kolumn krakowianu I przez kolejne kolumny krakowianu II/.

4. Obliczyć spółczynniki wielomianu, które będą elementami krakowianu III./

$$\{\underline{a}\ \underline{1}\} = \{a_0 \ \ a_1 \ \ a_2 \ \dots a_n \ \ 1\}$$

zerującego się z wierszami krakowianu I. Obliczenie postępuje tu "od dołu", to znaczy umieszczamy schemat: $\{. \quad . \quad . \quad . \quad 1\}$ krakowianu a 1 pod krakowianem I. poczem mnożąc kolejno elementy krakowianu a 1 przez odpowiadające im, t.zn. położone w tych samych kolumnach elementy: a/ ostatniego, b/ przedostatniego ... n/ n+1 wiersza krakowianu I, wypełniamy stopniowo brakujące elementy krakowianu a 1. Po zzerowaniu n wierszy zadanie jest rozwiązane. Kontrolę jego stanowi sprawdzenie zzerowania się wierszowego krakowianu a 1 z początkowymi n wierszami krakowianu I.

Cały przebieg rozwiązania uwidoczniony jest na poniższym równaniu schematycznym, w którym elementy obliczane w procesie zerowania tablic zasymbolizowano przez punkty /duże/.

I						II				
1	X_0	X_0^2	...	X_0^n	$-U_0$	-1	0	0	··0··	0
1	X_1	X_1^2	...	X_1^n	$-U_1$	0	-1	0	··0··	0
1	X_2	X_2^2	...	X_2^n	$-U_2$	0	0	-1	0	0
⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	0	0	0	·-1·	0
1	X_n	X_n^2	···	X_n^n	$-U_n$	0	0	0	··0··	-1
1	•	•	⋱	•	•	•	•	•	⋱	•
0	1	•	⋱	•	•	•	•	•	⋱	•
0	0	1	⋱	•	•	0	0	•	⋱	•
0	0	0	⋱1	•	•	0	0	0	⋱	•
0	0	0	0	1	•	0	0	0	⋱0	•

$= \underline{0}$ —— 183

$\{\underline{a}_0\ \underline{1}\} = \mathrm{III} =$

$\dot{a}_0$	$\dot{a}_1$	$\dot{a}_2$	...$\dot{a}$...	$\dot{a}_n$	1

Przykład liczbowy.

Znajdziemy spółczynniki trójparametrowego wielomianu danego pod postacią tablicy funkcyjnej:

x	U
2	9
4	49
5	78

1	x	x^2	-U			
1	2	4	-9	-1	0	0
1	4	16	-49	0	-1	0
1	5	25	-78	0	0	-1
1	2	4	-9	1	1	1
0	1	6	-20	0	2	3
0	0	1	-3	0	0	3
-7	2	3	1			

skąd $U = -7 + 2X + 3X^2$

Dla ułatwienia śledzenia przebiegu rozwiązania liczby, otrzymywane w procesie zerowania tablic są wyodrębnione przez drobniejsze wymiary.

Znaczenie algebraiczne opisanej powyżej metody obliczenia parametrów wielomianu przy pomocy zerowania tablic sprowadza się do rozwiązania układu p równań o p niewiadomych /gdzie p=n + 1 jest ilością parametrów/. Równania te powstają z zasadniczego równania wielomianu przy podstawianiu wielkości X_i U_i /$i = 0.1.2...n$ /, jakie przybiera kolejno argument i funkcja w danej

tablicy wielomianowej.
Równania mają wyraźnie postać:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \cdots\cdots a_n x_0^n = U_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \cdots\cdots a_n x^n = U_1 \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 \cdots\cdots a_n x^n = U_n \end{array}$$

i są jednoznaczne z równaniem krakowianowym:

$$\underline{a} \cdot \tau \underline{X} = \underline{U}$$

gdzie: $\underline{a} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$ $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots\cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots\cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{Bmatrix}$ $\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix}$

Niewiadomą zagadnienia jest krakowian $\underline{a}$. Zastosowane rozwiązanie sprowadza się do rozłożenia transpozy znanego krakowianu lewej strony równania na czynniki kanoniczne, co było szczegółowo opisane na str.27,28 i czego nie będziemy powtarzać. Zastanowimy się jeszcze nad wypadkiem, gdy:

$$n + 1 > p$$

to znaczy ilość wierszy tablicy funkcyjnej jest większa od ilości parametrów wielomianu. Jeżeli stabelaryzowany wielomian jest wielomianem w znaczeniu matematycznym, sposób rozwiązania zagadnienia w niczym się zasadniczo nie zmieni. Do wyznaczenia parametrów wielomianu możemy użyć którekolwiek p równań, t.zn. w krakowianie $\underline{x}$ skreślimy poprostu n+1-p wierszy, a praktycznie rzecz biorąc skreślimy n+1-p wierszy tablicy funkcyjnej i z pozostałych wierszy zestawimy krakowian $\underline{x}$. Jeżeli jednak stabelaryzowana funkcja nie jest ściśle wielomianem, a postępowanie ma charakter aproksymacyjny, t.zn. zastępujemy funkcję $U=f/x/$ przez wielomian, należy zniekształcić wielkości U_i dodając do nich algebraicznie poprawki v_i przyczem, w myśl założeń rachunku wyrównawczego musi być:

$$\sum_{i=0}^{i=n} v_i v_i = \text{minimum.}$$

Do postępowania rachunkowego użyjemy więc w tym wypadku całego krakowianu $\underline{X}$. Tego rodzaju "wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów" w stosunku do regularnych tablic funkcyjnych rozpatrzyliśmy już na str. 55 konstatując tam wybitny efekt ekonomiczny postępowania krakowianowego. Rozwiążemy je teraz w postaci ogólnej, t.zn.nie zakładając stałości odstępów między argumentami tablicy.

Wyrównanie błędów metodą najmniejszych kwadratów w dowolnej tablicy funkcyjnej.

Wiadomo, że aby od "nadliczbowego" układu równań liniowych, t.zn: układu w którym ilość równań przekracza ilość niewiadomych przejść do układu "normalnego" t.zn. zawierającego ilość równań równą ilość niewiadomych, spełniających warunek najmniejszości sumy kwadratów poprawek jakie należy dla jednoznaczności zagadnienia dodać do wyrazów wolnych układu "nadliczbowego", przekształcić trzeba tabelę spółczynnikową układu nadliczbowego:

X	Y	Z	1
a_1	b_1	c_1	l_1
a_2	b_2	c_2	l_2
⋮	⋮	⋮	⋮
a_n	b_n	c_n	l_n

———————— 184

na tabelę spółczynnikową układu normalnego:*)

$$\begin{array}{cccc} X & Y & Z \ldots\ldots\ldots & 1 \\ \hline [aa] & [ab] & [ac] \ldots\ldots & [al] \\ [ab] & [bb] & [bc] \ldots\ldots & [bl] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [aN] & [bN] & [cN] & [lN] \end{array} \qquad 185$$

W symbolice krakowianowej wyrazi się to jako przekształcenie krakowianu:

$$\underline{P} = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots l_2 \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots l_n \end{matrix} \right\} \quad \text{na krakowian:} \quad \underline{\Pi} = \left\{ \begin{matrix} [aa] & [ab] & [ac] \ldots & [al] \\ [ab] & [bb] & [bc] \ldots & [bl] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [aN] & [bN] & [cN] & [Nl] \end{matrix} \right\} \qquad 186$$

co jak łatwo zauważyć osiągnąć można przez podniesienie do kwadratu pełnego krakowianu spółczynnikowego $\underline{P}$ z odrzuceniem ostatniego wiersza tego kwadratu. Można zresztą traktować krakowian $\underline{\Pi}$ jako iloczyn pełnego krakowianu spółczynnikowego przez krakowian niepełny, t.zn. bez kolumny wyrazów wolnych:

$$\underline{\Pi} = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & l_n \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots \end{matrix} \right\} \qquad 187$$

Tak czy inaczej przejście od krakowianu $\underline{P}$ danego w zagadnieniu do krakowianu $\underline{\Pi}$ żadnych trudności nie przedstawia. Mając zaś krakowian $\underline{\Pi}$ czyli krakowian układu równań normalnych, możemy ten układ równań rozwiązać w drodze zerowania tablic.

Cała różnica między postępowaniem rachunkowym przy obliczaniu parametrów wielomianu z tablicy spółczynnikowej bez danych nadliczbowych, a postępowaniem z danymi nadliczbowymi sprowadza się do tego, że w pierwszym wypadku do procesu zerowania tablic weźmiemy bezpośrednio krakowian potęgowy $\underline{P}$:

$$\underline{P} = \left\{ \begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^n & -U_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^n & -U_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^n & -U_n \end{matrix} \right\}$$

a w drugim wypadku krakowian potęgowy $\underline{P}$ zamienimy na krakowian $\underline{\Pi}$ i dopiero tego krakowianu użyjemy do procesu zerowania tablic.

Po obliczeniu wartości niewiadomych t.j.spółczynników wielomianu i sprawdzeniu ich wartości w opisany sposób, obliczamy zazwyczaj jeszcze wielkości poprawek v w drodze mnożenia wierszy krakowianu $\underline{P}$ przez wiersz spółczynnikowy: $\{\underline{a} \;\; \underline{1}\}$, co wyrazić można równaniem:

$$\underline{v} = \tau\{\underline{a} \;\; \underline{1}\} \cdot \tau\underline{P} \qquad \text{gdzie} \quad \underline{v} = \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_\tau \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \right\} \quad \{\underline{a} \;\; \underline{1}\} = \{a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_{p-1}\; 1\} \qquad 188$$

Przechodzimy do przykładu liczbowego, którego treść wzięto z W.M.Bradisa /Teorja i praktika wyczislenij /.

Przykład liczbowy.

Zakładając, że między procentową zawartością U cynku w stopie ołów+cynk, a temperaturą x topnienia stopu zachodzi związek: $U = a_0 + a_1 x + a_2 X^2$ wyrównać

*) Zadanie sprowadzić można oczywiście do przyrównania do zera cząstkowych pochodnych funkcji Σ /vv / względem zmiennych zagadnienia, co omawiają szczegółowo podręczniki rachunku wyrównawczego.

metodą najmniejszych kwadratów tablicę. /X U /:

X	U
197	46.7
235	63.7
270	77.8
283	84.0
292	87.5

	1	x	x^2	-U	v	U popr
P =	1	197	38809	-46.7	+1.1	47.8
	1	235	55225	-63.7	-1.4	62.3
	1	270	72900	-77.8	-0.2	77.6
	1	283	80089	-84.0	-0.2	83.8
	1	292	85264	-87.5	+0.7	88.2

II	5	1277	332287	-359.7	-1	0	0
	1277	332287	87868523	-94497.4	0	-1	0
	332287	87868523	23554546723	-25189908.8	0	0	-1
	1	255	66457	-71.9400	5	1277	332287
	0	1	451	-0.39537282	0	6652	3135338
	0	0	1	-0.0007893418	0	0	57712126

{a 1} =	9.440896	0.03937967	0.0007893418	1

czyli: $U = 9.44 + 0.03938\ X + 0.0007893\ X^2$

Za krakowianem P obliczono poszczególne poprawki v_i, oraz po ich dodaniu do wielkości U tablicy funkcyjnej, wyrównane czyli "poprawione" wartości funkcji: U popr: Wyczerpującym sprawdzeniem rachunku jest stwierdzenie, że podstawiając w równaniu funkcyjnym wartości argumentu otrzymywać będziemy wartości U popr.

Inne możliwości rozwiązywania zagadnienia interpolacyjnego.

Staraliśmy się w rozwiązywaniu zagadnień interpolacyjnych opierać się w miarę możliwości na wzorze Lagrange'a, wychodząc z założenia, że jest on lepiej przystosowany do postępowania krakowianowego od wzoru Newtona, gdyż oddziela w sposób zdecydowany podstawowe krakowiany zagadnienia: krakowian argumentów od krakowianu funkcji. Wzór Newtona wymaga oparcia się na pojęciu "wzniesień" czyli "różnic dzielonych" /niem: Steigungen, dividierte Differenzen/, stanowiącym funkcję mieszaną elementów obu zasadniczych krakowianów. Jakkolwiek w postępowaniu Newtonowskim daje się też osiągnąć duże uproszczenie przez zastosowanie rachunku krakowianowego, sprowadzające się w pierwszym rzędzie do zbędności obliczania wzniesień w oparciu o ich określenie /por. prof.T.Banachiewicz, Algebra krakowianowa/, nie uważaliśmy za wskazane omawiać tego tematu z tego też względu aby uniknąć pomieszania pojęć podstawowych. W interpolacji Newtonowskiej bowiem należałoby w nieco inny sposób definiować krakowiany porównawcze.

R o z d z i a ł III.

Interpolacja funkcji dwóch argumentów.

Interpolacja funkcji dwóch argumentów w postaci regularnej.

Niech $U = f /x\ y/$ będzie wielomianem dwóch zmiennych, stabelaryzowanym w regularnej tablicy funkcyjnej:

$$\Delta x = const_1 \qquad \begin{array}{c|cccccc} & Y_0 & Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m & Y_{m+1} \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ X_0 & U_{00} & U_{10} & U_{20} & \cdots & U_{m0} & U_{m+1.0} \\ X_1 & U_{01} & U_{11} & U_{21} & \cdots & U_{m1} & U_{m+1.1} \\ X_2 & U_{02} & U_{12} & U_{22} & \cdots & U_{m2} & U_{m+1.2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & U_{0n} & U_{1n} & U_{2n} & \cdots & U_{mn} & U_{m+1.n} \\ X_{n+1} & U_{0.n+1} & U_{1.n+1} & U_{2.n+1} & \cdots & U_{m.n+1} & U_{m+1.n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array} \qquad \Delta y = const_2 \qquad \text{———— 189}$$

i niech X i Y będą wartościami argumentów, dla których poszukujemy odpowiadającej im wielkości wielomianu U_{xy}, przyczem:

$$x_0 < x < x_1 \qquad y_0 < y < y_1 \qquad \text{———— 190}$$

Krakowiany złożone z elementów poszczególnych kolumn, czyli krakowiany:

$$\underline{U_i} = \left\{\begin{bmatrix} U_{i0} \\ U_{i1} \\ U_{i2} \\ \vdots \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{———— 191}$$

będą zbiorami wartości, jakie przybiera wielomian $U = f /x\ y/$ przy ustalonej wartości argumentu $y = y_j$ i zmieniającej się wartości argumentu x. Podobnie krakowiany, złożone z elementów poszczególnych wierszy, czyli krakowiany:

$$\underline{U_j} = \left\{\begin{bmatrix} U_{0j} \\ U_{1j} \\ U_{2j} \\ \vdots \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{———— 192}$$

będą zbiorami wartości, jakie przybiera wielomian $U=f /x\ y/$ przy ustalonej wartości argumentu $x=x_j$ i zmieniającej się wartości argumentu y. Przypuśćmy, że, badając w znany nam sposób te krakowiany przy pomocy krakowianów $\underline{N}$, ustaliliśmy, że wielomiany reprezentowane przez kolumny są stopnia niewyższego od n /względem x/, zaś wielomiany, reprezentowane przez wiersze, są stopnia niewyższego od m /względem y/.

Niech:

$$\underline{A} = \left\{\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}\right\} \quad \text{oraz} \quad \underline{B} = \left\{\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{———— 193}$$

będą krakowianami interpolacyjnymi, odpowiadającymi odnośnym wartościom ułamków interpolacyjnych:

dla kolumn $K_x = \frac{x - x_0}{\Delta x}$ oraz dla wierszy: $K_y = \frac{y - y_0}{\Delta y}$ ——194

zaś $\underline{U}$ niech będzie krakowianem o /n+1/ wierszach i /m+1/ kolumnach, którego elementem początkowym jest U_{00}, t.zn. wyraźnie:

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_{00} & U_{10} & \dots & U_{m0} \\ U_{01} & U_{11} & \dots & U_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{0n} & U_{1n} & & U_{mn} \end{Bmatrix} = \left\{ \underline{U}_1\ \underline{U}_2 \dots \underline{U}_m \right\} \qquad 195$$

Iloczyn krakowianu interpolacyjnego $\underline{A}$ - nazwijmy go krakowianem interpolacji kolumnowej - przez dowolny z krakowianów $\underline{U}_i$, czyli iloczyn $\underline{A}\ \underline{U}_i$ jest jak wiemy równy wartości jaką przybiera funkcja U = f /x y / dla wartości argumentu x /przy wartości argumentu $y = y_i$ /. Wynika stąd, że iloczyn krakowianu interpolacyjnego $\underline{A}$ przez krakowian $\underline{U}$:

$$\underline{A}\cdot\underline{U} = \underline{A}\left\{ \underline{U}_1\ \underline{U}_2 \dots \underline{U}_m \right\} = \begin{Bmatrix} \underline{A}\ \underline{U}_1 \\ \underline{A}\ \underline{U}_2 \\ \underline{A}\ \underline{U}_m \end{Bmatrix} \qquad 196$$

będzie zbiorem wartości, jakie przybiera funkcja U = f /x y / dla stale tej samej wartości argumentu x_1 oraz zmieniającej się wartości argumentu y przybierającej kolejno wartości $y_0\ y_1\ y_2 \dots y_m$.
Aby jednak z takiego zbioru określić wartość, jaką przybiera funkcja dla wartości zmiennej y wystarczy jak wiemy pomnożyć krakowian utworzony przez ten zbiór przez krakowian interpolacyjny $\underline{B}$ - nazwijmy go krakowianem interpolacji wierszowej. Ostatecznie więc poszukiwaną wartość wielomianu U=f/x y/ względnie ogólniej funkcji U=f /x y / - jeżeli badanie przy pomocy krakowianów $\underline{N}$ pozwala nam praktycznie utożsamić funkcję tę z wielomianem - dla wartości zmiennych x y wyrazi wzór:

$$\boxed{U_{xy} = \underline{A}\cdot\underline{U}\cdot\underline{B}} \qquad 197$$

Można też - co niekiedy bywa wygodniej - zmienić porządek czynników $\underline{A}\ \underline{U}$, zastępując iloczyn $\underline{A}\ \underline{U}$ przez transpozę iloczynu $\underline{U}\cdot\underline{A}$. Równanie przybierze wówczas postać:

$$\boxed{U_{xy} = \tau(\underline{U}\ \underline{A})\cdot\underline{B}} \qquad 198$$

Ten podstawowy wzór na interpolację funkcji od dwóch argumentów można wysłowić j.n: Wartość funkcji dwóch argumentów wyinterpolowana z prostokątnej regularnej tablicy funkcyjnej jest iloczynem trzech czynników, z których pierwszy jest krakowianem interpolacyjnym kolumnowym, drugi krakowianem tablicowym a trzeci krakowianem interpolacyjnym wierszowym; lub w drugim ujęciu: wartość funkcji dwóch argumentów jest równa transpozie iloczynu krakowianu tablicowego przez krakowian interpolacyjny kolumnowy, pomnożonej przez krakowian interpolacyjny wierszowy.

Różnica w obu ujęciach /197/ i /198/ jest natury czysto formalnej. Jeżeli jednak umówimy się, że przy mnożeniu arytmometrycznym, mając do wykonania iloczyn dwóch liczb a.b, ustawiamy pierwszy czynnik "a", w liczniku nastawień, zaś drugi czynnik "b" wprowadzamy mnożąc na licznik obrotów; różnica nabiera treści techniczno rachunkowej.
Wzór /198/ jest przy takiej umowie praktyczniejszy. Ustawiając w liczniku nastawień elementy krakowianu $\underline{U}$, a wprowadzając w wyniku mnożenia elementy krakowianu $\underline{A}$ na licznik obrotów, uzyskujemy kontrolę wykonania mnożenia /nie ustawienia/. Przy obliczaniu bowiem iloczynu $\underline{U}\cdot\underline{A}$ winniśmy odczytać w liczniku obrotów po przemnożeniu każdej kolumny jedność /$\Sigma A=1$/; której to kontroli przy tak pojętym mnożeniu dla iloczynu $\underline{A}\cdot\underline{U}$ nie otrzymamy. Druga kontrola, wynikająca z równości $\Sigma B=1$ wystąpi przy obu metodach wykonania. Chcąc mieć kontrolę całego przebiegu rachunku można także wykonać obliczenie interpolacyjne po raz drugi przy pomocy transponowanego

krakowianu tablicowego, co sprowadza się do interpolowania najpierw w kierunku wierszy, a potem kolumn. Będzie to realizacją równania:

$$\boxed{U_{xy} = \underline{B}\,\tau\underline{U}\cdot\underline{A} \quad \text{względnie} \quad U_{xy} = \tau\left(\tau\underline{U}\cdot\underline{B}\right)\cdot\underline{A}} \qquad \text{—— 199}$$

wynikającego bezpośrednio z równania /197/ na podstawie zasad zmiany porządku czynników w iloczynie krakowianowym.
Przechodzimy do przykładów liczbowych na interpolację funkcji dwóch argumentów.

Przykład liczbowy.

Obliczyć wartość, jaką przybiera wielomian dwóch zmiennych U=f /x y / stabelaryzowany w tablicy:

X \ Y	3	6	9	12	15	18
5	59	116	191	284	395	524
7	87	156	243	348	471	612
9	123	204	303	420	555	708
11	167	260	371	500	647	812
13	219	324	447	588	747	924

dla wartości argumentów: y = 7.24 y = 9.45, t.zn. dla $K_x = \frac{0.24}{2} = 0.12$

oraz $K_y = \frac{0.45}{3} = 0.15$.

Łatwo stwierdzić, że zarówno przy ustaleniu x, jak i przy ustaleniu y, mamy tu do czynienia z wielomianami trójparametrowymi. Mamy bowiem np:

$$\begin{Bmatrix} 59 \\ 87 \\ 123 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 8 \quad \text{lecz:} \quad \begin{Bmatrix} 59 \\ 87 \\ 123 \\ 167 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0. \quad \text{Podobnie:} \quad \begin{Bmatrix} 59 \\ 116 \\ 191 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 18$$

$$\text{lecz:} \quad \begin{Bmatrix} 59 \\ 116 \\ 191 \\ 284 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

Stosować więc wystarczy w obu kierunkach interpolację trójwyrazową. Znajdując z tablicy na str. 71 krakowiany interpolacyjne: $\underline{A}$ /dla k=0.12/, oraz $\underline{B}$ /dla k=0.15 /:

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.82720 \\ 0.22560 \\ -0.05280 \end{Bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{Bmatrix} 0.78625 \\ 0.27750 \\ -0.06375 \end{Bmatrix}$$

i realizując równanie /197/ w którym krakowianem tablicowym $\underline{U}$ będzie trójkolumnowy i trójwierszowy krakowian z naszej tablicy o elemencie zerowym, położonym na skrzyżowaniu x = 7 ; y = 9 czyli wyraźnie:

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} 243 & 348 & 471 \\ 303 & 420 & 555 \\ 371 & 500 & 647 \end{Bmatrix}$$

znajdziemy:

$$U_{xy} = \begin{Bmatrix} 0.82720 \\ 0.22560 \\ -0.05280 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 243 & 348 & 471 \\ 303 & 420 & 555 \\ 371 & 500 & 647 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.78625 \\ 0.27750 \\ -0.06375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 249.77760 \\ 356.21760 \\ 480.65760 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.78625 \\ 0.27750 \\ -0.06375 \end{Bmatrix} = 264.5961$$

Chcąc dla kontroli zastosować jeszcze interpolację przy pomocy transpozy krakowianu tablicowego /199/ napisalibyśmy:

$$U_{xy} = \begin{Bmatrix} 0.78625 \\ 0.27750 \\ -0.06375 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 243 & 303 & 371 \\ 348 & 420 & 500 \\ 471 & 555 & 647 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.82720 \\ 0.22560 \\ -0.05280 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 257.60250 \\ 319.40250 \\ 389.20250 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.82720 \\ 0.22560 \\ -0.05280 \end{Bmatrix} = 264.5961$$

<u>Przykład liczbowy.</u>

Obliczyć wartość jaką przybiera wielomian $u = f/x\ y/$ stabelaryzowany w tablicy:

x \ y	10	20	30	40
5	690	1590	3090	5190
10	3390	4290	5790	7890
15	10640	11540	13040	15140
20	24690	25590	27090	29190
25	47790	48690	50190	52290
30	82190	83090	84590	86690

dla wartości argumentów: $x = 12$, $y = 23$, t.zn. $K_x = \frac{2}{5} = 0.4$ oraz: $K_y = \frac{3}{10} = 0.3$

Badając tablicę przy pomocy krakowianów <u>N</u> stwierdzamy, że wielomiany w kolumnach są wielomianami czteroparametrowymi, natomiast w wierszach - trójparametrowymi.

Mamy bowiem np:

dla kolumn: $\begin{Bmatrix} 690 \\ 3390 \\ 10640 \\ 24690 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2250,$ lecz: $\begin{Bmatrix} 690 \\ 3390 \\ 10640 \\ 24690 \\ 47790 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$

dla wierszy: $\begin{Bmatrix} 690 \\ 1590 \\ 3090 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 600,$ lecz: $\begin{Bmatrix} 690 \\ 1590 \\ 3090 \\ 5190 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$

W związku z tym zastosujemy w kolumnach interpolację czterowyrazową, zaś w wierszach trójwyrazową, t.zn. krakowian <u>A</u> weźmiemy z tablicy na str. 112 zaś krakowian <u>B</u> z tablicy na str. 108.
Krakowian tablicowy będzie więc w kolumnach zawierał po 4 elementy, w wierszach po 3 elementy. Krakowian ten wyodrębniliśmy w tablicy funkcyjnej przez obrysowanie jego granic.
Takie oznaczenie jest wygodne w praktyce rachunkowej, gdzie oczywiście przepisywanie krakowianów tablicowych niema celu, pochłaniając czas i narażając na błędy przepisywania.
/Krakowiany interpolacyjne najlepiej pisać na skrawku kartonu, który nasuwamy na tablicę funkcyjną, ewentualnie na specjalnie przygotowanych szablonach, o czem jeszcze wspomnimy dalej.
Realizując równanie /197/ napiszemy:

$$U_{xy} = \begin{Bmatrix} 0.416 \\ 0.832 \\ -0.312 \\ 0.064 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4290 & 5790 & 7890 \\ 11540 & 13040 & 15140 \\ 25590 & 27090 & 29190 \\ 48690 & 50190 & 52290 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.595 \\ 0.510 \\ -0.105 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6518 \\ 8018 \\ 10118 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.595 \\ 0.510 \\ -0.105 \end{Bmatrix} = 6905$$

Stosując kontrolującą interpolację przy pomocy transpozy krakowianu tablicowego /199/ otrzymamy:

$$U_{xy} = \begin{Bmatrix} 0.595 \\ 0.510 \\ -0.105 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 4290 & 11540 & 25590 & 48690 \\ 5790 & 13040 & 27090 & 50190 \\ 7890 & 15140 & 29190 & 52290 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.416 \\ 0.832 \\ -0.312 \\ 0.064 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4677 \\ 11927 \\ 25977 \\ 49077 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.416 \\ 0.832 \\ -0.312 \\ 0.064 \end{Bmatrix} = 6905$$

Przykład liczbowy.

Posiłkując się tablicą funkcyjną, podającą wartości odciętej X i rzędnej Y Gauss-Krügerowskiego obrazu punktu, którego szerokość geograficzna i długość względem południka osiowego wynoszą odpowiednio φ i λ wyinterpolować przy pomocy interpolacji trójwyrazowej wartości X i Y spółrzędnych obrazu punktu o szerokości $\varphi = 48°11'30''225$ $\lambda = 0°24'16''236$.

φ \ λ	0°20'		0°30'		0°40'		0°50'	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
48°00'	5317 938.999	24872.080	5318 006.208	37308.092	5318 100.302	49744.072	5318 221.283	62180.009
10'	5336 468.870	24791.861	5336 536.038	37187.764	5336 630.074	49583.631	5336 750.980	61979.453
20'	5354 999.279	24711.432	5355 066.403	37067.117	5355 160.378	49422.767	5355 281.205	61778.369
30'	5373 530.223	24630.791	5373 597.301	36946.154	5373 691.211	49261.481	5373 811.955	61576.757
40'	5392 061.704	24549.940	5392 128.733	36824.877	5392 222.575	49099.775	5392 343.232	61374.620

Ponieważ wartości obu funkcji $X = f/\varphi\lambda/$ i $Y = F/\varphi\lambda/$ stabelaryzowane są w jednej tablicy będziemy mieli do wykonania dwie niezależne interpolacje. Krakowiany interpolacyjne $\underline{A}$ dla kolumn i $\underline{B}$ dla wierszy będą w obu tych interpolacjach identyczne i wyniosą /zważywszy, że przedziały argumentów wynoszą 10 a więc ułamkami interpolacyjnymi będą:

$$K_\varphi = \frac{1.5037500}{10} = 0.1503750 \qquad K_\lambda = \frac{4.2706000}{10} = 0.4270600 \;/:$$

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.7862500 \; -3750 \\ 0.2775000 \; +3750 \\ -0.0637500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7858750 \\ 0.2778750 \\ -0.0637500 \end{Bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{Bmatrix} 0.4506645 \; -600 \\ 0.6716710 \; +600 \\ -0.1223355 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4506045 \\ 0.6717310 \\ -0.1223355 \end{Bmatrix}$$

Wykonanie takiej podwójnej interpolacji można sobie ułatwić, posiłkując się szablonem, na którym wypisujemy wartości krakowianów interpolacyjnych $\underline{A}$ i $\underline{B}$ pozostawiając między nimi wolne miejsce na wpisanie iloczynów $\underline{A}\,\underline{U}'$ i $\underline{A}\,\underline{U}''$, gdzie U' oznacza pierwszy, a U'' drugi krakowian tablicowy. W szablonie wycinamy okienka, przez które widoczne są elementy krakowianu, który w danej chwili opracowujemy. Oczywiście należy zwrócić baczną uwagę aby szablon nasunięty był na właściwe miejsce tablicy funkcyjnej. W naszym wypadku szablon przy obliczaniu odciętej X zajmie pozycję:

			$\underline{A}$	$\underline{AU}$	$\underline{B}$
5336 468.870	5336 536.038	5336 630.074	0.785 8750	5339 255.346	0.450 6045
5354 999.279	5355 066.403	5355 160.378	0.277 8750	5339 322.508	0.671 7310
5373 530.223	5373 597.301	5373 691.211	-0.063 7500	5339 416.535	-0.122 3355

po po obliczeniu iloczynu $\underline{AU} = \tau\,/\underline{UA}/$ /wpisaliśmy go na szablonie/ znajdziemy $X = \underline{AUB} = 5339280.742$.

Przystępując do obliczenia rzędnej usuwamy z kartonu krakowian $\underline{A}.\underline{U}$ przez wytarcie gumą - krakowiany $\underline{A}$ i $\underline{B}$ oczywiście pozostawiamy - i przesuwamy szablon na tablicy funkcyjnej aż do zajęcia położenia:

			A	AU	B
24791.861	37187.764	49583.631	0.785 8750	24779.780	0.450 6045
24711.432	37067.117	49422.767	0.277 8750	37169.642	0.671 7310
24630.791	36946.154	49261.481	-0.063 7500	49559.468	-0.122 3355

Po obliczeniu iloczynu $\underline{A}\ \underline{U} = \tau / \underline{U}\ \underline{A} /$ /wpisanego znów na szablonie/ znajdziemy $Y = \underline{AUB} = 30070.999$

Przykład liczbowy.

Posiłkując się tablicą funkcyjną, podającą wartości szerokości geograficznej φ i długości odniesionej do południka osiowego λ dla punktu, którego spółrzędne prostokątne w odwzorowaniu Gaussa-Krügera wynoszą odpowiednio X i Y, wyinterpolować przy pomocy interpolacji trójwyrazowej wartości φ i λ punktu, którego spółrzędne prostokątne w odwzorowaniu Gaussa-Krügera wynoszą: X = 5339,280742 klm. oraz Y = 30.070999 klm.

Y / X klm.	30 klm.		40 klm.		50 klm.		60 klm.	
	$\varphi°$	$\lambda°$	$\varphi°$	$\lambda°$	$\varphi°$	$\lambda°$	$\varphi°$	$\lambda°$
5330	48.108 2602	0.402 9011	48.107 7108	0.537 1960	48.107 0047	0.671 4864	48.106 1416	0.805 7711
5340	48.198 2016	0.403 6058	48.197 6505	0.538 1356	48.196 9421	0.672 6609	48.196 0763	0.807 1804
5350	48.288 1416	0.404 3140	48.287 5888	0.539 0799	48.286 8781	0.673 8411	48.286 0096	0.808 5965
5360	48.378 0801	0.405 0257	48.377 5256	0.540 0288	48.376 8127	0.675 0272	48.375 9414	0.810 0197

Ułamki interpolacyjne wynoszą: dla kolumn $K_x = \frac{9{,}280742}{10} = 0.9280742$, dla wierszy $K_y = \frac{0.070999}{10} = 0.0070999$. Znajdując dla tych ułamków krakowiany interpolacyjne i wpisując odrazu na szablon otrzymamy:

1/ dla obliczenia szerokości geograficznej φ

			A	AU	B
48.108 2602	48.107 7108	48.107 0047	0.038 5178	48.191 7325	0.989 4246
48.198 2016	48.197 6505	48.196 9421	0.994 8902	48.191 1816	0.014 0509
48.288 1416	48.287 5888	48.286 8781	-0.033 4080	48.190 4733	-0.003 4755

skąd $\varphi° = \underline{AUB} = 48°19172914 = 48°11'30'',225$

2/ dla obliczenia długości względem południka osiowego λ :

			A	AU	B
0.402 9011	0.537 1960	0.671 4864	0.038 5178	0.403 5550	0.989 4246
0.403 6058	0.538 1356	0.672 6609	0.994 8902	0.538 0679	0.014 0509
0.404 3140	0.539 0799	0.693 8411	-0.033 4080	0.672 5762	-0.003 4755

skąd $\lambda° = \underline{A}.\underline{U}.\underline{B} = 0°4045100 = 0°24'16'',236$

Interpolacja funkcji dwóch argumentów w ujęciu symboliki iloczynów zupełnych.

Można wykazać że iloczyn krakowianowy:

$\underline{A}\ \underline{U}\ \underline{B}$

gdzie $\underline{A}$ i $\underline{B}$ oznaczają jednokolumnowe krakowiany jest równy sumie elementów tablicy, stanowiącej iloczyn tablicy $\boxed{U}$ przez tablicę osiową, której oś pionową stanowią elementy krakowianu $\underline{A}$, zaś oś poziomą elementy krakowianu $\underline{B}$, t.j. przez tablicę $\boxed{A \mid B}$.
Symbolizując sumę elementów tablicy w przyjęty sposób t.j. przez postawienie symbolu z prawej strony u dołu symbolu tablicy, wyrazimy ten związek równaniem.

$$\boxed{\underline{A}\cdot\underline{U}\cdot\underline{B} = \left(\boxed{A \mid B}\;\boxed{U}\right)_\Sigma} \qquad\text{———— 200}$$

Tak np. iloczyn krakowianowy:
$$\left\{\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\3 & 0\\4 & 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}27\\16\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\} = 134$$

będzie identyczny z sumą elementów iloczynu tablicy: $\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\3 & 0\\4 & 3\end{matrix}}$ przez tablicę:

$$\begin{array}{c|cc|} & 2 & 5\\ \hline 2 & 4 & 10\\ 3 & 6 & 15\\ 4 & 8 & 20\\ \hline \end{array}$$

Mamy bowiem:
$$\left(\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\3 & 0\\4 & 3\end{matrix}}\;\boxed{\begin{matrix}4 & 10\\6 & 15\\8 & 20\end{matrix}}\right)_\Sigma = \left(\boxed{\begin{matrix}4 & 20\\18 & 0\\32 & 60\end{matrix}}\right)_\Sigma = 134.$$

Dowód sprowadza się oczywiście do rozwinięcia symboli w oparciu o definicję mnożenia krakowianów i tablic. Niech będzie:

$$\underline{A} = \left\{\begin{matrix}A_0\\A_1\\A_2\\\vdots\\A_n\end{matrix}\right\} \qquad \underline{B} = \left\{\begin{matrix}B_0\\B_1\\B_2\\\vdots\\B_m\end{matrix}\right\} \qquad \underline{U} = \left\{\begin{matrix}U_{00} & U_{10} & \cdots\cdots & U_{m0}\\U_{01} & U_{11} & \cdots\cdots & U_{m1}\\U_{02} & U_{12} & \cdots\cdots & U_{m2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\U_{0n} & U_{1n} & & U_{mn}\end{matrix}\right\}$$

Mamy więc:
$$\underline{A}\cdot\underline{U} = \left\{\begin{matrix}(A_0U_{00} + A_1U_{01} + \cdots\cdots A_nU_{0n})\\(A_0U_{10} + A_1U_{11} + \cdots\cdots A_nU_{1n})\\- - - - - - - - - - -\\(A_0U_{m0} + A_1U_{m1} + \cdots\cdots A_nU_{mn})\end{matrix}\right\}$$

$$\underline{AUB} = (A_0B_0U_{00} + A_0B_1U_{10} + \cdots + A_0B_mU_{m0} + A_1B_0U_{01} + A_1B_1U_{11} + \cdots A_1B_mU_{m1} + \cdots\cdots + A_nB_0U_{0n} + A_nB_1U_{1n} + \cdots A_nB_mU_{mn})$$

Dla tablic otrzymamy:

$$\boxed{A \mid B} = \begin{array}{c|cccc|} & B_0 & B_1 & \cdots\cdots & B_m\\ \hline A_0 & A_0B_0 & A_0B_1 & \cdots\cdots & A_1B_m\\ A_1 & A_1B_0 & A_1B_1 & \cdots\cdots & A_0B_m\\ \vdots & - - & - - & - - & - -\\ A_n & A_nB_0 & A_nB_1 & \cdots\cdots & A_nB_m\\ \hline \end{array} \qquad \boxed{U} = \boxed{\begin{matrix}U_{00} & U_{10} & \cdots\cdots & U_{m0}\\U_{01} & U_{11} & \cdots\cdots & U_{m1}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\U_{0n} & U_{1n} & & U_{mn}\end{matrix}}$$

$$\boxed{A \mid B}\;\boxed{U} = \boxed{\begin{matrix}A_0B_0U_{00} & A_0B_1U_{10} & \cdots\cdots A_0B_mU_{m0}\\A_1B_0U_{01} & A_1B_1U_{11} & \cdots\cdots A_1B_mU_{m1}\\- - - - & - - - - & - - - - -\\A_nB_0U_{0n} & A_nB_1U_{1n} & A_nB_mU_{mn}\end{matrix}}$$

$$\left(\boxed{A \mid B}\;\boxed{U}\right)_\Sigma = (A_0B_0U_{00}\ A_0B_1U_{10} + \cdots A_0B_mU_{m0} + A_1B_0U_{01} + A_1B_1U_{11} + \cdots A_1B_mU_{m1} + \cdots\cdots + A_nB_0U_{0n} + A_nB_1U_{1n} + \cdots A_nB_mU_{mn})$$

czyli ostatecznie: $\underline{A}\cdot\underline{U}\cdot\underline{B} = \left(\boxed{A \mid B}\;\boxed{U}\right)_\Sigma$

W dziedzinie zagadnień interpolacyjnych omówiony związek pozwala na następujące sformułowanie wzoru na interpolację funkcji dwóch argumentów:

Wartość funkcji dwóch argumentów wyinterpolowana z prostokątnej regularnej tablicy funkcyjnej równa jest sumie elementów tablicy, stanowiącej iloczyn zupełny tablicy funkcyjnej przez tablicę osiową, której oś pionową stanowi krakowian interpolacji kolumnowej, zaś oś poziomą rozwinięty w wiersz krakowian interpolacji wierszowej:

$$\boxed{U_{xy} = \left(\boxed{A}\,\boxed{B}\,\boxed{U}\right)_{\Sigma}} \qquad 201$$

Ujęcie interpolacji funkcji dwóch argumentów we wzór symboliki iloczynów zupełnych jest na ogół biorąc mniej celowe od ujęcia krakowianowego. Jednak mogą zajść wypadki prac rachunkowych, dla których ujęcie tablicowe będzie ekonomiczniejsze. Niech interpolacja kolumnowa będzie interpolacją w parametrową, zaś interpolacja wierszowa interpolacją k parametrową. Krakowian tablicowy zawiera więc k kolumn i w wierszy. Krakowian A będzie w elementowy, krakowian B - k elementowy.
Obliczenie iloczynu AB wymagać będzie wykonania w.k mnożeń, oraz zapisania k liczb, lub, jak będziemy dalej mówili: wykonania k zapisów. Obliczenie dalszego iloczynu AU.B wymagać będziemy wykonania k mnożeń i jednego zapisu. Cała czynność przeprowadzenia interpolacji wymagać więc będzie w ujęciu krakowianowym w.k+k = k /w+1 / mnożeń, oraz /k+1/ zapisów.
W ujęciu tablicowym mielibyśmy w.k mnożeń i wk zapisów przy zestawieniu tablicy osiowej, oraz wk mnożeń i jeden zapis przy właściwej interpolacji. Łącznie więc w ujęciu tablicowym mieć będziemy 2wk mnożeń oraz /wk+1/ zapisów /elementów iloczynu tablic zapisywać tu oczywiście nie trzeba - sumowania i mnożenia dokonujemy łącznie na arytmometrze/.
Ponieważ dla $w > 1$ $k > 1$ będzie zawsze:

$$k\,/w+1/ \angle 2wk \qquad \text{oraz} \qquad k+1 \angle wk+1$$

ujęcie krakowianowe jest przy interpolowaniu pojedyńczej funkcji dwóch argumentów ekonomiczniejsze od ujęcia tablicowego niezależnie od rzędu interpolacji.
Jeżeli jednak zachodzi potrzeba obliczenia kilku różnych funkcji dla tych samych wartości argumentów i ułamków interpolacyjnych /tego rodzaju prace rachunkowe spotykamy w geodezji przy zagadnieniach transformacyjnych, przyczem ilość obliczanych funkcji wynosi czasem 3/, wówczas niezawsze interpolacja krakowianowa będzie ekonomiczniejsza.
Jeżeli, zachowując dotychczasowe oznaczenia, oznaczymy przez n ilość interpolowanych funkcji, zaś przez M ilość mnożeń i Z ilość zapisów, otrzymamy:

dla interpolacji krakowianowej: $M_k = n\,k\,/w+1/$ oraz $Z_k = n\,/k+1/$

dla interpolacji tablicowej: $M_t = /n+1/\,w\,k$ oraz $Z_t = w\,k + n$

Przy interpolacji dwuparametrowej /w = k = 2 / dwóch funkcji /n=2/ postępowanie rachunkowe będzie tu przy zastosowaniu obu metod równoważne zarówno pod względem ilości mnożeń, jak i zapisów.

Otrzymamy bowiem: $M_k = 2.2.3 = 12$, $M_t = 3.2.2 = 12$, oraz $Z_k = 2.3 = 6$ i $Z_t = 2.2+2 = 6$.

Natomiast przy interpolacji dwuparametrowej /w=k=2/ trzech funkcji /n=3/ zaobserwujemy już przewagę postępowania tablicowego, otrzymując:

$M_k = 3.2.3 = 18$ $M_t = 4.2.2 = 16$, oraz: $Z_k = 3.3 = 6$, $Z_t = 2.2+3 = 7$.

Naogół jednak biorąc rozważania takie mają raczej charakter akademicki, już choćby z tego względu, że wielokrotne tabele funkcyjne nie mają szerszego zastosowania.
Pewna przewaga rachunku tablicowego nad krakowianowym występuje natomiast przy zagęszczaniu tablic funkcyjnych funkcji od dwóch argumentów, dzięki większemu zmechanizowaniu czynności.
Przechodzimy do przykładów liczbowych na interpolację funkcji dwóch argu-

mentów w ujęciu mnożenia zupełnego tablic.

Przykład liczbowy.

Obliczyć przy pomocy trójwyrazowej interpolacji tablicowej wartość jaką przybiera dla X = 7.24 i y = 9.45 wielomian u = f /x y / stabelaryzowany w tablicy:

X \ Y	3	6	9	12	15	18
5	59	116	191	284	395	524
7	87	156	243	348	471	612
9	123	204	303	420	555	708
11	167	260	371	500	647	812
13	219	324	447	588	747	924

Znajdując dla ułamków interpolacyjnych $K_x = \frac{0.24}{2} = 0.12$ $K_y = \frac{0.45}{3} = 0.15$

krakowiany $\underline{A}$ i $\underline{B}$, zestawimy z nich tablicę osiową:

	0.78625	0.27750	-0.06375
0.82720	0.650386	0.229548	-0.052734
0.22560	0.177378	0.062604	-0.014382
-0.05280	-0.041514	-0.014652	0.003366

$= \boxed{A \lfloor B}$

Mnożąc "interpolującą tablicę" osiową $\boxed{A \lfloor B}$ przez tablicę funkcyjną $\boxed{U}$ którą uwidocznililiśmy przez zakreślenie, znajdziemy sumę elementów tego iloczynu /poszczególnych elementów oczywiście nie piszemy /, U = 264.5961

Uwaga. Z równań $\Sigma A = 1$ i $\Sigma B = 1$ wynika, że suma elementów interpolującej tablicy osiowej jest jednością.*)

Ta zależność:

$$\boxed{\boxed{A \lfloor B}_{\Sigma} = 1} \qquad (202)$$

służyć może jako kontrola mnożenia w interpolacji tablicowej, jeżeli na licznik nastawień wprowadzać będziemy elementy tablicy $\boxed{U}$, sumując na liczniku obrotów elementy tablicy $\boxed{A \lfloor B}$.

Przykład liczbowy.

Obliczyć wartość jaką przybiera wielomian u = f /x y /, stabelaryzowany w tablicy:

X \ Y	10	20	30	40
5	690	1590	3090	5190
10	3390	4290	5790	7890
15	10640	11540	13040	15140
20	24690	25590	27090	29190
25	47790	48690	50190	52290
30	82190	83090	84590	86690

dla wartości argumentów: x=12 y=23 t.zn. $K_x = \frac{2}{5} = 0.4$ $K_y = \frac{3}{10} = 0.3$ przeprowadzając interpolację 4x3 wyrazową /t.zn. 4 wyrazową w kierunku kolumn i 3 wyrazową w kierunku wierszy/.

Zestawiając tablicę osiową $\boxed{A \lfloor B}$ napiszemy:

---

*) Niech będzie tablica osiowa:

	B_0	B_1	B_m
A_0	A_0B_0	A_0B_1	A_0B_m
A_1	A_1B_0	A_1B_1	A_1B_m
:	- - -	- - -	- - -
A_n	A_nB_0	A_nB_1	A_nB_m

Sumując jej elementy wierszami otrzymamy:
$A_0\Sigma B + A_1\Sigma B + \ldots A_n\Sigma B = \Sigma B \cdot \Sigma A = 1.1=1.$

	0.595	0.510	-0.105
0.416	0.24752	0.21216	-0.04368
0.832	0.49504	0.42432	-0.08736
-0.312	-0.18564	-0.15912	0.03276
0.064	0.03808	0.03264	-0.00672

$= \boxed{A\ \lfloor B}$

Stąd, po przemnożeniu przez tablicę $\boxed{U}$ /obwiedzioną w tablicy funkcyjnej/ i zesumowaniu $U_{xy} = 6905$.
Obydwa przykłady przerobiliśmy uprzednio przy pomocy interpolacji krakowianowej, co pozwala na porównanie obu metod i stwierdzenie wyższości metody krakowianowej.

Kryteria właściwego obrania rzędu interpolacji.

Dla regularnych tabel wielomianów dwóch argumentów można stosować zupełnie analogiczne kryteria właściwego obrania rzędu interpolacji do kryteriów jakie stosowaliśmy dla tabel regularnych wielomianów jednego argumentu. Zapomocą krakowianów $\underline{N}$ badamy - w sposób szczegółowo opisany na str. 51 ilość parametrów wielomianu przy ustaleniu wartości jednego z argumentów; poczem powtarzamy to badanie ustalając wartość drugiego argumentu. Rząd interpolacji jest przez to badanie przesądzony. Co się tyczy ogólnie pojętej ilości parametrów wielomianu - oznaczmy ją przez p - będzie ona równa iloczynowi "parametrów wielomianu kolumnowego" p_1 przez ilość "parametrów wielomianu wierszowego" p_2:

$$p = p_1\ p_2$$

W szczególnych wypadkach ilość różnych od zera parametrów p może być oczywiście mniejsza od iloczynu $p_1 p_2$, co w niczym nie ogranicza ogólności postępowania przy ustalaniu wartości parametrów.
Ponieważ przy rozwiązywaniu przykładów liczbowych na str.81 stosowaliśmy już praktycznie kryteria właściwego obrania rzędu interpolacji dla interpolowania funkcji dwóch argumentów, nie będziemy się dłużej nad tym zatrzymywać, a przejdziemy do zagadnienia obliczenia parametrów wielomianu dwóch argumentów.

Obliczenie parametrów wielomianu dwóch argumentów /przekształcenie tablicy funkcyjnej na skończony szereg potęgowy/.

Rozwiązując symbolicznie układ równań liniowych względem parametrów wielomianu U:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots b_1 y + b_2 y^2 + \dots c_{11} xy + c_{12} xy^2 + c_{21} x^2 y + \dots \qquad 203$$

powstający w drodze podstawiania wartości x y u, stabelaryzowanych w regularnej tablicy tego wielomianu:

$\Delta x = \mathrm{const}_1 \qquad \Delta y = \mathrm{const}_2 \qquad 204$

	Y_0	Y_1	Y_2	.
X_0	U_{00}	U_{10}	U_{20}	.
X_1	U_{01}	U_{11}	U_{21}	.
X_2	U_{02}	U_{12}	U_{22}	.
.	.	.	.	.

otrzymywać można wzory analogiczne do wzorów, wyrażających pod postacią równania krakowianowego zespół parametrów wielomianu jednej zmiennej /str. /.
Tak np. dla parametrów wielomianu:

$$u = a_0 + a\,x + b\,y + c\,x\,y \qquad 205$$

danego pod postacią tablicy funkcyjnej:

	Y_0	Y_1
X_0	U_{00}	U_{10}
X_1	U_{01}	U_{11}

206

otrzymalibyśmy, przy oznaczeniu przez r_x r_y odwrotności odpowiednich różnic, t.zn.

$$r_x = \frac{1}{\Delta x} \qquad r_y = \frac{1}{\Delta y} \qquad\text{———————— 207}$$

wzór na zespół parametrów pod postacią:

$$\begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{00} \\ U_{01} \\ U_{10} \\ U_{11} \\ X_0 \\ Y_0 \\ X_0 Y_0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} r_x r_y & -r_y & -r_x & 1 \\ -r_x r_y & & r_x & \\ -r_x r_y & r_y & & \\ r_x r_y & & & \\ & -c & & -a \\ & & -c & -b \\ & & & -c \end{bmatrix} \qquad\text{———————— 208}$$

co łatwo sprawdzić rozwiązując układ równań typu 205.

Przykład liczbowy.

Wielomian stabelaryzowany:

X \ Y	2	6	10
3	43	111	179
5	63	163	263
7	83	215	347

jest wielomianem 2x2 parametrowym, co łatwo sprawdzić przy pomocy krakowianów $\underline{N}$ $\begin{Bmatrix} 43 \\ 63 \\ 83 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$ i t.d.

Dla obliczenia jego parametrów a_0 a b c /205/ zastosujemy więc wzór /208/:

Otrzymamy: $r_x = \frac{1}{2} = 0.50$ $\qquad r_y = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43 \\ 63 \\ 111 \\ 163 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0.125 & -0.25 & -0.50 & 1 \\ -0.125 & & 0.50 & \\ -0.125 & 0.25 & & \\ 0.125 & & & \\ & -c=-4 & & -a=-2 \\ & & -c=-4 & -b=-5 \\ & & & -c=-4 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \text{skąd:} U=3+2x+5y+4xy.$$

Tego rodzaju postępowanie komplikuje się jednak znacznie ze wzrostem ilości parametrów. Drobne stosunkowo korzyści wyniknąć mogące z uwzględnienia stałości różnic /"regularności"tablicy/ stają się znikome w porównaniu z brakiem prostoty i przejrzystości wzoru przy tego rodzaju ujęciu. To też lepiej jest zrezygnować z wykorzystania regularności tablicy i rozwiązywać zagadnienie wyznaczania parametrów wielomianu dwóch zmiennych w sposób zupełnie ogólny, t.zn. w drodze rozwiązywania układu p równań liniowych z p niewiadomymi / p ogólna ilość parametrów w zagadnieniu równa iloczynowi ilości parametrów p_1 w wielomianie kolumnowym przez ilość parametrów p_2 w wielomianie wierszowym/.
Z ujęć krakowianowych najekonomiczniejsza będzie tu metoda zerowania tablic, którą stosowaliśmy już, rozwiązując zagadnienie obliczenia parametrów wie-

lomianu jednej zmiennej /str. 74 /.
Szczegóły postępowania rachunkowego dogodnie jest usystematyzować jak następuje:
Po stwierdzeniu przy pomocy krakowianów N ilości parametrów w wielomianach kolumnowym i wierszowym, zestawiamy schemat parametrów wielomianu obu zmiennych, pisząc na osi kolumnowej kolejne potęgi zmiennej kolumnowej, na osi wierszowej kolejne potęgi zmiennej wierszowej, zaś na poszczególnych polach takiej tablicy osiowej symbole spółczynników przy iloczynach odnośnych potęg, t.zn. symbole poszukiwanych parametrów wielomianu.
Za symbol spółczynnika przy iloczynie i-tej potęgi zmiennej x przez j-tą potęgę zmiennej y wygodnie jest - co będziemy stosować w dalszym ciągu - przyjąć symbol $x^i y^j$.
Tak np: po stwierdzeniu, że wielomian kolumnowy jest dwu, a wierszowy trójparametrowy, zestawimy następujący schemat parametrów:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & Y & Y^2 \\ \hline 1 & 1 & Y & Y^2 \\ X & X & XY & XY^2 \end{array} \qquad (209)$$

Wielomian zawierać więc będzie: wyraz wolny /spółczynnik przy iloczynie $X^0\ Y^0$, co symbolizujemy przez 1 /, i wyrazy spółczynnikowe przy: X Y XY Y^2 XY^2 /które zasymbolizowaliśmy przez X Y XY Y^2 XY^2/.
W postaci rozwiniętej mielibyśmy wyraźnie:

$$u = 1 \cdot 1 + X\, X + Y\, Y + XY\, XY + Y^2\, Y^2 + XY^2\, XY^2 \qquad (210)$$

Przyjęty porządek wyrazów, odpowiadający rozwinięciu w wiersz kolejnych kolumn schematu parametrów będziemy w dalszym ciągu zachowywać.
Dla obliczenia p x p parametrów weźmiemy p x p elementów tablicy funkcyjnej, które w obranym powyżej przykładzie zasymbolizujemy jak następuje:

$$\begin{array}{c|ccc} & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \hline X_1 & U_{11} & U_{21} & U_{31} \\ X_2 & U_{12} & U_{22} & U_{32} \end{array} \qquad (211)$$

i zestawimy pełną tablicę spółczynnikową układu równań, jakie otrzymywać będziemy, gdy argumenty X Y przybierają kolejno wartości, odpowiadające elementom tablicy funkcyjnej. Niewiadomymi tablicy spółczynnikowej będą symbole 1 X ... w obranej kolejności /piszemy je w wierszu nagłówkowym tablicy/. Kolejne wiersze tablicy zawierać będą uszeregowane w tejże kolejności wartości, jakie przybierają iloczyny: 1 X_i Y_j $X_i \cdot Y_j$ ... /gdy pary wskaźników ij przybierają wartości odpowiadające elementom tablicy funkcyjnej/. Ostatnim wyrazem każdego wiersza będzie odpowiednia wartość wielomianu ze znakiem odwrotnym - U_{ik} . W obranym przykładzie tablica spółczynnikowa mieć więc będzie postać:

1	X	Y	XY	Y^2	XY^2	- U	
1	X_1	Y_1	X_1Y_1	Y_1^2	$X_1Y_1^2$	$-U_{11}$	
1	X_2	Y_1	X_2Y_1	Y_1^2	$X_2Y_1^2$	$-U_{12}$	
1	X_1	Y_2	X_1Y_2	Y_2^2	$X_1Y_2^2$	$-U_{21}$	212
1	X_2	Y_2	X_2Y_2	Y_2^2	$X_2Y_2^2$	$-U_{22}$	
1	X_1	Y_3	X_1Y_3	Y_3^2	$X_1Y_3^2$	$-U_{31}$	
1	X_2	Y_3	X_2Y_3	Y_3^2	$X_2Y_3^2$	$-U_{32}$	

Wypełnienie cyfrowe tablicy odbywa się oczywiście kolumnami: w pierwszej kolumnie piszemy jedynki, w drugiej i trzeciej wartości argumentów x i y odpowiadające kolejnym polom tablicy funkcyjnej /kolejność pól tablicy taka sama jak kolejność pól w schemacie parametrów przy rozwijaniu go w wiersz nagłówkowy tablicy!/, w ostatniej kolumnie minus elementy tablicy funkcyjnej. Pośrednie kolumny tablicy wypełniamy realizując działania zasymbolizowane dostatecznie wyraźnie przez parametry wypisane w kolumnie nagłówkowej.

Dla rozwiązania tablicy spółczynnikowej metodą zerowania wystarcza jak wiemy napisać schemat:

$$\underset{\underset{\underline{o}}{\underline{\underline{x}}}}{\begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{g} \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} -\underline{\tau} \\ \underline{h} \end{Bmatrix} = \underline{0} \qquad \text{—— 213}$$

w którym $\underline{a}$ jest pełnym krakowianem tablicy $\underline{g}$ i $\underline{h}$ schematami jego czynników kanonicznych, zaś $\underline{x}$ schematem poszukiwanego krakowianu, i wypełniać puste pola schematu zgodnie z warunkiem, aby iloczyny kolumn sąsiadujących tablic $\begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{g} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tau} \\ \underline{h} \end{Bmatrix}$ były zerami i iloczyny wierszy $\dfrac{\underline{g}}{\underline{x}}$ były zerami. Kontrolę stanowi zerowanie się wierszy $\underline{a}$ i $\underline{x}$. /por. też str. 30,74 /.

W naszym wypadku układ zerujących tablic mieć będzie postać:

1	X	Y	X Y	Y^2	$X Y^2$	-U	o	o	o	o	o	o
1	X_1	Y_1	X_1Y_1	Y_1^2	$X_1Y_1^2$	$-U_{11}$	-1	o	o	o	o	o
1	X_2	Y_1	X_2Y_1	Y_1^2	$X_2Y_1^2$	$-U_{12}$	o	-1	o	o	o	o
1	X_1	Y_2	X_1Y_2	Y_2^2	$X_1Y_2^2$	$-U_{21}$	o	o	-1	o	o	o
1	X_2	Y_2	X_2Y_2	Y_2^2	$X_2Y_2^2$	$-U_{22}$	o	o	o	-1	o	o
1	X_1	Y_3	X_1Y_3	Y_3^2	$X_1Y_3^2$	$-U_{31}$	o	o	o	o	-1	o
1	X_2	Y_3	X_2Y_3	Y_3^2	$X_2Y_3^2$	$-U_{32}$	o	o	o	o	o	-1
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
o	1	•	•	•	•	•	o	•	•	•	•	•
o	o	1	•	•	•	•	o	o	•	•	•	•
o	o	o	1	•	•	•	o	o	o	•	•	•
o	o	o	o	1	•	•	o	o	o	o	•	•
o	o	o	o	o	1	•	o	o	o	o	o	•
• 1	• X	• Y	• XY	• Y^2	• XY^2	1						

—— 214

Przechodzimy do przykładów.

Przykład liczbowy.

Obliczyć parametry wielomianu stabelaryzowanego w tablicy:

X \ Y	3	6	9	12
2	128	389	794	1343
4	360	1089	2214	3735
6	720	2181	4434	7479
8	1208	3665	7454	12575

Ponieważ mamy: $\begin{Bmatrix} 128 \\ 360 \\ 720 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 128 \neq 0$

zaś: $\begin{Bmatrix} 128 \\ 360 \\ 720 \\ 1208 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$

analogicznie: $\begin{Bmatrix} 128 \\ 389 \\ 794 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 144 \neq 0$ oraz: $\begin{Bmatrix} 128 \\ 389 \\ 794 \\ 1343 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$

wielomian jest i w kolumnach i w wierszach trójparametrowy. Schemat parametrów wielomianu u=f /x y / będzie miał postać:

	1	Y	Y^2
1	1	Y	Y^2
X	X	XY	XY^2
X^2	X^2	X^2Y	X^2Y^2

Do obliczenia 9 parametrów weźmiemy fragment tablicy:

X \ Y	3	6	9
2	128	389	794
4	360	1089	2214
6	720	2181	4434

Rozwijając kolumnami symbole schematu parametrów w wiersz nagłówkowy tablicy i tworząc i rozwiązując układ tablic zerujących otrzymamy:

1	X	X^2	Y	XY	X^2Y	Y^2	XY^2	X^2Y^2	U									
1	2	4	3	6	12	9	18	36	-128	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	16	3	12	48	9	36	144	-360	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
1	6	36	3	18	108	9	54	324	-720	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
1	2	4	6	12	24	36	72	144	-389	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
1	4	16	6	24	96	36	144	576	-1089	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
1	6	36	6	36	216	36	216	1296	-2181	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
1	2	4	9	18	36	81	162	324	-794	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
1	4	16	9	36	144	81	324	1296	-2214	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
1	6	36	9	54	324	81	486	2916	-4436	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
1	2	4	3	6	12	9	18	36	-128	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	6	0	3	18	0	9	54	-116	0	2	4	0	2	4	0	2	4
0	0	1	0	0	3	0	0	9	-16	0	0	8	0	0	8	0	0	8
0	0	0	1	2	4	9	18	36	-87	0	0	0	3	3	3	6	6	6
0	0	0	0	1	6	0	9	54	-78	0	0	0	0	6	12	0	12	24
0	0	0	0	0	1	0	0	9	-11	0	0	0	0	0	24	0	0	48
0	0	0	0	0	0	1	2	4	-8	0	0	0	0	0	0	18	18	18
0	0	0	0	0	0	0	1	6	-7	0	0	0	0	0	0	0	36	72
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	144
3	2	1	1	3	2	2	1	1	1									

/liczby drobne - otrzymane w procesie zerowania tablic/.

skąd ostatecznie:

$$u = 3 + 2x + x^2 + y + 3xy + 2x^2y + 2y^2 + xy^2 + x^2y^2$$

Następny przykład zaczerpnięty z "The calculus of observations" Whittaker and Robinson /London Glasgow 1946 /, dotyczy obliczenia parametrów wielomianu, w którym ilość i znaczenie parametrów jest zgóry wiadome. Jest to więc przypadek szczególny - łatwiejszy gdyż odpada potrzeba badania ilości i układu parametrów.

Przykład liczbowy.

Y \ X	0	1	2	3
0	3	5	9	
1	2	3		
2	3			
3				

Wielomian jest tu pełnym wielomianem drugiego stopnia, t.zn. wielomianem o schemacie parametrów:

	1	X	X^2
1	1	X	X^2
Y	Y	XY	
Y^2	Y^2		

Rozwiązując zadanie według podanych wyżej reguł otrzymamy:

1	Y	Y^2	X	XY	X^2	-U						
1	0	0	0	0	0	-3	-1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	-2	0	-1	0	0	0	0
1	2	4	0	0	0	-3	0	0	-1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	-5	0	0	0	-1	0	0
1	1	1	1	1	1	-3	0	0	0	0	-1	0
1	0	0	2	0	4	-9	0	0	0	0	0	-1
1	0	0	0	0	0	-3	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	2	0	1	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	0	2	0	0	0
0	0	0	1	0	1	-2	0	0	0	1	1	2
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	2
3	-2	1	1	-1	1	1						

skąd: $\underline{u = 3 - 2y + Y^2 + X - XY + X^2}$

Znając parametry możemy wypełnić puste miejsca czworoboku tablicy funkcyjnej, obliczając wartość U dla par wartości y x równych: 3.0 2.1 3.1 1.2 2.2 3.2 0.3 1.3 2.3 3.3.
Wykonać to można wygodnie krakowianowo obliczając iloczyn:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \cdots \\ Y & \cdots \\ Y^2 & \cdots \\ X & \cdots \\ XY & \cdots \\ X^2 & \cdots \end{Bmatrix}$$

Otrzymamy:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 9 & 1 & 4 & 9 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 6 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ 15 \\ 11 \\ 9 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

Pamiętając o porządku wpisania w drugim krakowianie poszczególnych kolumn, odpowiadających kolejnym w obranym porządku kolumnowym brakującym elementom tablicy, uzupełnimy tablicę mechanicznie rozpisując wynikowy krakowian j.n.

X \ Y	0	1	2	3
0	3	5	9	15
1	2	3	6	11
2	3	3	5	9
3	6	5	6	9

Po sprawdzeniu, że iloczyn każdej kolumny przez $\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$ oraz każdego wiersza przez -1 3 -3 1 jest zerem możemy uważać rachunek za wyczerpująco skontrolowany.

Interpolacja funkcji dwóch argumentów w postaci nieregularnej.

Zagadnienie interpolacyjne dla funkcji dwóch argumentów w postaci ogólnej /"nieregularnej"/ ująć można jak następuje.
Dana jest tablica funkcyjna:

X	Y	U
X_1	Y_1	U_1
X_2	Y_2	U_2
X_3	Y_3	U_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_n	Y_n	U_n

215

traktowana w zagadnieniu jako tablica wielomianowa wielomianu:

$$W/xy/ = \sum (x^i y^k)\, x^i \cdot y^k \qquad 216$$

przyczem wiadomo jest zgóry jakie potęgi zmiennych X Y występują w wielomianie W, to znaczy znane są wartości wskaźników i k dla p = n jednomianów: $(x^i y^k)\, x^i y^k$, składających się na wielomian W. /Symbol $(x^i y^k)$ oznacza, jak to już przyjęliśmy /str. 90 /, spółczynnik przy iloczynie i-tej potęgi zmiennej x przez k-tą potęgę zmiennej y /.

Należy obliczyć p = n parametrów wielomianu: $(x^{i_j}\, y^{k_j})$ /j=1.2...n/.—217

Jest to oczywiście typowe zadanie na rozwiązanie układu n równań o n niewiadomych w którym spółczynnikami przy niewiadomych $(x^i y^k)$ będą wartości iloczynów $x_j^i\, y_j^k$ /j=1.2...n /, zaś wyrazami wolnymi po lewej stronie równań minus wartości funkcji $-u_j$ /j=1.2...n /.

Oznaczając przez $\underline{P}$ pełny krakowian tego układu równań mielibyśmy wyraźnie:

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} x_1^{i_1}\, y_1^{k_1} & x_1^{i_2}\, y_1^{k_2} & \cdots & x_1^{i_n}\, y_1^{k_n} & -U_1 \\ x_2^{i_1}\, y_2^{k_1} & x_2^{i_2}\, y_2^{k_2} & \cdots & x_2^{i_n}\, y_2^{k_n} & -U_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{i_1}\, y_n^{k_1} & x_n^{i_2}\, y_n^{k_2} & \cdots & x_n^{i_n}\, y_n^{k_n} & -U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{S} & -\underline{U} \end{Bmatrix} \qquad 218$$

gdzie oznaczyliśmy dla skrócenia $\underline{S}$ krakowian spółczynnikowy układu, czyli krakowian $\underline{P}$ bez ostatniej kolumny.
Oznaczmy ponadto przez $\underline{(x)}$ poszukiwany krakowian parametrów, t.zn. wyraźnie:

$$\underline{(x)} = \begin{Bmatrix} (x^{i_1}\quad y^{k_1}) \\ (x^{i_2}\quad y^{k_2}) \\ \vdots \\ (x^{i_n}\quad y^{k_n}) \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad 219$$

1/ W wypadku rozkładalności krakowianu $\underline{P}$ na trójkątne czynniki kanoniczne zagadnienie rozwiążemy przez zerowanie tablic:

$$\begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{g} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\underline{\tau} \\ \underline{h} \end{Bmatrix} = 0 \qquad 220$$

$$\cdot\ \underline{(x)} \downarrow 0$$

gdzie, jak zawsze, $\underline{\tau}$ jest jednostką krakowianową, a $\underline{g}$ i $\underline{h}$ trójkątnymi czynnikami kanonicznymi krakowianu $\underline{P}$.

2/ W wypadku nierozkładalności krakowianu P, jak również w wypadku, gdy ilość elementów tablicy funkcyjnej jest większa od ilości parametrów: $n > p$ i zadanie polega na wyznaczeniu najprawdopodobniejszych wartości tych parametrów /t.zn.wartości zamieniających na minimum sumę kwadratów poprawek wielkości u /, zerować będziemy układ tablic:

$$\left\{\begin{matrix}\pi \\ \underline{g}\end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix}-\tau \\ \underline{h}\end{matrix}\right\} \cdot \left\{\underline{x}\right\} \rightarrow 0 = 0 \qquad 221$$

gdzie π jest iloczynem pełnego krakowianu układu przez spółczynnikowy: $\pi = P\,S$, zaś g i h czynnikami kanonicznymi krakowianu π. Po określeniu parametrów wielomianu rozwiązywać będziemy bez trudności wszelkie zagadnienia interpolacji szczegółowej, t.zn. obliczenie wartości jaką przybiera wielomian dla wartości argumentów x i y.

Droga 2/ jest oczywiście ogólniejsza i może być stosowana w każdym wypadku. Nie powtarzając rozumowań teoretycznych, uzasadniających słuszność postępowania, a podanych już w tekście i przypiskach /por.str. 29, 38, 74, 88 / przechodzimy do przykładów liczbowych.

Przykład liczbowy.

Przyjmując, że tablica funkcyjna:

X	Y	U
1	2	5
3	3	20
5	7	60

jest tablicą trójparametrowego wielomianu, zawierającego pierwsze potęgi i iloczyn zmiennych, t.zn.wielomianu:

$$W = x\,x + y\,y + xy\,xy$$

znaleźć parametry /x y xy/.
Mamy wyraźnie /218/:

$$\underline{P} = \left\{\begin{matrix}1 & 2 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 9 & -20 \\ 5 & 7 & 35 & -60\end{matrix}\right\} \quad \text{oraz /219/} \quad \underline{x} = \left\{\begin{matrix}x \\ y \\ xy\end{matrix}\right\}$$

Zerowanie tablic /220/ daje /jak zawsze piszemy dane wyjściowe - dużymi cyframi, dane uzyskane w procesie zerowania tablic - małymi cyframi/:

1	2	2	-5	-1			
3	3	9	-20		-1		
5	7	35	-60			-1	
1	2	2	-5	1	3	5	· → 0
0	1	-1	5/3	0	-3	-3	
0	0	1	-15/11	0	0	22	

95/33	-10/33	15/11	1

↓
0

Wielomian ma więc kształt: $W = {}^{95}\!/_{33}\, X - {}^{10}\!/_{33}\, Y + {}^{45}\!/_{33}$ albo: $W = {}^{1}\!/_{33} \begin{Bmatrix} 95 \\ -10 \\ 45 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ XY \end{Bmatrix}$

Dla skontrolowania rachunku obliczamy wartości jakie przybiera wielomian W dla par wartości podanych w tablicy:

$$W = {}^{1}\!/_{33} \begin{Bmatrix} 95 \\ -10 \\ 45 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 9 & 35 \end{Bmatrix} = {}^{1}\!/_{33} \begin{Bmatrix} 165 \\ 660 \\ 1980 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 60 \end{Bmatrix} \quad \text{jak i powinno być.}$$

Gdyby chodziło o wartość jaką przybiera ten wielomian np: dla $x=4$ $y=5$ napisalibyśmy:

$$W = {}^{1}\!/_{33} \begin{Bmatrix} 95 \\ -10 \\ 45 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 20 \end{Bmatrix} = {}^{1}\!/_{33}\ 1230 = 37.273$$

Uwaga. W praktyce rachunkowej nie liczymy oczywiście przy pomocy ułamków zwykłych, lecz dziesiętnych, lepiej dostosowanych do rachunku maszynowego.

Przykład liczbowy.

Przyjmując, że ta sama, co w przykładzie poprzednim, tablica funkcyjna jest tablicą trójparametrowego wielomianu, zawierającego wyraz wolny i kwadraty zmiennych, t.zn. wielomianu:

$$W = (1) \cdot 1 + (X^2)\, X + (Y^2)\, Y^2$$

znajdziemy parametry $/(1)\ (X^2)(Y^2)/$, oraz obliczymy wartość, jaką przybiera ten wielomian dla $x=4$ $y=5$.

Mamy wyraźnie:

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 9 & 9 & -20 \\ 1 & 25 & 49 & -60 \end{Bmatrix} \quad \text{oraz:} \quad \underline{(X)} = \begin{Bmatrix} (1) \\ (X^2) \\ (Y^2) \end{Bmatrix}$$

Zerowanie tablic daje:

1	1	4	-5
1	9	9	-20
1	25	49	-60
1	1	4	-5
0	1	5/8	-15/8
0	0	1	1/3

•

-1		
	-1	
		-1
1	1	1
0	8	24
0	0	30

$\longrightarrow \underline{0}$

6/3	5/3	1/3	1

$\downarrow$ $\underline{0}$

stąd wielomian: $W = {}^{6}\!/_{3} + {}^{5}\!/_{3}\, X^2 + {}^{1}\!/_{3}\, Y^2$ lub krakowianowo: $W = {}^{1}\!/_{3} \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X^2 \\ Y^2 \end{Bmatrix}$

Obliczając dla kontroli rachunku wartości wielomianu dla par wartości zmiennych, podanych w tablicy, otrzymamy:

$$W = {}^{1}\!/_{3} \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 25 \\ 4 & 9 & 49 \end{Bmatrix} = {}^{1}\!/_{3} \begin{Bmatrix} 15 \\ 60 \\ 180 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 60 \end{Bmatrix} \quad \text{jak być powinno.}$$

Dla wartości zmiennych: $x=4$ $y=5$, wielomian przybiera wartość:

$$W = {}^{1}\!/_{3} \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 16 \\ 25 \end{Bmatrix} = {}^{1}\!/_{3} \cdot 111 = 37.$$

Wartość ta jak widać różni się od wartości otrzymanej w drodze interpolacji przy pomocy poprzednio obranego wielomianu, stosunkowo nieznacznie. Pytanie, która z tych wartości jest "lepsza" t.zn. bliższa wartości stabelaryzowanej funkcji jest oczywiście bez dodatkowych założeń nierozstrzygalne.

Przykład liczbowy.

Poprzedni przykład, polegający na określeniu parametrów wielomianu:

$$W = (1)\, 1 + (x^2)\, x^2 + (y^2)\, y^2$$

w założeniu, że tablica funkcyjna:

x	y	U
1	2	5
3	3	20
5	7	60

jest tablicą tego wielomianu, rozwiązać można też wygodnie, korzystając z tego że krakowian potęgowy:

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 9 & 9 & -20 \\ 1 & 25 & 49 & -60 \end{Bmatrix}$$

jest "zjednostkowany", t.zn. wyraźnie że spółczynniki przy (1) w układzie równań liniowych:

$$\begin{aligned} 1\,(1) &+ 1\,(x^2) + 4\,(y^2) = 5 \\ 1\,(1) &+ 9\,(x^2) + 9\,(y^2) = 20 \\ 1\,(1) &+ 25\,(x^2) + 49\,(y^2) = 60 \end{aligned}$$

reprezentowanym przez ten krakowian są jednościami. Stosując postępowanie, opisane na str. 35 napiszemy odrazu:

$$\begin{Bmatrix} (x^2) \\ (y^2) \\ (1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 60 \\ 5 \\ 20 \\ 60 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 9 & 25 & -225 \\ 49 & 1 & -49 \\ 4 & 9 & -36 \\ -49 & -9 & 441 \\ -4 & -25 & 100 \\ -9 & -1 & 9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.666\ldots \\ 0.333\ldots \\ 2.000 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{240}$$

skąd: $W = 1.666\ldots x^2 + 0.333\ldots y^2 + 2 = \frac{5}{3} X^2 + \frac{1}{3} Y^2 + 2.$

Zastosowanie interpolacji do transformacji spółrzędnych geograficznych z jednego układu triangulacyjnego na drugi, przy trzech punktach dostosowania.

Zakładając istnienie pewnych warunków, które w nowoczesnych sieciach triangulacyjnych są zawsze spełnione,*) i uważając za dopuszczalne i zaniedbywalne błędy rachunkowe nieprzekraczające w szerokości geograficznej φ wielkości $\pm$ 0".0014 /około 4 cm/, oraz w długości geograficznej λ - wielkości $\pm$ 0.0043 /około 8 cm./, możemy transformując w naszych szerokościach geograficznych /$49° < \varphi < 55°$ / spółrzędne geograficzne z jednego układu triangulacyjnego - nazwijmy go układem pierwotnym - na drugi układ triangulacyjny - nazwijmy go układem wtórnym - przyjąć że:
poprawki, które należy dodać do spółrzędnej geograficznej w układzie pierwotnym dla otrzymania odpowiadającej spółrzędnej w układzie wtórnym są funkcjami liniowymi spółrzędnych $\varphi\ \lambda$ przeliczanego punktu znanych z układu pierwotnego. Jeżeli oznaczyć przez p i q poprawkę szerokości i poprawkę długości geograficznej punktu o spółrzędnych $\varphi\ \lambda$ / w układzie pierwotnym /,

*) Szczegóły: "Transformacja spółrzędnych geograficznych przy pomocy interpolacji" inż. Stefan Hausbrandt. Warszawa 1947. Geodezyjny Instytut Naukowo Badawczy przy Głównym Urzędzie Pomiarów Kraju. /odbitka światłodrukowa/.

zaś przez $A' B' C'$ oraz $A'' B'' C''$ stałe przekształcenia będzie więc:

$$\begin{aligned} p &= A'\varphi + B'\lambda + C' \\ q &= A''\varphi + B''\lambda + C'' \end{aligned} \qquad \text{———— } 222$$

lub w postaci krakowianowej: $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A' & A'' \\ B' & B'' \\ C' & C'' \end{Bmatrix}$

Stałe przekształcenia A B C można wyznaczyć znając spółrzędne trzech "punktów dostosowania" w układzie pierwotnym: $\varphi_1'\lambda_1'$ $\varphi_2'\lambda_2'$ $\varphi_3'\lambda_3'$, oraz wtórnym: $\varphi_1''\lambda_1''$ $\varphi_2''\lambda_2''$ $\varphi_3''\lambda_3''$ z których najpierw obliczymy poprawki punktów dostosowania:

$$\text{dla szerokości:}\quad \begin{aligned} p_1 &= \varphi_1'' - \varphi_1' \\ p_2 &= \varphi_2'' - \varphi_2' \\ p_3 &= \varphi_3'' - \varphi_3' \end{aligned} \qquad \text{i dla długości:}\quad \begin{aligned} q &= \lambda_1'' - \lambda_1' \\ q &= \lambda_2'' - \lambda_2' \\ q &= \lambda_3'' - \lambda_3' \end{aligned}$$

223

lub w postaci krakowianowej:

$$\begin{Bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1'' & \lambda_1'' \\ \varphi_2'' & \lambda_2'' \\ \varphi_3'' & \lambda_3'' \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varphi_1' & \lambda_1' \\ \varphi_2' & \lambda_2' \\ \varphi_3' & \lambda_3' \end{Bmatrix}$$

Po obliczeniu tych poprawek zestawić możemy 2 układy 3 równań /222/ z trzema niewiadomymi każdy. Ponieważ będą to układy zjednostkowane, najwygodniej rozwiązać je stosując wzory /88/, co doprowadzi do wzoru krakowianowego, wyznaczającego poszukiwane sześć parametrów:

$$\begin{Bmatrix} A' & A'' \\ B' & B'' \\ C' & C'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \\ p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & \varphi_3 & -\lambda_2 & \varphi_3 \\ \lambda_3 & \varphi_1 & -\lambda_3 & \varphi_1 \\ \lambda_1 & \varphi_2 & -\lambda_1 & \varphi_2 \\ -\lambda_3 & -\varphi_2 & \lambda_3 & \varphi_2 \\ -\lambda_1 & -\varphi_3 & \lambda_1 & \varphi_3 \\ -\lambda_2 & -\varphi_1 & \underline{\lambda_2} & \underline{\varphi_1} \end{Bmatrix} \frac{1}{S} \qquad \text{———— } 224$$

gdzie φ λ spółrzędne w układzie pierwotnym, zaś s oznacza sumę s ostatniej kolumny. Realizację równania 224 należy rozpocząć od obliczenia sumy s i zapisania jej, co umożliwi następnie czysto arytmometryczną realizację wzoru. Wielkości φ i λ najwygodniej na początku rachunku wyrazić w dziesiątkach tysięcy sekund, t.j. w "jednostkach dts", np: $10° = 36000'' = 3$ dts,60 , ewentualnie w innych jednostkach, nadających się do rachunku maszynowego.

Przykład liczbowy.

Znając spółrzędne geograficzne trzech punktów dostosowania:

w układzie pierwotnym

1/ Goldberg	$\varphi_1 = 19.^{dts}22848881$	$\lambda_1 = 7.^{dts}42003517$
2/ Eichenberg	$\varphi_2 = 19.\ 09574656$	$\lambda_2 = 6.\ 29621916$
3/ Dohnasberg	$\varphi_3 = 19.\ 60952536$	$\lambda_3 = 6.\ 63791183$

i w układzie wtórnym znajdziemy poprawki

		szerokości p	długości q
$\varphi_1'' = 19.^{dts}22822790$	$\lambda_1'' = 7.^{dts}41992348$	-2.6091	-1.1169
$\varphi_2'' = 19.\ 09547885$	$\lambda_2'' = 6.\ 29611834$	-2.6771	-1.0082
$\varphi_3'' = 19.\ 60926401$	$\lambda_3'' = 6.\ 63780110$	-2.6135	-1.1073

i obliczymy spółczynniki przekształcenia $A'B'C'$ $A''B''C''$, stosując wzór 224.

$$\begin{Bmatrix} A'A'' \\ B'B'' \\ C'C'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.6091 & -1.1169 \\ -2.6771 & -1.0082 \\ -2.6135 & -1.1073 \\ -2.6091 & -1.1169 \\ -2.6771 & -1.0082 \\ -2.6135 & -1.1073 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6.29621916 & 19.60952536 & -123.46586929 \\ 6.63791183 & 19.22848881 & -127.63701334 \\ 7.42003517 & 19.09574656 & -141.69111107 \\ -6.63791183 & -19.09574656 & 126.75588199 \\ -7.42003517 & -19.60952536 & 145.50336784 \\ -6.29621916 & -19.22848881 & 121.06677966 \end{bmatrix} 1/s =$$

$$s = 0.53203579$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.090670 & -0.139517 \\ 0.049798 & -0.080245 \\ -4''.7221 & 2''.1612 \end{Bmatrix}$$

Równania przekształcające /222/ mają więc postać:

$$p = 0.090670\ \varphi + 0.049798\ \lambda - 4.7221$$

$$q = -0.139517\ \varphi - 0.080245\ \lambda + 2.1612$$

przyczem φ i λ wyrażamy w jednostkach dts /dziesiątkach tysięcy sekund/ a poprawki p i q otrzymujemy w sekundach. Po sprawdzeniu, że poprawki p i q dla punktów dostosowania, obliczone z tych równań, wynoszą ściśle:

$$\begin{matrix} -2.6091 & -1.1169 \\ -2.6771 & -1.0082 \\ -2.6135 & -1.1073 \end{matrix}$$

możemy transformować punkty triangulacyjne z układu pierwotnego na wtórny. Rachunek wygodnie prowadzić w schemacie, w którym nad kolumną szerokości wpisujemy spółczynniki $A'A''$, nad kolumną długości - spółczynniki $B'B''$, a obok, w tych samych wierszach, wyrazy wolne $C'C''$.

Nazwa punktu w sieci pierwotnej.	Spółczynniki przekształcenia 0.090 670 -0.139 517 Spółrzędne układu pierwotnego φ	0.049 798 -0.080 245 λ	-4.7221 2.1612	Poprawki p	q	Spółrzędne układu wtórnego φ+p	λ+q	Uwagi.
Waldau	dts 19.2681 5464	dts 6.9236 5471	1	-2."6303	-1."0826	dts 19.2678 9161	dts 6.9235 4654	
Rinkowken	19.3257 4197	6.7017 4825	1	-2."6361	-1."0729	19.3254 7836	6.7016 4096	
Gr. Rohdau	19.3802 8809	6.9124 1772	1	-2."6207	-1."0974	19.3800 2602	6.9123 0798	
Königsbruch	19.3487 7035	6.5305 6665	1	-2."6425	-1."0623	19.3485 0610	6.5304 6042	
Gnieschau	19.4583 0437	6.7404 8871	1	-2."6222	-1."0945	19.4580 4215	6.7403 7926	
- - - -	- - - - -	- - - - - -	- -	- -	- -	- - - - -	- - - -	

Uwagi dotyczące postępowania przy ilości punktów dostosowania większej od trzech.

Gdy ilość punktów dostosowania przekracza trzy można bądź to: 1/ założyć inną formułę interpolacyjną, uwzględniającą wyższe potęgi, bądź: 2/ poprzestać na związku liniowym /222/ i przeprowadzić wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów; bądź wreszcie 3/ przeliczać punkty sieci z trzech tylko punktów dostosowania, obierając te, które dla danego punktu korzystnie są położone /blizko i w pożliwie jednakowej odległości/.
Zdaje się, że ta ostatnia droga - rachunkowo najprostsza - jest jednocześnie najbardziej uzasadniona. Poszukiwanie parametrów związku wyższego stopnia,

wobec stwierdzenia, że związek liniowy daje się uzasadnić, jest zwykłą stratą czasu, pomijając już niepewność w obliczeniu parametrów. Założenie zaś jednego związku liniowego /jednej "płaszczyzny interpolacyjnej"/ na większym obszarze, do czego w rezultacie prowadzi tu metoda najmniejszych kwadratów, stanowi wypaczenie podejścia interpolacyjnego, które przecież nie dlatego zostało obrane w formie najprostszej, że związek liniowy zachodzi, lecz dlatego że może on być na mniejszych obszarach przyjęty w charakterze przybliżenia.

Rozdział IV.

Interpolacja funkcji trzech argumentów.

Interpolacji funkcji trzech argumentów w postaci ogólnej /"nieregularnej"/ nie będziemy specjalnie rozpatrywać, gdyż zagadnienie rozwiązuje się tu zupełnie analogicznie do odnośnego zagadnienia dla funkcji dwóch argumentów. Nie wydaje się przytem, aby to zagadnienie mogło znaleźć szersze zastosowanie.
Rozpatrzymy natomiast zagadnienie interpolacji regularnej funkcji trzech argumentów, którego, jak to już w innym miejscu podkreśliliśmy, interpolacja różnicowa wogóle nie rozpatruje, a które w ujęciu interpolacji bezpośredniej daje się ująć i realizować w zupełnie przejrzysty sposób. Możliwości stosowania tej interpolacji w zagadnieniach geodezyjnych omówimy w dalszym ciągu. Wyobraźmy sobie układ tablic wartości funkcji trzech zmiennych $U = f/xy\ z\ /$, z których początkowa tablica zawiera zespół wartości tej funkcji dla stałej wartości zmiennej niezależnej $z = z_0$, następna zespół wartości tej funkcji dla stałej, lecz innej wartości zmiennej niezależnej $z = z_1$ i t.d. przyczem jest:

$$\Delta x = \text{const}_1 \qquad \Delta y = \text{const}_2 \qquad \Delta z = \text{const}_3 \qquad \text{——— 225}$$

Tablice takie można sobie wyobrazić, jako kolejne karty książki. Zasymbolizujemy przez $\underline{U}^0\ \underline{U}'\ \underline{U}''\ ...\underline{U}^{(p)}$ krakowiany zestawione z elementów tych tablic, wyznaczonych przez zakres interpolacji, a więc wyraźnie:

$$\underline{U}^0 = \begin{Bmatrix} U^0_{00} & U^0_{10} & \dots U^0_{m0} \\ U^0_{01} & U^0_{11} & U^0_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U^0_{0n} & U^0_{1n} & \dots U^0_{mn} \end{Bmatrix} \underline{U}' = \begin{Bmatrix} U'_{00} & U'_{10} & \dots U'_{m0} \\ U'_{01} & U'_{11} & U'_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U'_{0n} & U'_{1n} & \dots U'_{mn} \end{Bmatrix} \underline{U}^{(p)} = \begin{Bmatrix} U^{(p)}_{00} & U^{(p)}_{10} & \dots U^{(p)}_{m0} \\ U^{(p)}_{01} & U^{(p)}_{11} & U^{(p)}_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U^{(p)}_{0n} & U^{(p)}_{1n} & \dots U^{(p)}_{mn} \end{Bmatrix} \text{——— 226}$$

oraz przez $\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}$ krakowiany interpolacyjne zestawione w znany nam sposób, ewentualnie wzięte z tablicy krakowianów interpolacyjnych według ułamków K:

$$K_x = \frac{x - x_0}{\Delta x} \qquad K_y = \frac{y - y_0}{\Delta y} \qquad K_z = \frac{z - z_0}{\Delta z} \qquad \text{——— 227}$$

Pisząc wyraźnie te krakowiany, mieć będziemy:

$$\underline{A} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{Bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{Bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix} \qquad \text{——— 228}$$

Jeżeli teraz w znany nam z interpolacji funkcji dwóch argumentów sposób wyinterpolujemy z każdej tablicy wartość funkcji $f\ /x\ y\ z_i\ /$ przyczem z_i mieć będzie kolejno znaczenie $z_0\, z_1\, ... z_p$ otrzymamy układ wartości:

$$\begin{aligned} U^0 &= \underline{A}\ \underline{U}^0\underline{B} \\ U' &= \underline{A}\ \underline{U}'\underline{B} \\ &- - - - - - \\ U^{(p)} &= \underline{A}\ \underline{U}^{(p)}\underline{B} \end{aligned} \qquad \text{——— 229}$$

z którego, jako z układu wartości funkcji jednej zmiennej z, umiemy już wyinterpolować szukaną wartość funkcji. U = f /x y z /. Mamy więc ostatecznie:

$$U = \begin{Bmatrix} U^{0} \\ U_{1} \\ \vdots \\ U^{(p)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{0} \\ C_{1} \\ \vdots \\ C^{(p)} \end{Bmatrix} \qquad\text{------------}\quad 230$$

albo też uwzględniając /229/

$$u = \begin{Bmatrix} \underline{A}\cdot U^{0}\cdot \underline{B} \\ \underline{A}\cdot U^{1}\cdot \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{A}\cdot U^{(p)}\cdot \underline{B} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_{0} \\ C_{1} \\ \vdots \\ C^{(p)} \end{Bmatrix} \quad \text{lub:} \quad u = \begin{Bmatrix} \underline{A}\cdot U^{0}\cdot \underline{B} \\ \underline{A}\cdot U^{1}\cdot \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{A}\cdot U^{(p)}\cdot \underline{B} \end{Bmatrix} \cdot \underline{C} \qquad\text{------}\quad 231$$

Dla przeprowadzenia interpolacji w ujęciu mnożenia zupełnego tablic /str.37/ zestawilibyśmy tablicę osiową: $\boxed{\underline{A} \mid B}$ i mnożąc ją przez kolejne tablice zespołu: $\boxed{U^{0}}$ $\boxed{U^{1}}$ ... $\boxed{U^{(p)}}$ ... obliczyli zespół wartości:

$$U^{0} = \left(\boxed{\underline{A} \mid B} \cdot \boxed{U^{0}} \right)_{\Sigma}$$

$$U^{1} = \left(\boxed{\underline{A} \mid B} \cdot \boxed{U^{1}} \right)_{\Sigma} \qquad\text{------------}\quad 232$$

$$\text{- - - - - - - - -}$$

$$U^{p} = \left(\boxed{\underline{A} \mid B} \cdot \boxed{U^{(p)}} \right)_{\Sigma}$$

z których, zestawiając tablicę: $\boxed{\begin{matrix} U^{0} \\ U^{1} \\ \vdots \\ U^{(p)} \end{matrix}}$ i mnożąc ją przez tablicę: $\boxed{\begin{matrix} C_{0} \\ C_{1} \\ \vdots \\ C_{p} \end{matrix}}$

znajdziemy ostatecznie:

$$u = \left(\boxed{\begin{matrix} U^{0} \\ U^{1} \\ \vdots \\ U^{p} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} C_{0} \\ C_{1} \\ \vdots \\ C_{p} \end{matrix}} \right)_{\Sigma} \qquad\text{------------}\quad 233$$

<u>Przykład liczbowy.</u>

Z danego układu tablic wyinterpolować przy pomocy interpolacji trójwyrazowej wartość funkcji $u = f\,/x\ y\ z/$ dla wartości zmiennych $x = 3.00$ $y = 3.60$ $z = 0.25$.

Ułamki interpolacyjne K wynoszą: $K_{x} = \frac{3-2}{2} = 0.50$ $\quad K_{y} = \frac{3.60-3}{3} = 0.20$ $\quad K_{z} = \frac{0.25-0}{1} = 0.25$

Stąd krakowiany interpolacyjne: $\underline{A} = \begin{Bmatrix} 0.375 \\ 0.750 \\ -0.125 \end{Bmatrix}$ $\quad \underline{B} = \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix}$ $\quad \underline{C} = \begin{Bmatrix} 0.65625 \\ 0.43750 \\ -0.09375 \end{Bmatrix}$

z=0

X \ Y	3	6	9
---	---	---	---
2	6	12	18
4	12	24	36
6	18	36	54
---	---	---	---

z=1

X \ Y	3	6	9
---	---	---	---
2	15	30	45
4	27	54	81
6	39	78	117
---	---	---	---

z=2

X \ Y	3	6	9
---	---	---	---
2	24	48	72
4	42	84	126
6	60	120	180
---	---	---	---

Interpolacja z tablicy /z = o / daje /229/

$$u = \begin{Bmatrix} 0.375 \\ 0.750 \\ -0.125 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 24 & 36 \\ 18 & 36 & 54 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} = 10.80$$

Interpolacja z tablicy /z = 1 /:

$$u = \begin{Bmatrix} 0.375 \\ 0.750 \\ -0.125 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 15 & 30 & 45 \\ 27 & 54 & 81 \\ 39 & 78 & 117 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 42 \\ 63 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} = 25.20$$

Skąd ostatecznie(230)

$$u = \begin{Bmatrix} 10.80 \\ 25.20 \\ 39.60 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.65625 \\ 0.43750 \\ 0.09375 \end{Bmatrix} = \; =1440$$

Interpolacja z tablicy /z = 2/:

$$u = \begin{Bmatrix} 0.375 \\ 0.750 \\ -0.125 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 24 & 48 & 72 \\ 42 & 84 & 126 \\ 60 & 120 & 180 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33 \\ 66 \\ 99 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{Bmatrix} = 39.60$$

W ujęciu mnożenia zupełnego tablic rozpoczęlibyśmy od zestawienia tablicy osiowej $\boxed{A \mid B}$:

	0.72	0.36	-0.08
0.375	0.270	0.135	-0.030
0.750	0.540	0.270	-0.060
-0.125	-0.090	-0.045	0.010

Po sprawdzeniu, że suma elementów tablicy jest jednością, mnożymy ją kolejno przez dane tablice funkcyjne, otrzymując /przy sumowaniu w granicach każdej tablicy/: 10.800 25.200 39.600.

Stąd ostatecznie:

$$u = \left(\begin{array}{|c|} \hline 10.8 \\ 25.2 \\ 39.6 \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|} \hline 0.65625 \\ 0.43750 \\ -0.09375 \\ \hline \end{array} \right)_{\Sigma} = 14.40$$

Postępowanie rachunkowe w ujęciu mnożenia zupełnego jest tu wygodniejsze od ujęcia krakowianowego.

Wprawdzie w obu metodach musimy wykonać po 39 mnożeń, zapisując po 13 pozycji liczbowych. Jednak w ujęciu "mnożenia zupełnego" mnożenia przy zestawieniu "tabliczki interpolującej" są łatwiejsze, jako wymagające mniejszej ilości nastawień. Również odpada potrzeba przepisywania krakowianów. Zysk na czasie nie jest zresztą wielki, choć niewątpliwy.

Zakończenie. Możliwości zastosowań interpolacji bezpośredniej w geodezji.

Nie mówiąc już o przydatności interpolacji bezpośredniej w dziedzinie opracowywania wszelkich tablic funkcyjnych tak niezbędnych w rachunkach geodezyjnych, zwrócimy tu specjalną uwagę na przydatność interpolacji funkcji dwóch i trzech argumentów w postaci regularnej do rozwiązywania całego szeregu zagadnień geodezji i kartografii matematycznej.

Zagadnienia te, które nazwać by można krótko zagadnieniami transformacyjnymi, mają następującą jednakową pod względem formy, choć wysoce różnorodną pod względem treści matematycznej postać: z danych pod postacią regularnych tablic funkcyjnych wartości jakie przybierają funkcje $U/x_k y_k z_k/$ $V/x_k y_k z_k/$ $W/x_k y_k z_k/$ dla znanych wartości zmiennych $x_k y_k z_k$... należy obliczyć w drodze wielowyrazowej interpolacji wartości tych funkcji: $U/x_k y_k z_k/$ $V/x_k y_k z_k/$ $W/x_k y_k z_k/$ dla danych wartości zmiennych. Dane są więc w zagadnieniu wartości: $x_k y_k z_k$ oraz tablice funkcyjne; szukamy wartości: $U/x_k y_k z_k/$ $V/x_k y_k z_k/$ $W/x_k y_k z_k/$, co ujmujemy krótko, mówiąc o transformacji zmiennych x y z na zmienne U V W. Ilość zmiennych x y z ... może przytem być równa, mniejsza, lub większa od ilości zmiennych U V W. Należą tu w szczególności następujące zagadnienia /wysławiamy je językiem technicznym, niezawsze ścisłym, lecz ogólnie przyjętym/; aktualne w naszych warunkach pracy:

1/ Przeliczenie spółrzędnych geograficznych na prostokątne /w przyjętym u nas układzie 3° Gaussa - Krügera /.

2/ Przeliczenie spółrzędnych prostokątnych na geograficzne.

3/ Przeliczenie spółrzędnych w pobliżu styku układów 3° na układ sąsiedni /wschodnie na zachodnie i odwrotnie/.

4/ Przeliczenie spółrzędnych z jednego odwzorowania na inne /np. quasi stereograficzne na Gaussa-Krügera/.

Przeliczamy tu z reguły 2 wielkości na 2 /w przyjętym wyżej ujęciu symbolicznym transformujemy X Y na U V /.

W zagadnieniu 1/ poszukuje się też niekiedy i "zbieżności Gaussa" - mamy wtedy przeliczenie dwóch wielkości na trzy. Do zadań przeliczających trzy wielkości, a więc zadań wymagających interpolacji funkcji trzech argumentów, opisanej na str. 100 należą:

5/ Przeliczenie długości linii geodezyjnej, jej azymutu, oraz szerokości geograficznej początku linii na przyrost szerokości, przyrost długości geograficznej i przyrost azymutu /t.zw. zadanie główne wprost/.

6/ Przeliczenie przyrostów spółrzędnych geograficznych między dwoma punktami na linii geodezyjnej, oraz szerokości punktu początkowego na długość linii geodezyjnej i jej azymuty na początku i na końcu /t.zw.zadanie główne w postaci odwróconej /.

Każde z wymienionych tu zagadnień /możnaby podawać ich więcej/ jest - jak wiadomo - zupełnie odrębne gdy chodzi o jego szczegółową szatę matematyczną. Każde wymaga nieco innego podejścia rachunkowego i przez to już wymaga specjalnych kwalifikacji fachowych, lub chociaż obeznania z istniejącymi dla rozwiązania danego zadania pomocami rachunkowymi.

W ujęciu interpolacji bezpośredniej - oczywiście przy założeniu istnienia odpowiednich tablic funkcyjnych, opracowanych przez fachowców - rozwiązanie wszystkich tych zadań staje się łatwodostępne dla każdego rachmistrza, umiejącego tylko obchodzić się z arytmometrem. Niewymagające dodatkowych rachunków kontrole, oparte na związkach $\Sigma A = 1$ ewentualnie $\boxed{A \mid B}_{\Sigma} = 1$, gwarantują przytem bezbłędność wykonania, co jest dla rachunków geodezji wyższej, tak ubogich w kontrole, ogromnie ważne.

Z omawianych tu zagadnień zilustrowaliśmy w tekście rozwiązaniem liczbowym zagadnienia 1/ i 2/ /str.83,84 /. Zilustrowanie pozostałych wymienionych zagadnień nie było z braku odpowiednich tablic funkcyjnych możliwe. Jeżeli chodzi o zastosowania interpolacji nieregularnej funkcji dwóch argumentów to najważniejszymi wydają się zagadnienia transformacji spółrzędnych geograficznych jednego układu na inny.

Ilustrację podaliśmy na str. 97.

Krakowiany interpolacyjne

<u>A</u> (<u>B</u> <u>C</u>)

interpolacji trzy i czterowyrazowej

Służące do interpolowania

wartości funkcji jednego, dwóch i trzech argumentów

przy pomocy bezpośredniej interpolacji wielomianowej

Tablica 1

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.000 1.000 0000 0 0	0.020 0.970 2000 0.039 6000 -0.009 8000	0.040 0.940 8000 0.078 4000 -0.019 2000	0.060 0.911 8000 0.116 4000 -0.028 2000	0.080 0.883 2000 0.153 6000 -0.036 8000	0.100 0.855 0000 0.190 0000 -0.045 0000	0.120 0.827 2000 0.225 6000 -0.052 8000	0.140 0.799 8000 0.260 4000 -0.060 2000	0.160 0.772 8000 0.294 4000 -0.067 2000	0.180 0.746 2000 0.327 6000 -0.073 8000
0.001 0.998 5005 0.001 9990 -0.000 4995	0.021 0.968 7205 0.041 5590 -0.010 2795	0.041 0.939 3405 0.080 3190 -0.019 6595	0.061 0.910 3605 0.118 2790 -0.028 6395	0.081 0.881 7805 0.155 4390 -0.037 2195	0.101 0.853 6005 0.191 7990 -0.045 3995	0.121 0.825 8205 0.227 3590 -0.053 1795	0.141 0.798 4405 0.262 1190 -0.060 5595	0.161 0.771 4605 0.296 0790 -0.067 5395	0.181 0.744 8805 0.329 2390 -0.074 1195
0.002 0.997 0020 0.003 9960 -0.000 9980	0.022 0.967 2420 0.043 5160 -0.010 7580	0.042 0.937 8820 0.082 2360 -0.020 1180	0.062 0.908 9220 0.120 1560 -0.029 0780	0.082 0.880 3620 0.157 2760 -0.037 6380	0.102 0.852 2020 0.193 5960 -0.045 7980	0.122 0.824 4420 0.229 1160 -0.053 5580	0.142 0.797 0820 0.263 8360 -0.060 9180	0.162 0.770 1220 0.297 7560 -0.067 8780	0.182 0.743 5620 0.330 8760 -0.074 4380
0.003 0.995 5045 0.005 9910 -0.001 4955	0.023 0.965 7645 0.045 4710 -0.011 2355	0.043 0.936 4245 0.084 1510 -0.020 5755	0.063 0.907 4845 0.122 0310 -0.029 5155	0.083 0.878 9445 0.159 1110 -0.038 0555	0.103 0.850 8045 0.195 3910 -0.046 1955	0.123 0.823 0645 0.230 8710 -0.053 9355	0.143 0.795 7245 0.265 5510 -0.061 2755	0.163 0.768 7845 0.299 4310 -0.068 2155	0.183 0.742 2445 0.332 5110 -0.074 7555
0.004 0.994 0080 0.007 9840 -0.001 9920	0.024 0.964 2880 0.047 4240 -0.011 7120	0.044 0.934 9680 0.086 0640 -0.021 0320	0.064 0.906 0480 0.123 9040 -0.029 9520	0.084 0.877 5280 0.160 9440 -0.038 4720	0.104 0.849 4080 0.197 1840 -0.046 5920	0.124 0.821 6880 0.232 6240 -0.054 3120	0.144 0.794 3680 0.267 2640 -0.061 6320	0.164 0.767 4480 0.301 1040 -0.068 5520	0.184 0.740 9280 0.334 1440 -0.075 0720
0.005 0.992 5125 0.009 9750 -0.002 4875	0.025 0.962 8125 0.049 3750 -0.012 1875	0.045 0.933 5125 0.087 9750 -0.021 4875	0.065 0.904 6125 0.125 7750 -0.030 3875	0.085 0.876 1125 0.162 7750 -0.038 8875	0.105 0.848 0125 0.198 9750 -0.046 9875	0.125 0.820 3125 0.234 3750 -0.054 6875	0.145 0.793 0125 0.268 9750 -0.061 9875	0.165 0.766 1125 0.302 7750 -0.068 8875	0.185 0.739 6125 0.335 7750 -0.075 3875
0.006 0.991 0180 0.011 9640 -0.002 9820	0.026 0.961 3380 0.051 3240 -0.012 6620	0.046 0.932 0580 0.089 8840 -0.021 9420	0.066 0.903 1780 0.127 6440 -0.030 8220	0.086 0.874 6980 0.164 6040 -0.039 3020	0.106 0.846 6180 0.200 7640 -0.047 3820	0.126 0.818 9380 0.236 1240 -0.055 0620	0.146 0.791 6580 0.270 6840 -0.062 3420	0.166 0.764 7780 0.304 4440 -0.069 2220	0.186 0.738 2980 0.337 4040 -0.075 7020
0.007 0.989 5245 0.013 9510 -0.003 4755	0.027 0.959 8645 0.053 2710 -0.013 1355	0.047 0.930 6045 0.091 7910 -0.022 3955	0.067 0.901 7445 0.129 5110 -0.031 2555	0.087 0.873 2845 0.166 4310 -0.039 7155	0.107 0.845 2245 0.202 5510 -0.047 7755	0.127 0.817 5645 0.237 8710 -0.055 4355	0.147 0.790 3045 0.272 3910 -0.062 6955	0.167 0.763 4445 0.306 1110 -0.069 5555	0.187 0.736 9845 0.339 0310 -0.076 0155
0.008 0.988 0320 0.015 9360 -0.003 9680	0.028 0.958 3920 0.055 2160 -0.013 6080	0.048 0.929 1520 0.093 6960 -0.022 8480	0.068 0.900 3120 0.131 3760 -0.031 6880	0.088 0.871 8720 0.168 2560 -0.040 1280	0.108 0.843 8320 0.204 3360 -0.048 1680	0.128 0.816 1920 0.239 6160 -0.055 8080	0.148 0.788 9520 0.274 0960 -0.063 0480	0.168 0.762 1120 0.307 7760 -0.069 8880	0.188 0.735 6720 0.340 6560 -0.076 3280
0.009 0.986 5405 0.017 9190 -0.004 4595	0.029 0.956 9205 0.057 1590 -0.014 0795	0.049 0.927 7005 0.095 5990 -0.023 2995	0.069 0.898 8805 0.133 2390 -0.032 1195	0.089 0.870 4605 0.170 0790 -0.040 5395	0.109 0.842 4405 0.206 1190 -0.048 5595	0.129 0.814 8205 0.241 3590 -0.056 1795	0.149 0.787 6005 0.275 7990 -0.063 3995	0.169 0.760 7805 0.309 4390 -0.070 2195	0.189 0.734 3605 0.342 2790 -0.076 6395
0.010 0.985 0500 0.019 9000 -0.004 9500	0.030 0.955 4500 0.059 1000 -0.014 5500	0.050 0.926 2500 0.097 5000 -0.023 7500	0.070 0.897 4500 0.135 1000 -0.032 5500	0.090 0.869 0500 0.171 9000 -0.040 9500	0.110 0.841 0500 0.207 9000 -0.048 9500	0.130 0.813 4500 0.243 1000 -0.056 5500	0.150 0.786 2500 0.277 5000 -0.063 7500	0.170 0.759 4500 0.311 1000 -0.070 5500	0.190 0.733 0500 0.343 9000 -0.076 9500
0.011 0.983 5605 0.021 8790 -0.005 4395	0.031 0.953 9805 0.061 0390 -0.015 0195	0.051 0.924 8005 0.099 3990 -0.024 1995	0.071 0.896 0205 0.136 9590 -0.032 9795	0.091 0.867 6405 0.173 7190 -0.041 3595	0.111 0.839 6605 0.209 6790 -0.049 3395	0.131 0.812 0805 0.244 8390 -0.056 9195	0.151 0.784 9005 0.279 1990 -0.064 0995	0.171 0.758 1205 0.312 7590 -0.070 8795	0.191 0.731 7405 0.345 5190 -0.077 2595
0.012 0.982 0720 0.023 8560 -0.005 9280	0.032 0.952 5120 0.062 9760 -0.015 4880	0.052 0.923 3520 0.101 2960 -0.024 6480	0.072 0.894 5920 0.138 8160 -0.033 4080	0.092 0.866 2320 0.175 5360 -0.041 7680	0.112 0.838 2720 0.211 4560 -0.049 7280	0.132 0.810 7120 0.246 5760 -0.057 2880	0.152 0.783 5520 0.280 8960 -0.064 4480	0.172 0.756 7920 0.314 4160 -0.071 2080	0.192 0.730 4320 0.347 1360 -0.077 5680
0.013 0.980 5845 0.025 8310 -0.006 4155	0.033 0.951 0445 0.064 9110 -0.015 9555	0.053 0.921 9045 0.103 1910 -0.025 0955	0.073 0.893 1645 0.140 6710 -0.033 8355	0.093 0.864 8245 0.177 3510 -0.042 1755	0.113 0.836 8845 0.213 2310 -0.050 1155	0.133 0.809 3445 0.248 3110 -0.057 6555	0.153 0.782 2045 0.282 5910 -0.064 7955	0.173 0.755 4645 0.316 0710 -0.071 5355	0.193 0.729 1245 0.348 7510 -0.077 8755
0.014 0.979 0980 0.027 8040 -0.006 9020	0.034 0.949 5780 0.066 8440 -0.016 4220	0.054 0.920 4580 0.105 0840 -0.025 5420	0.074 0.891 7380 0.142 5240 -0.034 2620	0.094 0.863 4180 0.179 1640 -0.042 5820	0.114 0.835 4980 0.215 0040 -0.050 5020	0.134 0.807 9780 0.250 0440 -0.058 0220	0.154 0.780 8580 0.284 2840 -0.065 1420	0.174 0.754 1380 0.317 7240 -0.071 8620	0.194 0.727 8180 0.350 3640 -0.078 1820
0.015 0.977 6125 0.029 7750 -0.007 3875	0.035 0.948 1125 0.068 7750 -0.016 8875	0.055 0.919 0125 0.106 9750 -0.025 9875	0.075 0.890 3125 0.144 3750 -0.034 6875	0.095 0.862 0125 0.180 9750 -0.042 9875	0.115 0.834 1125 0.216 7750 -0.050 8875	0.135 0.806 6125 0.251 7750 -0.058 3875	0.155 0.779 5125 0.285 9750 -0.065 4875	0.175 0.752 8125 0.319 3750 -0.072 1875	0.195 0.726 5125 0.351 9750 -0.078 4875
0.016 0.976 1280 0.031 7440 -0.007 8720	0.036 0.946 6480 0.070 7040 -0.017 3520	0.056 0.917 5680 0.108 8640 -0.026 4320	0.076 0.888 8880 0.146 2240 -0.035 1120	0.096 0.860 6080 0.182 7840 -0.043 3920	0.116 0.832 7280 0.218 5440 -0.051 2720	0.136 0.805 2480 0.253 5040 -0.058 7520	0.156 0.778 1680 0.287 6640 -0.065 8320	0.176 0.751 4880 0.321 0240 -0.072 5120	0.196 0.725 2080 0.353 5840 -0.078 7920
0.017 0.974 6445 0.033 7110 -0.008 3555	0.037 0.945 1845 0.072 6310 -0.017 8155	0.057 0.916 1245 0.110 7510 -0.026 8755	0.077 0.887 4645 0.148 0710 -0.035 5355	0.097 0.859 2045 0.184 5910 -0.043 7955	0.117 0.831 3445 0.220 3110 -0.051 6555	0.137 0.803 8845 0.255 2310 -0.059 1155	0.157 0.776 8245 0.289 3510 -0.066 1755	0.177 0.750 1645 0.322 6710 -0.072 8355	0.197 0.723 9045 0.355 1910 -0.079 0955
0.018 0.973 1620 0.035 6760 -0.008 8380	0.038 0.943 7220 0.074 5560 -0.018 2780	0.058 0.914 6820 0.112 6360 -0.027 3180	0.078 0.886 0420 0.149 9160 -0.035 9580	0.098 0.857 8020 0.186 3960 -0.044 1980	0.118 0.829 9620 0.222 0760 -0.052 0380	0.138 0.802 5220 0.256 9560 -0.059 4780	0.158 0.775 4820 0.291 0360 -0.066 5180	0.178 0.748 8420 0.324 3160 -0.073 1580	0.198 0.722 6020 0.356 7960 -0.079 3980
0.019 0.971 6805 0.037 6390 -0.009 3195	0.039 0.942 2605 0.076 4790 -0.018 7395	0.059 0.913 2405 0.114 5190 -0.027 7595	0.079 0.884 6205 0.151 7590 -0.036 3795	0.099 0.856 4005 0.188 1990 -0.044 5995	0.119 0.828 5805 0.223 8390 -0.052 4195	0.139 0.801 1605 0.258 6790 -0.059 8395	0.159 0.774 1405 0.292 7190 -0.066 8595	0.179 0.747 5205 0.325 9590 -0.073 4795	0.199 0.721 3005 0.358 3990 -0.079 6995

Tablica 1

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.200 0.720 0000 0.360 0000 −0.080 0000	0.220 0.694 2000 0.391 6000 −0.085 8000	0.240 0.668 8000 0.422 4000 −0.091 2000	0.260 0.643 8000 0.452 4000 −0.096 2000	0.280 0.619 2000 0.481 6000 −0.100 8000	0.300 0.595 0000 0.510 0000 −0.105 0000	0.320 0.571 2000 0.537 6000 −0.108 8000	0.340 0.547 8000 0.564 4000 −0.112 2000	0.360 0.524 8000 0.590 4000 −0.115 2000	0.380 0.502 2000 0.615 6000 −0.117 8000
0.201 0.718 7005 0.361 5990 −0.080 2995	0.221 0.692 9205 0.393 1590 −0.086 0795	0.241 0.667 5405 0.423 9190 −0.091 4595	0.261 0.642 5605 0.453 8790 −0.096 4395	0.281 0.617 9805 0.483 0390 −0.101 0195	0.301 0.593 8005 0.511 3990 −0.105 1995	0.321 0.570 0205 0.538 9590 −0.108 9795	0.341 0.546 6405 0.565 7190 −0.112 3595	0.361 0.523 6605 0.591 6790 −0.115 3395	0.381 0.501 0805 0.616 8390 −0.117 9195
0.202 0.717 4020 0.363 1960 −0.080 5980	0.222 0.691 6420 0.394 7160 −0.086 3580	0.242 0.666 2820 0.425 4360 −0.091 7180	0.262 0.641 3220 0.455 3560 −0.096 6780	0.282 0.616 7620 0.484 4760 −0.101 2380	0.302 0.592 6020 0.512 7960 −0.105 3980	0.322 0.568 8420 0.540 3160 −0.109 1580	0.342 0.545 4820 0.567 0360 −0.112 5180	0.362 0.522 5220 0.592 9560 −0.115 4780	0.382 0.499 9620 0.618 0760 −0.118 0380
0.203 0.716 1045 0.364 7910 −0.080 8955	0.223 0.690 3645 0.396 2710 −0.086 6355	0.243 0.665 0245 0.426 9510 −0.091 9755	0.263 0.640 0845 0.456 8310 −0.096 9155	0.283 0.615 5445 0.485 9110 −0.101 4555	0.303 0.591 4045 0.514 1910 −0.105 5955	0.323 0.567 6645 0.541 6710 −0.109 3355	0.343 0.544 3245 0.568 3510 −0.112 6755	0.363 0.521 3845 0.594 2310 −0.115 6155	0.383 0.498 8445 0.619 3110 −0.118 1555
0.204 0.714 8080 0.366 3840 −0.081 1920	0.224 0.689 0880 0.397 8240 −0.086 9120	0.244 0.663 7680 0.428 4640 −0.092 2320	0.264 0.638 8480 0.458 3040 −0.097 1520	0.284 0.614 3280 0.487 3440 −0.101 6720	0.304 0.590 2080 0.515 5840 −0.105 7920	0.324 0.566 4880 0.543 0240 −0.109 5120	0.344 0.543 1680 0.569 6640 −0.112 8320	0.364 0.520 2480 0.595 5040 −0.115 7520	0.384 0.497 7280 0.620 5440 −0.118 2720
0.205 0.713 5125 0.367 9750 −0.081 4875	0.225 0.687 8125 0.399 3750 −0.087 1875	0.245 0.662 5125 0.429 9750 −0.092 4875	0.265 0.637 6125 0.459 7750 −0.097 3875	0.285 0.613 1125 0.488 7750 −0.101 8875	0.305 0.589 0125 0.516 9750 −0.105 9875	0.325 0.565 3125 0.544 3750 −0.109 6875	0.345 0.542 0125 0.570 9750 −0.112 9875	0.365 0.519 1125 0.596 7750 −0.115 8875	0.385 0.496 6125 0.621 7750 −0.118 3875
0.206 0.712 2180 0.369 5640 −0.081 7820	0.226 0.686 5380 0.400 9240 −0.087 4620	0.246 0.661 2580 0.431 4840 −0.092 7420	0.266 0.636 3780 0.461 2440 −0.097 6220	0.286 0.611 8980 0.490 2040 −0.102 1020	0.306 0.587 8180 0.518 3640 −0.106 1820	0.326 0.564 1380 0.545 7240 −0.109 8620	0.346 0.540 8580 0.572 2840 −0.113 1420	0.366 0.517 9780 0.598 0440 −0.116 0220	0.386 0.495 4980 0.623 0040 −0.118 5020
0.207 0.710 9245 0.371 1510 −0.082 0755	0.227 0.685 2645 0.402 4710 −0.087 7355	0.247 0.660 0045 0.432 9910 −0.092 9955	0.267 0.635 1445 0.462 7110 −0.097 8555	0.287 0.610 6845 0.491 6310 −0.102 3155	0.307 0.586 6245 0.519 7510 −0.106 3755	0.327 0.562 9645 0.547 0710 −0.110 0355	0.347 0.539 7045 0.573 5910 −0.113 2955	0.367 0.516 8445 0.599 3110 −0.116 1555	0.387 0.494 3845 0.624 2310 −0.118 6155
0.208 0.709 6320 0.372 7360 −0.082 3680	0.228 0.683 9920 0.404 0160 −0.088 0080	0.248 0.658 7520 0.434 4960 −0.093 2480	0.268 0.633 9120 0.464 1760 −0.098 0880	0.288 0.609 4720 0.493 0560 −0.102 5280	0.308 0.585 4320 0.521 1360 −0.106 5680	0.328 0.561 7920 0.548 4160 −0.110 2080	0.348 0.538 5520 0.574 8960 −0.113 4480	0.368 0.515 7120 0.600 5760 −0.116 2880	0.388 0.493 2720 0.625 4560 −0.118 7280
0.209 0.708 3405 0.374 3190 −0.082 6595	0.229 0.682 7205 0.405 5590 −0.088 2795	0.249 0.657 5005 0.435 9990 −0.093 4995	0.269 0.632 6805 0.465 6390 −0.098 3195	0.289 0.608 2605 0.494 4790 −0.102 7395	0.309 0.584 2405 0.522 5190 −0.106 7595	0.329 0.560 6205 0.549 7590 −0.110 3795	0.349 0.537 4005 0.576 1990 −0.113 5995	0.369 0.514 5805 0.601 8390 −0.116 4195	0.389 0.492 1605 0.626 6790 −0.118 8395
0.210 0.707 0500 0.375 9000 −0.082 9500	0.230 0.681 4500 0.407 1000 −0.088 5500	0.250 0.656 2500 0.437 5000 −0.093 7500	0.270 0.631 4500 0.467 1000 −0.098 5500	0.290 0.607 0500 0.495 9000 −0.102 9500	0.310 0.583 0500 0.523 9000 −0.106 9500	0.330 0.559 4500 0.551 1000 −0.110 5500	0.350 0.536 2500 0.577 5000 −0.113 7500	0.370 0.513 4500 0.603 1000 −0.116 5500	0.390 0.491 0500 0.627 9000 −0.118 9500
0.211 0.705 7605 0.377 4790 −0.083 2395	0.231 0.680 1805 0.408 6390 −0.088 8195	0.251 0.655 0005 0.438 9990 −0.093 9995	0.271 0.630 2205 0.468 5590 −0.098 7795	0.291 0.605 8405 0.497 3190 −0.103 1595	0.311 0.581 8605 0.525 2790 −0.107 1395	0.331 0.558 2805 0.552 4390 −0.110 7195	0.351 0.535 1005 0.578 7990 −0.113 8995	0.371 0.512 3205 0.604 3590 −0.116 6795	0.391 0.489 9405 0.629 1190 −0.119 0595
0.212 0.704 4720 0.379 0560 −0.083 5280	0.232 0.678 9120 0.410 1760 −0.089 0880	0.252 0.653 7520 0.440 4960 −0.094 2480	0.272 0.628 9920 0.470 0160 −0.099 0080	0.292 0.604 6320 0.498 7360 −0.103 3680	0.312 0.580 6720 0.526 6560 −0.107 3280	0.332 0.557 1120 0.553 7760 −0.110 8880	0.352 0.533 9520 0.580 0960 −0.114 0480	0.372 0.511 1920 0.605 6160 −0.116 8080	0.392 0.488 8320 0.630 3360 −0.119 1680
0.213 0.703 1845 0.380 6310 −0.083 8155	0.233 0.677 6445 0.411 7110 −0.089 3555	0.253 0.652 5045 0.441 9910 −0.094 4955	0.273 0.627 7645 0.471 4710 −0.099 2355	0.293 0.603 4245 0.500 1510 −0.103 5755	0.313 0.579 4845 0.528 0310 −0.107 5155	0.333 0.555 9445 0.555 1110 −0.111 0555	0.353 0.532 8045 0.581 3910 −0.114 1955	0.373 0.510 0645 0.606 8710 −0.116 9355	0.393 0.487 7245 0.631 5510 −0.119 2755
0.214 0.701 8980 0.382 2040 −0.084 1020	0.234 0.676 3780 0.413 2440 −0.089 6220	0.254 0.651 2580 0.443 4840 −0.094 7420	0.274 0.626 5380 0.472 9240 −0.099 4620	0.294 0.602 2180 0.501 5640 −0.103 7820	0.314 0.578 2980 0.529 4040 −0.107 7020	0.334 0.554 7780 0.556 4440 −0.111 2220	0.354 0.531 6580 0.582 6840 −0.114 3420	0.374 0.508 9380 0.608 1240 −0.117 0620	0.394 0.486 6180 0.632 7640 −0.119 3820
0.215 0.700 6125 0.383 7750 −0.084 3875	0.235 0.675 1125 0.414 7750 −0.089 8875	0.255 0.650 0125 0.444 9750 −0.094 9875	0.275 0.625 3125 0.474 3750 −0.099 6875	0.295 0.601 0125 0.502 9750 −0.103 9875	0.315 0.577 1125 0.530 7750 −0.107 8875	0.335 0.553 6125 0.557 7750 −0.111 3875	0.355 0.530 5125 0.583 9750 −0.114 4875	0.375 0.507 8125 0.609 3750 −0.117 1875	0.395 0.485 5125 0.633 9750 −0.119 4875
0.216 0.699 3280 0.385 3440 −0.084 6720	0.236 0.673 8480 0.416 3040 −0.090 1520	0.256 0.648 7680 0.446 4640 −0.095 2320	0.276 0.624 0880 0.475 8240 −0.099 9120	0.296 0.599 8080 0.504 3840 −0.104 1920	0.316 0.575 9280 0.532 1440 −0.108 0720	0.336 0.552 4480 0.559 1040 −0.111 5520	0.356 0.529 3680 0.585 2640 −0.114 6320	0.376 0.506 6880 0.610 6240 −0.117 3120	0.396 0.484 4080 0.635 1840 −0.119 5920
0.217 0.698 0445 0.386 9110 −0.084 9555	0.237 0.672 5845 0.417 8310 −0.090 4155	0.257 0.647 5245 0.447 9510 −0.095 4755	0.277 0.622 8645 0.477 2710 −0.100 1355	0.297 0.598 6045 0.505 7910 −0.104 3955	0.317 0.574 7445 0.533 5110 −0.108 2555	0.337 0.551 2845 0.560 4310 −0.111 7155	0.357 0.528 2245 0.586 5510 −0.114 7755	0.377 0.505 5645 0.611 8710 −0.117 4355	0.397 0.483 3045 0.636 3910 −0.119 6955
0.218 0.696 7620 0.388 4760 −0.085 2380	0.238 0.671 3220 0.419 3560 −0.090 6780	0.258 0.646 2820 0.449 4360 −0.095 7180	0.278 0.621 6420 0.478 7160 −0.100 3580	0.298 0.597 4020 0.507 1960 −0.104 5980	0.318 0.573 5620 0.534 8760 −0.108 4380	0.338 0.550 1220 0.561 7560 −0.111 8780	0.358 0.527 0820 0.587 8360 −0.114 9180	0.378 0.504 4420 0.613 1160 −0.117 5580	0.398 0.482 2020 0.637 5960 −0.119 7980
0.219 0.695 4805 0.390 0390 −0.085 5195	0.239 0.670 0605 0.420 8790 −0.090 9395	0.259 0.645 0405 0.450 9190 −0.095 9595	0.279 0.620 4205 0.480 1590 −0.100 5795	0.299 0.596 2005 0.508 5990 −0.104 7995	0.319 0.572 3805 0.536 2390 −0.108 6195	0.339 0.548 9605 0.563 0790 −0.112 0395	0.359 0.525 9405 0.589 1190 −0.115 0595	0.379 0.503 3205 0.614 3590 −0.117 6795	0.399 0.481 1005 0.638 7990 −0.119 8995

Tablica 1

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.400	0.420	0.440	0.460	0.480	0.500	0.520	0.540	0.560	0.580
0.480 0000	0.458 2000	0.436 8000	0.415 8000	0.395 2000	0.375 0000	0.355 2000	0.335 8000	0.316 8000	0.298 2000
0.640 0000	0.663 6000	0.686 4000	0.708 4000	0.729 6000	0.750 0000	0.769 6000	0.788 4000	0.806 4000	0.823 6000
−0.120 0000	−0.121 8000	−0.123 2000	−0.124 2000	−0.124 8000	−0.125 0000	−0.124 8000	−0.124 2000	−0.123 2000	−0.121 8000
0.401	0.421	0.441	0.461	0.481	0.501	0.521	0.541	0.561	0.581
0.478 9005	0.457 1205	0.435 7405	0.414 7605	0.394 1805	0.374 0005	0.354 2205	0.334 8405	0.315 8605	0.297 2805
0.641 1990	0.664 7590	0.687 5190	0.709 4790	0.730 6390	0.750 9990	0.770 5590	0.789 3190	0.807 2790	0.824 4390
−0.120 0995	−0.121 8795	−0.123 2595	−0.124 2395	−0.124 8195	−0.124 9995	−0.124 7795	−0.124 1595	−0.123 1395	−0.121 7195
0.402	0.422	0.442	0.462	0.482	0.502	0.522	0.542	0.562	0.582
0.477 8020	0.456 0420	0.434 6820	0.413 7220	0.393 1620	0.373 0020	0.353 2420	0.333 8820	0.314 9220	0.296 3620
0.642 3960	0.665 9160	0.688 6360	0.710 5560	0.731 6760	0.751 9960	0.771 5160	0.790 2360	0.808 1560	0.825 2760
−0.120 1980	−0.121 9580	−0.123 3180	−0.124 2780	−0.124 8380	−0.124 9980	−0.124 7580	−0.124 1180	−0.123 0780	−0.121 6380
0.403	0.423	0.443	0.463	0.483	0.503	0.523	0.543	0.563	0.583
0.476 7045	0.454 9645	0.433 6245	0.412 6845	0.392 1445	0.372 0045	0.352 2645	0.332 9245	0.313 9845	0.295 4445
0.643 5910	0.667 0710	0.689 7510	0.711 6310	0.732 7110	0.752 9910	0.772 4710	0.791 1510	0.809 0310	0.826 1110
−0.120 2955	−0.122 0355	−0.123 3755	−0.124 3155	−0.124 8555	−0.124 9955	−0.124 7355	−0.124 0755	−0.123 0155	−0.121 5555
0.404	0.424	0.444	0.464	0.484	0.504	0.524	0.544	0.564	0.584
0.475 6080	0.453 8880	0.432 5680	0.411 6480	0.391 1280	0.371 0080	0.351 2880	0.331 9680	0.313 0480	0.294 5280
0.644 7840	0.668 2240	0.690 8640	0.712 7040	0.733 7440	0.753 9840	0.773 4240	0.792 0640	0.809 9040	0.826 9440
−0.120 3920	−0.122 1120	−0.123 4320	−0.124 3520	−0.124 8720	−0.124 9920	−0.124 7120	−0.124 0320	−0.122 9520	−0.121 4720
0.405	0.425	0.445	0.465	0.485	0.505	0.525	0.545	0.565	0.585
0.474 5125	0.452 8125	0.431 5125	0.410 6125	0.390 1125	0.370 0125	0.350 3125	0.331 0125	0.312 1125	0.293 6125
0.645 9750	0.669 3750	0.691 9750	0.713 7750	0.734 7750	0.754 9750	0.774 3750	0.792 9750	0.810 7750	0.827 7750
−0.120 4875	−0.122 1875	−0.123 4875	−0.124 3875	−0.124 8875	−0.124 9875	−0.124 6875	−0.123 9875	−0.122 8875	−0.121 3875
0.406	0.426	0.446	0.466	0.486	0.506	0.526	0.546	0.566	0.586
0.473 4180	0.451 7380	0.430 4580	0.409 5780	0.389 0980	0.369 0180	0.349 3380	0.330 0580	0.311 1780	0.292 6980
0.647 1640	0.670 5240	0.693 0840	0.714 8440	0.735 8040	0.755 9640	0.775 3240	0.793 8840	0.811 6440	0.828 6040
−0.120 5820	−0.122 2620	−0.123 5420	−0.124 4220	−0.124 9020	−0.124 9820	−0.124 6620	−0.123 9420	−0.122 8220	−0.121 3020
0.407	0.427	0.447	0.467	0.487	0.507	0.527	0.547	0.567	0.587
0.472 3245	0.450 6645	0.429 4045	0.408 5445	0.388 0845	0.368 0245	0.348 3645	0.329 1045	0.310 2445	0.291 7845
0.648 3510	0.671 6710	0.694 1910	0.715 9110	0.736 8310	0.756 9510	0.776 2710	0.794 7910	0.812 5110	0.829 4310
−0.120 6755	−0.122 3355	−0.123 5955	−0.124 4555	−0.124 9155	−0.124 9755	−0.124 6355	−0.123 8955	−0.122 7555	−0.121 2155
0.408	0.428	0.448	0.468	0.488	0.508	0.528	0.548	0.568	0.588
0.471 2320	0.449 5920	0.428 3520	0.407 5120	0.387 0720	0.367 0320	0.347 3920	0.328 1520	0.309 3120	0.290 8720
0.649 5360	0.672 8160	0.695 2960	0.716 9760	0.737 8560	0.757 9360	0.777 2160	0.795 6960	0.813 3760	0.830 2560
−0.120 7680	−0.122 4080	−0.123 6480	−0.124 4880	−0.124 9280	−0.124 9680	−0.124 6080	−0.123 8480	−0.122 6880	−0.121 1280
0.409	0.429	0.449	0.469	0.489	0.509	0.529	0.549	0.569	0.589
0.470 1405	0.448 5205	0.427 3005	0.406 4805	0.386 0605	0.366 0405	0.346 4205	0.327 2005	0.308 3805	0.289 9605
0.650 7190	0.673 9590	0.696 3990	0.718 0390	0.738 8790	0.758 9190	0.778 1590	0.796 5990	0.814 2390	0.831 0790
−0.120 8595	−0.122 4795	−0.123 6995	−0.124 5195	−0.124 9395	−0.124 9595	−0.124 5795	−0.123 7995	−0.122 6195	−0.121 0395
0.410	0.430	0.450	0.470	0.490	0.510	0.530	0.550	0.570	0.590
0.469 0500	0.447 4500	0.426 2500	0.405 4500	0.385 0500	0.365 0500	0.345 4500	0.326 2500	0.307 4500	0.289 0500
0.651 9000	0.675 1000	0.697 5000	0.719 1000	0.739 9000	0.759 9000	0.779 1000	0.797 5000	0.815 1000	0.831 9000
−0.120 9500	−0.122 5500	−0.123 7500	−0.124 5500	−0.124 9500	−0.124 9500	−0.124 5500	−0.123 7500	−0.122 5500	−0.120 9500
0.411	0.431	0.451	0.471	0.491	0.511	0.531	0.551	0.571	0.591
0.467 9605	0.446 3805	0.425 2005	0.404 4205	0.384 0405	0.364 0605	0.344 4805	0.325 3005	0.306 5205	0.288 1405
0.653 0790	0.676 2390	0.698 5990	0.720 1590	0.740 9190	0.760 8790	0.780 0390	0.798 3990	0.815 9590	0.832 7190
−0.121 0395	−0.122 6195	−0.123 7995	−0.124 5795	−0.124 9595	−0.124 9395	−0.124 5195	−0.123 6995	−0.122 4795	−0.120 8595
0.412	0.432	0.452	0.472	0.492	0.512	0.532	0.552	0.572	0.592
0.466 8720	0.445 3120	0.424 1520	0.403 3920	0.383 0320	0.363 0720	0.343 5120	0.324 3520	0.305 5920	0.287 2320
0.654 2560	0.677 3760	0.699 6960	0.721 2160	0.741 9360	0.761 8560	0.780 9760	0.799 2960	0.816 8160	0.833 5360
−0.121 1280	−0.122 6880	−0.123 8480	−0.124 6080	−0.124 9680	−0.124 9280	−0.124 4880	−0.123 6480	−0.122 4080	−0.120 7680
0.413	0.433	0.453	0.473	0.493	0.513	0.533	0.553	0.573	0.593
0.465 7845	0.444 2445	0.423 1045	0.402 3645	0.382 0245	0.362 0845	0.342 5445	0.323 4045	0.304 6645	0.286 3245
0.655 4310	0.678 5110	0.700 7910	0.722 2710	0.742 9510	0.762 8310	0.781 9110	0.800 1910	0.817 6710	0.834 3510
−0.121 2155	−0.122 7555	−0.123 8955	−0.124 6355	−0.124 9755	−0.124 9155	−0.124 4555	−0.123 5955	−0.122 3355	−0.120 6755
0.414	0.434	0.454	0.474	0.494	0.514	0.534	0.554	0.574	0.594
0.464 6980	0.443 1780	0.422 0580	0.401 3380	0.381 0180	0.361 0980	0.341 5780	0.322 4580	0.303 7380	0.285 4180
0.656 6040	0.679 6440	0.701 8840	0.723 3240	0.743 9640	0.763 8040	0.782 8440	0.801 0840	0.818 5240	0.835 1640
−0.121 3020	−0.122 8220	−0.123 9420	−0.124 6620	−0.124 9820	−0.124 9020	−0.124 4220	−0.123 5420	−0.122 2620	−0.120 5820
0.415	0.435	0.455	0.475	0.495	0.515	0.535	0.555	0.575	0.595
0.463 6125	0.442 1125	0.421 0125	0.400 3125	0.380 0125	0.360 1125	0.340 6125	0.321 5125	0.302 8125	0.284 5125
0.657 7750	0.680 7750	0.702 9750	0.724 3750	0.744 9750	0.764 7750	0.783 7750	0.801 9750	0.819 3750	0.835 9750
−0.121 3875	−0.122 8875	−0.123 9875	−0.124 6875	−0.124 9875	−0.124 8875	−0.124 3875	−0.123 4875	−0.122 1875	−0.120 4875
0.416	0.436	0.456	0.476	0.496	0.516	0.536	0.556	0.576	0.596
0.462 5280	0.441 0480	0.419 9680	0.399 2880	0.379 0080	0.359 1280	0.339 6480	0.320 5680	0.301 8880	0.283 6080
0.658 9440	0.681 9040	0.704 0640	0.725 4240	0.745 9840	0.765 7440	0.784 7040	0.802 8640	0.820 2240	0.836 7840
−0.121 4720	−0.122 9520	−0.124 0320	−0.124 7120	−0.124 9920	−0.124 8720	−0.124 3520	−0.123 4320	−0.122 1120	−0.120 3920
0.417	0.437	0.457	0.477	0.497	0.517	0.537	0.557	0.577	0.597
0.461 4445	0.439 9845	0.418 9245	0.398 2645	0.378 0045	0.358 1445	0.338 6845	0.319 6245	0.300 9645	0.282 7045
0.660 1110	0.683 0310	0.705 1510	0.726 4710	0.746 9910	0.766 7110	0.785 6310	0.803 7510	0.821 0710	0.837 5910
−0.121 5555	−0.123 0155	−0.124 0755	−0.124 7355	−0.124 9955	−0.124 8555	−0.124 3155	−0.123 3755	−0.122 0355	−0.120 2955
0.418	0.438	0.458	0.478	0.498	0.518	0.538	0.558	0.578	0.598
0.460 3620	0.438 9220	0.417 8820	0.397 2420	0.377 0020	0.357 1620	0.337 7220	0.318 6820	0.300 0420	0.281 8020
0.661 2760	0.684 1560	0.706 2360	0.727 5160	0.747 9960	0.767 6760	0.786 5560	0.804 6360	0.821 9160	0.838 3960
−0.121 6380	−0.123 0780	−0.124 1180	−0.124 7580	−0.124 9980	−0.124 8380	−0.124 2780	−0.123 3180	−0.121 9580	−0.120 1980
0.419	0.439	0.459	0.479	0.499	0.519	0.539	0.559	0.579	0.599
0.459 2805	0.437 8605	0.416 8405	0.396 2205	0.376 0005	0.356 1805	0.336 7605	0.317 7405	0.299 1205	0.280 9005
0.662 4390	0.685 2790	0.707 3190	0.728 5590	0.748 9990	0.768 6390	0.787 4790	0.805 5190	0.822 7590	0.839 1990
−0.121 7195	−0.123 1395	−0.124 1595	−0.124 7795	−0.124 9995	−0.124 8195	−0.124 2395	−0.123 2595	−0.121 8795	−0.120 0995

Tablica 1

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A_t	A	A	A	A	A	A	A
0.600	0.620	0.640	0.660	0.680	0.700	0.720	0.740	0.760	0.780
0.280 0000	0.262 2000	0.244 8000	0.227 8000	0.211 2000	0.195 0000	0.179 2000	0.163 8000	0.148 8000	0.134 2000
0.840 0000	0.855 6000	0.870 4000	0.884 4000	0.897 6000	0.910 0000	0.921 6000	0.932 4000	0.942 4000	0.951 6000
−0.120 0000	−0.117 8000	−0.115 2000	−0.112 2000	−0.108 8000	−0.105 0000	−0.100 8000	−0.096 2000	−0.091 2000	−0.085 8000
0.601	0.621	0.641	0.661	0.681	0.701	0.721	0.741	0.761	0.781
0.279 1005	0.261 3205	0.243 9405	0.226 9605	0.210 3805	0.194 2005	0.178 4205	0.163 0405	0.148 0605	0.133 4805
0.840 7990	0.856 3590	0.871 1190	0.885 0790	0.898 2390	0.910 5990	0.922 1590	0.932 9190	0.942 8790	0.952 0390
−0.119 8995	−0.117 6795	−0.115 0595	−0.112 0395	−0.108 6195	−0.104 7995	−0.100 5795	−0.095 9595	−0.090 9395	−0.085 5195
0.602	0.622	0.642	0.662	0.682	0.702	0.722	0.742	0.762	0.782
0.278 2020	0.260 4420	0.243 0820	0.226 1220	0.209 5620	0.193 4020	0.177 6420	0.162 2820	0.147 3220	0.132 7620
0.841 5960	0.857 1160	0.871 8360	0.885 7560	0.898 8760	0.911 1960	0.922 7160	0.933 4360	0.943 3560	0.952 4760
−0.119 7980	−0.117 5580	−0.114 9180	−0.111 8780	−0.108 4380	−0.104 5980	−0.100 3580	−0.095 7180	−0.090 6780	−0.085 2380
0.603	0.623	0.643	0.663	0.683	0.703	0.723	0.743	0.763	0.783
0.277 3045	0.259 5645	0.242 2245	0.225 2845	0.208 7445	0.192 6045	0.176 8645	0.161 5245	0.146 5845	0.132 0445
0.842 3910	0.857 8710	0.872 5510	0.886 4310	0.899 5110	0.911 7910	0.923 2710	0.933 9510	0.943 8310	0.952 9110
−0.119 6955	−0.117 4355	−0.114 7755	−0.111 7155	−0.108 2555	−0.104 3955	−0.100 1355	−0.095 4755	−0.090 4155	−0.084 9555
0.604	0.624	0.644	0.664	0.684	0.704	0.724	0.744	0.764	0.784
0.276 4080	0.258 6880	0.241 3680	0.224 4480	0.207 9280	0.191 8080	0.176 0880	0.160 7680	0.145 8480	0.131 3280
0.843 1840	0.858 6240	0.873 2640	0.887 1040	0.900 1440	0.912 3840	0.923 8240	0.934 4640	0.944 3040	0.953 3440
−0.119 5920	−0.117 3120	−0.114 6320	−0.111 5520	−0.108 0720	−0.104 1920	−0.099 9120	−0.095 2320	−0.090 1520	−0.084 6720
0.605	0.625	0.645	0.665	0.685	0.705	0.725	0.745	0.765	0.785
0.275 5125	0.257 8125	0.240 5125	0.223 6125	0.207 1125	0.191 0125	0.175 3125	0.160 0125	0.145 1125	0.130 6125
0.843 9750	0.859 3750	0.873 9750	0.887 7750	0.900 7750	0.912 9750	0.924 3750	0.934 9750	0.944 7750	0.953 7750
−0.119 4875	−0.117 1875	−0.114 4875	−0.111 3875	−0.107 8875	−0.103 9875	−0.099 6875	−0.094 9875	−0.089 8875	−0.084 3875
0.606	0.626	0.646	0.666	0.686	0.706	0.726	0.746	0.766	0.786
0.274 6180	0.256 9380	0.239 6580	0.222 7780	0.206 2980	0.190 2180	0.174 5380	0.159 2580	0.144 3780	0.129 8980
0.844 7640	0.860 1240	0.874 6840	0.888 4440	0.901 4040	0.913 5640	0.924 9240	0.935 4840	0.945 2440	0.954 2040
−0.119 3820	−0.117 0620	−0.114 3420	−0.111 2220	−0.107 7020	−0.103 7820	−0.099 4620	−0.094 7420	−0.089 6220	−0.084 1020
0.607	0.627	0.647	0.667	0.687	0.707	0.727	0.747	0.767	0.787
0.273 7245	0.256 0645	0.238 8045	0.221 9445	0.205 4845	0.189 4245	0.173 7645	0.158 5045	0.143 6445	0.129 1845
0.845 5510	0.860 8710	0.875 3910	0.889 1110	0.902 0310	0.914 1510	0.925 4710	0.935 9910	0.945 7110	0.954 6310
−0.119 2755	−0.116 9355	−0.114 1955	−0.111 0555	−0.107 5155	−0.103 5755	−0.099 2355	−0.094 4955	−0.089 3555	−0.083 8155
0.608	0.628	0.648	0.668	0.688	0.708	0.728	0.748	0.768	0.788
0.272 8320	0.255 1920	0.237 9520	0.221 1120	0.204 6720	0.188 6320	0.172 9920	0.157 7520	0.142 9120	0.128 4720
0.846 3360	0.861 6160	0.876 0960	0.889 7760	0.902 6560	0.914 7360	0.926 0160	0.936 4960	0.946 1760	0.955 0560
−0.119 1680	−0.116 8080	−0.114 0480	−0.110 8880	−0.107 3280	−0.103 3680	−0.099 0080	−0.094 2480	−0.089 0880	−0.083 5280
0.609	0.629	0.649	0.669	0.689	0.709	0.729	0.749	0.769	0.789
0.271 9405	0.254 3205	0.237 1005	0.220 2805	0.203 8605	0.187 8405	0.172 2205	0.157 0005	0.142 1805	0.127 7605
0.847 1190	0.862 3590	0.876 7990	0.890 4390	0.903 2790	0.915 3190	0.926 5590	0.936 9990	0.946 6390	0.955 4790
−0.119 0595	−0.116 6795	−0.113 8995	−0.110 7195	−0.107 1395	−0.103 1595	−0.098 7795	−0.093 9995	−0.088 8195	−0.083 2395
0.610	0.630	0.650	0.670	0.690	0.710	0.730	0.750	0.770	0.790
0.271 0500	0.253 4500	0.236 2500	0.219 4500	0.203 0500	0.187 0500	0.171 4500	0.156 2500	0.141 4500	0.127 0500
0.847 9000	0.863 1000	0.877 5000	0.891 1000	0.903 9000	0.915 9000	0.927 1000	0.937 5000	0.947 1000	0.955 9000
−0.118 9500	−0.116 5500	−0.113 7500	−0.110 5500	−0.106 9500	−0.102 9500	−0.098 5500	−0.093 7500	−0.088 5500	−0.082 9500
0.611	0.631	0.651	0.671	0.691	0.711	0.731	0.751	0.771	0.791
0.270 1605	0.252 5805	0.235 4005	0.218 6205	0.202 2405	0.186 2605	0.170 6805	0.155 5005	0.140 7205	0.126 3405
0.848 6790	0.863 8390	0.878 1990	0.891 7590	0.904 5190	0.916 4790	0.927 6390	0.937 9990	0.947 5590	0.956 3190
−0.118 8395	−0.116 4195	−0.113 5995	−0.110 3795	−0.106 7595	−0.102 7395	−0.098 3195	−0.093 4995	−0.088 2795	−0.082 6595
0.612	0.632	0.652	0.672	0.692	0.712	0.732	0.752	0.772	0.792
0.269 2720	0.251 7120	0.234 5520	0.217 7920	0.201 4320	0.185 4720	0.169 9120	0.154 7520	0.139 9920	0.125 6320
0.849 4560	0.864 5760	0.878 8960	0.892 4160	0.905 1360	0.917 0560	0.928 1760	0.938 4960	0.948 0160	0.956 7360
−0.118 7280	−0.116 2880	−0.113 4480	−0.110 2080	−0.106 5680	−0.102 5280	−0.098 0880	−0.093 2480	−0.088 0080	−0.082 3680
0.613	0.633	0.653	0.673	0.693	0.713	0.733	0.753	0.773	0.793
0.268 3845	0.250 8445	0.233 7045	0.216 9645	0.200 6245	0.184 6845	0.169 1445	0.154 0045	0.139 2645	0.124 9245
0.850 2310	0.865 3110	0.879 5910	0.893 0710	0.905 7510	0.917 6310	0.928 7110	0.938 9910	0.948 4710	0.957 1510
−0.118 6155	−0.116 1555	−0.113 2955	−0.110 0355	−0.106 3755	−0.102 3155	−0.097 8555	−0.092 9955	−0.087 7355	−0.082 0755
0.614	0.634	0.654	0.674	0.694	0.714	0.734	0.754	0.774	0.794
0.267 4980	0.249 9780	0.232 8580	0.216 1380	0.199 8180	0.183 8980	0.168 3780	0.153 2580	0.138 5380	0.124 2180
0.851 0040	0.866 0440	0.880 2840	0.893 7240	0.906 3640	0.918 2040	0.929 2440	0.939 4840	0.948 9240	0.957 5640
−0.118 5020	−0.116 0220	−0.113 1420	−0.109 8620	−0.106 1820	−0.102 1020	−0.097 6220	−0.092 7420	−0.087 4620	−0.081 7820
0.615	0.635	0.655	0.675	0.695	0.715	0.735	0.755	0.775	0.795
0.266 6125	0.249 1125	0.232 0125	0.215 3125	0.199 0125	0.183 1125	0.167 6125	0.152 5125	0.137 8125	0.123 5125
0.851 7750	0.866 7750	0.880 9750	0.894 3750	0.906 9750	0.918 7750	0.929 7750	0.939 9750	0.949 3750	0.957 9750
−0.118 3875	−0.115 8875	−0.112 9875	−0.109 6875	−0.105 9875	−0.101 8875	−0.097 3875	−0.092 4875	−0.087 1875	−0.081 4875
0.616	0.636	0.656	0.676	0.696	0.716	0.736	0.756	0.776	0.796
0.265 7280	0.248 2480	0.231 1680	0.214 4880	0.198 2080	0.182 3280	0.166 8480	0.151 7680	0.137 0880	0.122 8080
0.852 5440	0.867 5040	0.881 6640	0.895 0240	0.907 5840	0.919 3440	0.930 3040	0.940 4640	0.949 8240	0.958 3840
−0.118 2720	−0.115 7520	−0.112 8320	−0.109 5120	−0.105 7920	−0.101 6720	−0.097 1520	−0.092 2320	−0.086 9120	−0.081 1920
0.617	0.637	0.657	0.677	0.697	0.717	0.737	0.757	0.777	0.797
0.264 8445	0.247 3845	0.230 3245	0.213 6645	0.197 4045	0.181 5445	0.166 0845	0.151 0245	0.136 3645	0.122 1045
0.853 3110	0.868 2310	0.882 3510	0.895 6710	0.908 1910	0.919 9110	0.930 8310	0.940 9510	0.950 2710	0.958 7910
−0.118 1555	−0.115 6155	−0.112 6755	−0.109 3355	−0.105 5955	−0.101 4555	−0.096 9155	−0.091 9755	−0.086 6355	−0.080 8955
0.618	0.638	0.658	0.678	0.698	0.718	0.738	0.758	0.778	0.798
0.263 9620	0.246 5220	0.229 4820	0.212 8420	0.196 6020	0.180 7620	0.165 3220	0.150 2820	0.135 6420	0.121 4020
0.854 0760	0.868 9560	0.883 0360	0.896 3160	0.908 7960	0.920 4760	0.931 3560	0.941 4360	0.950 7160	0.959 1960
−0.118 0380	−0.115 4780	−0.112 5180	−0.109 1580	−0.105 3980	−0.101 2380	−0.096 6780	−0.091 7180	−0.086 3580	−0.080 5980
0.619	0.639	0.659	0.679	0.699	0.719	0.739	0.759	0.779	0.799
0.263 0805	0.245 6605	0.228 6405	0.212 0205	0.195 8005	0.179 9805	0.164 5605	0.149 5405	0.134 9205	0.120 7005
0.854 8390	0.869 6790	0.883 7190	0.896 9590	0.909 3990	0.921 0390	0.931 8790	0.941 9190	0.951 1590	0.959 5990
−0.117 9195	−0.115 3395	−0.112 3595	−0.108 9795	−0.105 1995	−0.101 0195	−0.096 4395	−0.091 4595	−0.086 0795	−0.080 2995

Tablica 1

KRAKOWIANY INTERPOLACJI TRÓJWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.800 0.120 0000 0.960 0000 -0.080 0000	0.820 0.106 2000 0.967 6000 -0.073 8000	0.840 0.092 8000 0.974 4000 -0.067 2000	0.860 0.079 8000 0.980 4000 -0.060 2000	0.880 0.067 2000 0.985 6000 -0.052 8000	0.900 0.055 0000 0.990 0000 -0.045 0000	0.920 0.043 2000 0.993 6000 -0.036 8000	0.940 0.031 8000 0.996 4000 -0.028 2000	0.960 0.020 8000 0.998 4000 -0.019 2000	0.980 0.010 2000 0.999 6000 -0.009 8000
0.801 0.119 3005 0.960 3990 -0.079 6995	0.821 0.105 5205 0.967 9590 -0.073 4795	0.841 0.092 1405 0.974 7190 -0.066 8595	0.861 0.079 1605 0.980 6790 -0.059 8395	0.881 0.066 5805 0.985 8390 -0.052 4195	0.901 0.054 4005 0.990 1990 -0.044 5995	0.921 0.042 6205 0.993 7590 -0.036 3795	0.941 0.031 2405 0.996 5190 -0.027 7595	0.961 0.020 2605 0.998 4790 -0.018 7395	0.981 0.009 6805 0.999 6390 -0.009 3195
0.802 0.118 6020 0.960 7960 -0.079 3980	0.822 0.104 8420 0.968 3160 -0.073 1580	0.842 0.091 4820 0.975 0360 -0.066 5180	0.862 0.078 5220 0.980 9560 -0.059 4780	0.882 0.065 9620 0.986 0760 -0.052 0380	0.902 0.053 8020 0.990 3960 -0.044 1980	0.922 0.042 0420 0.993 9160 -0.035 9580	0.942 0.030 6820 0.996 6360 -0.027 3180	0.962 0.019 7220 0.998 5560 -0.018 2780	0.982 0.009 1620 0.999 6760 -0.008 8380
0.803 0.117 9045 0.961 1910 -0.079 0955	0.823 0.104 1645 0.968 6710 -0.072 8355	0.843 0.090 8245 0.975 3510 -0.066 1755	0.863 0.077 8845 0.981 2310 -0.059 1155	0.883 0.065 3445 0.986 3110 -0.051 6555	0.903 0.053 2045 0.990 5910 -0.043 7955	0.923 0.041 4645 0.994 0710 -0.035 5355	0.943 0.030 1245 0.996 7510 -0.026 8755	0.963 0.019 1845 0.998 6310 -0.017 8155	0.983 0.008 6445 0.999 7110 -0.008 3555
0.804 0.117 2080 0.961 5840 -0.078 7920	0.824 0.103 4880 0.969 0240 -0.072 5120	0.844 0.090 1680 0.975 6640 -0.065 8320	0.864 0.077 2480 0.981 5040 -0.058 7520	0.884 0.064 7280 0.986 5440 -0.051 2720	0.904 0.052 6080 0.990 7840 -0.043 3920	0.924 0.040 8880 0.994 2240 -0.035 1120	0.944 0.029 5680 0.996 8640 -0.026 4320	0.964 0.018 6480 0.998 7040 -0.017 3520	0.984 0.008 1280 0.999 7440 -0.007 8720
0.805 0.116 5125 0.961 9750 -0.078 4875	0.825 0.102 8125 0.969 3750 -0.072 1875	0.845 0.089 5125 0.975 9750 -0.065 4875	0.865 0.076 6125 0.981 7750 -0.058 3875	0.885 0.064 1125 0.986 7750 -0.050 8875	0.905 0.052 0125 0.990 9750 -0.042 9875	0.925 0.040 3125 0.994 3750 -0.034 6875	0.945 0.029 0125 0.996 9750 -0.025 9875	0.965 0.018 1125 0.998 7750 -0.016 8875	0.985 0.007 6125 0.999 7750 -0.007 3875
0.806 0.115 8180 0.962 3640 -0.078 1820	0.826 0.102 1380 0.969 7240 -0.071 8620	0.846 0.088 8580 0.976 2840 -0.065 1420	0.866 0.075 9780 0.982 0440 -0.058 0220	0.886 0.063 4980 0.987 0040 -0.050 5020	0.906 0.051 4180 0.991 1640 -0.042 5820	0.926 0.039 7380 0.994 5240 -0.034 2620	0.946 0.028 4580 0.997 0840 -0.025 5420	0.966 0.017 5780 0.998 8440 -0.016 4220	0.986 0.007 0980 0.999 8040 -0.006 9020
0.807 0.115 1245 0.962 7510 -0.077 8755	0.827 0.101 4645 0.970 0710 -0.071 5355	0.847 0.088 2045 0.976 5910 -0.064 7955	0.867 0.075 3445 0.982 3110 -0.057 6555	0.887 0.062 8845 0.987 2310 -0.050 1155	0.907 0.050 8245 0.991 3510 -0.042 1755	0.927 0.039 1645 0.994 6710 -0.033 8355	0.947 0.027 9045 0.997 1910 -0.025 0955	0.967 0.017 0445 0.998 9110 -0.015 9555	0.987 0.006 5845 0.999 8310 -0.006 4155
0.808 0.114 4320 0.963 1360 -0.077 5680	0.828 0.100 7920 0.970 4160 -0.071 2080	0.848 0.087 5520 0.976 8960 -0.064 4480	0.868 0.074 7120 0.982 5760 -0.057 2880	0.888 0.062 2720 0.987 4560 -0.049 7280	0.908 0.050 2320 0.991 5360 -0.041 7680	0.928 0.038 5920 0.994 8160 -0.033 4080	0.948 0.027 3520 0.997 2960 -0.024 6480	0.968 0.016 5120 0.998 9760 -0.015 4880	0.988 0.006 0720 0.999 8560 -0.005 9280
0.809 0.113 7405 0.963 5190 -0.077 2595	0.829 0.100 1205 0.970 7590 -0.070 8795	0.849 0.086 9005 0.977 1990 -0.064 0995	0.869 0.074 0805 0.982 8390 -0.056 9195	0.889 0.061 6605 0.987 6790 -0.049 3395	0.909 0.049 6405 0.991 7190 -0.041 3595	0.929 0.038 0205 0.994 9590 -0.032 9795	0.949 0.026 8005 0.997 3990 -0.024 1995	0.969 0.015 9805 0.999 0390 -0.015 0195	0.989 0.005 5605 0.999 8790 -0.005 4395
0.810 0.113 0500 0.963 9000 -0.076 9500	0.830 0.099 4500 0.971 1000 -0.070 5500	0.850 0.086 2500 0.977 5000 -0.063 7500	0.870 0.073 4500 0.983 1000 -0.056 5500	0.890 0.061 0500 0.987 9000 -0.048 9500	0.910 0.049 0500 0.991 9000 -0.040 9500	0.930 0.037 4500 0.995 1000 -0.032 5500	0.950 0.026 2500 0.997 5000 -0.023 7500	0.970 0.015 4500 0.999 1000 -0.014 5500	0.990 0.005 0500 0.999 9000 -0.004 9500
0.811 0.112 3605 0.964 2790 -0.076 6395	0.831 0.098 7805 0.971 4390 -0.070 2195	0.851 0.085 6005 0.977 7990 -0.063 3995	0.871 0.072 8205 0.983 3590 -0.056 1795	0.891 0.060 4405 0.988 1190 -0.048 5595	0.911 0.048 4605 0.992 0790 -0.040 5395	0.931 0.036 8805 0.995 2390 -0.032 1195	0.951 0.025 7005 0.997 5990 -0.023 2995	0.971 0.014 9205 0.999 1590 -0.014 0795	0.991 0.004 5405 0.999 9190 -0.004 4595
0.812 0.111 6720 0.964 6560 -0.076 3280	0.832 0.098 1120 0.971 7760 -0.069 8880	0.852 0.084 9520 0.978 0960 -0.063 0480	0.872 0.072 1920 0.983 6160 -0.055 8080	0.892 0.059 8320 0.988 3360 -0.048 1680	0.912 0.047 8720 0.992 2560 -0.040 1280	0.932 0.036 3120 0.995 3760 -0.031 6880	0.952 0.025 1520 0.997 6960 -0.022 8480	0.972 0.014 3920 0.999 2160 -0.013 6080	0.992 0.004 0320 0.999 9360 -0.003 9680
0.813 0.110 9845 0.965 0310 -0.076 0155	0.833 0.097 4445 0.972 1110 -0.069 5555	0.853 0.084 3045 0.978 3910 -0.062 6955	0.873 0.071 5645 0.983 8710 -0.055 4355	0.893 0.059 2245 0.988 5510 -0.047 7755	0.913 0.047 2845 0.992 4310 -0.039 7155	0.933 0.035 7445 0.995 5110 -0.031 2555	0.953 0.024 6045 0.997 7910 -0.022 3955	0.973 0.013 8645 0.999 2710 -0.013 1355	0.993 0.003 5245 0.999 9510 -0.003 4755
0.814 0.110 2980 0.965 4040 -0.075 7020	0.834 0.096 7780 0.972 4440 -0.069 2220	0.854 0.083 6580 0.978 6840 -0.062 3420	0.874 0.070 9380 0.984 1240 -0.055 0620	0.894 0.058 6180 0.988 7640 -0.047 3820	0.914 0.046 6980 0.992 6040 -0.039 3020	0.934 0.035 1780 0.995 6440 -0.030 8220	0.954 0.024 0580 0.997 8840 -0.021 9420	0.974 0.013 3380 0.999 3240 -0.012 6620	0.994 0.003 0180 0.999 9640 -0.002 9820
0.815 0.109 6125 0.965 7750 -0.075 3875	0.835 0.096 1125 0.972 7750 -0.068 8875	0.855 0.083 0125 0.978 9750 -0.061 9875	0.875 0.070 3125 0.984 3750 -0.054 6875	0.895 0.058 0125 0.988 9750 -0.046 9875	0.915 0.046 1125 0.992 7750 -0.038 8875	0.935 0.034 6125 0.995 7750 -0.030 3875	0.955 0.023 5125 0.997 9750 -0.021 4875	0.975 0.012 8125 0.999 3750 -0.012 1875	0.995 0.002 5125 0.999 9750 -0.002 4875
0.816 0.108 9280 0.966 1440 -0.075 0720	0.836 0.095 4480 0.973 1040 -0.068 5520	0.856 0.082 3680 0.979 2640 -0.061 6320	0.876 0.069 6880 0.984 6240 -0.054 3120	0.896 0.057 4080 0.989 1840 -0.046 5920	0.916 0.045 5280 0.992 9440 -0.038 4720	0.936 0.034 0480 0.995 9040 -0.029 9520	0.956 0.022 9680 0.998 0640 -0.021 0320	0.976 0.012 2880 0.999 4240 -0.011 7120	0.996 0.002 0080 0.999 9840 -0.001 9920
0.817 0.108 2445 0.966 5110 -0.074 7555	0.837 0.094 7845 0.973 4310 -0.068 2155	0.857 0.081 7245 0.979 5510 -0.061 2755	0.877 0.069 0645 0.984 8710 -0.053 9355	0.897 0.056 8045 0.989 3910 -0.046 1955	0.917 0.044 9445 0.993 1110 -0.038 0555	0.937 0.033 4845 0.996 0310 -0.029 5155	0.957 0.022 4245 0.998 1510 -0.020 5755	0.977 0.011 7645 0.999 4710 -0.011 2355	0.997 0.001 5045 0.999 9910 -0.001 4955
0.818 0.107 5620 0.966 8760 -0.074 4380	0.838 0.094 1220 0.973 7560 -0.067 8780	0.858 0.081 0820 0.979 8360 -0.060 9180	0.878 0.068 4420 0.985 1160 -0.053 5580	0.898 0.056 2020 0.989 5960 -0.045 7980	0.918 0.044 3620 0.993 2760 -0.037 6380	0.938 0.032 9220 0.996 1560 -0.029 0780	0.958 0.021 8820 0.998 2360 -0.020 1180	0.978 0.011 2420 0.999 5160 -0.010 7580	0.998 0.001 0020 0.999 9960 -0.000 9980
0.819 0.106 8805 0.967 2390 -0.074 1195	0.839 0.093 4605 0.974 0790 -0.067 5395	0.859 0.080 4405 0.980 1190 -0.060 5595	0.879 0.067 8205 0.985 3590 -0.053 1795	0.899 0.055 6005 0.989 7990 -0.045 3995	0.919 0.043 7805 0.993 4390 -0.037 2195	0.939 0.032 3605 0.996 2790 -0.028 6395	0.959 0.021 3405 0.998 3190 -0.019 6595	0.979 0.010 7205 0.999 5590 -0.010 2795	0.999 0.000 5005 0.999 9990 -0.000 4995

Tablica 1 a

KRAKOWIANY INTERPOLACJI CZTEROWYRAZOWEJ

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
1.0000 0000	0.826 5000	0.672 0000	0.535 5000	0.416 0000	0.312 5000	0.224 0000	0.149 5000	0.088 0000	0.038 5000
0	0.275 5000	0.504 0000	0.688 5000	0.832 0000	0.937 5000	1.008 0000	1.046 5000	1.056 0000	1.039 5000
0	—0.130 5000	—0.224 0000	—0.283 5000	—0.312 0000	—0.312 5000	—0.288 0000	—0.241 5000	—0.176 0000	0.094 5000
0	0.028 5000	0.048 0000	0.059 5000	0.064 0000	0.062 5000	0.056 0000	0.045 5000	0.032 0000	0.016 5000
0.01	0.11	0.21	0.31	0.41	0.51	0.61	0.71	0.81	0.91
0.981 7665	0.810 2115	0.657 5565	0.522 8015	0.404 9465	0.302 9915	0.215 9365	0.142 7815	0.082 5265	0.034 1715
0.029 7505	0.300 4155	0.524 3805	0.704 6455	0.844 2105	0.946 0755	1.013 2405	1.048 7055	1.055 4705	1.036 5355
—0.014 8005	—0.141 4655	—0.231 4305	—0.287 6955	—0.313 2605	—0.311 1255	—0.284 2905	—0.235 7555	—0.168 5205	—0.085 5855
0.003 2835	0.030 8385	0.049 4935	0.060 2485	0.064 1035	0.062 0585	0.055 1135	0.044 2685	0.030 5235	0.014 8785
0.02	0.12	0.22	0.32	0.42	0.52	0.62	0.72	0.82	0.92
0.963 7320	0.794 1120	0.643 2920	0.510 2720	0.394 0520	0.293 6320	0.208 0120	0.136 1920	0.077 1720	0.029 9520
0.059 0040	0.324 8640	0.544 3240	0.720 3840	0.856 0440	0.954 3040	1.018 1640	1.050 6240	1.054 6840	1.033 3440
—0.029 2040	—0.152 0640	—0.238 5240	—0.291 5840	—0.314 2440	—0.309 5040	—0.280 3640	—0.229 8240	—0.160 5840	—0.076 5440
0.006 4680	0.033 0880	0.050 9080	0.060 9280	0.064 1480	0.061 5680	0.054 1880	0.043 0080	0.029 0280	0.013 2480
0.03	0.13	0.23	0.33	0.43	0.53	0.63	0.73	0.83	0.93
0.945 8955	0.778 2005	0.629 2055	0.497 9105	0.383 3155	0.284 4205	0.200 2255	0.129 7305	0.071 9355	0.025 8405
0.087 7635	0.348 8485	0.563 8335	0.735 7185	0.867 5035	0.962 1885	1.022 7735	1.052 2585	1.053 6435	1.029 9285
—0.043 2135	—0.162 2985	—0.245 2835	—0.295 1685	—0.314 9535	—0.307 6385	—0.276 2235	—0.223 7085	—0.153 0935	—0.067 3785
0.009 5545	0.035 2495	0.052 2445	0.061 5395	0.064 1345	0.061 0295	0.053 2245	0.041 7195	0.027 5145	0.011 6095
0.04	0.14	0.24	0.34	0.44	0.54	0.64	0.74	0.84	0.94
0.928 2560	0.762 4760	0.615 2960	0.485 7160	0.372 7360	0.275 3560	0.192 5760	0.123 3960	0.066 8160	0.021 8360
0.116 0320	0.372 3720	0.582 9120	0.750 6520	0.878 5920	0.969 7320	1.027 0720	1.053 6120	1.052 3520	1.026 2920
—0.056 8320	—0.172 1720	—0.251 7120	—0.298 4520	—0.315 3920	—0.305 5320	—0.271 8720	—0.217 4120	—0.145 1520	—0.058 0920
0.012 5440	0.037 3240	0.053 5040	0.062 0840	0.064 0640	0.060 4440	0.052 2240	0.040 4040	0.025 9840	0.009 9640
0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
0.910 8125	0.746 9375	0.601 5625	0.473 6875	0.362 3125	0.266 4375	0.185 0625	0.117 1875	0.061 8125	0.017 9375
0.143 8125	0.395 4375	0.601 5625	0.765 1875	0.889 3125	0.976 9375	1.031 0625	1.054 6875	1.050 8125	1.022 4375
—0.070 0625	—0.181 6875	—0.257 8125	—0.301 4375	—0.315 5625	—0.303 1875	—0.267 3125	—0.219 9375	—0.137 0625	—0.048 6875
0.015 4375	0.039 3125	0.054 6875	0.062 5625	0.063 9375	0.059 8125	0.051 1875	0.039 0625	0.024 4375	0.008 3125
0.06	0.16	0.26	0.36	0.46	0.56	0.66	0.76	0.86	0.96
0.893 5640	0.731 5840	0.588 0040	0.461 8240	0.352 0440	0.257 6640	0.177 6840	0.111 1040	0.056 9240	0.014 1440
0.171 1080	0.418 0480	0.619 7880	0.779 3280	0.899 6680	0.983 8080	1.034 7480	1.055 4880	1.049 0280	1.018 3680
—0.082 9080	—0.190 8480	—0.263 5880	—0.304 1280	—0.315 4680	—0.300 6080	—0.262 5480	—0.204 2880	—0.128 8280	—0.039 1680
0.018 2360	0.041 2160	0.055 7960	0.062 9760	0.063 7560	0.059 1360	0.050 1160	0.037 6960	0.022 8760	0.006 6560
0.07	0.17	0.27	0.37	0.47	0.57	0.67	0.77	0.87	0.97
0.876 5095	0.716 4145	0.574 6195	0.450 1245	0.341 9295	0.249 0345	0.170 4395	0.105 1445	0.052 1495	0.010 4545
0.197 9215	0.440 2065	0.637 5915	0.793 0765	0.909 6615	0.990 3465	1.038 1315	1.056 0165	1.047 0015	1.014 0865
—0.095 3715	—0.199 6565	—0.269 0415	—0.306 5265	—0.315 1115	—0.297 7965	—0.257 5815	—0.197 4665	—0.120 4515	—0.029 5365
0.020 9405	0.043 0355	0.056 8305	0.063 3255	0.063 5205	0.058 4155	0.049 0105	0.036 3055	0.021 3005	0.004 9955
0.08	0.18	0.28	0.38	0.48	0.58	0.68	0.78	0.88	0.98
0.859 6480	0.701 4280	0.561 4080	0.438 5880	0.331 9680	0.240 5480	0.163 3280	0.099 3080	0.047 4880	0.006 8680
0.224 2560	0.461 9160	0.654 9760	0.806 4360	0.919 2960	0.996 5560	1.041 2160	1.056 2760	1.044 7360	1.009 5960
—0.107 4560	—0.208 1160	—0.274 1760	—0.308 6360	—0.314 4960	—0.294 7560	—0.252 4160	—0.190 4760	—0.111 9360	—0.019 7960
0.023 5520	0.044 7720	0.057 7920	0.063 6120	0.063 2320	0.057 6520	0.047 8720	0.034 8920	0.019 7120	0.003 3320
0.09	0.19	0.29	0.39	0.49	0.59	0.69	0.79	0.89	0.99
0.842 9785	0.686 6235	0.548 3685	0.427 2135	0.322 1585	0.232 2035	0.156 3485	0.093 5935	0.042 9385	0.003 3835
0.250 1145	0.483 1795	0.671 9445	0.819 4095	0.928 5745	1.002 4395	1.044 0045	1.056 2695	1.042 2345	1.004 8995
—0.119 1645	—0.216 2295	—0.278 9945	—0.310 4595	—0.313 6245	—0.291 4895	—0.247 0545	—0.183 3195	—0.103 2845	—0.009 9495
0.026 0715	0.046 4265	0.058 6815	0.063 8365	0.062 8915	0.056 8465	0.046 7015	0.033 4565	0.018 1115	0.001 6665

Krakowiany wyrównawcze

F (pe)

wielomianów

dwu-trzy i czteroparametrowych

służące do wyrównywania

metodą najmniejszych kwadratów

obserwacyjnych tablic

wielomianowych

$$N = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Krakowiany wyrównawcze

w i e l o m i a n ó w d w u p a r a m e t r o w y c h.

$$F\,/2.3/ = \begin{Bmatrix} -0.16667 & 0.33333 & -0.16666 \\ 0.33333 & -0.66666 & 0.33333 \\ -0.16666 & 0.33333 & -0.16667 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/2.4/ = \begin{Bmatrix} -0.3 & 0.4 & 0.1 & -0.2 \\ 0.4 & -0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & -0.7 & 0.4 \\ -0.2 & 0.1 & 0.4 & -0.3 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/2.5/ = \begin{Bmatrix} -0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0.4 & -0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & -0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -0.7 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & -0.4 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/2.6/ = \begin{Bmatrix} -0.47619 & 0.38095 & 0.23810 & 0.09524 & -0.04762 & -0.19048 \\ 0.38095 & -0.70476 & 0.20952 & 0.12381 & 0.03810 & -0.04762 \\ 0.23810 & 0.20952 & -0.81905 & 0.15238 & 0.12381 & 0.09524 \\ 0.09524 & 0.12381 & 0.15238 & -0.81905 & 0.20952 & 0.23810 \\ -0.04762 & 0.03810 & 0.12381 & 0.20952 & -0.70476 & 0.38095 \\ -0.19048 & -0.04762 & 0.09524 & 0.23810 & 0.38095 & -0.47619 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/2.7/ = \begin{Bmatrix} -0.53571 & 0.35714 & 0.25000 & 0.14286 & 0.03571 & -0.07143 & -0.17857 \\ 0.35714 & -0.71429 & 0.21429 & 0.14286 & 0.07143 & 0 & -0.07143 \\ 0.25000 & 0.21429 & -0.82143 & 0.14286 & 0.10714 & 0.07143 & 0.03571 \\ 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 & -0.85716 & 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 \\ 0.03571 & 0.07143 & 0.10714 & 0.14286 & -0.82143 & 0.21429 & 0.25000 \\ -0.07143 & 0 & 0.07143 & 0.14286 & 0.21429 & 0.71429 & 0.35714 \\ -0.17857 & -0.07143 & 0.03571 & 0.14286 & 0.25000 & 0.35714 & -0.53571 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/2.8/ = \begin{Bmatrix} -0.58333 & 0.33333 & 0.25000 & 0.16667 & 0.08333 & 0 & -0.08333 & -0.16667 \\ 0.33333 & -0.72619 & 0.21429 & 0.15476 & 0.09524 & 0.03571 & -0.02381 & -0.08333 \\ 0.25000 & 0.21429 & -0.82143 & 0.14286 & 0.10714 & 0.07143 & 0.03571 & 0 \\ 0.16667 & 0.15476 & 0.14286 & -0.86905 & 0.11905 & 0.10714 & 0.09524 & 0.08333 \\ 0.08333 & 0.09524 & 0.10714 & 0.11905 & -0.86905 & 0.14286 & 0.15476 & 0.16667 \\ 0 & 0.03571 & 0.07143 & 0.10714 & 0.14286 & -0.82143 & 0.21429 & 0.25000 \\ -0.08333 & -0.02381 & 0.03571 & 0.09524 & 0.15476 & 0.21429 & -0.72619 & 0.33333 \\ -0.16667 & -0.08333 & 0 & 0.08333 & 0.16667 & 0.25000 & 0.33333 & -0.58333 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/2.9/ = \begin{Bmatrix} -0.62222 & 0.31111 & 0.24444 & 0.17778 & 0.11111 & 0.04444 & -0.02222 & -0.08889 & -0.15555 \\ 0.31111 & -0.73888 & 0.21111 & 0.16111 & 0.11111 & 0.06111 & 0.01111 & -0.03889 & -0.08889 \\ 0.24444 & 0.21111 & -0.82221 & 0.14444 & 0.11111 & 0.07778 & 0.04444 & 0.01111 & -0.02222 \\ 0.17778 & 0.16111 & 0.14444 & -0.87221 & 0.11111 & 0.09444 & 0.07778 & 0.06111 & 0.04444 \\ 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 & -0.88888 & 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 & 0.11111 \\ 0.04444 & 0.06111 & 0.07778 & 0.09444 & 0.11111 & -0.87221 & 0.14444 & 0.16111 & 0.17778 \\ -0.02222 & 0.01111 & 0.04444 & 0.07778 & 0.11111 & 0.14444 & -0.82221 & 0.21111 & 0.24444 \\ -0.08889 & -0.03889 & 0.01111 & 0.06111 & 0.11111 & 0.16111 & 0.21111 & -0.73888 & 0.31111 \\ -0.15555 & -0.08889 & -0.02222 & 0.04444 & 0.11111 & 0.17778 & 0.24444 & 0.31111 & -0.62222 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/2.10/ = \begin{Bmatrix} -0.65455 & 0.29091 & 0.23636 & 0.18182 & 0.12727 & 0.07273 & 0.01818 & -0.03636 & -0.09091 & -0.14545 \\ 0.29091 & -0.75151 & 0.20606 & 0.16364 & 0.12121 & 0.07879 & 0.03636 & -0.00606 & -0.04849 & -0.09091 \\ 0.23636 & 0.20606 & -0.82424 & 0.14545 & 0.11515 & 0.08485 & 0.05455 & 0.02424 & -0.00606 & -0.03636 \\ 0.18182 & 0.16364 & 0.14545 & -0.87273 & 0.10909 & 0.09091 & 0.07273 & 0.05455 & 0.03636 & 0.01818 \\ 0.12727 & 0.12121 & 0.11515 & 0.10909 & -0.89697 & 0.09697 & 0.09091 & 0.08485 & 0.07879 & 0.07273 \\ 0.07273 & 0.07879 & 0.08485 & 0.09091 & 0.09697 & -0.89697 & 0.10909 & 0.11515 & 0.12121 & 0.12727 \\ 0.01818 & 0.03636 & 0.05455 & 0.07273 & 0.09091 & 0.10909 & -0.87273 & 0.14545 & 0.16364 & 0.18182 \\ -0.03636 & -0.00606 & 0.02424 & 0.05455 & 0.08485 & 0.11515 & 0.14545 & -0.82424 & 0.20606 & 0.23636 \\ -0.09091 & -0.04849 & -0.00606 & 0.03636 & 0.07879 & 0.12121 & 0.16364 & 0.20606 & -0.75151 & 0.29091 \\ -0.14545 & -0.09091 & -0.03636 & 0.01818 & 0.07273 & 0.12727 & 0.18182 & 0.23636 & 0.29091 & -0.65455 \end{Bmatrix}$$

$$N = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Krakowiany wyrównawcze

w i e l o m i a n ó w   t r ó j p a r a m e t r o w y c h.

$$F\,/3.4/ = \begin{Bmatrix} -0.05 & 0.15 & -0.15 & 0.05 \\ 0.15 & -0.45 & 0.45 & -0.15 \\ -0.15 & 0.45 & -0.45 & 0.15 \\ 0.05 & -0.15 & 0.15 & -0.05 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/3.5/ = \begin{Bmatrix} -0.11429 & 0.25715 & -0.08571 & -0.14287 & 0.08572 \\ 0.25715 & -0.62858 & 0.34284 & 0.17146 & -0.14287 \\ -0.08571 & 0.34284 & -0.51426 & 0.34284 & -0.08571 \\ -0.14287 & 0.17146 & 0.34284 & -0.62858 & 0.25715 \\ 0.08572 & -0.14287 & -0.08571 & 0.25715 & -0.11429 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/3.6/ = \begin{Bmatrix} -0.17857 & 0.32143 & 0 & -0.14286 & -0.10714 & 0.10714 \\ 0.32143 & -0.69286 & 0.25714 & 0.17143 & 0.05000 & -0.10714 \\ 0 & 0.25714 & -0.62857 & 0.34286 & 0.17143 & -0.14286 \\ -0.14286 & 0.17143 & 0.34286 & -0.62857 & 0.25714 & 0 \\ -0.10714 & 0.05000 & 0.17143 & 0.25714 & -0.69286 & 0.32143 \\ 0.10714 & -0.10714 & -0.14286 & 0 & 0.32143 & -0.17857 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/3.7/ = \begin{Bmatrix} -0.23809 & 0.35714 & 0.07143 & -0.09524 & -0.14286 & -0.07143 & 0.11905 \\ 0.35714 & -0.71429 & 0.21429 & 0.14286 & 0.07143 & 0 & -0.07143 \\ 0.07143 & 0.21429 & -0.71429 & 0.28571 & 0.21429 & 0.07143 & -0.14286 \\ -0.09524 & 0.14286 & 0.28571 & -0.66666 & 0.28571 & 0.14286 & -0.09524 \\ -0.14286 & 0.07143 & 0.21429 & 0.28571 & -0.71429 & 0.21429 & 0.07143 \\ -0.07143 & 0 & 0.07143 & 0.14286 & 0.21429 & -0.71429 & 0.35714 \\ 0.11905 & -0.07143 & -0.14286 & -0.09524 & 0.07143 & 0.35714 & -0.23809 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/3.8/ = \begin{Bmatrix} -0.29167 & 0.37500 & 0.12500 & -0.04166 & -0.12500 & -0.12500 & -0.04167 & 0.12500 \\ 0.37500 & -0.72024 & 0.19643 & 0.12500 & 0.06548 & 0.01786 & -0.01786 & -0.04167 \\ 0.12500 & 0.19643 & -0.76786 & 0.23214 & 0.19643 & 0.12500 & 0.01786 & -0.12500 \\ -0.04166 & 0.12500 & 0.23214 & -0.72025 & 0.26786 & 0.19643 & 0.06548 & -0.12500 \\ -0.12500 & 0.06548 & 0.19643 & 0.26786 & -0.72025 & 0.23214 & 0.12500 & -0.04166 \\ -0.12500 & 0.01786 & 0.12500 & 0.19643 & 0.23214 & -0.76786 & 0.19643 & 0.12500 \\ -0.04167 & -0.01786 & 0.01786 & 0.06548 & 0.12500 & 0.19643 & -0.72024 & 0.37500 \\ 0.12500 & -0.04167 & -0.12500 & -0.12500 & -0.04166 & 0.12500 & 0.37500 & -0.29167 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/3.9/ = \begin{Bmatrix} -0.33939 & 0.38182 & 0.16363 & 0.00606 & -0.09091 & -0.12727 & -0.10303 & -0.01818 & 0.12727 \\ 0.38182 & -0.72121 & 0.19091 & 0.11818 & 0.06060 & 0.01818 & -0.00909 & -0.02121 & -0.01818 \\ 0.16363 & 0.19091 & -0.79913 & 0.19351 & 0.16883 & 0.12684 & 0.06753 & -0.00909 & -0.10303 \\ 0.00606 & 0.11818 & 0.19351 & -0.76797 & 0.23377 & 0.19870 & 0.12684 & 0.01818 & -0.12727 \\ -0.09091 & 0.06060 & 0.16883 & 0.23377 & -0.74458 & 0.23377 & 0.16883 & 0.06060 & -0.09091 \\ -0.12727 & 0.01818 & 0.12684 & 0.19870 & 0.23377 & -0.76797 & 0.19351 & 0.11818 & 0.00606 \\ -0.10303 & -0.00909 & 0.06753 & 0.12684 & 0.16883 & 0.19351 & -0.79913 & 0.19091 & 0.16363 \\ -0.01818 & -0.02121 & -0.00909 & 0.01818 & 0.06060 & 0.11818 & 0.19091 & -0.72121 & 0.38182 \\ 0.12727 & -0.01818 & -0.10303 & -0.12727 & -0.09091 & 0.00606 & 0.16363 & 0.38182 & -0.33939 \end{Bmatrix}$$

$$F\,/3.10/ = \begin{Bmatrix} -0.38182 & 0.38182 & 0.19091 & 0.04545 & -0.05454 & -0.10909 & -0.11818 & -0.08182 & 0 & 0.12727 \\ 0.38182 & -0.72121 & 0.19091 & 0.11818 & 0.06060 & 0.01818 & -0.00909 & -0.02121 & -0.01818 & 0 \\ 0.19091 & 0.19091 & -0.81666 & 0.16818 & 0.14545 & 0.11515 & 0.07727 & 0.03182 & -0.02121 & -0.08182 \\ 0.04545 & 0.11818 & 0.16818 & -0.80454 & 0.20000 & 0.18182 & 0.14091 & 0.07727 & -0.00909 & -0.11818 \\ -0.05454 & 0.06060 & 0.14545 & 0.20000 & -0.77575 & 0.21818 & 0.18182 & 0.11515 & 0.01818 & -0.10909 \\ -0.10909 & 0.01818 & 0.11515 & 0.18182 & 0.21818 & -0.77575 & 0.20000 & 0.14545 & 0.06060 & -0.05454 \\ -0.11818 & -0.00909 & 0.07727 & 0.14091 & 0.18182 & 0.20000 & -0.80454 & 0.16818 & 0.11818 & 0.04545 \\ -0.08182 & -0.02121 & 0.03182 & 0.07727 & 0.11515 & 0.14545 & 0.16818 & -0.81666 & 0.19091 & 0.19091 \\ 0 & -0.01818 & -0.02121 & -0.00909 & 0.01818 & 0.06060 & 0.11818 & 0.19091 & -0.72121 & 0.38182 \\ 0.12727 & 0 & -0.08182 & -0.11818 & -0.10909 & -0.05454 & 0.04545 & 0.19091 & 0.38182 & -0.38182 \end{Bmatrix}$$

$$N=\left\{\begin{matrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{matrix}\right\}$$

Krakowiany wyrównawcze

w i e l o m i a n ó w c z t e r o p a r a m e t r o w y c h.

$$F\ /4.5/=\left\{\begin{matrix}
-0.01428 & 0.05714 & -0.08571 & 0.05714 & -0.01429\\
0.05714 & -0.22857 & 0.34286 & -0.22857 & 0.05714\\
-0.08571 & 0.34286 & -0.51430 & 0.34286 & -0.08571\\
0.05714 & -0.22857 & 0.34286 & -0.22857 & 0.05714\\
-0.01429 & 0.05714 & -0.08571 & 0.05714 & -0.01428
\end{matrix}\right\}$$

$$F\ /4.6/=\left\{\begin{matrix}
-0.03969 & 0.12699 & -0.11111 & -0.03174 & 0.08730 & -0.03175\\
0.12699 & -0.42064 & 0.41271 & 0.01586 & -0.22222 & 0.08730\\
-0.11111 & 0.41271 & -0.53971 & 0.25399 & 0.01586 & -0.03174\\
-0.03174 & 0.01586 & 0.25399 & -0.53971 & 0.41271 & -0.11111\\
0.08730 & -0.22222 & 0.01586 & 0.41271 & -0.42064 & 0.12699\\
-0.03175 & 0.08730 & -0.03174 & -0.11111 & 0.12699 & -0.03969
\end{matrix}\right\}$$

$$F\ /4.7/=\left\{\begin{matrix}
-0.07142 & 0.19047 & -0.09524 & -0.09524 & 0.02380 & 0.09524 & -0.04761\\
0.19047 & -0.54762 & 0.38097 & 0.14285 & -0.09524 & -0.16667 & 0.09524\\
-0.09524 & 0.38097 & -0.54763 & 0.28572 & 0.04762 & -0.09524 & 0.02380\\
-0.09524 & 0.14285 & 0.28572 & -0.66666 & 0.28572 & 0.14285 & -0.09524\\
0.02380 & -0.09524 & 0.04762 & 0.28572 & -0.54763 & 0.38097 & -0.09524\\
0.09524 & -0.16667 & -0.09524 & 0.14285 & 0.38097 & -0.54762 & 0.19047\\
-0.04761 & 0.09524 & 0.02380 & -0.09524 & -0.09524 & 0.19047 & -0.07142
\end{matrix}\right\}$$

$$F\ /4.8/=\left\{\begin{matrix}
-0.10606 & 0.24242 & -0.06061 & -0.12121 & -0.04545 & 0.06061 & 0.09091 & -0.06061\\
0.24242 & -0.62554 & 0.32900 & 0.18182 & 0.00866 & -0.11472 & -0.11255 & 0.09091\\
-0.06061 & 0.32900 & -0.58224 & 0.31169 & 0.11688 & -0.06061 & -0.11472 & 0.06061\\
-0.12121 & 0.18182 & 0.31169 & -0.68616 & 0.23377 & 0.11688 & 0.00866 & -0.04545\\
-0.04545 & 0.00866 & 0.11688 & 0.23377 & -0.68616 & 0.31169 & 0.18182 & -0.12121\\
0.06061 & -0.11472 & -0.06061 & 0.11688 & 0.31169 & -0.58224 & 0.32900 & -0.06061\\
0.09091 & -0.11255 & -0.11472 & 0.00866 & 0.18182 & 0.32900 & -0.62554 & 0.24242\\
-0.06061 & 0.09091 & 0.06061 & -0.04545 & -0.12121 & -0.06061 & 0.24242 & -0.10606
\end{matrix}\right\}$$

$$F\ /4.9/=\left\{\begin{matrix}
-0.14141 & 0.28282 & -0.02020 & -0.12121 & -0.09091 & 0 & 0.08081 & 0.08081 & -0.07071\\
0.28282 & -0.67172 & 0.28283 & 0.18182 & 0.06061 & -0.04545 & -0.10101 & -0.07071 & 0.08081\\
-0.02020 & 0.28283 & -0.62843 & 0.31169 & 0.16883 & 0.00866 & -0.10318 & -0.10101 & 0.08081\\
-0.12121 & 0.18182 & 0.31169 & -0.68615 & 0.23377 & 0.11687 & 0.00866 & -0.04545 & 0\\
-0.09091 & 0.06061 & 0.16883 & 0.23377 & -0.74460 & 0.23377 & 0.16883 & 0.06061 & -0.09091\\
0 & -0.04545 & 0.00866 & 0.11687 & 0.23377 & -0.68615 & 0.31169 & 0.18182 & -0.12121\\
0.08081 & -0.10101 & -0.10318 & 0.00866 & 0.16883 & 0.31169 & -0.62842 & 0.28283 & -0.02021\\
0.08081 & -0.07071 & -0.10101 & -0.04545 & 0.06061 & 0.18182 & 0.28283 & -0.67173 & 0.28283\\
-0.07071 & 0.08081 & 0.08081 & 0 & -0.09091 & -0.12121 & -0.02021 & 0.28283 & -0.14141
\end{matrix}\right\}$$

$$F\ /4.10/=\left\{\begin{matrix}
-0.17622 & 0.31328 & 0.01958 & -0.10629 & -0.11329 & -0.05035 & 0.03357 & 0.08951 & 0.06853 & -0.07832\\
0.31328 & -0.69836 & 0.24802 & 0.16876 & 0.08019 & -0.00140 & -0.05967 & -0.07832 & -0.04103 & 0.06853\\
0.01958 & 0.24802 & -0.67389 & 0.29464 & 0.19440 & 0.06620 & -0.04919 & -0.11095 & -0.07832 & 0.08951\\
-0.10629 & 0.16876 & 0.29464 & -0.69255 & 0.24336 & 0.13846 & 0.02891 & -0.04919 & -0.05967 & 0.03357\\
-0.11329 & 0.08019 & 0.19440 & 0.24336 & -0.75897 & 0.20140 & 0.13846 & 0.06620 & -0.00140 & -0.05035\\
-0.05035 & -0.00140 & 0.06620 & 0.13846 & 0.20140 & -0.75897 & 0.24336 & 0.19440 & 0.08019 & -0.11329\\
0.03357 & -0.05967 & -0.04919 & 0.02891 & 0.13846 & 0.24336 & -0.69255 & 0.29464 & 0.16876 & -0.10629\\
0.08951 & -0.07832 & -0.11095 & -0.04919 & 0.06620 & 0.19440 & 0.29464 & -0.67389 & 0.24802 & 0.01958\\
0.06853 & -0.04103 & -0.07832 & -0.05967 & -0.00140 & 0.08019 & 0.16876 & 0.24802 & -0.69836 & 0.31328\\
-0.07832 & 0.06853 & 0.08951 & 0.03357 & -0.05035 & -0.11329 & -0.10629 & 0.01958 & 0.31328 & -0.17622
\end{matrix}\right\}$$

WARSZAWA 1948 R.

4100