

Główny Urząd Pomiarów Kraju
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
===== Nr 6 =====

Inż. JAN RÓŻYCKI

ODWZOROWANIE GAUSSA-KRÜGERA I JEGO ZASTOSOWANIE W POLSCE



W a r s z a w a 1 9 4 9

**ODWZOROWANIE GAUSSA-KRÜGERA
I JEGO ZASTOSOWANIE W POLSCE**

Główny Urząd Pomiarów Kraju
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
===== Nr 6 =====

inż. JAN RÓŻYCKI

ODWZOROWANIE GAUSSA-KRÜGERA I JEGO ZASTOSOWANIE W POLSCE



W a r s z a w a 1 9 4 9

SPIS TREŚCI

str.

Przedmowa	VII
---------------------	-----

ROZDZIAŁ I

Ogólna charakterystyka odwzorowania i omówienie zagadnień zasadniczych

§ 1. Ogólna charakterystyka i prawa odwzorowania	1
§ 2. Określenie współrzędnych geograficznych φ i λ punktu na elipsoidzie, na podstawie danych współrzędnych prostokątnych płaskich x i y jego obrazu	8
§ 3. Zbieżność południków	12
§ 4. Skale i zniekształcenia odwzorowawcze	15
§ 5. Redukcje odwzorowawcze	21
§ 6. Współrzędne prostokątne płaskie punktu, w dwóch sąsiednich układach Gaussa-Krügera	25

ROZDZIAŁ II

Zestawienie wzorów i przykłady obliczeń

§ 7. Obliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich x i y , skali liniowej i zbieżności południków w obrazie punktu określonego na elipsoidzie przy pomocy współrzędnych geograficznych φ i λ	27
§ 8. Obliczenie współrzędnych geograficznych φ i λ punktu na elipsoidzie oraz skali liniowej i zbieżności południków w jego obrazie, na podstawie danych współrzędnych prostokątnych płaskich x i y	32
§ 9. Redukcja wielkości kątowych	35
§ 10. Redukcja wielkości liniowych	38
§ 11. Przeliczanie współrzędnych prostokątnych płaskich punktu, z jednego układu na drugi	41

ROZDZIAŁ III

Zastosowanie odwzorowania Gaussa-Krügera w Polsce

§ 12. Uwagi ogólne dotyczące zastosowania odwzorowania Gaussa-Krügera na obszarze Polski	49
§ 13. Odwzorowanie Gaussa-Krügera na obszarze Ziem Odzyskanych, stosowane w Niemczech przed ostatnią wojną światową	50
§ 14. Odwzorowanie Gaussa-Krügera na Ziemiach Dawnych, stosowane przy pomiarach państwowych przed ostatnią wojną światową	53
§ 15. Odwzorowanie Gaussa-Krügera stosowane obecnie w Polsce, w państwowych pracach pomiarowych i kartograficznych	56

TABELE POMOCNICZE

Tabl. I. Tablice mnożące do przeliczania współrzędnych geograficznych φ i λ punktu elipsoidy, na współrzędne prostokątne płaskie x i y jego obrazu	79
Tabl. II. Tablice mnożące do przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich x i y , na współrzędne geograficzne φ i λ	85
Tabl. III. Tablice do przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich punktu, z układu zachodniego na wschodni, przy pomocy rachunku logarytmami	90
Tabl. IV. Tablice do przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich punktu, z układu wschodniego na zachodni, przy pomocy rachunku logarytmami	91
Tabl. V. Tablice do przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich punktu, z układu zachodniego na wschodni, przy pomocy rachunku maszyną	92
Tabl. VI. Tablice do przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich punktu, z układu wschodniego na zachodni, przy pomocy rachunku maszyną	93
Tabl. VII. Elementy elipsoidy Bessel'a	94

PRZEDMOWA

Zadaniem tej pracy jest bliższe zapoznanie czytelnika z odrozorowaniem przyjętym w Polsce do obliczeń wyników triangulacji państwowej i opracowania kartograficznego mapy gospodarczej Kraju, w skali podstawowej 1:10.000 i większych.

Podbudowę teoretyczną omawianego zagadnienia starałem się ograniczyć do niezbędnego minimum, mając na uwadze przede wszystkim względy praktyczne. Po krótkim omówieniu teorii odrozorowania w rozdziale pierwszym, podałem w następnym rozdziale zestawienie i omówienie wzorów służących do rozwiązywania najczęściej spotykanych zagadnień, wypływających z zastosowania omawianego odrozorowania w praktyce pomiarowej, jak również przykłady obliczeń.

Możliwie wyczerpująco starałem się omówić te zagadnienia, które wynikają z zastosowania odrozorowania południkowego-wier-nokątnego przy obliczeniach wyników triangulacji niższych rzędów w Polsce, ze względu na ich aktualność w pracach pomiarowych i nowość tematu.

Tablice I i II (Przeliczanie współrzędnych geograficznych punktu elipsoidy na współrzędne prostokątne płaskie w odrozorowaniu południkowym-wier-nokątnym i zadanie odwrotne), umieszczone w końcu niniejszej pracy, zostały opracowane przez dr. S. Hausbrandta.

Tablice: III, IV, V i VI (przeliczanie współrzędnych prostokątnych płaskich układów sąsiednich) ułożyłem dla trzystopniowych pasów południkowych, na podstawie wzorów i tablic podanych w „Handbuch der Vermessungskunde, W. Jordan“, cz. III. 1941 r.

Zadomolony będę jeśli mój skromny wkład ułatwi pracę tym wszystkim, którzy z zagadnieniami tu poruszonymi zetkną się w swej pracy zawodowej.

Ob. Dr. S. Hausbrandtowi oraz Ob. Dr. C. Kameli, składam podziękowanie za przejrzenie i ocenę rękopisu. Uważam za miły obowiązek podziękować Ob. inż. W. Bernert, za współpracę przy obliczeniach elementów tablic do przeliczeń współrzędnych w sąsiednich układach południkowych. Ponadto dziękuję dyrektorowi Biura Kartograficznego G. U. P. K. Ob. inż. F. Piątkowskiemu, za zainteresowanie się tą pracą i ułatwienia w jej wydaniu.

Jan Różycki

Warszawa, Październik 1949 r.

ROZDZIAŁ I

OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA ODWZOROWANIA I OMÓWIENIE ZAGADNIEŃ ZASADNICZYCH

§ 1. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA I PRAWA ODWZOROWANIA

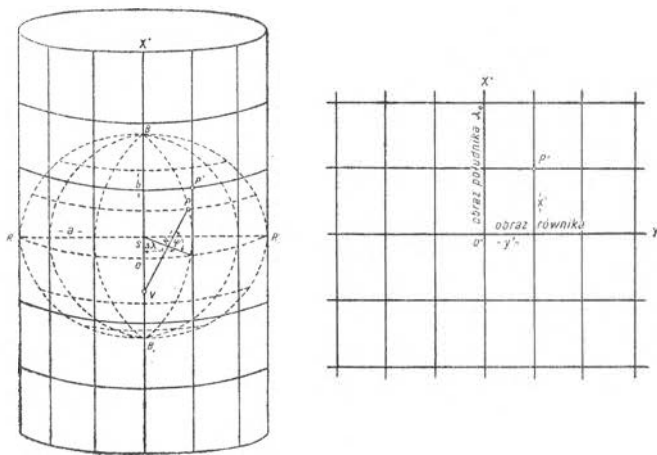
Odwzorowanie Gaussa-Krügera, jest to wiernokątne odwzorowanie powierzchni elipsoidy na płaszczyznę z wiernie odtworzonym południkiem środkowym odwzorowywanego obszaru. Obraz tego południka obiera się jako oś odciętych, w układzie współrzędnych prostokątnych płaskich.

Związek między współrzędnymi geograficznymi punktu na elipsoidzie i współrzędnymi prostokątnymi jego obrazu na płaszczyźnie odwzorowania, można wyprowadzić kilkoma sposobami.

Omówimy te spośród nich, które aczkolwiek nie po najprostszej drodze prowadzą do celu, pozwalają najlepiej wnikać w istotę zagadnienia.

Pierwszy sposób polega na wiernokątnym odwzorowaniu powierzchni elipsoidy na płaszczyznę posiłkując się rzutem Mercatora, poczem tak otrzymany obraz odwzorowuje się wiernokątnie na inną płaszczyznę, żądając aby oś odciętych prostokątnego układu współrzędnych płaskich przeszła na nową oś odciętych oraz aby ta ostatnia przedstawiała wierne odtworzenie południka środkowego odwzorowywanego obszaru. Poniżej podajemy ten sposób w nieco szerszym ujęciu, rezygnując jednakże ze szczegółowego rozwinięcia tematu ze względu na opisowy charakter niniejszej pracy.

Jak wiadomo z kartografii matematycznej, w odwzorowaniu walcowym wiernokątnym normalnym (Mercatora), południki odwzorowują się na linie proste biegnące równolegle do siebie w odległościach równych wyprostowanym łukom równika, odpowiadającym różnicom długości geograficznych wymienionych południków elipsoidy. Obrazami równoleżników są linie proste, tworzące z obrazami południków siatkę prostokątną. Odstępy obrazów równoleżników są zależne od ich szerokości geograficznych i określają się z warunku równości skal liniowych w kierunkach głównych (warunek odwzorowania wiernokątnego). Rys. 1-y przedstawia interpretację geometryczną odwzorowania walcowego Mercatora.



Rys. 1

Wzory do obliczenia współrzędnych prostokątnych płaskich x' i y' obrazu punktu określonego na elipsoidzie przy pomocy współrzędnych geograficznych φ i λ ($\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$), w walcowym odwzorowaniu Mercatora, mają postać następującą:

$$x' = a \cdot \ln \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right] \quad (1)$$

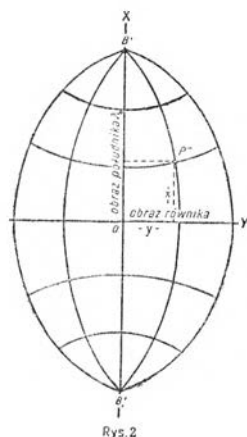
$$y' = a \cdot \Delta\lambda \quad (2)$$

Ponieważ określenie prawa odwzorowania elipsoidy na płaszczyznę polega na określeniu związku między współrzędnymi geograficznymi dowolnego punktu elipsoidy i współrzędnymi prostokątnymi jego obrazu na płaszczyźnie odwzorowania, zatem wzory

(1) i (2) rozwiązują pierwszą część zadania. Mając już wiernokątnie odwzorowaną elipsoidę na płaszczyznę $X'Y'$, odwzorowujemy tę ostatnią na płaszczyznę XY żądając: 1) aby oś odciętych X' , w układzie $X'Y'$, przeszła na nową oś odciętych X , w układzie XY , oraz 2) aby nowa oś odciętych X przedstawiała wierne rozwinięcie południka środkowego odwzorowania (rys. 2).

Wiernokątne odwzorowanie płaszczyzny $X'Y'$ na płaszczyznę XY , otrzymamy opierając się na własnościach funkcji analitycznej $f(z')$ zmiennej zespolonej $z' = x' + iy'$. Oddzielmy w niej składniki rzeczywiste od urojonych. Część rzeczywistą, która jest funkcją zmiennych x' i y' , oznaczmy symbolem P ; część zaś urojoną, która jest również funkcją zmiennych x' i y' , oznaczmy symbolem iQ . Jak wiadomo z matematyki, dla części rzeczywistej i urojonej dowolnej funkcji analitycznej $f(z')$ zmiennej zespolonej:

$$z' = x' + iy'$$



którą zgodnie z podanymi wyżej oznaczeniami możemy napisać w postaci:

$$f(z') = f(x' + iy') = P(x', y') + iQ(x', y')$$

muszą być spełnione równania różniczkowe:

$$\frac{\partial P}{\partial x'} = \frac{\partial Q}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x'} = -\frac{\partial P}{\partial y'}$$

znane pod nazwą równań Riemanna - Cauchy'ego. Równania te określają wszystkie wiernokątne odwzorowania płaszczyzny $X'Y'$, na płaszczyznę XY .

Jeśli więc założymy:

$$x = P(x', y')$$

$$y = Q(x', y')$$

przyczym $P(x', y')$ oraz $iQ(x', y')$ są rzeczywistą i urojoną częścią dowolnej funkcji analitycznej zmiennej zespolonej:

$$z' = x' + iy'$$

to otrzymamy wiernokątne odwzorowanie płaszczyzny $X'Y'$ na płaszczyznę XY . Funkcję analityczną $f(z')$ obieramy pod warunkiem spełnienia obu podanych, na stronie trzeciej, założeń charakteryzujących odwzorowanie Gaussa - Krügera.

Rozwińmy dowolną narazie funkcję analityczną $f(z') = f(x' + iy')$, w szereg Taylora, w otoczeniu wartości $z' = x'$:

$$\begin{aligned} f(x' + iy') = f(x') + iy' \frac{df(x')}{dx'} + \frac{1}{2} (iy')^2 \frac{d^2 f(x')}{dx'^2} + \frac{1}{6} (iy')^3 \frac{d^3 f(x')}{dx'^3} + \\ + \frac{1}{24} (iy')^4 \frac{d^4 f(x')}{dx'^4} + \dots \end{aligned}$$

przyczym pochodne funkcji $f(x')$ są liczbami rzeczywistymi dla każdej rzeczywistej wartości x' .

Jak wiadomo:

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = +1; \quad i^5 = +i \quad \text{itd.}$$

więc można napisać:

$$\begin{aligned} f(x' + iy') = P(x', y') + iQ(x', y') = f(x') + iy' \frac{df(x')}{dx'} - \frac{1}{2} (y')^2 \frac{d^2 f(x')}{dx'^2} - \\ - \frac{1}{6} i(y')^3 \frac{d^3 f(x')}{dx'^3} + \frac{1}{24} (y')^4 \frac{d^4 f(x')}{dx'^4} + \frac{1}{120} i(y')^5 \frac{d^5 f(x')}{dx'^5} - \frac{1}{720} (y')^6 \frac{d^6 f(x')}{dx'^6} - \dots \end{aligned}$$

Ponieważ równość wyrażeń zespolonych zachodzi tylko wtedy, gdy osobno są równe części rzeczywiste, a osobno części urojone, więc z równania ostatniego otrzymujemy:

$$x = P(x', y') = f(x') - \frac{1}{2} (y')^2 \frac{d^2 f(x')}{dx'^2} + \frac{1}{24} (y')^4 \frac{d^4 f(x')}{dx'^4} - \frac{1}{720} (y')^6 \frac{d^6 f(x')}{dx'^6} + \dots (3)$$

$$y = Q(x', y') = y' \frac{df(x')}{dx'} - \frac{1}{6} (y')^3 \frac{d^3 f(x')}{dx'^3} + \frac{1}{120} (y')^5 \frac{d^5 f(x')}{dx'^5} - \dots (4)$$

Analizując równania ostatnie widzimy, że dla $y' = 0$ również $y = 0$, a więc oś odciętych w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie $X'Y'$, przechodzi na oś odciętych prostokąt-

nego układu współrzędnych na nowej płaszczyźnie odwzorowania XY . Dalej, dla $y' = 0$ mamy $x = f(x')$. Jeśli więc przyjmiemy $x = f(x') = S[\varphi(x')]$, gdzie S oznacza długość łuku południka elipsoidy, odpowiadającą szerokości geograficznej $\varphi(x')$, to wówczas oś odciętych w nowym układzie będzie przedstawiała wierne rozwinięcie południka środkowego odwzorowania. Zostaną zatem spełnione warunki pod jakimi chcemy płaszczyznę $X'Y'$, odwzorować na płaszczyznę XY .

Przekształcamy teraz równania (3) i (4) wyrażając współrzędne prostokątne x i y za pomocą współrzędnych geograficznych φ i λ . W tym celu na miejsce y' wstawiamy $a \cdot \Delta\lambda$, określone ze wzoru (2) na str. 2. Jako $f(x')$ przyjmujemy długość łuku południka elipsoidy, od równika do równoleżnika o szerokości geograficznej φ . Pochodne funkcji $f(x')$ obliczamy względem szerokości geograficznej φ , określonej ze wzoru (1) na str. 2:

$$\frac{df(x')}{dx'} = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx'}$$

$$\frac{d^2 f(x')}{dx'^2} = \frac{d\left[\frac{df(x')}{dx'}\right]}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx'}$$

$$\frac{d^3 f(x')}{dx'^3} = \frac{d\left[\frac{d^2 f(x')}{dx'^2}\right]}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx'}$$

i t. d.

$\frac{dS}{d\varphi}$ określamy z równania: $dS = M d\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot d\varphi$ (gdzie M jest promieniem krzywizny południka elipsoidy, w punkcie o szerokości geograficznej φ).

Z równania (1) na str. 2 otrzymujemy:

$$\frac{d\varphi}{dx'} = \frac{\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{a(1 - e^2)}$$

Po uwzględnieniu tych wartości, pierwsza pochodna funkcji $f(x')$ ostatecznie wyniesie:

$$\begin{aligned} \frac{df(x')}{dx'} &= \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx'} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot \frac{\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{a(1 - e^2)} = \\ &= \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \end{aligned}$$

Obliczając następnie dalsze pochodne, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f(x')}{dx'^2} &= - \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \\ \frac{d^3 f(x')}{dx'^3} &= - \frac{\cos^3 \varphi}{a^3(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \right) \\ \frac{d^4 f(x')}{dx'^4} &= + \frac{\sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi}{a^3(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \left[5 - \operatorname{tg}^2 \varphi + 9 \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(\frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} \right)^2 \right] \\ \frac{d^5 f(x')}{dx'^5} &= + \frac{\cos^5 \varphi}{a^4(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \left(5 - 18 \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^4 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 14 \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi - 58 \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \\ \frac{d^6 f(x')}{dx'^6} &= - \frac{\sin \varphi \cdot \cos^5 \varphi}{a^5(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \left(61 - 58 \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^4 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 270 \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi - 330 \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \right)\end{aligned}$$

Po podstawieniu do (3) i (4), omówionych już na str. 5 wartości na y' i $f(x')$ oraz wartości pochodnych funkcji $f(x')$, następnie po uwzględnieniu, że

$$\frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = N$$

(promień krzywizny przekroju poprzecznego w punkcie o szerokości geograficznej φ) i wprowadzeniu oznaczeń przyjętych w geodezji:

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = e'^2, \quad e' \cos \varphi = \eta \quad \text{ i } \quad \operatorname{tg} \varphi = t,$$

otrzymujemy następujące związki pomiędzy współrzędnymi geograficznymi φ i λ punktu na elipsoidzie i współrzędnymi prostokątnymi x i y jego obrazu na płaszczyźnie XY :

$$x = S + \frac{N}{2} \Delta \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{N}{24} \Delta \lambda^4 \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) + \\ + \frac{N}{720} \Delta \lambda^6 \sin \varphi \cdot \cos^5 \varphi (61 - 58 t^2 + t^4) \quad (5)$$

$$y = N \cdot \Delta \lambda \cos \varphi + \frac{N}{6} \Delta \lambda^3 \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \\ + \frac{N}{120} \Delta \lambda^5 \cos^5 \varphi (5 - 18 t^2 + t^4) \quad (6)$$

We wzorach (5) i (6) uwzględnione zostały pochodne funkcji $f(x')$ do szóstej włącznie, przyczym ograniczyliśmy się do wyrazów zawierających $\cos^5 \varphi$. Wzory ostatnie rozwiązują drugą część zadania określając wiernokątne odwzorowanie Gaussa-Krügera, elipsoidy na płaszczyznę.

Do tego samego wyniku dojść można inną drogą, którą pokrótce omówimy. Otrzymuje się najpierw obraz elipsoidy na kuli, przy pomocy wiernokątnego odwzorowania Lagrange'a. Prawa tego odwzorowania są następujące:

$$\lambda' = \lambda \quad (7)$$

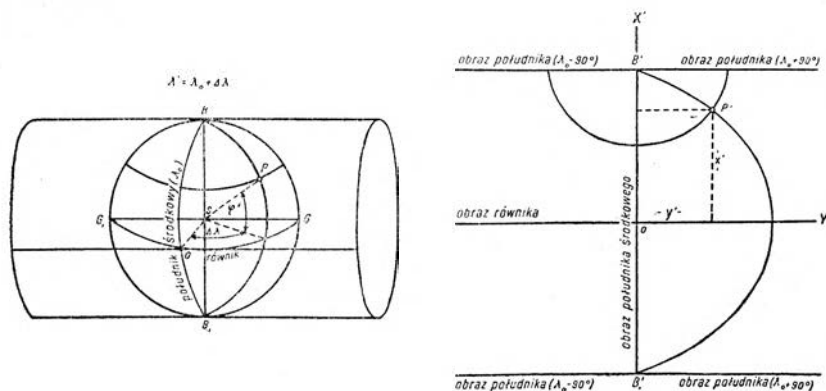
$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \cdot \sin \varphi}{1 + e \cdot \sin \varphi} \right)^{e/2} \quad (8)$$

Promień kuli, na którą dokonujemy odwzorowania elipsoidy, określa się pod warunkiem równości obwodów południka elipsoidy i koła wielkiego na kuli. Tak otrzymany obraz odwzorowuje się na płaszczyznę $X'Y'$, przy pomocy wiernokątnego walcowego rzutu Gaussa. Jako oś odciętych, prostokątnego układu współrzędnych płaskich, obiera się obraz południka środkowego odwzorowywanego obszaru; jako oś rzędnych—obraz równika. W przyjętym układzie wzory do obliczenia współrzędnych prostokątnych płaskich x' i y' , obrazu punktu określonego na kuli przy pomocy współrzędnych geograficznych φ' i λ' w odwzorowaniu Gaussa, przyjmują postać następującą:

$$x' = R \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} \varphi' \cdot \sec \Delta \lambda) \quad (9)$$

$$y' = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi' \sin \Delta \lambda}{1 - \cos \varphi' \sin \Delta \lambda} \quad (10)$$

Interpretację geometryczną odwzorowania Gaussa, przedstawia rys. 3.



Rys. 3

Mając już wiernokątnie odwzorowaną powierzchnię kuli na płaszczyznę $X'Y'$, odwzorowujemy z kolei tę ostatnią na płaszczyznę XY , żądając: 1) aby oś odciętych X' , w układzie $X'Y'$, przeszła na nową oś odciętych X , w układzie XY , oraz 2) aby nowa oś odciętych X przedstawiała wierne rozwinięcie południka środkowego odwzorowania (rys. 2). Żądane odwzorowanie otrzymujemy w sposób analogiczny do opisanego poprzednio, opierając się na własnościach funkcji analitycznej zmiennej zespolonej.

Wzory (5) i (6) mają formę niedogodną dla prac obliczeniowych. Kierując się względami praktycznymi dokonuje się odpowiednich przekształceń, przystosowujących je do rachunków logarytmami, względnie rachunku maszynowego przy użyciu odpowiednich tabel pomocniczych. Wzory do obliczania współrzędnych prostokątnych płaskich x i y obrazu punktu określonego na elipsoidzie przy pomocy współrzędnych geograficznych φ i λ , przystosowane do praktycznych prac obliczeniowych, znajdzie czytelnik w § 7, rozdz. II.

§ 2. OKREŚLENIE WSPÓŁRZĘDNYCH GEOGRAFICZNYCH φ i λ PUNKTU NA ELIPSOIDZIE, NA PODSTAWIE DANYCH WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH PŁASKICH x i y JEGO OBRAZU

Mając już określony związek w formie wzorów (5) i (6), między współrzędnymi prostokątnymi punktu odwzorowania i współrzędnymi geograficznymi punktu na elipsoidzie, można tę zależność odwrócić, stosując drogę kolejnych przybliżeń.

Ze wzoru (6) określamy $\Delta\lambda$ w pierwszym przybliżeniu:

$$\Delta\lambda = \frac{Y}{N \cos \varphi} + \dots$$

skąd:

$$\Delta\lambda^3 = \frac{Y^3}{N^3 \cos^3 \varphi} + \dots$$

Podstawiamy tę wartość na miejsce $\Delta\lambda^3$ w wyraz drugi wzoru (6) odrzucając trzeci:

$$y = N \cdot \Delta\lambda \cos \varphi + \frac{Y^3}{6 N^2} (1 - t^2 + \eta^2) + \dots$$

z ostatniego określamy $\Delta\lambda$ w drugim przybliżeniu:

$$\Delta\lambda = \frac{Y}{N \cos \varphi} - \frac{Y^3}{6 N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \eta^2) + \dots$$

Podstawiamy tę wartość na $\Delta\lambda$ w wyraz drugi i trzeci wzoru (6):

$$y = N \Delta\lambda \cdot \cos \varphi + \left[\frac{Y^3}{N^3 \cos^3 \varphi} - \frac{Y^5}{2 N^5 \cos^3 \varphi} (1 - t^2 + \eta^2) \right] \frac{N}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{Y^5}{120 N^4} (5 - 18t^2 + t^4)$$

Skąd po niezłożonych przekształceniach otrzymujemy:

$$\Delta\lambda = \frac{Y}{N \cos \varphi} - \frac{Y^3}{6 N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{Y^5}{120 N^5 \cos \varphi} (5 - 2t^2 + 9t^4) \quad (11)$$

Na podstawie (11) obliczamy:

$$\Delta\lambda^3 = \frac{Y^3}{N^3 \cos^3 \varphi} - \frac{Y^4}{3 N^4 \cos^2 \varphi} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{Y^6}{36 N^6 \cos^2 \varphi} (1 - t^2) + \frac{Y^6}{60 N^6 \cos^2 \varphi} (5 - 2t^2 + 9t^4)$$

$$\Delta\lambda^4 = \frac{Y^4}{N^4 \cos^4 \varphi} - \frac{2Y^6}{3 N^6 \cos^4 \varphi} (1 - t^2)$$

$$\Delta\lambda^6 = \frac{Y^6}{N^6 \cos^6 \varphi}$$

Po podstawieniu tych wartości na miejsce $\Delta \lambda$ w odpowiednich potęgach do wzoru (5), otrzymujemy:

$$x - S = \frac{Y^2}{2N} t + \frac{Y^4}{24N^3} t (1 + 3t^2 + 5\eta^2) + \frac{Y^6}{720N^5} t (1 + 30t^2 + 45t^4) \quad (12)$$

Na długość łuku południka, odpowiadającą różnicy szerokości geograficznych $\Delta \varphi$, mamy w geodezji wzór następujący:

$$\Delta S = M \cdot \Delta \varphi + \frac{3M}{2V^2} \eta^2 t \Delta \varphi^2 + \frac{M}{2V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) \Delta \varphi^3 + \dots^1)$$

Jeśli przyjmiemy, że $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi$ (gdzie φ_1 jest szerokością geograficzną odpowiadającą długości łuku południka elipsoidy, równemu odciętej punktu w odwzorowaniu, zaś φ — poszukiwaną szerokością geograficzną punktu na elipsoidzie) wówczas oznaczając: $\Delta S = x - S$ i uwzględniając dwa pierwsze wyrazy szeregu, otrzymamy:

$$x - S = M(\varphi_1 - \varphi) + \frac{3M}{2V^2} \eta^2 t (\varphi_1 - \varphi)^2 \quad (13)$$

Z (12) i (13) rugujemy $(x - S)$, łącząc prawe ich strony znakiem równości:

$$M(\varphi_1 - \varphi) + \frac{3M}{2V^2} \eta^2 t (\varphi_1 - \varphi)^2 = \frac{Y^2}{2N} t + \frac{Y^4}{24N^3} t (1 + 3t^2 + 5\eta^2) + \frac{Y^6}{720N^5} t (1 + 30t^2 + 45t^4) \quad (13')$$

Z ostatniego otrzymujemy pierwsze przybliżenie na różnicę szerokości geograficznych $\varphi_1 - \varphi$:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{Y^2}{2MN} t + \frac{Y^4}{24MN^3} t (1 + 3t^2 + 5\eta^2) + \dots$$

skąd:

$$(\varphi_1 - \varphi)^2 = \frac{Y^4}{4M^2N^2} t^2 + \frac{Y^6}{24M^2N^4} t^2 (1 + 3t^2 + 5\eta^2) + \dots$$

¹⁾ Symbol V , ma znaczenie następujące: $V = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi$. Oznaczając $c = \frac{a^2}{b}$, można napisać: $M = \frac{c}{V^3}$ i $N = \frac{c}{V}$.

Wstawiając otrzymaną wartość do równania (13'), otrzymujemy wzór na różnicę szerokości geograficznych ($\varphi_1 - \varphi$), w postaci następującej:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi = & \frac{Y^2}{2MN} t + \frac{Y^4}{24MN^3} t(1 + 3t^2 + 5\eta^2 - 9\eta^2 t^2) + \\ & + \frac{Y^6}{720MN^5} t(1 + 30t^2 + 45t^4) \end{aligned} \quad (14)$$

Wzory (11) i (14) wymagają dalszych przekształceń, gdyż występujące w nich wyrazy są jeszcze funkcjami nieznannej szerokości geograficznej φ . Należy je wyrazić przy pomocy szerokości φ_1 , którą możemy obliczyć łatwo, mając dany łuk południka równy odciętej x punktu w odwzorowaniu.

Po wykonaniu wymienionych przekształceń, których tu podawać nie będziemy, otrzymuje się następujące wzory do obliczenia różnicy szerokości geograficznych $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ oraz różnicy długości geograficznych $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ punktu na elipsoidzie, znając współrzędne prostokątne płaskie jego obrazu i długość geograficzną południka środkowego obszaru podlegającego odwzorowaniu:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi = & \frac{Y^2}{2M_1N_1} t_1 - \frac{Y^4}{24M_1N_1^3} t_1(5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9t_1^2\eta_1^2) + \\ & + \frac{Y^6}{720M_1N_1^5} t_1(61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & \frac{Y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{Y^3}{6N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) + \\ & + \frac{Y^5}{120N_1^5 \cos \varphi_1} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4) \end{aligned} \quad (16)$$

Skąd otrzymuje się:

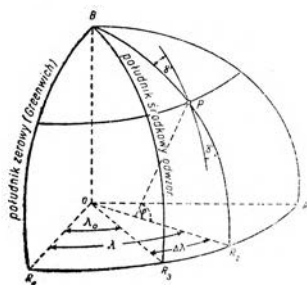
$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda \quad \text{i} \quad \varphi = \varphi_1 - \Delta\varphi$$

Do wzorów (15) i (16) odnoszą się uwagi podane w końcu § 1.

Wzory przystosowane do praktycznych prac obliczeniowych podane są w § 8, rozdz. II.

§ 3. ZBIEŻNOŚĆ POŁUDNIKÓW

1. Zbieżność południków na elipsoidzie



Rys. 4

Dany jest na elipsoidzie punkt P o współrzędnych geograficznych φ i λ . Jeśli przez punkt P poprowadzimy linię równoległą do południka środkowego odwzorowania (BR_3), utworzy ona z południkiem wymienionego punktu P kąt γ' , zwany zbieżnością południków (rys. 4).

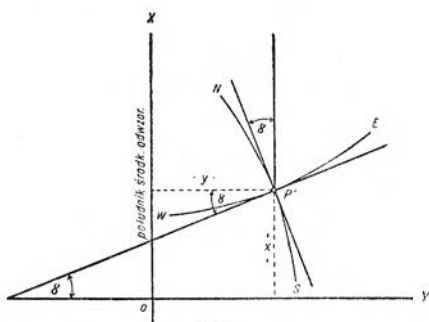
Kąt ten określa się ze znanego z geometrii wzoru:

$$\gamma' = \Delta \lambda \sin \varphi + \frac{\Delta \lambda^3}{3 \rho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\Delta \lambda^5}{15 \rho^4} \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - t^2) \quad (17)$$

w którym $\Delta \lambda$, oznacza różnicę długości geograficznych południka punktu P i południka środkowego, czyli: $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$

2. Zbieżność południków w odwzorowaniu

Jak wiemy, obrazem południka środkowego na płaszczyźnie odwzorowania XY , jest oś odciętych prostokątnego układu współrzędnych. Niech obrazem południka i równoleżnika punktu P , określonego na elipsoidzie (rys. 4) przy pomocy współrzędnych geograficznych φ i λ , będą linie



Rys. 5

krzywe $NP'S$ i $WP'E$ przecinające się, podobnie jak ich oryginały na elipsoidzie, pod kątem prostym ze względu na wiernokątność odwzorowania (rys. 5). Odpowiednikiem kąta γ' na elipsoidzie, jest kąt γ utworzony w punkcie P' przez obraz południka punktu P oraz linię prostą przechodzącą przez punkt P' równoległą do osi odciętych.

Z rys. 5 widać, że kąt γ jest równy kątowi utworzonemu przez styczną do obrazu równoleżnika w punkcie P' oraz oś rzędnych. Jeżeli znana będzie postać krzywej $WP'E$, na którą odwzoruje się równoleżnik punktu P , wówczas kąt γ określimy ze stosunku przyrostów odciętej i rzędnej w punkcie P' , a mianowicie:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d\lambda} : \frac{dy}{d\lambda} \quad (18)$$

Równania parametrowe obrazu równoleżnika na płaszczyźnie XY uzyskamy ze związków (5) i (6), podanych w § 1, przyjmując w nich szerokość geograficzną φ jako wielkość stałą.

Różniczkując zatem (5) i (6) względem zmiennego parametru λ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\lambda} &= N \Delta \lambda \cdot \sin \varphi \cos \varphi + \frac{N}{6} \Delta \lambda^3 \cdot \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\ &\quad + \frac{N}{120} \Delta \lambda^5 \cdot \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + t^4) \\ \frac{dy}{d\lambda} &= N \cos \varphi + \frac{N}{2} \Delta \lambda^2 \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \\ &\quad + \frac{N}{24} \Delta \lambda^4 \cdot \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4) \end{aligned}$$

Po podstawieniu do (18) wartości na

$$\frac{dx}{d\lambda} \text{ i } \frac{dy}{d\lambda}$$

i dokonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \Delta \lambda \sin \varphi + \frac{\Delta \lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \\ &\quad + \frac{\Delta \lambda^5}{15} \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 + 4t^2 + 2t^4) \end{aligned} \quad (19)$$

Dogodniej jest wyrazić kąt γ bezpośrednio w zależności od λ i φ , z pominięciem funkcji tangens. W tym celu na podstawie (19) obliczamy:

$$\operatorname{tg}^3 \gamma = \operatorname{tg}^3 f(\lambda, \varphi) = \Delta \lambda^3 \sin^3 \varphi + \Delta \lambda^5 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi (1 + t^2) + \dots$$

$$\operatorname{tg}^5 \gamma = \operatorname{tg}^5 f(\lambda, \varphi) = \Delta \lambda^5 \sin^5 \varphi + \dots$$

poczem otrzymane wartości wstawiamy w równanie:

$$\gamma = \arctg f(\lambda, \varphi) = \operatorname{tg} f(\lambda, \varphi) - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 f(\lambda, \varphi) + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 f(\lambda, \varphi)$$

które jest rozwinięciem w szereg Maclaurin'a, funkcji $\gamma = \arctg f(\lambda, \varphi)$. Stąd — po uporządkowaniu w zależności od potęg $\Delta\lambda$, odrzuceniu wielkości t^4 przy $\Delta\lambda^5$ i wprowadzeniu ρ'' — otrzymujemy:

$$\gamma = \Delta\lambda \cdot \sin \varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3\rho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3\gamma_1^2 + 2\gamma_1^4) + \\ + \frac{\Delta\lambda^5}{15\rho^4} \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - t^2) \quad (20)$$

W celu wyrażenia kąta γ w zależności od współrzędnych prostokątnych płaskich obrazu punktu P na płaszczyźnie XY , należy te ostatnie wprowadzić na miejsce występujących we wzorze (20) współrzędnych geograficznych φ i λ punktu P na elipsoidzie, korzystając ze wzorów (15) i (16) w § 2. Po dokonaniu podstawień i odpowiednich przekształceniach, otrzymujemy:

$$\gamma = \frac{\rho}{N_1} Y t_1 - \frac{\rho}{3N_1^3} Y^3 t_1 (1 + t_1^2 - \gamma_1^2) + \\ + \frac{\rho}{15N_1^5} Y^5 t_1 (2 + 5t_1^2 + 3t_1^4) \quad (21)$$

Wzory przystosowane do praktycznych prac obliczeniowych podane są w §§ 7 i 8.

3. Różnica zbieżności południków na elipsoidzie i w odwzorowaniu

Po odjęciu stronami równań (17) i (20) i uporządkowaniu w zależności od potęg przy $\Delta\lambda$ — otrzymujemy:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \frac{\Delta\lambda^3}{\rho^2} \gamma_1^2 (1 + \gamma_1^2) \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

ponieważ $1 + \gamma_1^2 = V^2$, więc ostatecznie:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \frac{\Delta\lambda^3}{\rho^2} \gamma_1^2 V^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (22)$$

Dla wąskich pasów południkowych, o szerokości nie przekraczającej 3° , można pominąć V^2 , które jest bardzo bliskie jedności. Uwzględniając to napiszemy:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \frac{\Delta \lambda^3}{\rho^2} \gamma^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (23)$$

Na podstawie (22) względnie (23), można obliczyć zbieżność południków na elipsoidzie, w punkcie o współrzędnych geograficznych φ i λ , o ile znana jest zbieżność południków w odwzorowaniu i odwrotnie.

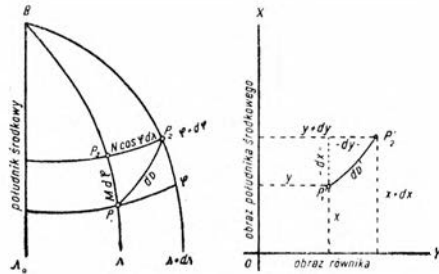
§ 4. SKALE I ZNIEKSZTAŁCENIA ODWZOROWAWCZE

1. Skale i zniekształcenia liniowe jako funkcje współrzędnych geograficznych φ i λ punktu na elipsoidzie

Stosunek elementu liniowego, w dowolnym punkcie odwzorowania, do odpowiadającego mu elementu liniowego w oryginale, nazywamy skalą liniową odwzorowania. Odchylenie wymienionej skali od jedności, nazywamy zniekształceniem liniowym odwzorowania.

Oznaczając dowolnie mały przyrost linii geodezyjnej na elipsoidzie symbolem dD , jego obraz na płaszczyźnie XY symbolem dD' (rys. 6), skalę liniową w kierunku P_1P_2 symbolem m — napiszemy:

$$m = \frac{dD'}{dD}$$



Rys. 6

z dowolnie małego trójkąta prostokątnego $P_1P_3P_2$, w którym bok P_1P_3 jest przyrostem łuku południka odpowiadającym przyrostowi $d\varphi$ szerokości geograficznej φ , zaś P_3P_2 jest przyrostem łuku równoleżnika odpowiadającym przyrostowi $d\lambda$ długości geograficznej λ punktu P — otrzymujemy:

$$(dD)^2 = (M d\varphi)^2 + (N \cos \varphi \cdot d\lambda)^2$$

Obraz elementu linii geodezyjnej na płaszczyźnie XY , można określić jako:

$$(dD')^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Uwzględniając to napiszemy:

$$m^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(M d\varphi)^2 + (N \cos \varphi d\lambda)^2} = \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}{N^2 \cos^2 \varphi \left[1 + \left(\frac{M \cdot d\varphi}{N \cos \varphi d\lambda} \right)^2 \right]}$$

ponieważ: $\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \gamma$ stąd: $1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma = \sec^2 \gamma$

" $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ " $\frac{M d\varphi}{N \cos \varphi d\lambda} = 0$

więc otrzymujemy:

$$m = \frac{dy}{d\lambda} \cdot \frac{\sec \gamma}{N \cos \varphi}$$

Po podstawieniu wartości

$$\frac{dy}{d\lambda}$$

z paragrafu poprzedniego oraz po uwzględnieniu na podstawie (20), że:

$$\sec \gamma = 1 + \frac{1}{2} \gamma^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2} \Delta \lambda^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{24} \Delta \lambda^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (8 + 5 t^2)$$

otrzymujemy następujący wzór do obliczenia skali liniowej m , w obrazie punktu określonego na elipsoidzie przy pomocy współrzędnych geograficznych φ i λ :

$$m = 1 + \frac{\Delta \lambda^2}{2 \rho^2} \cos^2 \varphi (1 + \gamma^2) + \frac{\Delta \lambda^4}{24 \rho^4} \cos^4 \varphi (5 - 4 t^2) \quad (24)$$

We wszystkich kierunkach w otoczeniu obrazu punktu P , skale liniowe mają te same wartości, gdyż pod tym warunkiem odwzorowaliśmy powierzchnię elipsoidy na płaszczyznę XY .

Ze wzoru ostatniego widać, że dla małych $\Delta\lambda$ wyrazy szeregu szybko dążą do zera, a wielkość skali do jedności. Wyciągamy stąd wniosek, że rozpatrywane odwzorowanie bardzo dobrze nadaje się dla wąskich pasów południkowych. Jeśli odwzorowywany obszar jest duży, dzieli się go zazwyczaj na kilka lub większą ilość pasów południkowych, poczem każdy z takich pasów odwzorowuje się osobno. Otrzymuje się w tym wypadku tyle niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich, na ile pasów południkowych został podzielony odwzorowywany obszar.

Analizując wzór (24) dochodzimy ponadto do wniosku, że wielkości skal liniowych są wprost proporcjonalne do różnicy długości geograficznych $\Delta\lambda$ i odwrotnie proporcjonalne do szerokości geograficznej φ .

2. Skale i zniekształcenia pól jako funkcje współrzędnych φ i λ punktu na elipsoidzie

Stosunek elementu pola w dowolnym punkcie odwzorowania, do odpowiadającego mu elementu pola w oryginale, nazywamy skalą pól. Odchylenie wymienionej skali od jedności nazywamy zniekształceniem pól. Oznaczając element pola w odwzorowaniu symbolem dP' ; odpowiadający zaś mu element pola na elipsoidzie symbolem dP ; skalę pól — symbolem p , napiszemy:

$$p = \frac{dP'}{dP}$$

Jak wiadomo z kartografii, skalę pól można obliczyć tworząc iloczyn skal liniowych w kierunkach głównych. Ponieważ w rozpatrywanym odwzorowaniu skale liniowe w kierunkach głównych, jak również w dowolnym kierunku w otoczeniu danego punktu odwzorowania, są sobie równe, więc uwzględniając (24) otrzymujemy:

$$p = m^2 = 1 + \frac{\Delta\lambda^2}{\rho^2} \cos^2\varphi (1 + \tau_1^2) + \frac{\Delta\lambda^4}{3\rho^4} \cos^4\varphi (2 - t^2) \quad (25)$$

Uwagi dotyczące zmiany skali pól, w zależności od zmiany współrzędnych geograficznych φ i λ , są analogiczne do podanych przy analizie wzoru na obliczenie skal liniowych.

3. Skale liniowe jako funkcje współrzędnych prostokątnych płaskich punktu w odwzorowaniu

Aby wyrazić skalę liniową w zależności od współrzędnych prostokątnych płaskich x i y punktu w odwzorowaniu, należy do wzoru (24) na miejsce $\Delta\lambda$, w odpowiednich potęgach, wprowadzić wartości:

$$\Delta\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^4}{3N^4 \cos^2 \varphi} (1 - t^2 + \gamma_1^2) + \dots$$

$$\Delta\lambda^4 = \frac{y^4}{N^4 \cos^4 \varphi} - \dots$$

podane w § 2, na str. 9. Po wykonaniu prostych przekształceń i odrzuceniu wielkości nie mających wpływu na dokładność wyniku, otrzymujemy:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2N^2} (1 + \gamma_1^2) + \frac{y^4}{24N^4} (1 + \gamma_1^2)^2 \quad (26)$$

Po wprowadzeniu średniego promienia krzywizny:

$$r = \sqrt{M \cdot N}$$

rozpatrywanego punktu elipsoidy, o szerokości geograficznej φ , oraz uwzględnieniu, że:

$$1 + \gamma_1^2 = V^2 = \frac{N}{M},$$

wzór do obliczenia skali liniowej m można napisać w formie następującej:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{y^4}{24r^4} \quad (27)$$

lub:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r_1^2} + \frac{y^4}{24r_1^4} \quad (28)$$

dla średniego promienia krzywizny: $r_1 = \sqrt{M_1 \cdot N_1}$, odpowiadającego szerokości φ_1 .

Wzory przystosowane do rachunków praktycznych, podane są w §§ 7 i 8. Wielkości skal pól, otrzymuje się po obliczeniu wielkości skal liniowych — podnosząc je do drugiej potęgi.

4. Tabele wielkości skal liniowych i pól oraz zniekształceń, dla obszaru Polski

Skale i zniekształcenia podane w tabelach, obliczone zostały dla punktów węzłowych siatki w odstępach 1° -ych. Przyjęto jeden pas południkowy z południkiem środkowym obszaru Polski: $\lambda_0 = +19^\circ$.

Tabela 1. Wielkości skal liniowych

$\varphi \backslash \lambda$	14^0	15^0	16^0	17^0	18^0	19^0	20^0	21^0	22^0	23^0	24^0
49^0	1,001 644	1,001 052	1,000 592	1,000 263	1,000 066	1,000 000	1,000 066	1,000 263	1,000 592	1,001 052	1,001 644
50^0	1,001 578	1,001 010	1,000 568	1,000 252	1,000 063	1,000 000	1,000 063	1,000 252	1,000 568	1,001 010	1,001 578
51^0	1,001 512	1,000 968	1,000 544	1,000 242	1,000 060	1,000 000	1,000 060	1,000 242	1,000 544	1,000 968	1,001 512
52^0	1,001 446	1,000 926	1,000 521	1,000 232	1,000 058	1,000 000	1,000 058	1,000 232	1,000 521	1,000 926	1,001 446
53^0	1,001 381	1,000 885	1,000 498	1,000 221	1,000 055	1,000 000	1,000 055	1,000 221	1,000 498	1,000 885	1,001 381
54^0	1,001 318	1,000 844	1,000 475	1,000 211	1,000 053	1,000 000	1,000 053	1,000 211	1,000 475	1,000 844	1,001 318
55^0	1,001 254	1,000 804	1,000 452	1,000 201	1,000 050	1,000 000	1,000 050	1,000 201	1,000 452	1,000 804	1,001 254

Tabela 2. Wielkości zniekształceń liniowych

$\varphi \backslash \lambda$	14^0	15^0	16^0	17^0	18^0	19^0	20^0	21^0	22^0	23^0	24^0
49^0	0,001 644	0,001 052	0,000 592	0,000 263	0,000 066	0,000 000	0,000 066	0,000 263	0,000 592	0,001 052	0,001 644
50^0	0,001 578	0,001 010	0,000 568	0,000 252	0,000 063	0,000 000	0,000 063	0,000 252	0,000 568	0,001 010	0,001 578
51^0	0,001 512	0,000 968	0,000 544	0,000 242	0,000 060	0,000 000	0,000 060	0,000 242	0,000 544	0,000 968	0,001 512
52^0	0,001 446	0,000 926	0,000 521	0,000 232	0,000 058	0,000 000	0,000 058	0,000 232	0,000 521	0,000 926	0,001 446
53^0	0,001 381	0,000 885	0,000 498	0,000 221	0,000 055	0,000 000	0,000 055	0,000 221	0,000 498	0,000 885	0,001 381
54^0	0,001 318	0,000 844	0,000 475	0,000 211	0,000 053	0,000 000	0,000 053	0,000 211	0,000 475	0,000 844	0,001 318
55^0	0,001 254	0,000 804	0,000 452	0,000 201	0,000 050	0,000 000	0,000 050	0,000 201	0,000 452	0,000 804	0,001 254

Tabela 3. Wielkości skal pól

$\varphi \backslash \lambda$	14^0	15^0	16^0	17^0	18^0	19^0	20^0	21^0	22^0	23^0	24^0
49^0	1,003 291	1,002 105	1,001 184	1,000 526	1,000 132	1,000 000	1,000 132	1,000 526	1,001 184	1,002 105	1,003 291
50^0	1,003 158	1,002 021	1,001 136	1,000 504	1,000 126	1,000 000	1,000 126	1,000 504	1,001 136	1,002 021	1,003 158
51^0	1,003 026	1,001 937	1,001 088	1,000 484	1,000 120	1,000 000	1,000 120	1,000 484	1,001 088	1,001 937	1,003 026
52^0	1,002 894	1,001 853	1,001 042	1,000 464	1,000 116	1,000 000	1,000 116	1,000 464	1,001 042	1,001 853	1,002 894
53^0	1,002 764	1,001 771	1,000 996	1,000 442	1,000 110	1,000 000	1,000 110	1,000 442	1,000 996	1,001 771	1,002 764
54^0	1,002 638	1,001 689	1,000 950	1,000 422	1,000 106	1,000 000	1,000 106	1,000 422	1,000 950	1,001 689	1,002 638
55^0	1,002 510	1,001 609	1,000 904	1,000 402	1,000 100	1,000 000	1,000 100	1,000 402	1,000 904	1,001 609	1,002 510

Tabela 4. Wielkości zniekształceń pól

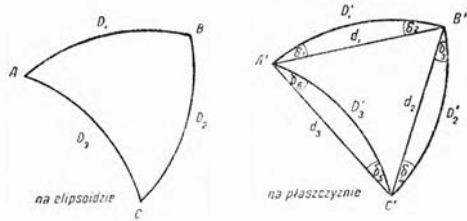
$\varphi \backslash \lambda$	14^0	15^0	16^0	17^0	18^0	19^0	20^0	21^0	22^0	23^0	24^0
49^0	0,003 291	0,002 105	0,001 184	0,000 526	0,000 132	0,000 000	0,000 132	0,000 526	0,001 184	0,002 105	0,003 291
50^0	0,003 158	0,002 021	0,001 136	0,000 504	0,000 126	0,000 000	0,000 126	0,000 504	0,001 136	0,002 021	0,003 158
51^0	0,003 026	0,001 937	0,001 088	0,000 484	0,000 120	0,000 000	0,000 120	0,000 484	0,001 088	0,001 937	0,003 026
52^0	0,002 894	0,001 853	0,001 042	0,000 464	0,000 116	0,000 000	0,000 116	0,000 464	0,001 042	0,001 853	0,002 894
53^0	0,002 764	0,001 771	0,000 996	0,000 442	0,000 110	0,000 000	0,000 110	0,000 442	0,000 996	0,001 771	0,002 764
54^0	0,002 638	0,001 689	0,000 950	0,000 422	0,000 106	0,000 000	0,000 106	0,000 422	0,000 950	0,001 689	0,002 638
55^0	0,002 510	0,001 609	0,000 904	0,000 402	0,000 100	0,000 000	0,000 100	0,000 402	0,000 904	0,001 609	0,002 510

Jak widać z podanych tabel, skale liniowe i pól w południku środkowym odwzorowania są równe jedności, a zniekształcenia liniowe i pól są równe zeru. W miarę oddalania się od południka środkowego, skale i zniekształcenia wzrastają osiągając wartości maksymalne w punktach przecięć południków skrajnych ($\lambda_W = 14^0$ i $\lambda_E = 24^0$) z równoleżnikiem skrajnym południowym ($\varphi_S = 49^0$).

§ 5. REDUKCJE ODWZOROWAWCZE

Odwzorowując wierzchołki trójkąta sferoidalnego na płaszczyznę i łącząc obrazy tych wierzchołków liniami prostymi, otrzymamy trójkąt płaski, którego kąty i boki nie są równe odpowiednim kątom i bokom wymienionego trójkąta sferoidalnego na elipsoidzie (rys. 7).

Różnice pomiędzy kątami utworzonymi przez boki trójkąta prostoliniowego płaskiego i kątami trójkąta sferoidalnego na elipsoidzie, noszą nazwę redukcji kątowych (analogicznie w odniesieniu do kierunków, otrzymujemy redukcje kierunków). Stosunek



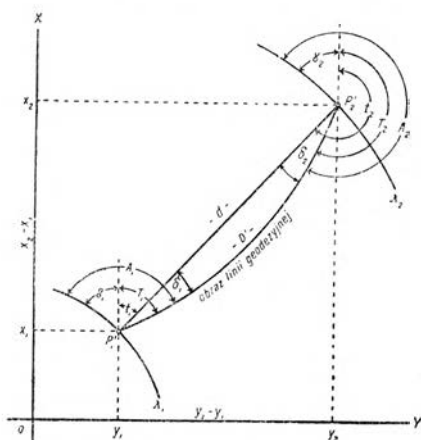
Rys 7

długości boku trójkąta płaskiego prostoliniowego, do odpowiedniego boku trójkąta sferoidalnego na elipsoidzie, nosi nazwę redukcji długości. W nowszej literaturze kartograficznej spotykamy się również z określeniem wymienionego stosunku jako quasi-skali geodezyjnej (liniowej); odchylenie zaś od jedności wymienionej skali — nazywa się redukcją długości. Ze względu na charakter niniejszej pracy, nie będziemy poddawać rozważaniom słuszności wymienionych definicji, poprzestając na stwierdzeniu faktu.

Wprowadzając do obliczeń geodezyjnych redukcje kątów i boków, można łatwo przejść od kątów i boków trójkąta sferoidalnego na elipsoidzie (pomiar w terenie), do kątów i boków trójkąta płaskiego prostoliniowego w odwzorowaniu i odwrotnie.

Jeśli boki trójkąta są odpowiednio małe, wymienione redukcje nie odgrywają roli praktycznej i mogą być zaniedbane bez wpływu na wymaganą dokładność obliczeń.

1. Redukcja wielkości kątowych



Rys. 8

Wyobraźmy sobie na płaszczyźnie XY obraz linii geodezyjnej, łączącej dane na powierzchni elipsoidy, dwa punkty pomiarowe P_1 i P_2 . Punktom P_1 i P_2 odpowiadają na płaszczyźnie odwzorowania punkty P_1' i P_2' o współrzędnych odpowiednio równych x_1 i y_1 oraz x_2 i y_2 (rys. 8).

Długość linii geodezyjnej na elipsoidzie oznaczamy symbolem D . Płaski obraz linii geodezyjnej w odwzorowaniu oznaczamy symbolem D' . Długość prostej łączącej punkty P_1' i P_2' — symbolem d . Wpro-

wadzamy z kolei następujące oznaczenia dla kątów kierunkowych powstających w punktach P_1' i P_2' :

symbolem γ_1	oznaczamy	zbieżność	południków	w	punkcie	P_1'
" γ_2	"	"	"	"	"	P_2'
" A_1	"	azymut geograf.	obrazu linii geodez.	w punkcie	P_1'	
" A_2	"	"	"	"	"	P_2'
" T_1	"	kąt kierunkowy	"	"	"	P_1'
" T_2	"	"	"	"	"	P_2'
" t_1	"	"	prostej łączącej p.	P_1' i P_2'	"	P_1'
" t_2	"	"	"	"	"	P_2'
" δ_1	"	redukcję kąta kierunkowego	"	"	"	P_1'
" δ_2	"	"	"	"	"	P_2'

Dzięki wiernokątności odwzorowania, azymut geograficzny obrazu linii geodezyjnej na płaszczyźnie, jest równy azymutowi geograficznemu linii geodezyjnej na elipsoidzie. Pozwala to na obliczenie kątów kierunkowych obrazu linii geodezyjnej i prostej, na podstawie azymutu geograficznego linii geodezyjnej na elipsoidzie i odwrotnie, o ile tylko dane są: zbieżność południków γ i redukcja kierunku δ .

Na podstawie rys. 8, łatwo podać następujące zależności pomiędzy wymienionymi wyżej kątami:

Dla punktu P_1'	Dla punktu P_2'
$\left. \begin{array}{l} 1. \quad A_1 - T_1 = \gamma_1 \\ \quad A_1 = T_1 + \gamma_1 \\ \quad T_1 = A_1 - \gamma_1 \\ 2. \quad T_1 - t_1 = \delta_1 \\ \quad T_1 = t_1 + \delta_1 \\ \quad t_1 = T_1 - \delta_1 \\ 3. \quad A_1 - \gamma_1 = t_1 + \delta_1 \\ \quad A_1 = t_1 + \gamma_1 + \delta_1 \\ \quad t_1 = A_1 - (\gamma_1 + \delta_1) \end{array} \right\} (29)$	$\left. \begin{array}{l} 1. \quad A_2 - T_2 = \gamma_2 \\ \quad A_2 = T_2 + \gamma_2 \\ \quad T_2 = A_2 - \gamma_2 \\ 2. \quad t_2 - T_2 = \delta_2 \\ \quad T_2 = t_2 - \delta_2 \\ \quad t_2 = T_2 + \delta_2 \\ 3. \quad A_2 - \gamma_2 = t_2 - \delta_2 \\ \quad A_2 = t_2 + \gamma_2 - \delta_2 \\ \quad t_2 = A_2 - (\gamma_2 - \delta_2) \end{array} \right\} (30)$

Wzory do obliczenia redukcji kierunków w punktach P_1' i P_2' , na podstawie współrzędnych prostokątnych płaskich tych punktów, mają postać następującą:

$$\delta_1 = \frac{\rho}{6 r_m^2} (x_2 - x_1) (2 y_1 + y_2) + \frac{\rho}{3 r^3} \eta^2 t (x_2 - x_1)^2 y_1 + \frac{\rho}{6 r^3} \eta^2 t (y_2 - y_1) (3 y_1^2 + 2 y_1 y_2 + y_2^2) \quad (31)$$

$$\delta_2 = \frac{\rho}{6 r_m^2} (x_2 - x_1) (y_1 + 2 y_2) - \frac{\rho}{3 r^3} \eta^2 t (x_2 - x_1)^2 y_2 + \frac{\rho}{6 r^3} \eta^2 t (y_2 - y_1) (y_1^2 + 2 y_1 y_2 + 3 y_2^2) \quad (32)$$

Przyczym r , η i t , odpowiadają średniej szerokości φ_m , obliczonej dla średniej odciętej $x_m = 1/2(x_1 + x_2)$.

Ponieważ drugie i trzecie wyrazy wzorów (31) i (32) są bardzo małe (nie przewyższają 0,0001, dla $D = 50$ km i nawet dla pasa 4-0 stopniowego), wobec tego dla celów praktycznych najzupełniej wystarczy ograniczyć się do pierwszych wyrazów wymienionych wzorów podstawiając w nich na miejsce średniego promienia r_m promień r_0 , odpowiadający środkowemu równoleżnikowi obszaru Polski — $\varphi_0 = 52^\circ$:

$$\delta_1 = \frac{\rho}{6 r_0^2} (x_2 - x_1) (2 y_1 + y_2) \quad (32)$$

$$\delta_2 = \frac{\rho}{6 r_0^2} (x_2 - x_1) (y_1 + 2 y_2) \quad (33)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych na miejsce ρ i r_0 (dla r_0 , x_1 , x_2 , y_1 i y_2 , wyrażonych w km) — otrzymujemy:

$$\delta_1'' = 0,000\ 843\ 9 (x_2 - x_1) (2 y_1 + y_2) \quad (34)$$

$$\delta_2'' = 0,000\ 843\ 9 (x_2 - x_1) (y_1 + 2 y_2) \quad (35)$$

2. Redukcja wielkości liniowych

Oznaczając długość linii geodezyjnej łączącej dwa punkty pomiarowe na elipsoidzie symbolem D , długość zaś linii prostej łączącej obrazy tych punktów na płaszczyźnie odwzorowania XY symbolem d (zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w części pierwszej § 5), do obliczenia stosunku tych wielkości mamy w geodezji wzór następujący:

$$\frac{d}{D} = 1 + \frac{1}{6 r_m^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\gamma_1^2 t}{6 r_m^3} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2) \quad (36)$$

Ponieważ wyraz trzeci wzoru ostatniego jest wielkością bardzo małą, można go odrzucić bez obawy obniżenia dokładności obliczeń nawet przy redukcji boków triangulacji pierwszego rzędu. Następnie z tych samych względów, można średni promień r_m odpowiadający średniej odciętej $x_m = 1/2 (x_1 + x_2)$, zastąpić promieniem r_0 odpowiadającym średniemu równoleżnikowi obszaru Polski — $\varphi_0 = 52^\circ$. Otrzymamy wówczas:

$$\frac{d}{D} = 1 + \frac{1}{6 r_0^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \quad (37)$$

Po podstawieniu wartości liczbowej na r_0 (dla r_0 , y_1 i y_2 , wyrażonych w km), otrzymujemy następujące wzory redukcyjne do obliczenia długości d , mając daną długość D i odwrotnie:

$$d = D [1 + 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)] \quad (38)$$

$$D = d [1 - 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)] \quad (39)$$

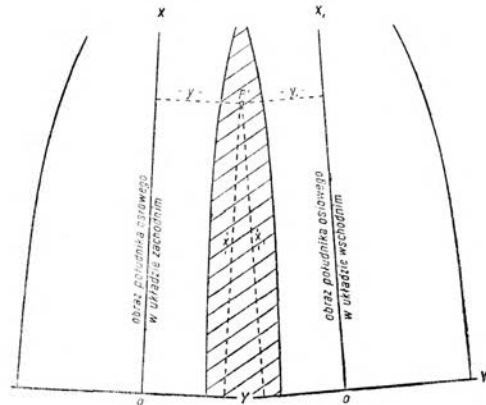
Przy nieco mniejszych normach dokładności, można wzory (38) i (39) jeszcze bardziej uprościć wprowadzając na miejsce rzędnych y_1 i y_2 , rzędną środka linii d , wyrażając ją tak samo w km. Oznaczając tę rzędną symbolem y_s , otrzymujemy:

$$d = D (1 + 0,000\ 000\ 012\ 3 \cdot y_s^2) \quad (40)$$

$$D = d (1 - 0,000\ 000\ 012\ 3 \cdot y_s^2) \quad (41)$$

§ 6. WSPÓŁRZĘDNE PROSTOKĄTNE PŁASKIE PUNKTU, W DWÓCH SĄSIEDNICH UKŁADACH GAUSSA-KRÜGERA

Jak wiemy już, w celu zmniejszenia wielkości zniekształceń i redukcji odwzorowawczych, jakie występują w odwzorowaniu Gaussa-Krügera, obszar podlegający odwzorowaniu dzieli się na kilka (Niemcy, Polska), lub na kilkadziesiąt (Związek Radziecki), wąskich pasów południkowych, z których każdy odwzorowuje się osobno. Otrzymuje się wówczas tyle niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich, na ile pasów został podzielony podlegający odwzorowaniu obszar. Ze względów praktycznych, sąsiednie pasy południkowe, do których się odnoszą niezależne układy współrzędnych prostokątnych płaskich, częściowo na siebie zachodzą (rys. 9). Punkty pomiarowe znajdujące się w obszarze wzajemnego pokrycia się pasów, otrzymują współrzędne prostokątne płaskie w odniesieniu do obu układów. W praktyce pomiarowej spotykamy się z zagadnieniem przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich, wymienionych wyżej punktów, z jednego układu na drugi. Zadanie to można rozwiązać w dowolny sposób, a mianowicie:



Rys. 9

1. Mając dane współrzędne prostokątne x i y punktu P' w układzie zachodnim, obliczamy na ich podstawie współrzędne geograficzne φ i λ , odpowiadającego wymienionemu punktowi, punktu P na elipsoidzie; poczem na podstawie otrzymanych w ten sposób współrzędnych geograficznych, obliczamy współrzędne prostokątne płaskie x_1 i y_1 punktu P' w układzie wschodnim. Przeliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich z układu wschodniego na zachodni, można wykonać w sposób analogiczny.

2. Mając dane współrzędne prostokątne płaskie x i y punktu P' w układzie zachodnim, przeliczamy je bezpośrednio na współrzędne prostokątne x_1 i y_1 w układzie wschodnim i odwrotnie.

Metoda pierwsza nie wymaga omówień, gdyż nie wprowadzamy tu nowych wzorów; wypada jedynie nadmienić, że w praktyce nie znalazła ona zastosowania, ponieważ wymaga podwójnego przeliczenia współrzędnych punktu, a mianowicie: danych współrzędnych w jednym z układów na współrzędne geograficzne, następnie współrzędnych geograficznych na prostokątne w drugim układzie. Z wymienionych względów stosuje się dotychczas przeważnie sposób bezpośredniego przeliczania współrzędnych prostokątnych punktu, z jednego układu na drugi. Wzory służące do przeliczania bezpośredniego współrzędnych prostokątnych x i y punktu P' w układzie zachodnim, na współrzędne prostokątne x_1 i y_1 tegoż punktu w układzie wschodnim, mają postać następującą:

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 + \Delta x - (1 - \cos 2 \gamma_0) \Delta x - \sin 2 \gamma_0 \cdot \Delta y + \\ + s_2 r^2 \cos (2 v + u_2) + s_3 r^3 \cos (3 v + u_3) \\ y_1 = -y_0 + \Delta y + \sin 2 \gamma_0 \Delta x - (1 - \cos 2 \gamma_0) \Delta y + \\ + s_2 r^2 \sin (2 v + u_2) + s_3 r^3 \sin (3 v + u_3) \end{aligned} \quad (42)$$

W wypadku przeliczania współrzędnych x_1 i y_1 , danych w układzie wschodnim, na współrzędne x i y w układzie zachodnim, wzory podane wyżej pozostają w mocy, należy jedynie odwrócić znaki: rzędnej y_0 , współczynnika $\sin 2 \gamma_0$ oraz kątów pomocniczych u_2 i u_3 .

Szczegółowe omówienie znaczenia symboli oraz przykład zastosowania praktycznego wzorów (42), podane są w § 11.

Jeśli ograniczymy dokładność obliczenia współrzędnych prostokątnych płaskich do dwóch znaków po przecinku (to jest do całkowitych centymetrów), wówczas wzory (42) mogą ulec uproszczeniu przez odrzucenie w nich dwóch ostatnich wyrazów nieprzekraczających, dla pasów 3-y stopniowych, wielkości rzędu 1 mm. Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 + \Delta x - (1 - \cos 2 \gamma_0) \Delta x - \sin 2 \gamma_0 \cdot \Delta y + s_2 r^2 \cos (2 v + u_2) \\ y_1 = -y_0 + \Delta y + \sin 2 \gamma_0 \cdot \Delta x - (1 - \cos 2 \gamma_0) \Delta y + s_2 r^2 \sin (2 v + u_2) \end{aligned} \quad (43)$$

R O Z D Z I A Ł II

ZESTAWIENIE WZORÓW I PRZYKŁADY OBLICZEŃ

**§ 7. OBLICZENIE WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH
PŁASKICH x i y , SKALI LINIOWEJ I ZBIEŻNOŚCI POŁUDNIKÓW
W OBRAZIE PUNKTU OKREŚLONEGO NA ELIPSOIDZIE PRZY
POMOCY WSPÓŁRZĘDNYCH GEOGRAFICZNYCH φ i λ**

1. Wzory Krügera przystosowane do rachunku logarytmicznego

$$\log (x - S) = \log \frac{N}{2 \rho^2} \Delta \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1^u}{2 \rho^2} \Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi - \frac{1^u}{12 \rho^2} \Delta \lambda^2 + \frac{9}{2} v'$$

$$\log y = \log \frac{N}{\rho} \Delta \lambda \cos \varphi + \frac{1^u}{3 \rho^2} \Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi - \frac{1^u}{6 \rho^2} \Delta \lambda^2 + v' - \kappa' \Delta \lambda^4$$

$$\log m = \frac{1^u}{2 \rho^2} \Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi + 3 v'$$

$$\log \gamma = \log \Delta \lambda \sin \varphi + \frac{1^u}{3 \rho^2} \Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi + 6 v'$$

Występujące w powyższych wzorach wielkości pomocnicze v' i κ' , oblicza się ze wzorów:

$$v' = \frac{1^u}{6 \rho^2} \eta^2 \Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi = [3,05810] \Delta \lambda^2 \cos^4 \varphi$$

$$\kappa' = \frac{1^u}{180 \rho^4} \cos^4 \varphi (t^4 + 22 t^2 - 5) = [3,12481] (1 + 20 \cos^2 \varphi - 26 \cos^4 \varphi)$$

Wielkość pomocniczą κ' można wziąć z tabel zawierających $\log \kappa'$, obliczony dla szerokości geograficznej φ jako argumentu.

Z N A C Z E N I E S Y M B O L I

- φ i λ — dane współrzędne geograficzne punktu na elipsoidzie.
- $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ — różnica długości geograficznych, południka punktu podlegającego odwzorowaniu i południka środkowego (danego pasa).
- x i y — poszukiwane współrzędne prostokątne płaskie obrazu punktu, podlegającego odwzorowaniu, na płaszczyźnie XY (odniesione do obrazu równika i południka środkowego).
- m — skala liniowa w obrazie punktu, podlegającego odwzorowaniu, na płaszczyźnie XY .
- γ — zbieżność południków w obrazie punktu, podlegającego odwzorowaniu, na płaszczyźnie XY .
- N — promień krzywizny przekroju poprzecznego w punkcie o szerokości geograficznej φ .
- $\log \frac{N}{\rho}$ — najdogodniej obliczyć drogą interpolacji, z tabel zawierających logarytmy promieni krzywizny lub ich odwrotności (z uwzględnieniem ρ''), dla szerokości geograficznej φ jako argumentu.
- S — długość łuku południkowego, od równika do równoleżnika o szerokości geograficznej φ . Wielkość tę bierze się z tabel, dla szerokości geograficznej φ jako argumentu.

(Wymienione tabele znajdzie czytelnik w dziele Jordana p. t. „Handbuch der Vermessungskunde“, część III).

Logarytmy współczynników stałych, występujących w podanych wyżej wzorach, mają wartości następujące:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{2\rho} &= 4,384\ 544\ 8.7 & \log \frac{1''}{2\rho^2} &= 5,707\ 90 & \log \frac{1''}{12\rho^2} &= 4,929\ 75 \\ \log \frac{1''}{3\rho^2} &= 5,531\ 81 & \log \frac{1''}{6\rho^2} &= 5,230\ 78 & \log \frac{1''}{2\rho^2} &= 8,707\ 90 \end{aligned}$$

PRZYKŁAD

Dane: $\varphi = 52^{\circ} 30' 20'', 4255$ $\lambda = 21^{\circ} 15' 12'', 3545$ $\lambda_0 = 21^{\circ}$ czyli $\Delta\lambda = 912'', 3545$ Poszukiwane: współrzędne x i y skala liniowa m zbieżność połudn. γ

$\log(N:\rho)$	1,491 132 6	1,479 895 4	$\log(N:\rho)$	1,491 132 6
$\log(1:2\rho)$	4,384 544 9	+ 16	$\log\Delta\lambda$	2,960 163 6
$\log\Delta\lambda^2$	5,920 327 2	- 7	$\log\cos\varphi$	9,784 391 0
$\log\sin\varphi$	9,899 499 7	+ 0		
$\log\cos\varphi$	9,784 391 0	$\log(x-S) = 1,479 896 3$		4,235 687 2
	1,479 895 4		$\mu:3\rho^2$	5,531 81
$\mu:2\rho^2$	5,707 90	$x-S = +30,192m$	$\Delta\lambda^2$	5,920 33
$\Delta\lambda^2$	5,920 33	$S = 5819011,626m$	$\cos^2\varphi$	9,568 78
$\cos^2\varphi$	9,568 78			1,020 92
	1,197 01	$x = 5819041,818m$		+ 10,49
	+ 15,7		$-(\mu:6\rho^2)$	5,230 78 _n
$-(\mu:12\rho^2)$	4,929 75 _n		$\Delta\lambda^2$	5,920 33
$\Delta\lambda^2$	5,920 33			1,151 11 _n
	0,850 08 _n	4,235 687 2		- 14,16
	- 7,1	+ 10,5		
		- 14,2	v'	+ 0,01
$\Delta\lambda^2$	3,058 1	+ 0,0		
$\cos^4\varphi$	5,920 3	- 0,0	z'	3,809 7 _n
	9,137 6		$\Delta\lambda^4$	1,840 7
	8,116 0	$\log y = 4,235 686 8,9$		5,650 4 _n
v'	+ 0,013	$y = + 17 206,276 m$		- 0,00
$9/2 v'$	+ 0,1			

$\mu:2\rho^2$	8,707 90	$\log\Delta\lambda$	2,960 163 6
$\Delta\lambda^2$	5,920 33	$\log\sin\varphi$	9,899 499 7
$\cos^2\varphi$	9,568 78		2,859 663 3
	4,197 01	$\frac{\mu}{3\rho^2}\Delta\lambda^2\cos^2\varphi$	+ 10
	0,0000015,7		+ 0
$3 v'$	+ 0,0	$6 v'$	
$\log m$	0,0000015,7	$\log\gamma$	2,859 664 3
$m = 1,000 003 6$		$\gamma = 723'', 876$	
		$\gamma = + 0^{\circ} 12' 3'', 876$	

2. Wzory Boltza przystosowane do rachunku maszynowego

Bardzo dogodne wzory do obliczania współrzędnych prostokątnych płaskich x i y punktu w odwzorowaniu, skali liniowej m oraz zbieżności południków γ , na podstawie danych współrzędnych geograficznych φ i λ punktu na elipsoidzie (przystosowane do rachunku maszynowego), podane są w dziełku H. Boltza, p. t. „Formeln und Tafeln zur numerischen (nicht logarithmischen) Berechnung Gauss-Krügerscher Koordinaten aus den geographischen Koordinaten”. — Wydanie Geodezyjnego Instytutu w Poczdamie. Rok 1943.

Wymienione wzory mają postać następującą:

$$y = r_1 \Delta \lambda + r_2 \Delta \lambda^3 + r_3 \Delta \lambda^5$$

$$x = h_0 + h_1 \Delta \lambda^2 + h_2 \Delta \lambda^4$$

$$\gamma = n_1 \Delta \lambda + n_2 \Delta \lambda^3$$

$$m = 1 + M_1 \Delta \lambda^2 + M_2 \Delta \lambda^4$$

Przyczym:

x i y — są to współrzędne prostokątne płaskie, punktu w odwzorowaniu, odniesione do obrazu równika i południka środkowego

φ i λ — współrzędne geograficzne punktu podlegającego odwzorowaniu

λ — długość geograficzna południka środkowego (danego pasa)

$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ — różnica wymienionych długości geograficznych wyrażona w stopniach

h_0 — długość łuku południkowego, od równika do równoleżnika o szerokości geograficznej φ . Wielkość tę bierze się z tablic pomocniczych, podanych w wymienionym wyżej dziełku Boltza.

γ — zbieżność południków w obrazie punktu na płaszczyźnie XY .

m — skala liniowa w obrazie punktu na płaszczyźnie XY .

r_1 r_2 r_3 h_1 h_2 n_1 n_2 M_1 M_2	}	są to współczynniki, które otrzymuje się drogą interpolacji, dla szerokości geograficznej φ jako argumentu, z tablic pomocniczych Boltza. Dokładność obliczenia tych współczynników uzależniona jest od wymaganej dokładności obliczenia współrzędnych prostokątnych płaskich x i y, zbieżności południków γ oraz skali liniowej m.
---	---	--

P R Z Y K Ł A D

Dane: $\varphi = 52^{\circ} 30' 20'', 4255$ $\lambda = 21^{\circ} 15' 12'', 3545$ $\lambda_0 = 21^{\circ}$ Poszukiwane: współrzędne x i y skala liniowa m zbieżność połudn. γ

$\varphi = 52^{\circ} 30' 20'', 4255$				$\lambda = 21^{\circ} 15' 12'', 3545$			
$\Delta \lambda = 0^{\circ} 15' 12'', 3545 = 0,2534318$				$\Delta \lambda^2 = 0,064228$			
$\Delta \lambda^3 = 0,0163$				$\Delta \lambda^4 = 0,004$			
$\Delta \lambda^5 = 0,001$				$\Delta \lambda^6 = 0,001$			
y		x		γ		m	
r_1	+67 893,185	h_1	+ 470,082	n_1	2856,290	M_1	+0,00005657
r_2	— 0,890	h_2	+ 0,015	n_2	0,108	M_2	—0,0000000104
r_3	— 0,000 16						
$r_1 \Delta \lambda$	+17 206,292	h_0	+ 5 819 011,626	$n_1 \Delta \lambda$	723,875	$M_1 \Delta \lambda^2$	+0,00000363
$r_2 \Delta \lambda^3$	— 0,015	$h_1 \Delta \lambda^2$	+ 30,192	$n_2 \Delta \lambda^3$	+ 0,002	$M_2 \Delta \lambda^4$	—0,00000000
$r_3 \Delta \lambda^5$	— 0,000	$h_2 \Delta \lambda^4$	+ 0,000	γ	723'',877		+1
y	+17 206,277 π	x	5 819 041,818 π	γ	+0°12'3'',877	m	1,0000036

U W A G A.

Zamianę sekund i minut na dziesiętne części stopnia, najdogodniej wykonać mnożąc:

sekundy przez 0,000 277 777 8

minuty przez 0,016 666 666 7

n. p. $0^{\circ} 15' 12'', 3545 = 0^{\circ} + 0,016 666 666 7 \times 15 + 0,000 277 777 8 \times 12,3545 = 0,2534318$

3. Tablice mnożące w układzie dr. Hausbrandta

Jeśli ograniczymy dokładność obliczeń współrzędnych prostokątnych płaskich do ± 3 cm, wówczas przeliczenie współrzędnych geograficznych punktu elipsoidy, na współrzędne prostokątne płaskie jego obrazu, może być wykonane, między innymi, przy pomocy „tablic mnożących” w układzie dr. Hausbrandta. Nie podaję przykładu obliczeń, ponieważ wymienione tablice, szczegółowy opis ich użycia oraz przykłady, umieszczone są w końcu niniejszej pracy.

Tablice te pozwalają uzyskać od razu współrzędne prostokątne płaskie z uwzględnieniem skali liniowej, w obrazach południków środkowych poszczególnych pasów, równej 0,999 935, zgodnie z założeniami przyjętymi przez Główny Urząd Pomiarów Kraju.

Bliższe wyjaśnienie tego zagadnienia znajdzie czytelnik w rozdziale IV.

§ 8. OBLICZENIE WSPÓŁRZĘDNYCH GEOGRAFICZNYCH φ i λ PUNKTU NA ELIPSOIDZIE ORAZ SKALI LINIOWEJ I ZBIEŻNOŚCI POŁUDNIKÓW W JEGO OBRAZIE, NA PODSTAWIE DANYCH WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH PŁASKICH x i y

1. Wzory Krügera przystosowane do rachunku logarytmicznego

$$\log(\varphi_1 - \varphi) = \log \frac{\rho}{2 M_1 N_1} y^2 t_1 - \frac{\mu}{6 N_1^2} y^2 - \frac{3}{4} \tau + \mu_3'$$

$$\log \Delta \lambda = \log \frac{\rho}{N_1 \cos \varphi_1} y + \frac{\mu}{6 N_1^2} y^2 - \tau - \mu_1 - \frac{\mu}{180 N_1^4} y^4$$

$$\log m = \frac{\mu}{2 N_1^2} y^2 + 3\mu_1 - \frac{\mu}{12 N_1^4} y^4$$

$$\log \gamma = \log \frac{\rho}{N_1} y t_1 - \tau + \mu_2 + \frac{2\mu}{45 N_1^4} \cdot \frac{y^4}{\cos^2 \varphi_1}$$

Występujące w tych wzorach wielkości pomocnicze, oblicza się ze wzorów następujących:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{6 N_1^2} \gamma_1^2 y^2 \quad \tau = \frac{\mu}{3 N_1^2} \cdot \frac{y^2}{\cos^2 \varphi_1} - \frac{\mu}{90 N_1^4} \cdot \frac{y^4}{\cos^4 \varphi_1} (13 - 10 \cos^2 \varphi_1)$$

$$\mu_2 = (2 + 4 \gamma_1^2) \mu_1 \quad \mu_3 = (-2,5 - 2 \gamma_1^2 + 4,5 t_1^2) \mu_1 \quad \mu_3' = \mu_2 + \mu_3$$

ZNACZENIE SYMBOLI

- | | |
|-----------------------|---|
| x i y | — dane współrzędne prostokątne płaskie punktu w odwzorowaniu. |
| φ i λ | — poszukiwane współrzędne geograficzne punktu na elipsoidzie. |
| φ_1 | — szerokość geograficzna odpowiadająca łukowi elipsoidy, równemu odciętej punktu w odwzorowaniu. Wielkość tę oblicza się z tabel drogą interpolacji, dla odciętej x jako argumentu. |
| M_1 | — promień krzywizny południka, w punkcie o szerokości geograficznej φ_1 . |
| N_1 | — promień krzywizny przekroju poprzecznego, w punkcie o szerokości geograficznej φ_1 . |

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \eta_1 = e' \cos \varphi_1 \\ \log \frac{\rho}{M_1} \\ \log \frac{\rho}{N_1} \\ \log \frac{1}{N_1^2} \\ \log \frac{1}{N_1^4} \end{array} \right\}$$

Oblicza się drogą interpolacji, dla szerokości geograficznej φ_1 jako argumentu, na podstawie tablic pomocniczych. Wymienione tablice podane są w „Handbuch der Vermessungskunde”, część III.

Logarytmy współczynników stałych, występujących w podanych wzorach, mają następujące wartości:

$$\begin{array}{lll} \log \frac{\mu}{6} = 5,859\ 63 & \log \frac{\mu}{3} = 6,160\ 663 & \log \frac{\mu}{90} = 4,683\ 54 \\ \log \frac{2\mu}{45} = 5,285\ 60 & \log \frac{\mu}{180} = 4,382\ 51 & \log \frac{\mu}{2} = 9,336\ 754 \\ \log \frac{\mu}{12} = 5,558\ 60 & \log \mu = 6,637\ 784 & \end{array}$$

PRZYKŁAD

Dane: $x = 5\ 819\ 041,818\ \text{m}$ Poszukiwane: współrzędne φ i λ
 $y = +17\ 206,276\ \text{m}$ skala liniowa m
 $\lambda_0 = 21^0$ zbieżność połud. γ

Dla $S = x = 5\ 819\ 041,818\ \text{m}$

otrzymuje się $\varphi_1 = 52^0\ 30'\ 21,4024''$

$\log (\mu : 6)$	5,859 6	$\log (\mu : 3)$	6,160 663		
$\log (1 : N_1^2)$	6,388 9	$\log (1 : N_1^2)$	6,388 884		
$\log \eta_1^2$	7,396 2	$\log y^2$	8,471 374	$- 2 \eta_1^2$	- 2,50
$\log y^2$	8,471 4	$\log (1 : \cos^2 \varphi_1)$	0,431 223	$+ 4,5 t_1^2$	+ 7,64
$\log \mu_1$	8,116 1		1,452 144		+ 5,14

$$\mu_1 = + 0,01$$

$$+ 28,32$$

$$\mu_3 = + 0,05$$

		$\log(-\mu : 90)$	4,683 54 _n	
		$\log(1 : N_1^4)$	2,777 77	
		$\log y^4$	6,942 75	
$4 \gamma_1^2$	2,00	$\log(1 : \cos^4 \varphi_1)$	0,862 45	+ 0,02
	0,01	$\log(13 - 10 \cos^2 \varphi_1)$	0,968 25	+ 0,05
	2,01		6,234 76 _n	$\mu_3' = + 0,07$

$$\mu_2 = + 0,02$$

$$- 0,00$$

$$+ 28,32$$

$$- 0,00$$

$$\tau = + 28,32$$

$\log(\rho : M_1 N_1)$	1,7043894.4			$\log(\rho : N_1)$	8,5088673.9
$\log(1 : 2)$	9,6989700.0	$\log(\mu : 6)$	5,859 63	$\log(1 : \cos \varphi_1)$	0,2156116.4
$\log y^2$	8,4713737.8	$\log(1 : N_1^2)$	6,388 88	$\log y$	4,2356868.9
$\log t_1$	0,1151128.1	$\log y^2$	8,471 37		2,9601659.2
	9,9898460.3		0,719 88		+ 5.2
	- 5.2		5.25		- 28.3
	- 21.2	$\log(-\mu : 180)$	4,382 5 _n		- 0.0
	+ 0.1	$\log(1 : N_1^4)$	2,777 8		- 0.0
$\log(\varphi_1 - \varphi) = 9,9898434.0$		$\log y^4$	6,942 7	$\log \Delta \lambda = 2,9601636.1$	
$\varphi_1 - \varphi = 0'', 9769$			4,103 0 _n	$\Delta \lambda = 912'', 3545$	
$\varphi = 52^\circ 30' 20'', 4255$			- 0,00	$\lambda = 21^\circ 15' 12'', 3545$	

$\log(\mu : 2)$	9,336 75	$\log(\rho : N_1)$	8,508 867 4	$\log(2\mu : 45)$	5,285 6
$\log(1 : N_1^2)$	6,388 88	$\log y$	4,235 686 9	$\log(1 : N_1^4)$	2,777 8
$\log y^2$	8,471 37	$\log t_1$	0,115 112 8	$\log y^4$	6,942 8
	4,197 00		2,859 667 1	$\log(1 : \cos^2 \varphi_1)$	0,431 2
	0,0000015.7		- 28		5,437 4
$3 \mu_1$	+ 0.0		+ 0		0,0
$-(\mu y^4 : 12 N_1^4)$	- 0.0		+ 0		
$\log m = 0,0000015.7$		$\log \gamma = 2,859 664 3$			
$m = 1,0000036$		$\gamma = 723'', 876$			
		$\gamma = + 0^\circ 12' 3'', 876$			

2. Tablice mnożące w układzie dr. Hausbrandta

Przeliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich na geograficzne może być dokonane, w szybki i niekłopotliwy sposób, przy użyciu tablic mnożących w układzie dr. Hausbrandta. Szczegółowe wskazówki dotyczące posługiwania się wymienionymi tablicami, jak również przykłady obliczeń, podane są w końcu niniejszej pracy.

§ 9. REDUKCJA WIELKOŚCI KĄTOWYCH

1. Wzory Krügera do obliczania redukcji kierunku

$$\delta_1 = \tau_1 - \tau_2$$

$$\delta_2 = \tau_1 + \tau_2$$

Występujące tu wielkości τ_1 i τ_2 , oblicza się ze wzorów:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \rho \xi \omega + \rho \eta^2 t \omega^2 \psi - \frac{1}{12} \rho \eta^2 t (2 \xi^2 - \psi^2) \psi$$

$$\tau_2 = \frac{1}{12} \rho \xi \psi - \frac{1}{3} \rho \eta^2 t (\xi^2 - \psi^2) \omega$$

Przyczym:

$$\xi = \frac{X_2 - X_1}{I_m}$$

$$\psi = \frac{Y_2 - Y_1}{I_m}$$

$$\omega = \frac{Y_1 + Y_2}{2 I_m}$$

Z N A C Z E N I E S Y M B O L I

δ_1 — redukcja kąta kierunkowego w punkcie P_1'

δ_2 — redukcja kąta kierunkowego w punkcie P_2'

$\left. \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \end{matrix} \right\}$ — współrzędne prostokątne płaskie punktu P_1'

$\left. \begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \end{matrix} \right\}$ — współrzędne prostokątne płaskie punktu P_2'

$\left. \begin{matrix} I_m = \sqrt{M_m N_m} \\ \eta = e' \cos \varphi_m \\ t = \operatorname{tg} \varphi_m \end{matrix} \right\}$ odpowiadają średniej szerokości φ_m , obliczonej dla średniej odciętej $x_m = 1/2 (x_1 + x_2)$. Wielkości te otrzymuje się z tablic pomocniczych, podanych w „Handbuch der Vermessungskunde”, część III.

P R Z Y K Ł A D

Dane:

Poszukiwane:

$$P_1' \begin{cases} x_1 = 5\ 819\ 041,818\ \text{m} \\ y_1 = +\ 17\ 206,276\ \text{m} \end{cases}$$

redukcje δ_1 i δ_2 kątów kierunkowych w punktach P_1' i P_2'

$$P_2' \begin{cases} x_2 = 5\ 841\ 283,440\ \text{m} \\ y_2 = +\ 41\ 870,843\ \text{m} \end{cases}$$

Oblicza się najpierw średnią odcietą x_m oraz odpowiadającą jej szerokość geograficzną φ_m :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5\ 830\ 162,629\ \text{m}$$

$$\varphi_m = 52^\circ 36' 21'', 2179$$

$$\text{skąd: } \log \frac{1}{r_m} = 3,194\ 977\ 2$$

Następnie oblicza się wielkości ξ , ψ i ω oraz wielkości τ_1 i τ_2 , na podstawie których otrzymuje się redukcje δ_1 i δ_2 .

$$x_2 - x_1 = +\ 22\ 241,622\ \text{m}$$

$$y_2 - y_1 = +\ 24\ 664,567\ \text{m}$$

$$y_1 + y_2 = +\ 59\ 077,119\ \text{m}$$

$\log(x_2 - x_1)$	4,347 17	$\log(y_2 - y_1)$	4,392 07	$\log(y_1 + y_2)$	4,771 42
$\log(1 : r_m)$	3,194 98	$\log(1 : r_m)$	3,194 98	$\log(1 : r_m)$	2,893 95
$\log \xi$	7,542 15	$\log \psi$	7,587 05	$\log \omega$	7,665 37

$\log(\rho : 2)$	5,013 40
$\log \xi$	7,542 15
$\log \omega$	7,665 37
	0,220 92

$$+ 1'',663\ 0$$

$\log \rho$	5,314 4	$\log (-\rho : 6)$	4,536 3 _n		
$\log \eta^2$	7,394 1	$\log \eta^2$	7,394 1	$\log (\rho : 12)$	4,235 2
$\log t$	0,116 7	$\log t$	0,116 7	$\log \eta^2$	7,394 1
$\log \omega^2$	5,330 7	$\log \xi^2$	5,084 3	$\log t$	0,116 7
$\log \psi$	7,587 0	$\log \psi$	7,587 0	$\log \psi^3$	2,761 2
	5,742 9		4,718 4 _n		4,507 2

+ 0'',000 1

0,000 0

0,000 0

$$\tau_1 = + 1'',663 1$$

		$\log (-\rho : 3)$	4,837 3 _n	$\log (\rho : 3)$	4,837 3
		$\log \eta^2$	7,394 1	$\log \eta^2$	7,394 1
$\log (\rho : 12)$	4,235 24	$\log t$	0,116 7	$\log t$	0,116 7
$\log \xi$	7,542 15	$\log \xi^2$	5,084 3	$\log \psi^2$	5,174 1
$\log \psi$	7,587 05	$\log \omega$	7,665 4	$\log \omega$	7,665 4
	9,364 44		5,097 8 _n		5,187 6

+ 0'',231 4

0,000 0

0,000 0

$$\tau_2 = + 0'',231 4$$

$$\delta_1 = \tau_1 - \tau_2 = + 1'',432$$

$$\delta_2 = \tau_1 + \tau_2 = + 1'',895$$

2. Wzory uproszczone do obliczania redukcji kierunku (przy średnim promieniu r_0 , obliczonym dla środkowego równoleżnika obszaru Polski: $\varphi_0 = 52^\circ$), nadające się do rachunku maszynowego.

$$\delta_1'' = 0,000 843 9 (x_2 - x_1) (2 y_1 + y_2)$$

$$\delta_2'' = 0,000 843 9 (x_2 - x_1) (y_1 + 2 y_2)$$

Występujące w powyższych wzorach współrzędne prostokątne płaskie wyraża się w kilometrach.

P R Z Y K Ł A D

Przyjmujemy te same dane wyjściowe, co w przykładzie poprzednim. Poszukiwane: redukcje δ_1 i δ_2 kątów kierunkowych.

$$x_2 - x_1 = + 22,242 \text{ km}$$

$$2 y_1 + y_2 = + 76,283 \text{ km} \quad \delta_1 = + 1'',432$$

$$y_1 + 2 y_2 = + 100,948 \text{ km} \quad \delta_2 = + 1'',895$$

3. Przy mniejszych normach dokładności można stosować wzór uproszczony na redukcję kąta, w postaci następującej:

$$\delta'' = 0,0025 (x_P - x_L) y_s$$

gdzie x_P i x_L są to odcięte prawego i lewego punktu obserwacji, zaś y_s , jest rzędną stanowiska (w km).

§ 10. REDUKCJA WIELKOŚCI LINIOWYCH

1. Wzory ściśle, przystosowane do rachunku logarytmami

$$\log d - \log D = \frac{\mu}{6 f_m^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\mu \eta^2 t}{6 f_m^3} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2)$$

$$\log D - \log d = -\frac{\mu}{6 f_m^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + \frac{\mu \eta^2 t}{6 f_m^3} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2)$$

lub:

$$\log d - \log D = \frac{\mu}{2} \left(\frac{y_2 + y_1}{2 f_m} \right)^2 + \frac{\mu}{24} \left(\frac{y_2 - y_1}{f_m} \right)^2 - \frac{\mu}{12} \left(\frac{y_2 + y_1}{2 f_m} \right)^4$$

$$\log D - \log d = -\frac{\mu}{2} \left(\frac{y_2 - y_1}{2 f_m} \right)^2 - \frac{\mu}{24} \left(\frac{y_2 - y_1}{f_m} \right)^2 + \frac{\mu}{12} \left(\frac{y_2 + y_1}{2 f_m} \right)^4$$

skąd:

$$\log d = \log D + (\log d - \log D)$$

$$\log D = \log d + (\log D - \log d)$$

Z N A C Z E N I E S Y M B O L I

D -- długość linii geodezyjnej łączącej dwa punkty na elipsoidzie.

d -- długość linii prostej łączącej obrazy wymienionych wyżej punktów na płaszczyźnie odwzorowania.

$\left. \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right\}$ -- współrzędne prostokątne płaskie punktu P_1' .

$\left. \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \right\}$ -- współrzędne prostokątne płaskie punktu P_2' .

$\left. \begin{matrix} r_m = \sqrt{M_m N_m} \\ \eta = e' \cos \varphi_m \\ t = \operatorname{tg} \varphi_m \end{matrix} \right\}$ odpowiadają średniej szerokości φ_m , obliczonej dla średniej odciętej $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Wielkości te oblicza się z tabel pomocniczych.

P R Z Y K Ł A D

Dane:

Poszukiwana:

$$P_1' \left\{ \begin{matrix} x_1 = 5\,819\,041,818 \text{ m} \\ y_1 = +17\,206,276 \text{ m} \end{matrix} \right.$$

długość linii prostej — d .

$$P_2' \left\{ \begin{matrix} x_2 = 5\,841\,283,440 \text{ m} \\ y_2 = +41\,870,843 \text{ m} \end{matrix} \right.$$

$$D = 33\,211,526 \text{ m}$$

$$\log D = 4,521\,2888.4$$

Zastosujemy pierwszy ze wzorów podanych na stronie 38. Średnią odciętą x_m oraz odpowiadającą jej szerokość geograficzną φ_m i odwrotność średniego promienia krzywizny $1/r_m$ — mamy już obliczone w przykładzie podanym w § 9. Mamy więc:

$$\log \frac{\mu}{6 r_m^2} = 2,249\,587$$

$\log y_1$	4,235 69	$\log y_1$	4,235 69	$\log y_2$	4,621 91
$\log y_1$	4,235 69	$\log y_2$	4,621 91	$\log y_2$	4,621 91
$\log \mu : 6 r_m^2$	2,249 59	$\log \mu : 6 r_m^2$	2,249 59	$\log \mu : 6 r_m^2$	2,249 59
	0,720 97		1,107 19		1,493 41
	+ 5,26		+ 12,80		+ 31,15
$\log(x_2 - x_1)$	4,347 2	$\log(x_2 - x_1)$	4,347 2	$\log D = 4,521\ 2888.4$ $+ 49.2$ $\log d = 4,521\ 2937.6$ $d = \underline{\underline{33211,904\ m}}$	
$\log y_2^2$	9,243 8	$\log y_1^2$	8,471 4		
$\log \eta^2$	7,394 1	$\log \eta^2$	7,394 1		
$\log t$	0,116 7	$\log t$	0,116 7		
$\log \mu : 6 r_m^3$	5,444 6	$\log \mu : 6 r_m^3$	5,444 6		
	6,546 4		5,774 0		
	0.00		0.00		

2. Wzory uproszczone (przy średnim promieniu r_0 , obliczonym dla środkowego równoleżnika obszaru Polski: $\varphi_0 = 52^\circ$), nadające się do rachunku maszynowego.

$$d = D [1 + 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)]$$

$$D = d [1 - 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)]$$

Występujące w powyższych wzorach współrzędne prostokątne płaskie, wyraża się w kilometrach.

P R Z Y K Ł A D

Przyjmujemy te same dane wyjściowe, co w przykładzie poprzednim. Poszukiwana długość linii prostej — d .

y_1^2	296,0568 km	$d = \underline{\underline{33\ 211,902\ m}}$
$y_1 \cdot y_2$	720,4415 km	
y_2^2	1753,1639 km	
	2769,6622 km	

3. Przy mniejszych normach dokładności można stosować wzory uproszczone, w postaci następującej:

$$d = D (1 + 0,000\ 000\ 0123\ y_s^2)$$

$$D = d (1 - 0,000\ 000\ 0123\ y_s^2)$$

przyczym y_s oznacza rzędną środka linii wyrażoną w kilometrach. Wzory powyższe pozwalają na uzyskanie wyniku z dokładnością około 2 cm, nawet przy długości boku do 50 km i na skraju 3-y stopniowego pasa południkowego, co w praktyce pomiarowej powinno być najzupełniej wystarczające.

P R Z Y K Ł A D

Przyjmujemy te same dane wyjściowe, co w pierwszym przykładzie. Poszukiwana długość linii prostej — d .

$$y_1 = 17,206\text{ km}$$

$$y_2 = 41,871\text{ km}$$

$$y_s = \frac{y_1 + y_2}{2} = 30,038\text{ km} \quad \underline{\underline{d = 33211,90\text{ m}}}$$

$$y_s^2 = 902,281\text{ km}$$

§ 11. PRZELICZANIE WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH PŁASKICH PUNKTU, Z JEDNEGO UKŁADU NA DRUGI

1. Wzory ścisłe

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x - (1 - \cos 2\gamma_0) \Delta x - \sin 2\gamma_0 \cdot \Delta y + \\ &+ s_2 \cdot r^2 \cos(2v + u_2) + s_3 r^3 \cos(3v + u_3) \\ y_1 &= -y_0 + \Delta y + \sin 2\gamma_0 \cdot \Delta x - (1 - \cos 2\gamma_0) \Delta y + \\ &+ s_2 r^2 \sin(2v + u_2) + s_3 r^3 \sin(3v + u_3) \end{aligned}$$

Wielkości pomocnicze r i v , oblicza się ze wzorów:

$$r \sin v = \Delta y$$

$$r \cos v = \Delta x$$

przyczym:

$$\Delta x = x - x_0,$$

$$\Delta y = y - y_0$$

Wielkości pomocnicze: s_2 , u_2 i s_3 , u_3 — można obliczyć z poniższych wzorów:

$$\left. \begin{aligned} s_2 \sin u_2 &= h_2 \\ s_2 \cos u_2 &= g_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} s_3 \sin u_3 &= h_3 \\ s_3 \cos u_3 &= g_3 \end{aligned} \right\}$$

przyczym:

$$h_2 = \frac{1}{N_0} \cdot \frac{p}{\rho} \cos \varphi_0 (1 + \gamma_0^2) - \frac{1}{6N_0} \cdot \frac{p^3}{\rho^3} \cdot \cos^3 \varphi_0 (1 + 31 t_0^2)$$

$$g_2 = -\frac{3}{N_0} \cdot \frac{p^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + \gamma_0^2)$$

$$h_3 = -\frac{1}{3N_0^2} \cdot \frac{p}{\rho} \cos \varphi_0 t_0 (1 + \gamma_0^2)$$

$$g_3 = -\frac{1}{3N_0^2} \cdot \frac{p^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi_0 (3 - 4t_0^2)$$

lub wziąć z tabel pomocniczych (podanych na końcu niniejszej pracy), dla szerokości geograficznej φ_0 jako argumentu.

Z N A C Z E N I E S Y M B O L I.

$\left. \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right\}$ współrzędne prostokątne płaskie punktu, w układzie wschodnim

$\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$ współrzędne prostokątne płaskie punktu, w układzie zachodnim

$\left. \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\}$ współrzędne prostokątne płaskie obrazu punktu pomocniczego P_0 , o szerokości geograficznej φ_0 , w układzie zachodnim. Bierze się je z tabeli III, dla szerokości geograficznej φ_0 .

$\left. \begin{matrix} x_0' \\ y_0' \end{matrix} \right\}$ współrzędne prostokątne płaskie obrazu punktu pomocniczego P_0 , o szerokości geograficznej φ_0 , w układzie wschodnim. Bierze się je z tabeli IV, dla szerokości geograficznej φ_0 (przyczym: $x_0' = x_0$, zaś $y_0' = -y_0$).

γ_0 — zbieżność południków w obrazie punktu P_0 , w układzie zachodnim. (Wartości γ_0 podaje tab. III).

γ_0' — zbieżność południków w obrazie punktu P_0 , w układzie wschodnim. (Wartości γ_0' podaje tab. IV, przyczym $+\gamma_0' = -\gamma_0$).

Wielkości: $(1 - \cos 2\gamma_0)$ i $\sin 2\gamma_0$, względnie ich logarytmy, otrzymuje się z tabel pomocniczych (tab. V i VI, względnie III i IV).

p — połowa różnicy długości geograficznych południków środkowych, układów: wschodniego i zachodniego. Dla 3-y stopniowych pasów południkowych:

$$p = \frac{\lambda_{0-2} - \lambda_{0-1}}{2} = 1^\circ 30' = 5400''$$

$\left. \begin{matrix} \gamma_0 \\ t_0 \\ N_0 \end{matrix} \right\}$ w odpowiednich potęgach, odpowiadają szerokości geograficznej φ_0 punktu pomocniczego P_0 . Wielkości te bierze się z tabel pomocniczych (podanych między innymi w „Handbuch der Vermessungskunde”, część III).

2. Przy mniejszych normach dokładności — we wzorach służących do przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich z jednego układu na drugi — można odrzucić wyrazy ostatnie

Otrzymamy wówczas:

$$x_1 = x_0 + \Delta x - (1 - \cos 2\gamma_0) \Delta x - \sin 2\gamma_0 \cdot \Delta y + s_2 \cdot r^2 \cos(2v + u_2)$$

$$y_1 = -y_0 + \Delta y + \sin 2\gamma_0 \cdot \Delta x - (1 - \cos 2\gamma_0) \Delta y + s_2 \cdot r^2 \sin(2v + u_2)$$

Omówione powyżej wzory nadają się zarówno do rachunku logarytmami jak i maszyną. W pierwszym wypadku korzystamy z tabeli III lub IV, w drugim zaś wypadku — z tabeli V lub VI.

Do przeliczania współrzędnych prostokątnych płaskich z jednego układu na drugi, z powodzeniem wykorzystać można, wymienione w §§ 7 i 8, tablice mnożące w układzie dr. Hausbrandta.

W tym celu należy, posilkując się tablicą II-ą, przeliczyć dane współrzędne prostokątne punktu w jednym z układów na współrzędne geograficzne, poczem te ostatnie, posilkując się tablicą I-ą, przeliczyć na współrzędne prostokątne płaskie w drugim układzie. Zadanie rozwiązuje się wyłącznie przy pomocy maszyny do liczenia.

P R Z Y K Ł A D 1

Dane:

Poszukiwane:

współrzędne prostokątne płaskie w układzie zachodnim ($\lambda_{0-1} = 15^0$): współrzędne prostokątne płaskie w układzie wschodnim ($\lambda_{0-2} = 18^0$):

$$x = 5\,785\,575,133\text{ m}$$

$$x_1$$

$$y = +\,93\,897,296\text{ m}$$

$$y_1$$

Przykład rozwiązać rachunkiem logarytmicznym.

Dla odciętej x znajdujemy, z tab. III, szerokość geograficzną punktu pomocniczego P_0 :

$$\varphi_0 = 52^0 0'$$

dla której otrzymujemy (z tej samej tabeli) współrzędne prostokątne płaskie punktu pomocniczego P_0 :

$$x_0 = 5\,763\,813,248\text{ m}$$

$$y_0 = 103\,001,595\text{ m}$$

oraz współczynniki:

$$\log (1 - \cos 2 \gamma_0) = 6,930\,045\,8.0$$

$$\log s_2 = 1,402\,7_n - 10$$

$$\log \sin 2 \gamma_0 = 8,615\,445\,4.0$$

$$\log s_3 = 4,23 - 20$$

jak również kąty pomocnicze:

$$u_2 = -\,86^0\,27'\,00''$$

$$u_3 = -\,87^0$$

Obliczamy następnie Δx i Δy , na podstawie których otrzymujemy kąt pomocniczy v oraz wielkość r :

x	5 785 575,133 m	y	93 897,296 m
$-x_0$	- 5 763 813,248 m	$-y_0$	- 103 001,595 m
Δx	+ 21 761,885 m	Δy	- 9 104,299 m

$\log \Delta y$	3,959 247 _n	$\log \Delta y$	3,959 25 _n
$\log \Delta x$	4,337 696	$-\log \sin v$	9,586 53 _n
$\log \operatorname{tg} v$	9,621 551 _n	$\log r$	4,372 72

$\log \Delta x$	4,337 70
$-\log \cos v$	9,964 98
$\log r$	4,372 72

$$v = - 22^{\circ} 42' 10'' \quad \log r = 4,372 72$$

$$2v + u_2 = - 131^{\circ} 51' 20'' \quad \log r^2 = 8,745 4$$

$$3v + u_3 = - 155^{\circ} \quad \operatorname{ldg} r^3 = 13,12$$

Na podstawie otrzymanych wielkości obliczamy współrzędne prostokątne x_1 i y_1 , korzystając ze wzorów podanych na początku niniejszego paragrafu.

x_0	5 763 813,248 m
$+ \Delta x$	+ 21 761,885
$-(1 - \cos 2\gamma_0) \cdot \Delta x$	- 18,524
$-\sin 2\gamma_0 \cdot \Delta y$	+ 375,571
$+ s_2 r^2 \cos (2v + u_2)$	+ 0,939
$- s_3 r^3 \cos (3v + u_3)$	- 0,001
x_1	5 785 933,118 m

$-y_0$	$-103\,001,595\text{ m}$
$+\Delta y$	$-9\,104,299$
$+\sin 2\gamma_0 \cdot \Delta x$	$+897,722$
$-(1 - \cos 2\gamma_0) \Delta y$	$+7,750$
$+s_2 r^2 \sin(2v + u_2)$	$+1,048$
$+s_3 r^3 \sin(3v + u_3)$	$-0,002$
y_1	$-111\,199,377\text{ m}$

P R Z Y K Ł A D 2.

Dane:

współrzędne prostokątne płaskie w układzie wschodnim
($\lambda_{0-2} = 18^0$):

$$x_1 = 5\,785\,933,118\text{ m}$$

$$y_1 = -111\,199,377\text{ m}$$

Poszukiwane:

współrzędne prostokątne płaskie w układzie zachodnim
($\lambda_{0-1} = 15^0$):

x

y

Należy dokonać czynności odwrotnej, w odniesieniu do przykładu pierwszego, tj. przeliczyć współrzędne prostokątne płaskie z układu wschodniego na zachodni.

Wzory podane na początku niniejszego paragrafu pozostają w mocy. Należy jedynie odwrócić znaki: rzędnej y_0 obrazu punktu pomocniczego P_0 , zbieżności południków γ_0 (a tym samym $\sin 2\gamma_0$), oraz kątów pomocniczych u_2 i u_3 , wskutek tego, że różnica długości geograficznych południków środkowych obu pasów, jest w tym wypadku ujemna. Uwzględniają to tabele V i VI.

Przykład rozwiążemy rachunkiem maszynowym.

Dla odciętej x_1 znajdujemy z tabeli V szerokość geograficzną φ_0 punktu pomocniczego P_0 :

$$\varphi_0 = 52^0$$

dla której otrzymujemy współrzędne prostokątne płaskie obrazu punktu pomocniczego P_0 :

$$x_0' = 5\,763\,813,248 \text{ m}$$

$$y_0' = -103\,001,595 \text{ m}$$

oraz współczynniki:

$$(1 - \cos 2\gamma_0') = 0,000\,851\,228 \quad s_2 = -0,000\,000\,002\,528$$

$$\sin 2\gamma_0' = -0,041\,252\,038 \quad s^2 = 0,000\,000\,000\,000\,000\,17$$

jak również kąty pomocnicze:

$$u_2 = +86^\circ 27' 00''$$

$$u_3 = +87^\circ$$

Obliczamy z kolei Δx i Δy , na podstawie których otrzymujemy kąt pomocniczy v oraz wielkość r .

x_1	5 785 933,118	y_1	- 111 199,377
$-x_0'$	- 5 763 813,248	$-y_0'$	+ 103 001,595
Δx	+ 22 119,870	Δy	- 8 197,782

$$\operatorname{tg} v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{8\,197,782}{22\,119,870} = -0,370\,607$$

$$v = -20^\circ 20' 5''$$

$$2v + u_2 = +45^\circ 46' 50''$$

$$3v + u_3 = +26^\circ$$

$$r = \frac{\Delta y}{\sin v} = \frac{-8\,197,782}{-0,347\,504} = 23\,590$$

$$r = \frac{\Delta x}{\cos v} = \frac{22\,119,870}{0,937\,678} = 23\,590$$

$$r^2 = 556\,488\,000$$

$$r^3 = 131\,000\,000\,000\,00$$

x_0'	5 763 813,248m
$+\Delta x$	$+ 22\ 119,870$
$-(1 - \cos 2\gamma_0') \cdot \Delta x$	$- 18,829$
$-\sin 2\gamma_0' \cdot \Delta y$	$- 338,175$
$+s_2 r^2 \cos(2\nu + u_2)$	$- 0,981$
$+s_3 r^3 \cos(3\nu + u_3)$	$+ 0,002$
x	5 785 575,135
$-y_0'$	$+ 103\ 001,595m$
$+\Delta y$	$- 8\ 197,782$
$+\sin 2\gamma_0' \cdot \Delta x$	$- 912,489$
$-(1 - \cos 2\gamma_0') \Delta y$	$+ 6,978$
$+s_2 r^2 \sin(2\nu + u_2)$	$- 1,008$
$+s_3 r^3 \sin(3\nu + u_3)$	$+ 0,001$
y	$+ 93\ 897,295$

ROZDZIAŁ III

ZASTOSOWANIE ODWZOROWANIA GAUSSA-KRÜGERA W POLSCE

§ 12. UWAGI OGÓLNE DOTYCZĄCE ZASTOSOWANIA ODWZOROWANIA GAUSSA-KRÜGERA NA OBSZARZE POLSKI

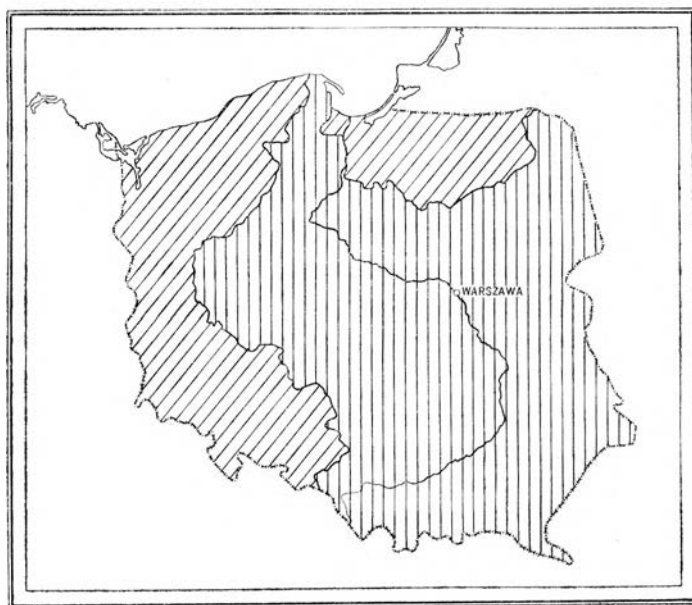
Odwzorowanie Gaussa-Krügera stosowane było przed wojną w Polsce do obliczeń wyników triangulacji, zgodnie z przepisami byłego M. R. P. z 1920 i 1928 r., jak również stało się obowiązujące od 1927 r., na obszarze całych Niemiec.

Po odzyskaniu niepodległości mieliśmy zatem do wykorzystania, na obszarze Ziem Odzyskanych, sieci triangulacyjne obliczone w odwzorowaniu Gaussa-Krügera stosowanym w Rzeszy Niemieckiej, na obszarze zaś Ziem Dawnych — sieci triangulacyjne obliczone w odwzorowaniu Gaussa-Krügera obowiązującym w Polsce przedwojennej (patrz rys. 10).

Nie wspominam tu o sieciach lokalnych i państwowych, stosowanych dla celów pomiarów katastralnych na obszarze dawnego zaboru austriackiego i pruskiego.

Zaistniała przeto konieczność wprowadzenia na obszarze całego Państwa, jednolitego odwzorowania kartograficznego, które dałoby jednolitą podstawę dla triangulacyjnych sieci państwowych i pozwoliłoby związać w jedną całość wszystkie istniejące i wykonywane pomiary, zapewniając pełne ich wykorzystanie dla różnych dziedzin gospodarki państwowej.

Wprowadzenie jednolitego odwzorowania dla przedstawiania wyników prac pomiarowych, ma w szczególności decydujące znaczenie dla podjętej, przez Główny Urząd Pomiarów, sprawy opracowania i wydania mapy gospodarczej Kraju.



 Obszar Ziemi Odzyskanych
objęty triangulacją niemiec-
ką (3^{ta} we pasy w odwzoro-
waniu Gaussa-Krügera)

 Obszar Ziemi Dawnych objęty
częściowo triangulacją polską
(2^{ta} we pasy w odwzorowaniu
Gaussa-Krügera)

Rys.10

Zanim przejdę do omówienia obowiązującego obecnie odwzorowania, podam pokrótce cechy charakterystyczne dotyczące odwzorowania Gaussa-Krügera, które było stosowane przed wojną w Niemczech i Polsce. Jest to usprawiedliwione względami, o których na wstępie niniejszego paragrafu wspominałem.

§ 13. ODWZOROWANIE GAUSSA-KRÜGERA NA OBSZARZE ZIEM ODZYSKANYCH, STOSOWANE W NIEMCZACH PRZED OSTATNIĄ WOJNĄ ŚWIATOWĄ

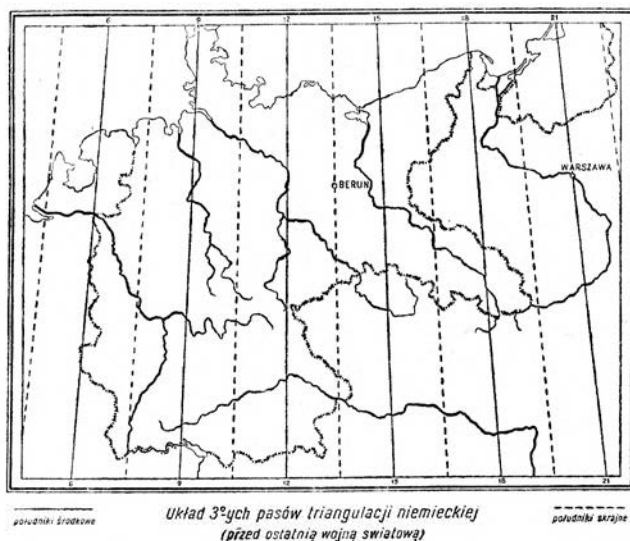
1. Szerokość pasów i układy współrzędnych

Wiernokątne odwzorowanie Gaussa-Krügera zostało w roku 1927 wprowadzone jako obowiązujące we wszystkich prowincjach Rzeszy Niemieckiej, na miejsce stosowanych dotychczas, niejednolitych sposobów odwzorowań kartograficznych.

Cały obszar kraju został podzielony na sześć 3⁰-ych pasów południkowych. Południki środkowe pasów południkowych, pokrywające się w odwzorowaniu z osiami odciętych sześciu niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich, przebiegają w odległościach kątowych:

$$6^0, 9^0, 12^0, 15^0, 18^0 \text{ i } 21^0$$

na wschód od południka Greenwich, co uwidacznia umieszczona poniżej mapka.



Rys. 11

Osie rzędnych, wymienionych sześciu układów, pokrywają się z obrazem równika. Wszystkie zatem odcięte x , punktów w odwzorowaniu, mają wartości dodatnie. Rzędne y — mogą mieć wartości ujemne lub dodatnie, zależnie od położenia punktu względem południka środkowego.

2. Współrzędne ostateczne

W celu uniknięcia ujemnych wartości rzędnych punktu w odwzorowaniu oraz dla otrzymania jednoznacznych dla nich wartości, na obszarze całego kraju, dodaje się do wszystkich obliczonych rzędnych liczbę równą 500,000 m; ponadto każdą uzupełnioną w ten sposób wartość rzędnej, poprzedza liczba równa $\frac{1}{3}$ długości geograficznej południka środkowego danego pasa południkowego. Tak przekształcona rzędna oznacza się dopiskiem „rechts”. Odcięta — oznacza się dopiskiem „hoch”.

Oznaczmy współrzędne prostokątne punktu, w dowolnym układzie, odniesione do osi odciętych pokrywającej się z obrazem południka środkowego i osi rzędnych pokrywającej się z obrazem równika — symbolami x i y . Współrzędne zaś ostateczne — symbolami X i Y . Wówczas przejścia od współrzędnych x i y do współrzędnych X i Y — można dokonać przy pomocy formuł następujących:

$$X = x$$

$$Y = \eta + y$$

Mając zaś współrzędne X i Y , można dokonać przejścia do współrzędnych x i y , korzystając z formuł:

$$x = X$$

$$y = Y - \eta$$

Wielkość η , dla poszczególnych pasów południkowych, podana jest w tabelce 5-ej. Symbolem λ_0 , oznaczono długość geograficzną południka środkowego danego pasa.

T A B E L A 5

λ_0 (w stopniach)	η (w metrach)
6	2 500 000
9	3 500 000
12	4 500 000
15	5 500 000
18	6 500 000
21	7 500 000

Jeśli n. p. dane są współrzędne:

$$x = 5\,814\,976,154 \text{ m}$$

$$y = -86\,714,070 \text{ m}$$

w układzie o długości geograficznej południka środkowego $\lambda_0 = 18^\circ$, wówczas współrzędne ostateczne wynoszą:

$$X = 5\,814\,976,154\text{ m}$$

$$Y = 6\,500\,000 - 86\,714,070\text{ m} = 6\,413\,285,930\text{ m}$$

lub zgodnie z przyjętymi przepisami:

$$\text{hoch } 5\,814\,976,154\text{ m}$$

$$\text{rechts } 6\,413\,285,930\text{ m}$$

3. Elipsoida odniesienia i punkt przyłożenia

Jako powierzchnia odniesienia dla prac geodezyjnych, została przyjęta elipsoida Bessel'a, styczna do powierzchni geoidy w punkcie — wieża Helmerta, obserwatorium astronomicznego w Poczdamie. Współrzędne astronomiczne wymienionego punktu (odniesione do geoidy) są równe jego współrzędnym geograficznym (odniesionym do elipsoidy) i wynoszą:

$$\varphi = 52^{\circ} 22' 54'', 81$$

$$\lambda = 13^{\circ} 04' 01'', 72$$

Punkt ten, jest punktem podstawowym pomiarów geodezyjnych i musi być brany pod uwagę przy przeliczaniu współrzędnych sieci triangulacyjnych niemieckich na układ polski, na obszarze Ziemi Odzyskanych.

§ 14. ODWZOROWANIE GAUSSA-KRÜGERA NA ZIEMIACH DAWNYCH, STOSOWANE PRZY POMIARACH PAŃSTWOWYCH PRZED OSTATNIĄ WOJNĄ ŚWIATOWĄ

1. Uwagi ogólne

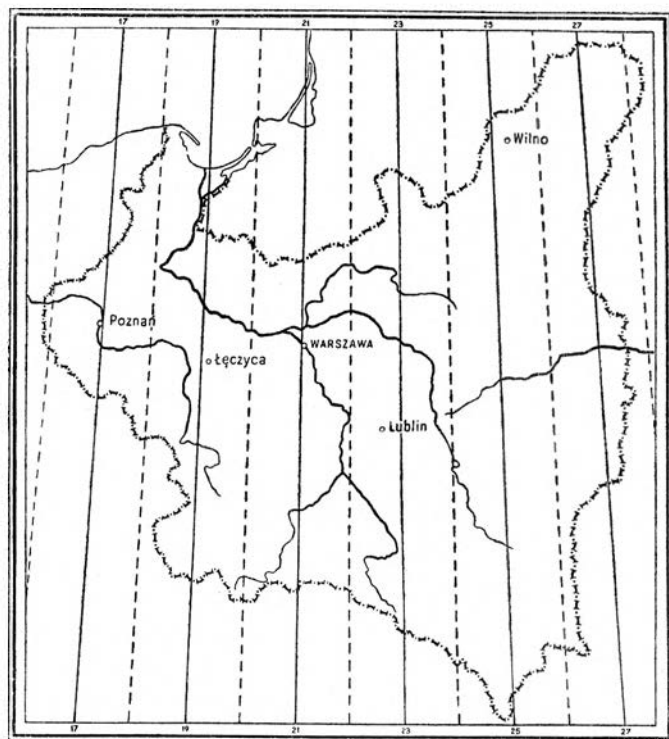
Odwzorowanie Gaussa-Krügera zostało wprowadzone w Polsce, dla celów obliczeń wyników triangulacji państwowej, przepisami byłego Ministerstwa Robót Publicznych w 1920 r.

Wymienione przepisy w formie uzupełnionej, zostały ponownie wydane w 1928 r. Zgodnie z § 1 Rozdz. I, tych przepisów „Pomiary szczegółowe, obliczenia i plany dla Katastru oraz innych dziedzin gospodarki państwowej, powinny być oparte na państwowej sieci triangulacyjnej”. W § 2 tegoż rozdziału czytamy, że „Obliczenia opiera się na elipsoidzie Bessel'a i wyraża się we współrzędnych wiernokątnych Gaussa, obliczonych sposobem Krügera. Dla uzupełnienia map sporządzonych w innych układach, obowiązywać będą aż do czasu sporządzenia nowych map, dotychczasowe układy współrzędnych”. Przepisy więc wyraźnie mówią o konieczności

dowiązania wszelkich prac pomiarowych—wykonanych dla różnych dziedzin gospodarki kraju — do państwowej sieci triangulacyjnej, której punkty powinny być wyrażone we współrzędnych prostokątnych płaskich jednolitego odwzorowania kartograficznego, na obszarze całego kraju.

2. Szerokość pasów i układy współrzędnych

Obszar Państwa został podzielony na 5 pasów południkowych, o szerokości 2^0 równoleżnika każdy.



południki środkowe

Układ 2^{ych} pasów triangulacji polskiej
(przed ostatnią wojną światową)

południki skrajne

Rys.12

Południki środkowe pasów południkowych—pokrywające się w odwzorowaniu z osiami odciętych 5-ciu niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich—przebiegają w odległościach katowych:

$$17^0, 19^0, 21^0, 23^0 \text{ i } 25^0$$

na wschód od południka Greenwich, jak zilustrowano na powyższej mapce.

Poszczególne układy współrzędnych prostokątnych płaskich oznacza się numerami od 1 do 5. Kierunek północny jest dodatnim kierunkiem osi odciętych, kierunek wschodni — dodatnim kierunkiem osi rzędnych, w poszczególnych układach współrzędnych.

Wymienione układy, od największych miast leżących na ich obszarze, nosiły następujące nazwy:

1 —	poznański,	o osi odciętych będącej obrazem połud.	17 ⁰	dług. wschod.	Greenwich			
2 —	łęczycki,	" " " " " "	19 ⁰	" " " "	" " " "			
3 —	warszawski,	" " " " " "	21 ⁰	" " " "	" " " "			
4 —	lubelski,	" " " " " "	23 ⁰	" " " "	" " " "			
5 —	wileński,	" " " " " "	25 ⁰	" " " "	" " " "			

3. Współrzędne ostateczne

Dla łatwiejszego posługiwania się w praktyce współrzędnymi prostokątnymi punktów w odwzorowaniu, a w szczególności dla uniknięcia wielkich liczb, zmniejsza się wszystkie odcięte (obliczone) o stałą wielkość 5 280 000 m, która odpowiadała odległości od równika najbardziej na południe położonego punktu ziem polskich. Dla uniknięcia zaś wartości ujemnych, przesuwa się oś rzędnych, w każdym układzie, o 90 km na zachód tj. dodaje się do wszystkich rzędnych (obliczonych) wielkość 90 000 m. Jeśli więc współrzędne prostokątne płaskie punktu, w dowolnym układzie, odniesione do osi odciętych pokrywającej się z obrazem południka środkowego tegoż układu i osi rzędnych pokrywającej się z obrazem równika — oznaczmy symbolami x i y , współrzędne zaś ostateczne oznaczmy symbolami X i Y , wówczas przejście od współrzędnych x i y do współrzędnych X i Y , może być dokonane przy pomocy formuł następujących:

$$X = x - 5\,280\,000\text{ m}$$

$$Y = y + 90\,000\text{ m}$$

Zadanie odwrotne może być rozwiązane przy pomocy formuł:

$$x = X + 5\,280\,000\text{ m}$$

$$y = Y - 90\,000\text{ m}$$

Z przyczyn podyktowanych względami praktycznymi, sąsiednie układy zachodzą na siebie pasami około 20 km szerokości każdy. Współrzędne punktów znajdujących się na obszarze wymienionych pasów 20 km, zgodnie z przepisami M. R. P. z 1928 r., podane były w odniesieniu do obu sąsiednich układów współrzędnych prostokątnych płaskich

4. Elipsoida odniesienia i punkt przyłożenia

Jako powierzchnia odniesienia, przyjęta była elipsoida Bessel'a, styczna do powierzchni geoidy w punkcie „Borowa Góra”, znajdującym się w pobliżu miejscowości Zegrze koło Warszawy. Współrzędne geograficzne punktu Borowa Góra, przyrównane do jego współrzędnych astronomicznych, wynoszą:

$$\varphi = 52^{\circ} 28' 32'', 85 \pm 0'', 04$$

$$\lambda = 21^{\circ} 02' 12'', 12 \pm 0'', 135$$

Punkt Borowa Góra, był punktem podstawowym państwowej sieci triangulacyjnej.

§ 15. ODWZOROWANIE GAUSSA-KRÜGERA STOSOWANE OBECNIE W POLSCE, W PAŃSTWOWYCH PRACACH POMIAROWYCH I KARTOGRAFICZNYCH

1. Uwagi ogólne

Przy obiorze najodpowiedniejszego odwzorowania dla celów obliczeń wyników triangulacji państwowej i opracowania kartograficznego mapy gospodarczej kraju, w skali podstawowej 1 : 10,000 i większych, należało uwzględnić następujące, zasadnicze warunki:

1) Ograniczenie do minimum prac obliczeniowych związanych z wyrównaniem sieci triangulacyjnych niższego rzędu i dowiązaniem do wymienionych sieci, pomiarów szczegółowych.

2) Ograniczenie do minimum ilości niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich jednolitego odwzorowania.

3) Praktyczne wyeliminowanie wpływu zniekształceń odwzorawczych, na bezpośrednie wyniki pomiarów kartometrycznych, dokonywanych na mapach 1 : 10 tys. i 1 : 5 tys. oraz zapewnienie jaknajprostszego wykorzystywania wyników pomiarów polowych i zdjęć lotniczych, do kartograficznego opracowania wymienionych map.

4) Jaknajłatwiejsze wykorzystanie istniejących materiałów przedwojennych, dotyczących triangulacji niemieckiej na obszarze Ziemi Odzyskanych oraz triangulacji polskiej na ziemiach dawnych.

5) Uwzględnienie możliwości łatwego dowiązania do sieci triangulacyjnych Związku Radzieckiego i Niemiec.

Całkowite spełnienie wszystkich postawionych tu warunków było trudne.

Nasuwały się następujące warianty, które należało przeanalizować i dokonać wyboru najwłaściwszego rozwiązania, zapewniającego wypełnienie maksymalnej ilości warunków:

1) Przyjąć dla całego kraju odwzorowanie w jakim były obliczane przed wojną wyniki triangulacji państwowej, ze względu na łatwość wykorzystania ocalałych materiałów pomiarowych i obliczeniowych.

2) Przyjąć dla całego kraju odwzorowanie stosowane do obliczeń państwowej triangulacji niemieckiej, ze względu na bogaty materiał pomiarowy na terenie Ziem Odzyskanych.

3) Przyjąć odwzorowanie umożliwiające wykonywanie obliczeń wyników triangulacji oraz opracowanie arkuszy sekcyjnych mapy 1:10 tys. i 1:5 tys., w jednym układzie współrzędnych prostokątnych płaskich, dla całego obszaru kraju (w szczególności mogło tu wchodzić w rachubę, odpowiednio przystosowane, odwzorowanie Roussille'a lub odwzorowanie Lamberta-Gaussa).

4) Przyjąć odwzorowanie stożkowe Lamberta-Gaussa z podziałem obszaru kraju na kilka pasów równoleżnikowych i zastosowaniem tyłuż niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich.

5) Przyjąć odwzorowanie Gaussa-Krügera, przystosowując je w możliwie maksymalnym stopniu do założonych warunków technicznych.

Po szczegółowym przeanalizowaniu zagadnienia, zdecydowano przyjąć odwzorowanie Gaussa-Krügera, z podziałem obszaru kraju na trzystopniowe pasy południkowe i współczynnika $m_0 = 0,999\ 935$.

Bliższe szczegóły dotyczące przyjętego odwzorowania oraz wpływu wymienionego współczynnika na wielkość i rozkład zniekształceń odwzorowawczych — omówione są w dalszej części niniejszego paragrafu. Nadmienię tu jeszcze, że przyjęte przez Główny Urząd Pomiarów Kraju odwzorowanie, nosi nazwę w nomenklaturze urzędowej: „Odwzorowanie południkowe-wiernokątne” i pod tą nazwą spotka je czytelnik w „Przepisach o pomiarach Kraju”.

2. Współczynnik m_0 oraz jego wpływ na zniekształcenia odwzorowawcze.

Jak wiemy, skala liniowa i pól, w południku środkowym odwzorowania, są równe jedności. W miarę oddalania się od południka środkowego, wymienione skale rosną coraz bardziej, powodując coraz większą deformację obrazu, w porównaniu z jego oryginałem. Zjawisko to ilustruje tabl. 6, zawierająca wielkości

skal i zniekształceń odwzorowawczych (przy średnim promieniu krzywizny — r_0 , obliczonym dla $\varphi_0 = 52^\circ$), jako funkcji odległości od obrazu południka środkowego, w granicach trzystopniowych pasów południkowych.

T A B E L A 6

y w km	Skale liniowe i pól		Zniekształcenia liniowe i pól		Przeciętne zniekształcenia	
	m	p	m — 1	p — 1	na 1 km w cm	na 1 km ² w m ²
0	1,000 000	1,000 000	0,000 000	0,000 000	0,—	0
10	1,000 001	1,000 002	0,000 001	0,000 002	0,1	2
20	1,000 005	1,000 010	0,000 005	0,000 010	0,5	10
30	1,000 011	1,000 022	0,000 011	0,000 022	1,1	32
40	1,000 020	1,000 039	0,000 020	0,000 039	2,0	39
50	1,000 031	1,000 061	0,000 031	0,000 061	3,1	61
60	1,000 044	1,000 088	0,000 044	0,000 088	4,4	88
70	1,000 060	1,000 120	0,000 060	0,000 120	6,0	120
80	1,000 079	1,000 157	0,000 079	0,000 157	7,9	157
90	1,000 099	1,000 199	0,000 099	0,000 199	9,9	199
100	1,000 123	1,000 245	0,000 123	0,000 245	12,3	245
110	1,000 148	1,000 297	0,000 148	0,000 297	14,8	297

Można uzyskać bardziej równomierny rozkład zniekształceń i znacznie zmniejszyć ich maksymalne wartości, w granicach poszczególnych pasów południkowych, mnożąc współrzędne prostokątne płaskie wszystkich punktów podlegających odwzorowaniu, przez odpowiednio dobrany współczynnik m_0 , stały dla wszystkich układów współrzędnych odniesionych do wymienionych pasów południkowych. Dzięki wprowadzeniu współczynnika m_0 , otrzymujemy również odwzorowanie wiernokątne, lecz o odmiennym od pierwotnego rozkładzie i wielkości zniekształceń. Szczególnie korzystny rozkład zniekształceń uzyskamy, żądając aby odchylenia od jedności skal liniowych występujących w obrazach punktów przecięcia odpowiednio dobranego równoleżnika z południkami

skrajnymi i środkowym, były jednakowe. Opierając się na wymienionych założeniach i uwzględniając wzór (24), podany w § 4, otrzymuje się następujący wzór do obliczenia współczynnika m_0 :

$$m_0 = 1 - \frac{\Delta \lambda_1^2}{4\rho^2} \cos^2 \varphi_1 (1 + \eta_1^2)$$

Przyczym:

$\Delta \lambda_1$ — oznacza różnicę długości geograficznych, południka skrajnego i środkowego, danego pasa południkowego.

φ_1 — oznacza szerokość geograficzną równoleżnika, dla którego obliczony współczynnik m_0 przyjmuje się jako wielkość stałą dla obszaru podlegającego odwzorowaniu. Największe korzyści daje obiór równoleżnika, wzdłuż którego wymieniony obszar jest najbardziej rozciągnięty.

Dla obszaru Polski najkorzystniej jest przyjąć współczynnik m_0 obliczony dla środkowego równoleżnika $\varphi_1 = 52^\circ$. Zakładając trzystopniowe pasy południkowe tj. $\Delta \lambda_1 = 5400''$, otrzymuje się następującą wielkość współczynnika m_0 :

$$m_0 = 0,999\,935$$

Łatwo jest dowieść, że skale liniowe, występujące w tak uzyskanym odwzorowaniu, oblicza się na podstawie skal liniowych odwzorowania pierwotnego, mnożąc je przez współczynnik m_0 . Podobnie otrzymuje się skale pól, jako iloczyn skal pól odwzorowania pierwotnego i współczynnika m_0 w drugiej potęgze.

Oznaczając skalę liniową w odwzorowaniu o współczynniku m_0 — symbolem m_1 , skalę pól — symbolem p_1 , podane wyżej twierdzenie można napisać w postaci następującej:

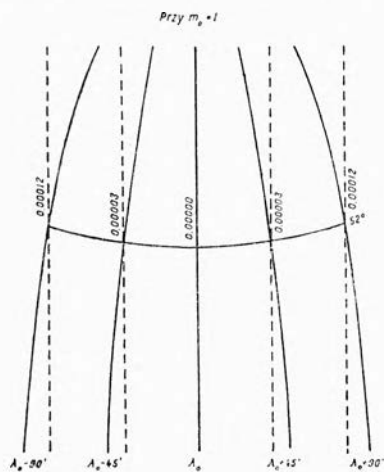
$$m_1 = m_0 \cdot m$$

$$p_1 = m_0^2 \cdot p$$

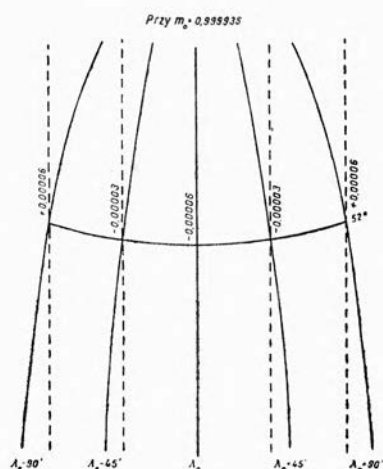
Wielkości zniekształceń odwzorowawczych, występujących w granicach trzystopniowego pasa południkowego przy współczynniku $m_0 = 0,999\,935$ (przy średnim promieniu krzywizny r_0 obliczonym, jak poprzednio, dla $\varphi_0 = 52^\circ$), podane są w tab. 7.

T A B E L A 7

Y_0 w km	Skale liniowe i pól		Zniekształcenia liniowe i pól		Przeciętne zniekształcenia	
	m_1	p_1	$m_1 - 1$	$p_1 - 1$	na 1 km w cm	na 1 km ² w m ²
0	0,999 935	0,999 870	- 0,000 065	- 0,000 130	- 6,5	- 130
10	0,999 936	0,999 872	- 0,000 064	- 0,000 128	- 6,4	- 128
20	0,999 940	0,999 880	- 0,000 060	- 0,000 120	- 6,0	- 120
30	0,999 946	0,999 892	- 0,000 054	- 0,000 108	- 5,4	- 108
40	0,999 955	0,999 909	- 0,000 045	- 0,000 091	- 4,5	- 91
50	0,999 966	0,999 931	- 0,000 034	- 0,000 069	- 3,4	- 69
60	0,999 979	0,999 958	- 0,000 021	- 0,000 042	- 2,1	- 42
70	0,999 995	0,999 990	- 0,000 005	- 0,000 010	- 0,5	- 10
80	1,000 014	1,000 027	+ 0,000 014	+ 0,000 027	+ 1,4	+ 27
90	1,000 034	1,000 069	+ 0,000 034	+ 0,000 069	+ 3,4	+ 69
100	1,000 058	1,000 115	+ 0,000 058	+ 0,000 115	+ 5,8	+ 115
110	1,000 084	1,000 167	+ 0,000 084	+ 0,000 167	+ 8,4	+ 167



Rys.13



Rys.14

Jak widać, wyprowadzenie współczynnika m_0 wpłynęło korzystnie na rozkład i wielkość zniekształceń, w granicach przyjętych pasów południkowych. Maksymalne wielkości zniekształceń liniowych i powierzchniowych, występujących na skraju pasa, uległy

blisko dwukrotnemu zmniejszeniu; bezwzględne zaś ich wartości zostały zrównane z takimiż wartościami zniekształceń w południku środkowym wymienionego pasa. Bezwzględne wartości zniekształceń w środku pasów półtorastopniowych, są w obu wypadkach sobie równe

Ilustrują to rys. 13 i 14, które mogą być uzupełnieniem tabl. 6 i 7.

Liniami przerywanymi nakreślono linie równych zniekształceń, które w omawianym odwzorowaniu mają kierunek równoległy do obrazów południków środkowych poszczególnych pasów. Obok linii równych zniekształceń, wypisane są wielkości zniekształceń liniowych, przy współczynniku $m_0 = 1$ oraz współczynniku $m_0 = 0,999\ 935$.

3. Współrzędne punktu w odwzorowaniu

Współrzędne prostokątne uzyskane z pomnożenia współrzędnych prostokątnych płaskich punktu w odwzorowaniu przez współczynnik m_0 , różny od jedności, nazwiemy współrzędnymi zredukowanymi i oznaczmy, dla odróżnienia od współrzędnych Gaussa-Krügera przy $m_0 = 1$, symbolami x_0 i y_0 . Mając zatem obliczone współrzędne x i y przy współczynniku $m_0 = 1$, za pomocą omówionych poprzednio wzorów, obliczamy współrzędne x_0 i y_0 w odwzorowaniu południkowym - wiernokątnym, korzystając z formuł następujących:

$$x_0 = 0,999\ 935 \cdot x$$

$$y_0 = 0,999\ 935 \cdot y$$

Mając dane x_0 i y_0 w odwzorowaniu południkowym - wiernokątnym, można obliczyć x i y w odwzorowaniu Gaussa, z formuł odwrotnych:

$$x = \frac{x_0}{0,999\ 935}$$

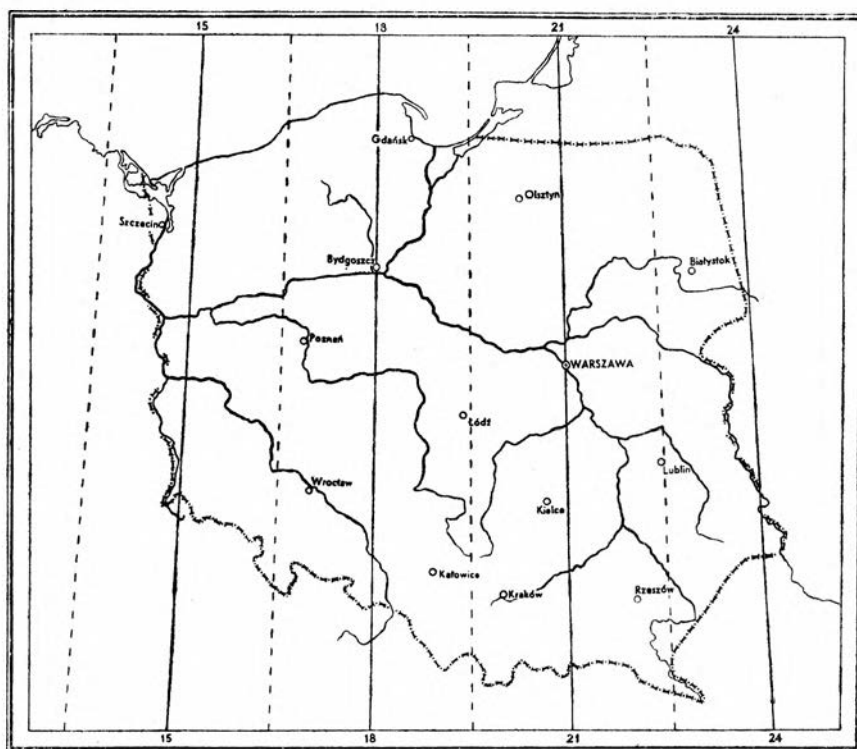
$$y = \frac{y_0}{0,999\ 935}$$

4. Układy współrzędnych prostokątnych

Obszar Polski został podzielony na cztery trzystopniowe pasy południkowe, a zatem mamy cztery niezależne układy współrzędnych prostokątnych płaskich, o osiach odciętych pokrywających się z obrazami południków o długościach geograficznych:

$$15^0, 18^0, 21^0 \text{ i } 24^0$$

na wschód od Greenwich, jak ilustruje rys. 15.



południki środkowe

Układ 3^oych pasów południkowych
obowiązujący obecnie w Polsce

południki skrajne

Rys.15

Poszczególne układy współrzędnych można oznaczyć kolejno numerami od 1 do 4.

Kierunek północny jest kierunkiem dodatnim osi odciętych, kierunek wschodni — dodatnim kierunkiem osi rzędnych. Wymienionym układom, od największych miast leżących w pobliżu południków osiowych, możnaby nadać nazwy następujące:

1	—	szczeciński,	o	osi	odciętych	będącej	obrazem	południka	15 ⁰
2	—	bydgoski,	"	"	"	"	"	"	18 ⁰
3	—	warszawski,	"	"	"	"	"	"	21 ⁰
4	—	białostocki,	"	"	"	"	"	"	24 ⁰

5. Współrzędne ostateczne

Współrzędne ostateczne, odwzorowania południkowo-wiernokątnego, podaje się w sposób analogiczny do przyjętego w Niemczech, a mianowicie:

a) Odcięte ostateczne X — liczy się od obrazu równika tj. przyjmuje się, że są one równe współrzędnym zredukowanym. Analitycznie wyrazi się to za pomocą wzoru:

$$X = x_0$$

b) Rzędne ostateczne Y — otrzymuje się dodając do rzędnych zredukowanych stałą wartość 500 000 m; ponadto przed każdą otrzymaną w ten sposób rzędną pisze się liczbę równą $\frac{1}{3}$ długości geograficznej południka środkowego, w celu jednoznacznego określenia położenia punktu w odpowiednim układzie, bez potrzeby podawania długości geograficznej południka środkowego. Związek pomiędzy rzędną ostateczną i rzędną zredukowaną, można wyrazić następująco:

$$Y = \eta + y_0$$

i odwrotnie:

$$y_0 = Y - \eta$$

Wartości η , dla poszczególnych układów współrzędnych, podane są w tabeli 8-ej.

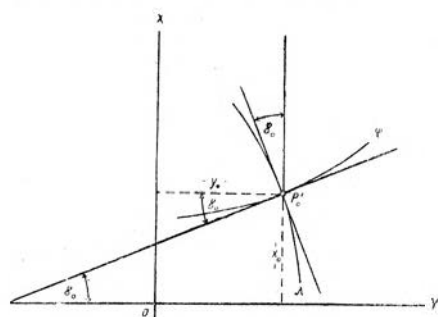
T A B E L A 8

Długości geograficzne południków środkowych (w stopniach)	Nazwy układów	η (w metrach)
15	szczeciński	5 500 000
18	bydgoski	6 500 000
21	warszawski	7 500 000
24	białostocki	8 500 000

Wymienione formuły mają zastosowanie przy przeliczaniu współrzędnych geograficznych punktów elipsoidy, na współrzędne prostokątne płaskie odwzorowania południkowo-wiernokątnego.

Przy obliczaniu współrzędnych prostokątnych punktów sieci niższych rzędów, na podstawie współrzędnych ostatecznych punktów sieci nawiazania, te pierwsze otrzymuje się od razu w formie ostatecznej.

6. Obliczanie zbieżności południków w odwzorowaniu południkowo-wiernokątnym.



Rys. 16

Rys. 16-y przedstawia obraz południka λ i równoleżnika φ punktu P , w odwzorowaniu południkowym wiernokątnym.

Obraz punktu P określony jest, na płaszczyźnie odwzorowania, przy pomocy współrzędnych prostokątnych x_0 i y_0 .

Zbieżność południków w punkcie P_0' , oznaczmy symbolem γ_0 . Jak wiadomo, tangens

kąta γ_0 jest równy stosunkowi przyrostów odciętej i rzędnej punktu P_0' , leżącego na obrazie równoleżnika φ , czyli:

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{d x_0}{d y_0}$$

Ponieważ:

$$x_0 = m_0 x$$

$$y_0 = m_0 y$$

więc:

$$d x_0 = m_0 \cdot d x$$

$$d y_0 = m_0 \cdot d y$$

Podstawiając na miejsce przyrostów odciętej i rzędnej punktu P_0' otrzymane wartości, dostaniemy:

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{m_0 d x}{m_0 d y} = \frac{d x}{d y} = \operatorname{tg} \gamma$$

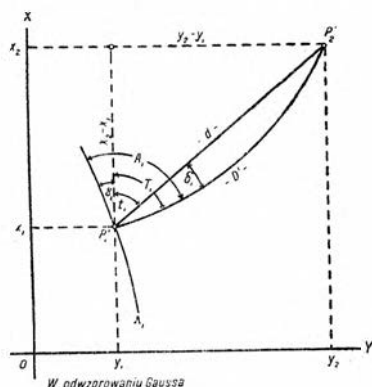
skąd ostatecznie:

$$\gamma_0 = \gamma$$

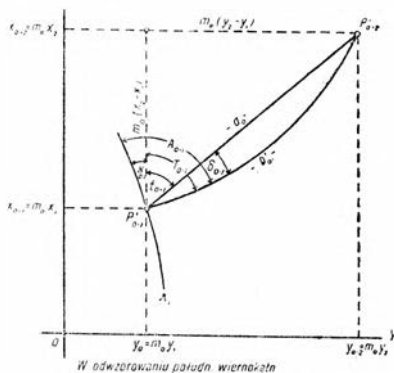
Widzimy więc, że zbieżność południków w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, jest równa zbieżności południków w odwzorowaniu Gaussa. Dla obliczenia zatem zbieżności południków w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, należy posługiwać się wzorami podanymi i omówionymi w rozdziałach poprzednich. Pamiętać jednak należy aby, posługując się wzorami służącymi do obliczania zbieżności południków na podstawie danych współrzędnych prostokątnych płaskich punktu w odwzorowaniu, na miejsce tych ostatnich wprowadzić wartości $\frac{x_0}{m_0}$ i $\frac{y_0}{m_0}$, a nie x_0 i y_0 .

7. Obliczanie redukcji kątowych w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym

Wyobraźmy sobie na powierzchni elipsoidy: dwa punkty P_1 i P_2 oraz linię geodezyjną D — łączącą wymienione punkty. Rys. 17 i 18 przedstawiają: obrazy punktów P_1 i P_2 , obrazy linii geodezyjnej D , obrazy południka λ_1 punktu P_1 oraz proste łączące obrazy punktów P_1 i P_2 — odpowiednio w odwzorowaniu Gaussa i odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym.



Rys. 17



Rys. 18

Oznaczmy redukcję kierunku $P_1 P_2$ w odwzorowaniu Gaussa, symbolem δ_1 , redukcję zaś wymienionego kierunku w odwzorowaniu południkowym-wiernok. sym. δ_{0-1} . Z rys. 17-go widać, że:

$$\delta_1 = A_1 - (\gamma_1 + t_1)$$

na podstawie zaś rys. 18-go można napisać:

$$\delta_{0-1} = A_{0-1} - (\gamma_{0-1} + t_{0-1})$$

Zbadajmy wzajemny stosunek wielkości: A_1 i A_{0-1} , γ_1 i γ_{0-1} oraz t_1 i t_{0-1} , występujących po prawej stronie tych równań.

Dzięki wiernokątności odwzorowań, azymuty geograficzne A_1 i A_{0-1} obrazu linii geodezyjnej, są równe azymutowi geograficznemu linii geodezyjnej na elipsoidzie. Wnioskujemy stąd, że:

$$A_{0-1} = A_1$$

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w punkcie 6-ym niniejszego paragrafu możemy napisać, że:

$$\gamma_{0-1} = \gamma_1$$

Dalej na podstawie rys. 17 i 18 można napisać, że:

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

oraz:

$$\operatorname{tg} t_{0-1} = \frac{Y_{0-2} - Y_{0-1}}{X_{0-2} - X_{0-1}} = \frac{m_0 (Y_2 - Y_1)}{m_0 (X_2 - X_1)} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

wynika stąd równość:

$$t_{0-1} = t_1$$

W rezultacie dochodzimy do wniosku, że redukcja kierunku w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, jest równa redukcji kierunku w odwzorowaniu Gaussa, a więc napiszemy:

$$\delta_{0-1} = \delta_1$$

Dla obliczenia więc redukcji kierunku, w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, należy posługiwać się wzorami podanymi i omówionymi w rozdziałach poprzednich.

Zbadajmy jaki wpływ będzie miało na wynik obliczenia redukcji kierunku, zastąpienie we wzorach:

$$\delta_1'' = 0,000\,8439 (x_2 - x_1) (2 y_1 + y_2)$$

$$\delta_2'' = 0,000\,8439 (x_2 - x_1) (y_1 + 2 y_2)$$

współrzędnych Gaussa, współzrędnymi zredukowanymi odwzorowania południkowego-wiernokątnego. W tym celu, na miejsce współrzędnych prostokątnych punktów P_1' i P_2' w odwzorowaniu Gaussa, wprowadzamy następujące wartości współrzędnych tychże punktów, w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym.

$$X_{0-1} = 0,999\ 935 \cdot X_1$$

$$X_{0-2} = 0,999\ 935 \cdot X_2$$

$$Y_{0-1} = 0,999\ 935 \cdot Y_1$$

$$Y_{0-2} = 0,999\ 935 \cdot Y_2$$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu, otrzymujemy:

$$\delta_1'' = 0,000\ 8438 (x_2 - x_1) (2 y_1 + y_2)$$

$$\delta_2'' = 0,000\ 8438 (x_2 - x_1) (y_1 + 2 y_2)$$

Przy różnicy odciętych dochodzącej do 50 km oraz na skraju trzystopniowego pasa południkowego, różnica w obliczeniu redukcji kierunku — wynikająca z zastąpienia współrzędnych prostokątnych Gaussa, współzrędnymi zredukowanymi odwzorowania południkowego-wiernokątnego—nie przekracza $0'',001$.

Dla zorientowania czytelnika w wielkościach redukcji kątowych, występujących na obszarze trzystopniowego pasa południkowego w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, zamieszczam poniżej tabelę zawierającą te wielkości, dla różnic odciętych co 1 km oraz rzędnych co 10 km, licząc od obrazu południka środkowego.

Tabela zawiera tylko dodatnie wartości redukcji kątowych (wyrażone w sekundach łuku). Pamiętać jednak należy, że znak redukcji zależy od znaku różnicy odciętych i znaku rzędnych.

Do obliczenia podanych w tabeli redukcji kątowych posługiwano się wzorem uproszczonym:

$$\delta'' = 0,0025 \cdot \Delta x \cdot y_s$$

T A B E L A 9

Δx w km	y w km											
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,00	0,02	0,05	0,08	0,10	0,12	0,15	0,18	0,20	0,22	0,25	0,28
2	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
3	0,00	0,08	0,15	0,22	0,30	0,38	0,45	0,52	0,60	0,68	0,75	0,82
4	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10
5	0,00	0,12	0,25	0,38	0,50	0,62	0,75	0,88	1,00	1,12	1,25	1,38
6	0,00	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35	1,50	1,65
7	0,00	0,18	0,35	0,52	0,70	0,88	1,05	1,22	1,40	1,58	1,75	1,92
8	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
9	0,00	0,22	0,45	0,68	0,90	1,12	1,35	1,58	1,80	2,02	2,25	2,48
10	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75
11	0,00	0,28	0,55	0,82	1,10	1,38	1,65	1,92	2,20	2,48	2,75	3,02
12	0,00	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00	3,30
13	0,00	0,32	0,65	0,98	1,30	1,62	1,95	2,28	2,60	2,92	3,25	3,58
14	0,00	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15	3,50	3,85
15	0,00	0,38	0,75	1,12	1,50	1,88	2,25	2,62	3,00	3,38	3,75	4,12

Kwestję uwzględniania redukcji kątów, przy wyrównywaniu sieci triangulacyjnych niższych rzędów, określą przepisy pomiarowe G. U. P. K. Pozwolę sobie jednak wyrazić pogląd, że wprowadzanie do obliczeń wyników triangulacji III i IV rzędu wspomnianych redukcji, miałyby się z celem praktycznym, jakiemu triangulacja niższych rzędów ma służyć. Wprowadzanie do obliczeń, podanych w tablicy 9, redukcji kątów, byłoby konsekwencją nadmiernych wymagań dokładnościowych postawionych sieciom niższych rzędów, których celem powinno być dostarczenie nawiązania dla pomiarów szczegółowych oraz umożliwienie ich kartograficznego opracowania w jednolitym odwzorowaniu, dla całego obszaru państwa.

Należy pamiętać, że stawianie nadmiernych wymagań dokładnościowych pracom pomiarowym, których głównym celem powinno być dostarczenie podkładu dla planowania gospodarczego i jego realizacji w terenie, jest nie tylko zbędne, lecz nawet szkodliwe.

8. Redukcja wielkości liniowych w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym

Powróćmy jeszcze do rys. 17 i 18 na str. 65. Długość linii prostej łączącej punkty P_1' i P_2' , w odwzorowaniu Gaussa, można obliczyć ze wzoru:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Długość zaś linii prostej łączącej punkty P'_{0-1} i P'_{0-2} , w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, ze wzoru:

$$d_0 = \sqrt{(x_{0-2} - x_{0-1})^2 + (y_{0-2} - y_{0-1})^2}$$

ponieważ:

$$(x_{0-2} - x_{0-1}) = m_0 (x_2 - x_1)$$

$$(y_{0-2} - y_{0-1}) = m_0 (y_2 - y_1)$$

więc:

$$d_0 = \sqrt{m_0^2 (x_2 - x_1)^2 + m_0^2 (y_2 - y_1)^2} = m_0 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

czyli:

$$d_0 = m_0 \cdot d$$

i odwrotnie:

$$d = \frac{d_0}{m_0}$$

W rezultacie doszliśmy do wniosku, że długość linii prostej łączącej obrazy dwóch punktów w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, jest równa długości linii prostej łączącej obrazy tych samych punktów w odwzorowaniu Gaussa, pomnożonej przez współczynnik $m_0 = 0,999935$.

Zbadajmy jaki wpływ na wynik obliczeń będzie miało zastąpienie we wzorach:

$$d = D [1 + 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)]$$

$$D = d [1 - 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)]$$

współrzędnych prostokątnych Gaussa, współzrędnymi zredukowanymi odwzorowania południkowego-wiernokątnego. W tym celu, rzędne y_1 i y_2 zastępujemy rzędnymi:

$$Y_{0-1} = 0,999\ 935\ Y_1$$

$$Y_{0-2} = 0,999\ 935\ Y_2$$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu, otrzymujemy:

$$d = D [1 + 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)]$$

$$D = d [1 - 0,000\ 000\ 004\ 09 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)]$$

Doszliśmy więc do wniosku, że bez wpływu na dokładność obliczeń, we wzorach służących do zredukowania linii geodezyjnej na płaszczyznę, w odwzorowaniu Gaussa (i odwrotnie), można na miejsce współrzędnych prostokątnych Gaussa, wprowadzić współzrędnne zredukowane odwzorowania południkowego-wiernokątnego.

Niżej podane tabele zawierają, zredukowane na płaszczyznę w odwzorowaniu Gaussa i odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, długości linii geodezyjnych w granicach od 1 km do 10 km, na obszarze trzystopniowych pasów południkowych. Do obliczenia podanych w tabelach wielkości, korzystano ze wzorów:

$$d = D (1 + 0,000\ 000\ 012\ 3 \cdot Y_s^2)$$

$$d_0 = 0,999\ 935 \cdot d$$

T A B E L A 10

y w km	Zredukowane na płaszczyznę, w odwzorowaniu Gaussa, linie geodezyjne o długości:									
	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	5000 m	6000 m	7000 m	8000 m	9000 m	10000 m
0	1000,00	2000,00	3000,00	4000,00	5000,00	6000,00	7000,00	8000,00	9000,00	10000,00
10	1000,00	2000,00	3000,00	4000,00	5000,01	6000,01	7000,01	8000,01	9000,01	10000,01
20	1000,00	2000,01	3000,01	4000,02	5000,02	6000,03	7000,03	8000,04	9000,04	10000,05
30	1000,01	2000,02	3000,03	4000,04	5000,06	6000,07	7000,08	8000,09	9000,10	10000,11
40	1000,02	2000,04	3000,06	4000,08	5000,10	6000,12	7000,14	8000,16	9000,18	10000,20
50	1000,03	2000,06	3000,09	4000,12	5000,15	6000,18	7000,22	8000,25	9000,28	10000,31
60	1000,04	2000,09	3000,13	4000,18	5000,22	6000,27	7000,31	8000,35	9000,40	10000,44
70	1000,06	2000,12	3000,18	4000,24	5000,30	6000,36	7000,42	8000,48	9000,54	10000,60
80	1000,08	2000,16	3000,24	4000,31	5000,39	6000,47	7000,55	8000,63	9000,71	10000,79
90	1000,10	2000,20	3000,30	4000,40	5000,50	6000,60	7000,70	8000,80	9000,90	10001,00
100	1000,12	2000,25	3000,37	4000,49	5000,62	6000,74	7000,86	8000,98	9001,11	10001,23
110	1000,15	2000,30	3000,45	4000,60	5000,74	6000,89	7001,04	8001,19	9001,34	10001,49

T A B E L A 11

y w km	Zredukowane na płaszczyznę, w odwzorowaniu południkowym-wiernokątnym, linie geodezyjne o długości:									
	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	5000 m	6000 m	7000 m	8000 m	9000 m	10000 m
0	999,94	1999,87	2999,80	3999,74	4999,68	5999,61	6999,54	7999,48	8999,42	9999,35
10	999,94	1999,87	2999,80	3999,74	4999,68	5999,61	6999,55	7999,49	8999,42	9999,36
20	999,94	1999,88	2999,82	3999,76	4999,70	5999,64	6999,58	7999,52	8999,46	9999,40
30	999,95	1999,89	2999,84	3999,78	4999,73	5999,68	6999,62	7999,57	8999,51	9999,46
40	999,95	1999,91	2999,86	3999,82	4999,77	5999,73	6999,68	7999,64	8999,59	9999,55
50	999,97	1999,93	2999,90	3999,86	4999,83	5999,79	6999,76	7999,73	8999,69	9999,66
60	999,98	1999,96	2999,94	3999,92	4999,90	5999,88	6999,85	7999,83	8999,81	9999,79
70	999,99	1999,99	2999,99	3999,98	4999,98	5999,97	6999,97	7999,96	8999,96	9999,95
80	1000,01	2000,03	3000,04	4000,05	5000,07	6000,08	7000,10	8000,11	9000,12	10000,14
90	1000,03	2000,07	3000,10	4000,14	5000,17	6000,21	7000,24	8000,28	9000,31	10000,35
100	1000,06	2000,12	3000,17	4000,23	5000,29	6000,35	7000,41	8000,46	9000,52	10000,58
110	1000,08	2000,17	3000,25	4000,33	5000,42	6000,50	7000,59	8000,67	9000,75	10000,84

Zasady wprowadzania redukcji liniowych, do obliczeń wyników triangulacji niższych rzędów, określają przepisy pomiarowe G. U. P. K. Wydaje się wszakże, że przy triangulacji III i IV rzędu uwzględnianie wymienionych redukcji, w granicach 3⁰-ych pasów południkowych, jest zbędne.

9. Wzajemne zachodzenie pasów sąsiednich

Ze względu na wprowadzenie czterech pasów o południkach środkowych: 15⁰, 18⁰, 21⁰ i 24⁰, a więc czterech niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich o osiach pokrywających się z obrazami wymienionych południków, powstaje kwestja wzajemnego zachodzenia sąsiednich pasów, w obrębie trzech południków skrajnych o długościach geograficznych: 16⁰ 30', 19⁰ 30' i 22⁰ 30'.

Rozważając szerokość pasów wzajemnego zachodzenia układów sąsiednich, należy mieć na względzie dwa zasadnicze momenty:

1) Wypełnienie warunków technicznych wpływających z potrzeby wzajemnego nawiązania punktów sieci triangulacyjnych oraz dowiązania do sieci niższych rzędów, pomiarów szczegółowych.

2) Maksymalne zaoszczędzenie ilości pracy obliczeniowej, związanej z potrzebą podania współrzędnych punktów sieci triangulacyjnych, w obu sąsiednich układach.

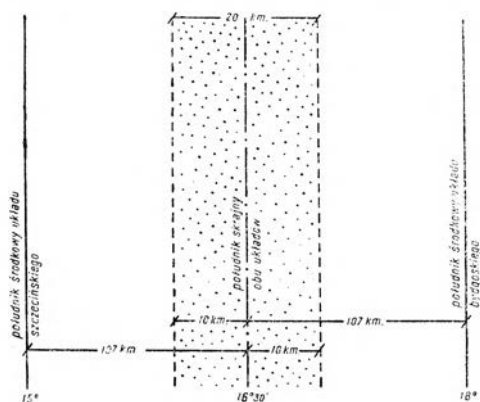
Rozważając oba podane momenty wydaje się, że przyjęcie jako podstawy do ustalenia szerokości pasów wzajemnego zachodzenia układów sąsiednich, długości boków sieci triangulacyjnych I i II rzędu — byłoby niecelowe, ponieważ nadmiernie zwiększyłoby szerokość wymienionych pasów, powodując tym samym ogromną ilość zbędnej pracy obliczeniowej związanej z obliczaniem punktów sieci III i IV rzędu w obu sąsiednich układach. Wyrównanie zresztą sieci I i II rzędu, przeprowadza się na innych podstawach i niezależnie od sieci III i IV rzędu.

Wydaje się, że jako podstawę do ustalenia szerokości omawianych pasów zachodzenia, należy przyjąć długość boków sieci III i IV rzędu, co również zaspokoi w zupełności potrzeby triangulacji jednorodnej.

Ponieważ długości boków sieci triangulacyjnej III rzędu na ogół nie przekraczają 10 km, wydaje się, uwzględniając wypadki

najbardziej niekorzystnego rozłożenia punktów sieci na skraju pasów południkowych, że szerokość pasów wzajemnego zachodzenia układów sąsiednich, nie powinna

przekraczać 20 km; to znaczy po 10 km w obie strony od południków skrajnych, układów sąsiednich (rysunek 19).



Rys.19

Współrzędne punktów, leżących w obszarze wymienionych pasów 20 km, powinny być podawane w obu sąsiednich układach współrzędnych prostokątnych płaskich.

10. Przeliczanie współrzędnych odwzorowania południkowego-wiernokątnego z jednego układu sąsiedniego na drugi

Przeliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich odwzorowania południkowego-wiernokątnego, z jednego układu na drugi, może być wykonane:

1) W sposób bezpośredni—korzystając ze wzorów omówionych w paragrafie 11-ym.

2) W sposób pośredni—przeliczając dane współrzędne prostokątne płaskie na współrzędne geograficzne, poczem te ostatnie przelicza się na współrzędne prostokątne płaskie w układzie sąsiednim. W pierwszym wypadku, mając dane współrzędne ostateczne X i Y odwzorowania południkowego — wiernokątnego, należy zamienić je na współrzędne odwzorowania Gaussa, korzystając z formuł:

$$x = \frac{X}{0,999935}$$

$$y = \frac{Y - \eta}{0,999935}$$

Następnie po obliczeniu współrzędnych prostokątnych x_1 i y_1 , w układzie sąsiednim, przy pomocy wzorów:

$$x_1 = x_0 + \Delta x - (1 - \cos 2\gamma_0) \Delta x - \sin 2\gamma_0 \cdot \Delta y + s_2 \cdot r^2 \cos(2v + u_2)$$

$$y_1 = -y_0 + \Delta y + \sin 2\gamma_0 \cdot \Delta x - (1 - \cos 2\gamma_0) \Delta y + s_2 \cdot r^2 \sin(2v + u_2)$$

należy obliczone współrzędne x_1 i y_1 zamienić na współrzędne ostateczne X_1 i Y_1 , odwzorowania południkowego-wiernokątnego, korzystając z formuł:

$$X_1 = 0,999\,935 \cdot x_1$$

$$Y_1 = \eta + 0,999\,935 \cdot y_1$$

W drugim wypadku należy współrzędne ostateczne X i Y , odwzorowania południkowego-wiernokątnego, zamienić na współrzędne zredukowane x_0 i y_0 , korzystając z formuł:

$$x_0 = X$$

$$y_0 = Y - \eta$$

Współrzędne x_0 i y_0 przeliczyć na współrzędne geograficzne φ i λ , posługując się tablicą II, następnie współrzędne geograficzne φ i λ przeliczyć na współrzędne prostokątne płaskie x_{0-1} i y_{0-1} w układzie sąsiednim, posługując się tablicą I. Otrzymane współrzędne x_{0-1} i y_{0-1} , zamienić na współrzędne ostateczne przy pomocy formuł:

$$X_1 = x_{0-1}$$

$$Y_1 = \eta + y_{0-1}$$

Wartości η , dla poszczególnych układów współrzędnych, podane są w tabeli 8-ej, na str. 63.

21. Elipsoida odniesienia i punkt przyłożenia

Jako powierzchnia odniesienia została przyjęta elipsoida Bessel'a, styczna do powierzchni geoidy w punkcie „Borowa Góra”. Punkt ten obrany przed wojną przypadkowo, okazał się szczególnie korzystny do przyjęcia go jako punkt podstawowy państwowej sieci triangulacyjnej ponieważ, jak wykazały przeprowadzone ostatnio badania, leży on w strefie zerowych anomalii grawimetrycznych i odchylenia pionu są w nim bliskie zera.

Współrzędne geograficzne punktu „Borowa-Góra” (równe jego współrzędnym astronomicznym), zostały podane w § 14, str. 56.

Elementy elipsoidy Bessel'a, podane są w tab. VII.

T A B L I C E P O M O C N I C Z E

T A B L I C A I

Tablice mnożące, do przeliczania współrzędnych geograficznych φ i λ punktu elipsoidy, na współrzędne prostokątne płaskie x i y jego obrazu, w odwzorowaniu południkowym - wiernokątnym
(przy $m_0 = 0,999\ 935$)

φ	X	5 317 539,569 III 170,594 9,677	— 0,053 + 0,010 — 0,002	483,951 — 1,760 — 0,291	o o o
48°					
do 49°	Y	o o o	74 611,432 — 1 441,966 — 11,335	o o o	— 0,389 — 0,145 + 0,022
φ	X	5 428 719,841 III 189,949 9,633	— 0,046 — 0,016 + 0,017	481,899 — 2,322 — 0,310	o o o
49°					
do 50°	Y	o o o	73 158,130 — 1 464,644 — 11,129	o o o	— 0,512 — 0,127 + 0,010
φ	X	5 539 919,424 III 209,217 9,575	— 0,045 + 0,010 — 0,010	479,267 — 2,934 — 0,282	o o o
50°					
do 51°	Y	o o o	71 682,357 — 1 486,903 — 10,907	o o o	— 0,629 — 0,089 — 0,022
φ	X	5 651 138,216 III 228,372 9,507	— 0,045 + 0,022 — 0,014	476,051 — 3,525 — 0,278	o o o
51°					
do 52°	Y	o o o	70 184,547 — 1 508,721 — 10,669	o o o	— 0,740 — 0,100 — 0,004
φ	X	5 762 376,095 III 247,388 9,427	— 0,038 + 0,005 — 0,004	472,248 — 4,090 — 0,283	o o o
52°					
do 53°	Y	o o o	68 665,156 — 1 530,064 — 10,445	o o o	— 0,844 — 0,084 — 0,008
φ	X	5 873 632,911 III 266,246 9,337	— 0,036 + 0,013 — 0,011	467,876 — 4,674 — 0,270	o o o
53°					
do 54°	Y	o o o	67 124,648 — 1 550,985 — 10,187	o o o	— 0,936 — 0,117 + 0,026
φ	X	5 984 908,495 III 284,920 9,235	— 0,034 + 0,005 — 0,001	462,931 — 5,233 — 0,280	o o o
54°					
do 55°	Y	o o o	65 563,475 — 1 571,401 — 9,961	o o o	— 1,027 — 0,086 + 0,004
φ	X	6 096 202,650 III 303,393 9,119	— 0,030 — 0,008 + 0,014	457,418 — 5,779 — 0,291	o o o
55°					
do 56°	Y	o o o	63 982,113 — 1 591,322 — 9,741	o o o	— 1,109 — 0,073 + 0,002

Przeliczanie współrzędnych geograficznych punktu położonego na elipsoidzie Bessel'a, na współrzędne prostokątne jego obrazu w odwzorowaniu południkowym wiernokątnym ($m_0 = 0,999\ 935$), przy pomocy mnożenia zupełnego tablic

Jeżeli zrezygnować z narzuconej nam przez geodezję niemiecką dokładności ± 1 cm, w przeliczaniu współrzędnych geograficznych φ i λ punktu na elipsoidzie na współrzędne prostokątne x i y obrazu tego punktu w odwzorowaniu i poprzestać na dokładności ± 2 do ± 3 cm, zbliżając się do wymagań geodezji angielskiej i rosyjskiej zakładających dokładność przeliczania ± 10 cm¹⁾ — można zagadnienie przeliczania φ i λ na x i y , dla przyjętego u nas pasa odwzorowania $\pm 1^0,5$ od południka osiowego, rozwiązywać przy pomocy tablicy podanej na str. 81.

Dla przeliczenia współrzędnych geograficznych φ i λ punktu, położonego na elipsoidzie Bessel'a, na współrzędne jego obrazu x i y odniesione do obrazu równika i obrazu południka osiowego, przy założeniach przyjętych przez Główny Urząd Pomiarów Kraju (por. inż. Jan Różycki: Uwagi dotyczące obioru najodpowiedniejszego odwzorowania dla celów obliczeń wyników triangulacji i mapy gospodarczej kraju — Warszawa 1947) — należy:

1) Zestawić tabliczkę potęgową pisząc pod postacią kolumny szereg: $1\ f\ f^2$ oraz pod postacią wiersza szereg: $1\ l\ l^2\ l^3$, gdzie f oznacza wyrażoną w ułamkach stopnia różnicę między szerokością geograficzną przekształcanego punktu, a najbliższą mniejszą szerokością geograficzną wymienioną w tablicy (wielkie liczby), zaś l oznacza wyrażoną w stopniach i jego ułamkach wartość bezwzględną różnicy między długością geograficzną przekształcanego punktu, a długością geograficzną południka przyjętego za osiowy ($15^0, 18^0, 21^0$ lub 24^0) i wypełniając pola takiego „schematu osiowego” iloczynami liczb pierwszej kolumny i pierwszego wiersza, charakteryzujących dane pole.

Taka tabliczka potęgowa: $\overline{P} =$

1	l	l^2	l^3
f	fl	$f l^2$	$f l^3$
f^2	$f^2 l$	$f^2 l^2$	$f^2 l^3$

mieć będzie — np.: dla $\varphi = 52^0\ 30'$

oraz $\lambda = 19^0\ 30'$ t. zn. dla $f = 0,5$

i dla $l = 1,5$ (za południk osiowy przyjęto 18^0) następującą postać:

1	1,50	2,25	3,375
0,5	0,75	1,125	1,6875
0,25	0,375	0,5625	0,84375

¹⁾ por.: I. J. Pranis Praniewicz: Rukowodstvo po uravniatelnyim wycisleniam zapoŋniajuszczej triangulacji II, III i IV klassow — Moskwa 1941, oraz L. I. Komrie: The twin marchant calculating machine and its application to survey problems — London 1943.

2) Dla obliczenia odciętej x należy tabliczkę potęgową $[P]$ pomnożyć w sposób zupełny przez tabliczkę $[x]$, odszukaną w tablicach mnożących dla odpowiedniej szerokości geograficznej, następnie otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować. Dla obliczenia rzędnej y należy tabliczkę potęgową $[P]$ pomnożyć w sposób zupełny przez analogiczną tabliczkę $[y]$ i otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować. (Przez mnożenie zupełne dwóch tablic, rozumiemy mnożenie każdego elementu jednej tablicy przez odpowiadający mu położeniem element drugiej). Wyrazić to można symbolicznie jn.:

$$x = ([P] [x])_{\Sigma} \quad y = ([P] [y])_{\Sigma}$$

W naszym przykładzie liczbowym otrzymalibyśmy, mnożąc przez tabliczki $[x]$ $[y]$ dla 52^0 :

$$x = 5819\ 059,89 \quad y = 101\ 843,27$$

Całe działanie przeprowadza się na arytmetrze w drodze bezpośredniej tzn. bez zapisywania poszczególnych iloczynów. Na arytmetrze dwulicznikowym można oba działania (dla x i y) wykonać łącznie.

Jeżeli współrzędne geograficzne wyrażone są w stopniach i ułamkach dziesiętnych stopnia, zestawienie tabliczki potęgowej jest oczywiście ułatwione. W wypadku gdy współrzędne geograficzne wyrażone są w stopniach, minutach i sekundach, najlepiej zamienić minuty i sekundy na dziesiętne ułamki stopnia, przeprowadzając mnożenie:

minuty przez 0,01666 66667

sekundy przez 0,00027 77778

Liczby w tabliczce potęgowej notujemy ośmiocyfrowo. Pomimo, że dokładność ta jest w stosunku do większości czynników nadmiernie wysoka — postępowanie takie jest ekonomiczniejsze dzięki zupełnej mechanizacji pracy. Zestawienie tabliczki potęgowej sprowadza się do ustawiania w liczniku nastawień liczb pierwszej kolumny i kolejnego mnożenia ich przez liczby pierwszego wiersza.

Podajemy jeszcze jeden, pełnocyfrowy przykład liczbowy zamiany współrzędnych: $\varphi = 48^0\ 11' 30'' .225$, $\lambda = 18^0\ 24' 16'' .236$ ($\lambda_0 = 18^0$)

$$\begin{aligned} f &= 0,01666\ 66667 \times 11 \\ &+ 0,00027\ 77778 \times 30,225 = 0,1917\ 2917 \\ l &= 0,01666\ 66667 \times 24 \\ &+ 0,00027\ 77778 \times 16,236 = 0,4045\ 1000 \end{aligned}$$

$[P] =$	1,0000 0000	0,4045 1000	0,1636 2834	0,0661 8930	$x = 5338\ 933,68$
	0,1917 2917	0,0775 5637	0,0313 7233	0,0126 9042	
	-0,0367 6007	0,0148 6982	0,0060 1499	0,0024 3312	
					$y = 30\ 069,04$

Przy ujemnej różnicy długości geograficznych względem południka osiowego (położenie na zachód od tego południka), przed otrzymaną w wyniku rachunku rzędną y stawiamy znak minus. Pozatem postępowanie rachunkowe zmianie nie ulega.

T A B L I C A I I

Tablice mnożące do przeliczania współrzędnych prostokątnych
płaskich x i y , w odwzorowaniu południkowym — wiernokątnym,
na współrzędne geograficzne φ i λ (przy $m_0 = 0,999935$)

U	φ	47,8391 2719	0,0000 0150	— 0,0077 7850	0,0000 0456
		0,8994 8537	— 0,0000 0149	— 0,0002 4142	— 0,0000 0075
53 ^{sk}		— 0,0000 7058	0,0000 0097	— 0,0000 0579	0,0000 0060
do 54 ^{sk}	I	0	1,3360 4132	— 0,0000 0060	— 0,0001 8800
		0	0,0230 9092	— 0,0000 0945	— 0,0000 0588
		0	0,0005 7800	0,0000 0870	— 0,0000 0575
U	φ	48,7385 4198	0,0000 0097	— 0,0080 2572	0,0000 0441
		0,8993 4427	0,0000 0050	— 0,0002 5310	0,0000 0042
54 ^{sk}		— 0,0000 7022	0,0000 0020	— 0,0000 0495	0,0000 0020
do 55 ^{sk}	I	0	1,3597 1024	— 0,0000 0015	— 0,0001 9962
		0	0,0242 4836	— 0,0000 0420	— 0,0000 1550
		0	0,0006 1992	— 0,0000 0300	0,0000 0150
U	φ	49,6378 1603	0,0000 0167	— 0,0082 8376	0,0000 0504
		0,8992 0383	— 0,0000 0024	— 0,0002 6122	0,0000 0004
55 ^{sk}		— 0,0000 6974	0,0000 0031	— 0,0000 0549	0,0000 0022
do 56 ^{sk}	I	0	1,3845 7852	0,0000 0105	— 0,0002 1362
		0	0,0254 8740	— 0,0000 0165	— 0,0000 1238
		0	0,0006 6128	0,0000 0030	— 0,0000 0125
U	φ	50,5369 5012	0,0000 0174	— 0,0085 5048	0,0000 0530
		0,8990 6439	0,0000 0068	— 0,0002 7300	0,0000 0090
56 ^{sk}		— 0,0000 6938	— 0,0000 0035	— 0,0000 0456	— 0,0000 0035
do 57 ^{sk}	I	0	1,4107 2720	— 0,0000 0030	— 0,0002 2725
		0	0,0268 1012	— 0,0000 0315	— 0,0000 1362
		0	0,0007 0528	0,0000 0210	— 0,0000 0175
U	φ	51,4359 4513	0,0000 0208	— 0,0088 2804	0,0000 0585
		0,8989 2560	— 0,0000 0010	— 0,0002 8161	— 0,0000 0015
57 ^{sk}		— 0,0000 6880	0,0000 0002	— 0,0000 0612	0,0000 0030
do 58 ^{sk}	I	0	1,4382 4260	— 0,0000 0135	— 0,0002 4262
		0	0,0282 2058	— 0,0000 0045	— 0,0000 1650
		0	0,0007 5652	0,0000 0030	— 0,0000 0100
U	φ	52,3348 0193	0,0000 0200	— 0,0091 1577	0,0000 0600
		0,8987 8819	— 0,0000 0046	— 0,0002 9343	0,0000 0028
58 ^{sk}		— 0,0000 6846	0,0000 0042	— 0,0000 0648	0,0000 0010
do 59 ^{sk}	I	0	1,4672 1970	— 0,0000 0150	— 0,0002 6012
		0	0,0297 3428	— 0,0000 0180	— 0,0000 1775
		0	0,0008 0888	0,0000 0300	— 0,0000 0200
U	φ	53,2335 2166	0,0000 0196	— 0,0094 1568	0,0000 0638
		0,8986 5111	0,0000 0074	— 0,0003 0672	0,0000 0055
59 ^{sk}		— 0,0000 6746	— 0,0000 0035	— 0,0000 0636	— 0,0000 0005
do 60 ^{sk}	I	0	1,4977 6286	— 0,0000 0030	— 0,0002 7988
		0	0,0313 5442	— 0,0000 0135	— 0,0000 1900
		0	0,0008 7100	0,0000 0210	— 0,0000 0250
U	φ	54,1321 0531	0,0000 0234	— 0,0097 2876	0,0000 0688
		0,8985 1629	— 0,0000 0044	— 0,0003 1839	— 0,0000 0015
60 ^{sk}		— 0,0000 6698	0,0000 0046	— 0,0000 0822	0,0000 0060
do 61 ^{sk}	I	0	1,5299 8828	0,0000 0045	— 0,0003 0138
		0	0,0330 9810	— 0,0000 0375	— 0,0000 2025
		0	0,0009 3772	0,0000 0270	— 0,0000 0250
U	φ	55,0305 5462	0,0000 0236	— 0,0100 5537	0,0000 0732
		0,8983 8245	— 0,0000 0020	— 0,0003 3351	0,0000 0035
61 ^{sk}		— 0,0000 6626	0,0000 0034	— 0,0000 0822	0,0000 0025
do 62 ^{sk}	I	0	1,5640 2410	— 0,0000 0060	— 0,0003 2412
		0	0,0349 7490	— 0,0000 0480	— 0,0000 2215
		0	0,0010 1108	0,0000 0300	— 0,0000 0275
U	φ	55,9288 7081	0,0000 0250	— 0,0103 9710	0,0000 0792
		0,8982 5003	0,0000 0009	— 0,0003 4934	0,0000 0055
62 ^{sk}		— 0,0000 6530	— 0,0000 0006	— 0,0000 0807	— 0,0000 0015
do 63 ^{sk}	I	0	1,6000 1008	— 0,0000 0240	— 0,0003 4900
		0	0,0369 9530	0,0000 0330	— 0,0000 2862
		0	0,0010 9516	— 0,0000 0060	— 0,0000 0175

Przeliczanie współrzędnych prostokątnych na geograficzne

Rozwiązania zadania odwrotnego: obliczenia szerokości geograficznej φ oraz odniesionej do południka osiowego długości geograficznej l , ze współrzędnych prostokątnych x i y odwzorowania południkowego - wiernokątnego, dokonać można posilując się tablicą II na str. 87. Zamieniamy najpierw wielkości x i y na wielkości U i V mnożąc je przez 1,000 065 005, to znaczy:

$$U = 1,000\,065\,005 \cdot x \quad V = 1,000\,065\,005 \cdot y$$

Poczem postępujemy z wielkościami U i V , które nazywamy dalej „współrzędnymi pomocniczymi”, analogicznie jak w zadaniu poprzednim z szerokością i długością geograficzną. Rozpoczynamy więc od zestawienia tabliczki potęgowej, pisząc pod postacią kolumny szereg: $1\ U_0\ U_0^2$ oraz pod postacią wiersza szereg: $1\ V_0\ V_0^2\ V_0^3$; przyczym U_0 oznacza wyrażoną w setkach kilometrów (oznaczenie sk) różnicę między odciętą pomocniczą U danego punktu, a najbliższą odciętą mniejszą od danej, wyrażającą się całkowitą liczbą setek kilometrów (t. zn. $53^{sk}\ 54^{sk} \dots 62^{sk}$), zaś V_0 oznacza wyrażoną w setkach kilometrów wartość bezwzględną rzędnej pomocniczej V . Mnożąc tę tabliczkę potęgową:

$$\boxed{p} = \begin{array}{cccc} 1 & V_0 & V_0^2 & V_0^3 \\ U_0 & U_0 V_0 & U_0 V_0^2 & U_0 V_0^3 \\ U_0^2 & U_0^2 V_0 & U_0^2 V_0^2 & U_0^2 V_0^3 \end{array}$$

w sposób zupełny przez tabliczki mnożące $\boxed{\varphi}$ oraz $\boxed{l}$ i sumując poszczególne iloczyny — znajdziemy współrzędne geograficzne φ i l , wyrażone w stopniach i ułamkach stopnia: $\varphi = (\boxed{p} \boxed{\varphi})_{\Sigma}, l = (\boxed{p} \boxed{l})_{\Sigma}$. Tabliczki mnożące $\boxed{\varphi}$ i $\boxed{l}$ wyszukujemy na str. 87, dla odpowiedniej odciętej pomocniczej U ($53^{sk} \dots$).

Dla ilustracji opisanego postępowania przeliczymy znalezione na str. 83 w końcowym przykładzie współrzędne prostokątne: $x = 533\,8933,68$ $y = 300\,69,04$, na współrzędne geograficzne φ i l .

$$\text{Mamy: } U = 1,000\,065\,005 \cdot 533\,893\,3,68 = 5\,339\,280,74$$

$$\text{oraz: } V = 1,000\,065\,005 \cdot 300\,69,04 = 30\,071,00$$

$$\text{Dalej: } U_0 = 0,^{sk}392\,807\,40 \text{ oraz } V_0 = 0,300\,710\,00.$$

Tabliczka potęgowa ma postać:

$$\boxed{p} = \begin{array}{cccc} 1 & 0,3007\,1000 & 0,0904\,2650 & 0,0271\,9215 \\ 0,3928\,0740 & 0,1181\,2111 & 0,0355\,2020 & 0,0106\,8128 \\ 0,1542\,9765 & 0,0463\,9885 & 0,0139\,5260 & 0,0041\,9568 \end{array}$$

Mnożąc ją przez pierwsze tabliczki mnożące (53^{sk}) ze str. 87, otrzymamy:

$$\varphi = 48^0,1917\,2921 = 48^0\,11'\,30'',225 \text{ oraz } l = 0^0,4045\,0997 = 24'\,16'',236$$

Przy ujemnej wartości rzędnej należałoby przed otrzymaną w rezultacie obliczenia długością l , względem południka osiowego, postawić znak ujemny. Pozatem postępowanie rachunkowe żadnej zmiany nie ulega.

Uwaga dotycząca pisania w tabliczce potęgowej ośmiu cyfr w ułamku dziesiętnym, podana uprzednio, jest i tutaj aktualna. Dokładność w stosunku do większości tych zapisów jest nadmierna, jednak takie zapisy są w rezultacie ekonomiczniejsze z uwagi na zupełne zmechanizowanie pracy.

Rachunek przy pomocy podwójnego arytmetru (na jednym liczniku nastawiamy liczby z tabelki φ , na drugim z tabelki l , zastępując liczby ujemne tabelki dopełnieniami) jest bardzo wygodny i szybki.

Elementy tablic mnożących uzyskano w drodze przekształcania tablic funkcyjnych na skończone szeregi potęgowe. Postępowanie ma więc charakter interpolacyjny, to znaczy funkcje: $x = f(\varphi l)$, $y = F(\varphi l)$ itd. są aproksymowane nie przez szeregi Taylora-MacLaurina, lecz przez wielomiany mające z funkcjami identyczne wartości w wielu punktach poszczególnych obszarów. Takie podejście umożliwiło nadanie tablicom stosunkowo małych wymiarów.

Przekształcenia tablic funkcyjnych na szeregi wielomianowe dokonano przy pomocy rachunku krakowianowego. Opiera się ono na wielokrotnym rozwiązywaniu równania krakowianowego:

$$\underline{s} = \underline{V}_y^{-1} \tau \underline{U} \underline{V}_x^{-1}$$

w którym $\underline{s}$ oznacza krakowian współczynnikowy (to zn. krakowian o tabeli identycznej z tabelą tablicy mnożącej), $\tau \underline{U}$ — transpozę krakowianu funkcyjnego, zaś $\underline{V}_y$ i $\underline{V}_x$ — krakowiany Vandermonda dla zmiennych niezależnych tablicy funkcyjnej (x zmienna kolumnowa, y — wierszowa). Bliższe szczegóły dotyczące zagadnienia przekształcania tablic funkcyjnych na szeregi potęgowe podaję w pracach: „Bezpośrednia interpolacja wielomianowa ze szczególnym uwzględnieniem funkcji dwóch argumentów ujęta krakowianowo oraz poprzedzona krótkim zarysem rachunku krakowianowego” i „Przekształcanie tablic funkcyjnych na szeregi potęgowe”.

Rachunki przeliczające tablice funkcyjne na szeregi wielomianowe, oparto na materiale cyfrowym zawartym częściowo w tablicach własnych (dla zagadnienia przekształcenia współrzędnych geograficznych na prostokątne), częściowo w tablicach „Brechtspunkts-tabelle für Gauss-Krügerische Koordinaten”, Oberkommando der Kriegsmarine — Berlin 1943 (dla zagadnienia przekształcania współrzędnych prostokątnych na geograficzne). Zageszczenia ostatnich tablic dokonano przy pomocy interpolacji bezpośredniej.

TABLICA III

służy do przeliczania współrzędnych prostokątnych x i y punktu danego w układzie zachodnim, na współrzędne prostokątne x_1 i y_1 w układzie wschodnim.
(rachunek logarytmami)

x (w metr.)	φ_0	x_0 (w metr.)	y_0 (w metr.)	$\log (1 - \cos 2 \gamma_0)$	$\log \sin 2 \gamma_0$	$\log s_2$	u_2	$\log s_3$	u_3
5 402 000	48° 30'	5 374 563,306	110 837,105	6.885 9117.7—10	8.593 3873.6—10	1.4349 n —10	—86° 37' 35"	4.21—20	—88°
458 000	49 00	5 430 157,009	109 742,601	6.892 5566.0	8.596 7085.2	1.4306 n	36 05	4.21	—88
514 000	49 30	5 485 755,209	108 639,670	6.899 0853.0	8.599 9715.6	1.4261 n	34 30	4.21	—88
569 000	50 00	5 541 357,897	107 528,402	6.905 4996.5	8.603 1774.4	1.4216 n	33 00	4.22	—88
625 000	50 30	5 596 965,059	106 408,874	6.911 8012.2	8.606 3269.8	1.4170 n	31 30	4.22	—88
5 681 000	51° 00'	5 652 576,681	105 281,176	6.917 9917.3—10	8.609 4209.9—10	1.4123 n —10	—86° 30' 00"	4.22—20	—88°
736 000	51 30	5 708 192,750	104 145,386	6.924 0726.9	8.612 4602.1	1.4076 n	28 30	4.22	—88
792 000	52 00	5 763 813,248	103 001,595	6.930 0458.0	8.615 4454.0	1.4027 n	27 00	4.23	—87
847 000	52 30	5 819 438,155	101 849,889	6.935 9122.0	8.618 3774.0	1.3978 n	25 35	4.23	—87
903 000	53 00	5 875 067,456	100 690,352	0.941 6735.9	8.621 2568.1	1.3928 n	24 10	4.23	—87
5 959 000	53° 30'	5 930 701,127	99 523,074	9.947 3313.1—10	8.624 0844.5—10	1.3877 n —10	—86° 22' 45"	4.24—20	—87°
6 014 000	54 00	5 986 339,149	98 348,140	6.952 8866.0	8.626 8608.8	1.3825 n	21 20	4.24	—87
070 000	54 30	6 041 981,495	97 165,643	6.958 3409.4	8.629 5868.0	1.3772 n	20 00	4.24	—87
125 000	55 00	6 097 628,145	95 975,668	6.963 6954.3	8.632 2628.1	1.3718 n	18 35	4.24	—87

TABLICA IV

służy do przeliczania współrzędnych prostokątnych x_1 i y_1 punktu danego w układzie wschodnim, na współrzędne prostokątne x i y w układzie zachodnim.
(rachunek logarytmami)

x (w metr.)	φ_0	x_0' (w metr.)	y_0' (w metr.)	$\log(1 - \cos 2\gamma_0')$	$\log \sin 2\gamma_0'$	$\log s_2$	u_2	$\log s_3$	u_3
5 402 000	48° 30'	5 374 563,306	— 110 837,105	6.885 9117.7 — 10	8.593 3873.6n — 10	1.4349n — 10	+ 86° 37' 35"	4.21 — 20	+ 88°
458 000	49 00	5 430 157.009	— 109 742,601	6.892 5566.0	8.596 7085.2n	1.4306n	36 05	4.21	+ 88
514 000	49 30	5 485 755,209	— 108 639,670	6.899 0853.0	8.599 9715.6n	1.4261n	34 30	4.21	+ 88
569 000	50 00	5 541 357,897	— 107 528,402	6.905 4996.5	8.603 1774.4n	1.4216n	33 00	4.22	+ 88
625 000	50 30	5 596 965,059	— 106 408,874	6.911 8012.2	8.606 3269.8n	1.4170n	31 30	4.22	+ 88
5 681 000	51° 00'	5 652 576,681	— 105 281,176	6.917 9917.3 — 10	8.609 4209.9n — 10	1.4123n — 10	+ 86° 30' 00"	4.22 — 20	+ 88°
736 000	51 30	5 708 192,750	— 104 145,386	6.924 0726.9	8.612 4602.1n	1.4076n	28 30	4.22	+ 88
792 000	52 00	5 763 813,248	— 103 001,595	6.930 0458.0	8.615 4454.0n	1.4027n	27 00	4.23	+ 87
847 000	52 30	5 819 438,155	— 101 849,889	6.935 9122.0	8.618 3774.0n	1.3978n	25 35	4.23	+ 87
903 000	53 00	5 875 067,456	— 100 690,352	6.941 6735.9	8.621 2568.1n	1.3928n	24 10	4.23	+ 87
5 959 000	53° 30'	5 930 701,127	— 99 523,074	6.947 3313.1 — 10	8.624 0844.5n — 10	1.3877n — 10	+ 86° 22' 45"	4.24 — 20	+ 87°
6 014 000	54 00	5 986 339,149	— 98 348,140	6.952 8866.0	8.626 8608.8n	1.3825n	21 20	4.24	+ 87
070 000	54 30	6 041 981,495	— 97 165,643	6.958 3409.4	8.629 5868.0n	1.3772n	20 00	4.24	+ 87
125 000	55 00	6 097 628,145	— 95 975,668	6.963 6954.3	8.632 2628.1n	1.3718n	18 35	4.24	+ 87

TABLICA V

służy do przeliczania współrzędnych prostokątnych x i y punktu danego w układzie zachodnim,
na współrzędne prostokątne x i y w układzie wschodnim.
(rachunek maszyną)

x (w metr.)	φ_0	x_0 (w metr.)	y_0 (w metr.)	$(1 - \cos 2 \gamma_0)$	$\sin 2 \gamma_0$	s_2	u_2	s_3	u_3
5 402 000	48°30'	5 374 563,306	110 837,105	0,000 768 974	0,039 209 145	—0,000 000 002 722	—86°37'35"	0,000 000 000 000 000 16	—88°
458 000	49 00	5 430 157,009	109 742,601	0,000 780 830	0,039 510 134	2 695	36 05	16	—88
514 000	49 30	5 485 755,209	108 639,670	0,000 792 657	0,039 808 111	2 668	34 30	16	—88
569 000	50 00	5 541 357,897	107 528,402	0,000 804 451	0,040 103 054	2 640	33 00	16	—88
625 000	50 30	5 596 965,059	106 408,874	0,000 816 209	0,040 394 940	2 612	31 30	17	—88
5 681 000	51°00'	5 652 576,681	105 281,176	0,000 827 926	0,040 683 747	—0,000 000 002 584	—86°30'00"	0,000 000 000 000 000 17	—88°
736 000	51 30	5 708 192,750	104 145,386	0,000 839 600	0,040 969 454	2 556	28 30	17	—88
792 000	52 00	5 763 813,248	103 001,595	0,000 851 228	0,041 252 038	2 528	27 00	17	—87
847 000	52 30	5 819 438,155	101 849,889	0,000 862 804	0,041 531 479	2 499	25 35	17	—87
903 000	53 00	5 875 067,456	100 690,352	0,000 874 326	0,041 807 754	2 470	24 10	17	—87
5 959 000	53°30'	5 930 701,127	99 523,074	0,000 885 791	0,042 080 845	—0,000 000 002 441	—86°22'45"	0,000 000 000 000 000 17	—87°
6 014 000	54 00	5 986 339,149	98 348,140	0,000 897 195	0,042 350 727	2 412	21 20	17	—87
070 000	54 30	6 041 981,495	97 165,643	0,000 908 534	0,042 617 384	2 383	20 00	17	—87
125 000	55 00	6 097 628,145	95 975,668	0,000 919 804	0,042 880 794	2 354	18 35	18	—87

TABLICA VI

służy do przeliczania współrzędnych prostokątnych x i y , punktu danego w układzie wschodnim,
na współrzędne prostokątne x i y w układzie zachodnim.
(rachunek maszyną)

x (w metr.)	φ_0	x_0' (w metr.)	y_0' (w metr.)	$(1 - \cos 2 \gamma_0')$	$\sin 2 \gamma_0'$	S_2	u_2	S_3	u_3
5402 000	48°30'	5 374 563,306	—110 837,105	0,000 768 974	—0,039 209 145	—0,000 000 002 722	+86°37'35"	0,000 000 000 000 000 16	+88°
458 000	49 00	5 430 157,009	—109 742,601	0,000 780 830	—0,039 510 134	2 695	36 05		16 +88
514 000	49 30	5 485 755,209	—108 639,670	0,000 792 657	—0,039 808 111	2 668	34 30		16 +88
569 000	50 00	5 541 357,897	—107 528,402	0,000 804 451	—0,040 103 054	2 640	33 00		16 +88
625 000	50 30	5 596 965,059	—106 408,874	0,000 816 209	—0,040 394 940	2 612	31 30		17 +88
5681 000	51°00'	5 652 576,681	—105 281,176	0,000 827 926	—0,040 683 747	—0,000 000 002 584	+86°30'00"	0,000 000 000 000 000 17	+88°
736 000	51 30	5 708 192,750	—104 145,386	0,000 839 600	—0,040 969 454	2 556	28 30		17 +88
792 000	52 00	5 763 813,248	—103 001,595	0,000 851 228	—0,041 252 038	2 528	27 00		17 +87
847 000	52 30	5 819 438,155	—101 849,889	0,000 862 804	—0,041 531 479	2 499	25 35		17 +87
903 000	53 00	5 875 067,456	—100 690,352	0,000 874 326	—0,041 807 754	2 470	24 10		17 +87
5959 000	53°30'	5 930 701,127	—99 523,074	0,000 885 791	—0,042 080 845	—0,000 000 002 441	+86°22'45"	0,000 000 000 000 000 17	+87°
6014 000	54 00	5 986 339,149	—98 348,140	0,000 897 195	—0,042 350 727	2 412	21 20		17 +87
070 000	54 30	6 041 981,495	—97 165,643	0,000 908 534	—0,042 617 384	2 383	20 00		17 +87
125 000	55 00	6 097 628,145	—95 975,668	0,000 919 804	—0,042 880 794	2 354	18 35		18 +87

TABLICA VII
Elementy elipsoidy Bessel'a

duża półoś elipsoidy: a	6 377 397,155 m	$\log a$ = 6.804 643 463 7
mała półoś elipsoidy: b	6 356 078,963 m	$\log b$ = 6.803 189 283 9
stosunek różnicy do sumy półosi: $\frac{a-b}{a+b} = n$	0,001 674 184 801	$\log n$ = 7.223 803 394 9
spłaszczenie: $\alpha = \frac{a-b}{a}$	0,003 342 773 182	$\log \alpha$ = 7.524 106 909 3
mimośród 1-y: $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$	0,081 696 831 21	$\log e$ = 8.912 205 211 8
mimośród 2-i: $e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}$	0,081 970 841 13	$\log e'$ = 8.913 659 391 6
$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$	0,006 674 372 231	$\log e^2$ = 7.824 410 423 7
$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$	0,006 719 218 798	$\log e'^2$ = 7.827 318 783 3
$1 - e^2 = \frac{1}{1 + e'^2}$	0,993 325 627 8	$\log(1 - e^2) = 9.997 091 640 4$
$1 + e'^2 = \frac{1}{1 - e^2}$	1,006 719 218 8	$\log(1 + e'^2) = 0.002 908 359 6$
$\sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}$	0,996 657 226 9	$\log \sqrt{1 - e^2} = 9.998 545 820 2$
$\sqrt{1 + e'^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$	1,003 353 984 8	$\log \sqrt{1 + e'^2} = 0.001 454 179 8$
$\frac{a^2}{b} = a \sqrt{1 + e'^2} = b(1 + e'^2) = c$	6 398 786,849 m	$\log c$ = 6.806 097 643 5

