

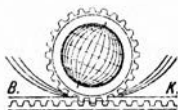
Główny Urząd Pomiarów Kraju
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
PUBLICATIONS OF THE POLISH GEODETIC INSTITUTE
General Survey Office

Nr 4

FRANCISZEK BIERNACKI

TEORIA
ODWZOROWAŃ POWIERZCHNI
DLA GEODETÓW I KARTOGRAFÓW

THEORY OF REPRESENTATION OF SURFACES
FOR SURVEYORS AND CARTOGRAPHERS



WARSZAWA 1949

TEORIA ODWZOROWAŃ POWIERZCHNI

Główny Urząd Pomiarów Kraju
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
PUBLICATIONS OF THE POLISH GEODETIC INSTITUTE
General Survey Office

Nr 4

FRANCISZEK BIERNACKI

TEORIA
ODWZOROWAŃ POWIERZCHNI
DLA GEODETÓW I KARTOGRAFÓW

THEORY OF REPRESENTATION OF SURFACES
FOR SURVEYORS AND CARTOGRAPHERS



WARSZAWA 1949

COPYRIGHT, 1949, by GEODEZYJNY
INSTYTUT NAUKOWO-BADAWCZY
Warszawa (Poland) Politechnika.

ALL RIGHTS RESERVED

No part of this book may be translated
or reproduced in any form without the
written permission of the publisher.



S P I S R Z E C Z Y

Przedmowa	Str. IX
Errata	XI

CZĘŚĆ I

PODSTAWY TEORII ODWZOROWAŃ

Rozdział I. Pojęcie odwzorowania

1. Porównywanie powierzchni	1
2. Definicja odwzorowania jednej powierzchni na inną	3
3. Funkcje odwzorowawcze	4
4. Porównanie obrazu z oryginałem	8
5. Dwa podstawowe zadania teorii odwzorowań	21
6. Odwzorowanie bezpośrednie i pośrednie	23
7. Odwzorowanie rzutowe	24

Rozdział II. Odwzorowanie izometryczne

8. Definicja	25
9. Główne kryterium równodługościowości	26
10. Krzywiznowe kryterium równodługościowości	28
11. Badanie niezmienników odwzorowania równodługościowego	30
12. Deformacja, czyli gięcie powierzchni	32
13. Powierzchnie rozwijalne i nierozwijalne	33

Rozdział III. Klasyfikacja odwzorowań

14. Zasady klasyfikacji	39
15. Klasyfikacja przedmiotowa	40
16. Klasyfikacja rodzajowa	40
17. Klasyfikacja metryczna	42
18. Odwzorowania konforemne	44
19. Odwzorowania równopowierzchniowe	52
20. Konforemność (równokątność) i równopowierzchniowość — dyzjunkcja	55

CZĘŚĆ II

TEORIA ZNIEKSZTAŁCEŃ METRYCZNYCH

Rozdział IV. Nierozwijalność kuli na płaszczyźnie. Siatki ortogonalne Tissota

	Str.
21. Wstęp	55
22. Dowód nierozwijalności kuli na płaszczyźnie	60
23. Dowód nierozwijalności elipsoidy obrotowej na płaszczyznę	65
24. Pierwsze twierdzenie Tissota (o siatkach ortogonalnych)	67

Rozdział V. Teoria skali

25. Skala i podziałka	77
26. Skala, jako funkcja kąta kierunkowego	81
27. Badanie ekstremów skali	89
28. Wartości ekstremalne skali	97
29. Linie równodługościowe	103
30. Związki między skalami ekstremalnymi i skalami parametrowymi	106

Rozdział VI. Zniekształcenie kątów i pól

31. Zniekształcenie kątów	113
32. Zniekształcenie kąta kierunkowego	118
33. Maksymalne zniekształcenie kąta kierunkowego	123
34. Zniekształcenie kątowe jako funkcja kierunku	126
35. Skala pól i zniekształcenie elementarne pól	130

Rozdział VII. Zniekształcenia metryczne jako funkcje skal i kierunków ekstremalnych. Rzutowość cząsteczkowa

36. Wyrażenie zniekształceń metrycznych za pomocą skal i kierunków ekstremalnych	137
37. Przyjęcie siatki krzywych głównych odwzorowania za siatkę współrzędnych powierzchniowych	142
38. Drugie twierdzenie Tissota, czyli ogólne prawo odwzorowawcze	146

Rozdział VIII. Zniekształcenia skończone i redukcje odwzorowawcze

39. Zniekształcenia odwzorowawcze elementarne i skończone	157
40. Redukcje odwzorowawcze	160
41. Znaczenie teorii zniekształceń odwzorowawczych	164

CZĘŚĆ III

**POSZUKIWANIE ODWZOROWAŃ SPEŁNIAJĄCYCH
ROZMAITE WARUNKI OGÓLNE**

Rozdział IX. Warunki ogólne. Ortogonalność

	Str.
42. Charakter warunków	167
43. Ortogonalność obrazu siatki parametrowej	169

Rozdział X. Odwzorowanie konforemne

44. Ogólna teoria odwzorowania konforemnego	171
45. Odwzorowania konforemne płaskie	187
46. Konforemne odwzorowanie powierzchni obrotowej na kulę	210
47. Funkcja zmiennej zespolonej i jej rola w teorii odwzo- rowań konforemnych	219
48. Notatka historyczna o teorii konforemności	233

Rozdział XI. Odwzorowanie równopowierzchniowe

49. Ogólna teoria odwzorowań równopowierzchniowych . .	243
50. Odwzorowania równopowierzchniowe płaskie dla płasz- czyzny i elipsoidy obrotowej spłaszczonej	248
51. Odwzorowanie równopowierzchniowe elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę o równej powierzchni	253
52. Rozwiązania poszczególne	256
53. Notatka historyczna o teorii równopowierzchniowości	261

**Rozdział XII. Warunki dotyczące zniekształceń odwzo-
rowawczych**

54. Poszukiwanie odwzorowania płaskiego, najkorzystniej- szego dla danego obszaru (Teoria Tissota)	269
55. Miary zniekształcenia i kryteria dobroci odwzorowania	291

**Rozdział XIII. Warunki dotyczące rodzaju, albo kształtu
linij przekształconych**

56. Odwzorowanie geodezyjne, czyli ortodromiczne	307
57. Krzywizna linii na powierzchni	310
58. Odwzorowania płaskie prostoliniowe	316
59. Odwzorowania płaskie kołowe	325

Rozdział XIV. Warunki dotyczące sposobu odwzorowania

	Str.
60. Odwzorowanie sferyczne Gaussa	331
61. Odwzorowanie rzutowe	340
Przypisy	343
Skorowidz znaków	367
Skorowidz nazw	369
Skorowidz nazwisk	371
Literatura	373
Wydawnictwa Głównego Urzędu Pomiarów Kraju . . .	375

PRZEDMOWA

Istnieje dość liczna literatura naukowa o odwzorowaniach kartograficznych, zwłaszcza w językach obcych. Lecz prawie wszystkie książki dość powierzchownie traktują sprawę podstaw tej nauki, na rzecz utylinarnych zastosowań praktycznych. W dziełach o kartografii matematycznej znaleźć można conajwyżej krótkie rozdziały, albo tylko wzmianki, wnikające w ogólne podstawy nauki o odwzorowaniach powierzchni.

Teoria odwzorowań należy zasadniczo do geometrii różniczkowej, jako dział teorii powierzchni. Geodeta i kartograf żąda jednak innego podejścia i ujęcia tematu, niż matematyk. Niniejsza książka zajmuje pośrednie stanowisko; miejsce jej jest na pograniczu matematyki i geodezji. Matematyk, poza ujęciem tematu oraz pewnymi rozwinięciami teorii i naświetleniami z punktu widzenia geodety i kartografa, nie znajdzie prawdopodobnie w tej książce wiele nowego, i zapewne uzna ją za elementarną i nieco rozwlekłą. Geodeta i kartograf uzna ją, być może, za zbyt oderwaną, oraz zupełnie różną od dzieł zwykle spotykanych i używanych.

Książka, jak zaznaczono w tytule, przeznaczona jest dla geodetów i kartografów. Względy dydaktyczne w znacznym stopniu były brane pod uwagę przy jej pisaniu. Autor wychodził ze stanowiska, że książki matematyczne dla niematematyków powinny być pisane bardzo jasno, przystępnie i poglądowo, a jednocześnie bardzo ściśle. Dlatego nie unikano omówień i powtórzeń, gdy rozważania tego wymagały. Wiele kwestyj autor starał się ująć z perspektywy rozwoju historycznego; trudno bowiem nie uznać słuszności poglądu, że jeśli o czymś nie wiemy jak się to stało, to i najczęściej nie rozumiemy tego.

Duży nacisk położony został na stronę pojęciową; definicje pojęć i poprawność terminologiczna były stałą troską autora.

Autor starał się usilnie dotrzeć do źródeł i oryginalnych prac klasycznych, związanych z tematem, nie zadawalając się materiałem wtórnym z późniejszych opracowań.

Sporo uwagi poświęcono notatkom historycznym, zwłaszcza w teorii konforemności i w teorii równopolewości.

Treść niniejszej książki, złożonej z trzech części w czternastu rozdziałach, jest widoczna ze spisu rzeczy. W przypisach na końcu książki podano uzupełnienia oraz rachunki matematyczne, które pominięto w tekście, aby nie przerywać biegu myśli sprawami o podrzędniejszym znaczeniu.

Mam nadzieję, że książka ta będzie skromnym przyczynkiem naukowym i przyniesie korzyść. Byłoby bardzo właściwe, na tej podbudowie matematycznej, rozwinąć i przepracować praktyczną stronę teorii odwzorowań wraz z zastosowaniem w kartografii do sporządzania map.

Niech mi wolno będzie złożyć wyrazy szczerzej wdzięczności i serdecznego podziękowania Jego Magnificencji Rektorowi Politechniki Warszawskiej, Prof. inż. Edwardowi Warchałowskiemu, któremu, od zarania mych studiów geodezyjnych pod Jego kierunkiem, zawdzięczam wzbudzenie ducha i zapału naukowego, bez których praca niniejsza i prace moje wcześniejsze z pewnością nie mogłyby powstać. Dzięki Jego poparciu praca ta ukazuje się również w druku.

Dziękuję pracownikom zecerni i drukarni Biura Kartograficznego Głównego Urzędu Pomiarów Kraju, a w szczególności Ob. Danielowi Gajowiec i Ob. Stanisławowi Maliszewskiemu, za dobry skład i druk trudnego tekstu matematycznego, pomimo braku właściwych czcionek i trudności technicznych.

Dr inż. Franciszek Biernacki

Warszawa, dnia 22 sierpnia 1949 r.

E R R A T A

Stronica

i wiersz:	jest:	ma być:
18 ⁵	Przypis 12	Przypis 13
33 ¹⁹	<i>liniem inimalne</i>	<i>linie minimalne</i>
44 ₅	<i>änliche</i>	<i>ähnliche</i>
44 ₁₈	rodzaju	rodzaju
49	We wzorach pośrodku stronicy dolne znaczki literowe wydrukowane majuskułą zamienić minuskułą.	
51 ¹³	<i>konjunkcyjne</i>	<i>koniunkcyjne</i>
57 ¹¹	<i>zawyczaj</i>	<i>zazwyczaj</i>
95 ³	$[E\sqrt{E'G'-F'^2+F'ctg\alpha'}-E'Fctg\alpha']$	$[E(\sqrt{E'G'-F'^2+F'ctg\alpha'})-E'Fctg\alpha']$
96 ₃	maksymalne	maksymalne
120 ₁₀	$\Theta = 0, \Theta' = 0$	$Q = 0, Q' = 0$
192 ₁₀	<i>dwum</i>	<i>dwóm</i>
201 ₃	$(1 - \sin \varphi)^{1/2(c-1)}$	$(1 - \sin \varphi)^{1/2(c+1)}$
206 ₄	Niedotłoczony wzór ma być następujący:	
	$Y = k e^{\varphi_i} \sin \lambda = k \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \sin \lambda$	
216 ⁹	r^k	r_k
226 ₁	$\frac{\partial y}{\partial X}$	$\frac{\partial y}{\partial X}$
231 ⁷	różniczkowe	różniczkowe
240 ₁₀	wyprowadził	wprowadził
253 ¹⁶	katografii	kartografii

UWAGA. Z powodu braku obcojęzycznych czcionek akcentowych, zastąpiono je czcionkami nieco odmiennego typu, bądź też akcenty pominięto.

CZĘŚĆ PIERWSZA

PODSTAWY TEORII ODWZOROWAŃ

ROZDZIAŁ I

POJĘCIE ODWZOROWANIA

1. Porównywanie powierzchni

Najbardziej zwykłą metodą porównania ze sobą dwóch powierzchni jest ich *odpowiedniość punktowa*. Takie porównanie powierzchni ma ważne znaczenie, zarówno w praktyce jak i w teorii. W praktyce zawiera ono całość matematycznego problemu map, jakakolwiek byłaby zasada ich konstrukcji. W teorii pozwala ono na wywód pewnych klas własności jakiejś powierzchni, oraz na rozwiązywanie zadań na powierzchni (drogą pośrednią) przez przyjęcie tej lub innej prostszej powierzchni, na którą pierwsza może być zreprezentowana, według postulowanych praw i warunków.

Porównanie powierzchni metodą reprezentacji punktowej jest działem geometrii różniczkowej. Wśród wielu sposobów ustanawiania odpowiedniości punktowej między powierzchniami, geometria różniczkowa ogranicza się przeważnie do trzech rodzajów, mających szersze teoretyczne znaczenie przy porównywaniu powierzchni ze sobą. Są to: reprezentacja *konforemna*, *geodezyjna* i *sferyczna*.

W odpowiedności punktowej konforemnej dwóch powierzchni dążymy do zapewnienia drobiazgowego przyporządkowania sobie dwóch powierzchni, z zachowaniem podobieństwa w możliwie jak

najdalej idącej mierze. W ten sposób np. dwie kule mogą być skoordynowane ze sobą tak, że jedynym brakiem do zupełnego podobieństwa jest skala; i nawet skala jest tu jednowartościowa. Lecz kula i płaszczyzna nie mogą być skoordynowane ze sobą do tego stopnia podobieństwa. Teoria konforemnej reprezentacji została zapoczątkowana przez *Lagrange'a* w jego pracy o teorii map powierzchni obrotowych¹⁾. Następnie była ona uogólniona przez *Gaussa*²⁾, a obecnie stała się ważnym działem teorii funkcji zmiennej zespolonej.

W odpowiedniości punktowej geodezyjnej dwóch powierzchni dążymy do ustanowienia relacji w ten sposób, ażeby linie geodezyjne jednej powierzchni zawsze odpowiadały liniom geodezyjnym drugiej powierzchni. W ten sposób, jeśli jakaś powierzchnia może być geodezyjnie odtworzona na płaszczyźnie, linie geodezyjne tej powierzchni mogą być wyprowadzone z linii prostych płaszczyzny, na skutek równań relacji. Ale, jak dowodzi geometria różniczkowa, ustanowienie relacji geodezyjnej między dwiema powierzchniami nie zawsze jest możliwe. Teoria geodezyjnej reprezentacji jednej powierzchni na drugą, okazała się teorią o nieco ograniczonym zasięgu. Była ona zainicjowana przez *Beltrami'ego* (1868) i została rozpracowana przez *Dini'ego* (1869) i *Darboux* (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, 4 vols, 1887 — 1896). (Z powodu braku czcionek akcentowych znaczki są oddalone, albo niekiedy pominięte).

Jedną z metod odpowiedniości punktowej pomiędzy powierzchnią i kulą jest *sferyczne odwzorowanie Gauss'a* na kulę o promieniu jedność, za pomocą promieni, równoległych do normalnych do powierzchni. Punkt na powierzchni kuli, w którym linia prosta, przechodząca przez środek kuli i równoległa do prostej normalnej odtwarzanej powierzchni, przecina kulę jednostkową, jest obrazem sferycznym punktu powierzchni. Ta reprezentacja dowolnej powierzchni na kulę jednostkową ma ważne teoretyczne znaczenie; główna uwaga jest tu bardziej skoncentrowana na płaszczyznę styczną do kuli, aniżeli

¹⁾ *Joseph Louis de Lagrange* (1736 — 1813), *Sur la construction des cartes géographiques*. *Nouveaux Mémoires de l'Académie royal de Berlin*, Année 1779.

²⁾ *Carl Friedrich Gauss* (1777 — 1855). *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.* (1822). *Astronom. Abhandlungen*, herausgegeben von H. C. Schumacher, 3 Heft, Altona 1825.

Obydwie powyższe klasyczne prace zostały przedrukowane i zaopatrzone komentarzami w wydawnictwie *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften*, Nr. 55: *Über Kartenprojection*. *Abhandlungen von Lagrange* (1779) und *Gauss* (1822), herausgegeben von A. Wangerin, Leipzig 1894.

na sam punkt styczności (obraz sferyczny). Każdej konfiguracji na powierzchni oryginalnej odpowiada obraz sferyczny, i pozostaje do rozważenia kwestia, w jak daleko idącej mierze, obraz sferyczny może być wzięty jako substytut oryginalnej konfiguracji, albo może ją określać. Powierzchnie rozwijalne na płaszczyznę nie dopuszczają jednak sferycznego odwzorowania tego typu.

Jest jeszcze jedna odpowiedniość punktowa powierzchni, o bardzo dużym znaczeniu teoretycznym; ma ona miejsce wtedy, gdy powierzchnia jest deformowana w jakikolwiek sposób, wykluczający rozciągłość lub rozerwanie. Ogólne pojęcie o teorii deformacji powierzchni będzie podane w osobnym rozdziale.

2. Definicja odwzorowania jednej powierzchni na inną

Niechaj będą dane dwie dowolne *regulane* powierzchnie określone za pomocą równań parametrycznych:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(u, v), \\ y &= f_2(u, v), \\ z &= f_3(u, v), \end{aligned} \right\} \text{Powierzchnia I,} \quad \left. \begin{aligned} X &= F_1(U, V), \\ Y &= F_2(U, V), \\ Z &= F_3(U, V), \end{aligned} \right\} \text{Powierzchnia II,} \quad (2.1)$$

w których $oxyz$, $OXYZ$ są dwoma układami współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni, zaś u, v ; U, V dwiema parami rzeczywistych, niezależnych zmiennych parametrycznych, na pierwszej, i odpowiednio, na drugiej powierzchni.

Każdą jedno-jednoznaczną odpowiedniość punktową pomiędzy powierzchnią I, jako oryginałem, i powierzchnią II, jako obrazem, nazywamy *odwzorowaniem* (reprezentacją, przekształceniem) *powierzchni I na powierzchnię II*.

Pewien komentarz do tej definicji wydaje się wskazany. Istotą odwzorowania dwóch utworów geometrycznych jest ustanowienie odpowiedniości punktowej: skojarzenie punktów obu powierzchni w przynależne do siebie pary. Sposób ustanowienia tej odpowiedniości jest na ogół zupełnie dowolny; jednak, aby odpowiedniość była odwzorowaniem, musi spełniać trzy warunki, a mianowicie:

1) być odpowiedniością *punktową*, to znaczy punktowi ma na ogół odpowiadać *punkt*, nie zaś linia, albo obszar, na obrazie;

2) być *jednoznaczną*, to znaczy każdemu punktowi oryginału ma na ogół odpowiadać *jeden i tylko jeden* punkt obrazu;

3) być *wzajemną*, to znaczy każdemu punktowi powierzchni obrazu ma na ogół odpowiadać *jeden i tylko jeden* punkt powierzchni oryginału.

Te trzy cechy odpowiedniości: punktowość, jednoznaczność i wzajemność wyrażamy łącznie w jednej nazwie: odpowiedniość punktowa *jedno-jednoznaczna*, czyli odwzorowanie.

Zwróćmy uwagę na to, że odwzorowanie jest własnością wzajemną; jeśli powierzchnia I jest odwzorowana na powierzchnię II, to i odwrotnie, powierzchnia II jest równocześnie odwzorowana na powierzchnię I; stąd możemy mówić o odwzorowaniu powierzchni *na siebie*. W teorii obojętną jest rzeczą, którą powierzchnię uważać za oryginał, a którą za obraz. Dla zastosowań praktycznych i dla ustalenia pewnego porządku, umówimy się, że powierzchnię I będziemy zawsze uważali za *oryginał*, który podlega odwzorowaniu na powierzchnię II, jako na *obraz*. Z tej wzajemności wynika pewien *dualizm* w teorii; figurę obrazową możemy badać bądź w zależności od elementów figury oryginalnej, bądź też w zależności od elementów figury obrazowej; innymi słowy związki między obrazem i oryginałem mogą być wyrażane bądź w funkcji wielkości oryginalnych, bądź też w funkcji wielkości obrazowych.

3. Funkcje odwzorowawcze

Jeśli między dwiema powierzchniami (2.1) ustanowiono jakieś odwzorowanie, to nasuwa się pytanie: *na mocy czego ustanowiono tę odpowiedniość?* Aby dać odpowiedź na to pytanie, musimy wnikać w sam proces odwzorowawczy, w sam mechanizm, za pośrednictwem którego następuje skojarzenie obu powierzchni w przynależne sobie pary punktów.

Ustanowienie odpowiedniości może być dokonane za pomocą dowolnej koncepcji, spełniającej wymagany warunek jedno-jednoznaczności punktowej. Może to być jakaś konstrukcja geometryczna, jakiś dowolny przepis, albo reguła — krótko mówiąc — *dowolna umowa* ustanawiająca relację między dwiema powierzchniami. Umowy takie mogą być najrozmaitsze, i bez końca — możemy mieć nieskończenie wiele najrozmaitszych odwzorowań jednej powierzchni na drugą. Umowy takie mają też swe dobre i złe strony. Chociaż forma wyrażania takich umów może być dowolna, to jednak najdoskonalszą formą jest matematyczny związek funkcyjny między oryginałem i obrazem: związek pomiędzy punktem (x, y, z) na powierzchni I i odpowiadającym mu punktem (X, Y, Z) na powierzchni II. Związek taki będzie ustanowiony, gdy zmienne parametrowe (U, V) powierzchni obrazu, określające punkt (X, Y, Z) na tej powierzchni,

uczynimy funkcjami zmiennych parametrycznych (u, v) powierzchni oryginału, (lub vice versa), określających odpowiadający mu punkt (x, y, z) na tej powierzchni.

Twierdzenie. Odwzorowanie pomiędzy powierzchnią odniesioną do parametrów u, v i drugą powierzchnią, odniesioną do parametrów U, V , jest analitycznie przedstawione przez równania o postaci:

$$\begin{aligned} U &= \psi_1(u, v), \\ V &= \psi_2(u, v); \quad (J = \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \neq 0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Związki powyższe wyrażają zamianę zmiennych U, V w równaniach parametrycznych powierzchni II na zmienne u, v ; przez to nie zmieniamy samej powierzchni, lecz tylko formę jej parametrycznego przedstawienia za pomocą równań, która, jak wiadomo, nie jest jedyną. Równania obu powierzchni będą wówczas odniesione do tych samych zmiennych parametrycznych, i dzięki temu odpowiedniość punktowa będzie bezpośrednio widoczna. Związki (3.1) upraszczają się wówczas do postaci: $U = u, V = v$.

Funkcje ψ_1, ψ_2 dają umowę za pomocą której następuje kojarzenie punktów obu powierzchni w odpowiadające sobie pary; ustanawiają one, definiują, czynią, odwzorowanie powierzchni I na powierzchnię II. Nazywamy je dlatego *funkcjami odwzorowawczymi*.

Związek między punktem (x, y, z) na powierzchni I i odpowiadającym mu punktem (X, Y, Z) na powierzchni II może być ustanowiony *bardziej ogólnie* za pomocą dowolnej zależności zmiennych U, V i zmiennych u, v :

$$\begin{aligned} \Psi_1(U, V) &= \psi_1(u, v), & \text{albo} & & \Phi_1(U, V, u, v) &= 0, \\ \Psi_2(U, V) &= \psi_2(u, v); & & & \Phi_2(U, V, u, v) &= 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

Równania (3.2) dają ogólne funkcje odwzorowawcze, ustanawiające odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, obojętnie której na którą. W większości przypadków ograniczamy się jednak do prostszej zależności odwzorowawczej w formie równań (3.1).

Funkcje odwzorowawcze mogą też podawać związek *bezpośredni* między współrzędnymi kartezjańskimi x, y, z i X, Y, Z , np.

$$\begin{aligned} X &= \psi_1(x, y), \\ Y &= \psi_2(x, y); \end{aligned} \quad (3.3)$$

wyrażają one wówczas prawo odwzorowania płaszczyzny (xy) na płaszczyznę (XY) w obu układach przestrzennych; eliminując zmienne parametryczne u, v z równań powierzchni I, i zmienne parametryczne U, V z równań powierzchni II, otrzymamy równania obu powierzchni w formie uwikłanej:

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(X, Y, Z) = 0;$$

na mocy funkcji odwzorowawczych (3.3), zależność punktowa obu tych powierzchni jest w zupełności określona.

Funkcje odwzorowawcze mogą być na ogół dowolne¹⁾, jednak muszą podlegać pewnym ograniczeniom, które zabezpieczą nas od niepożądanych osobliwości i nadadzą użyteczną wartość odwzorowaniu. Będziemy zakładali, że para funkcji odwzorowawczych ϕ_1, ϕ_2 , określających odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, spełnia następujące warunki, które nadają odwzorowaniu przynajmniej pewien stopień prawidłowości:

1) funkcje ϕ_1 i ϕ_2 mają być *określone* dla wszystkich, albo przynajmniej dla pewnego zwartego obszaru wartości u, v ; to znaczy mają istnieć i być skończone na ogół wszędzie dla całej powierzchni I , albo przynajmniej dla pewnego interesującego nas zwartego obszaru tej powierzchni;

2) funkcje ϕ_1 i ϕ_2 mają być *jedno-jednoznaczne*, to znaczy każdej parze wartości (u, v) obszaru określoności ma odpowiadać na ogół jedna i tylko jedna para wartości (U, V) , i odwrotnie; jest to warunek na jedno-jednoznaczność odpowiedniość punktową;

3) funkcje ϕ_1 i ϕ_2 mają być *ciągłe*, gdyż chcemy, aby odwzorowanie posiadało własność ciągłości, i nie miało przerw lub zagięć gwałtownych, przynajmniej w pewnym obszarze;

4) funkcje ϕ_1 i ϕ_2 mają być co najmniej *dwukrotnie różniczkowalne*, a ich cząstkowe pochodne pierwszego i drugiego rzędu mają być funkcjami ciągłymi w obszarze określoności; warunek ten nadaje prawidłowość odwzorowaniu;

5) funkcje ϕ_1 i ϕ_2 mają określać *odpowiedniość punktową*; ma to miejsce wówczas, gdy obie te funkcje są *niezależne od siebie*: żadna z nich nie jest funkcją pozostałej. Okazuje się w analizie matematycznej, że warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności dwóch funkcji dwóch zmiennych jest to, aby ich wyznacznik funkcyjny J (Jakobian) *nie był zerem* dla wszystkich par wartości (u, v) obszaru określoności:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} = U_u \cdot V_v - U_v \cdot V_u \neq 0.$$

¹⁾ W szczególności mogą one być najprostszej możliwej formy: $U = u, V = v$; wtedy układy współrzędnych powierzchniowych odpowiadają sobie, a korespondujące punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe na obu powierzchniach.

Warunek ten wyklucza z naszych rozważań odwzorowania *zdegenerowane*; punkt przejdzie w punkt, linia w linię, obszar w obszar; wykluczamy zaś odwzorowania, w których punkty przechodzą w linię lub w obszary, albo w których obrazem obszaru leżącego na powierzchni I, jest nie obszar na powierzchni II, tylko linia, albo nawet punkt. Gdyby bowiem jedna z funkcji odwzorowawczych była zależna od drugiej, np. $\phi_2(u, v) = F[\phi_1(u, v)]$, czyli $V = F(U)$, to biorąc wszystkie możliwe punkty (u, v) na powierzchni I, otrzymalibyśmy na powierzchni II, jako obraz, jakąś *linię* krzywą $V = F(U)$. Obraz powierzchni I zdegenerowałby się zatem do linii. Otóż takimi zdegenerowanymi odwzorowaniami nie będziemy się w dalszym ciągu zajmowali. Dopuścimy pewne nieprawidłowości obrazu, lecz tylko dla pewnych pojedynczych punktów na powierzchni I¹⁾, lub pewnych wyjątkowych linii na tej powierzchni²⁾, ale nigdy dla zwartych jej obszarów.

Odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, określone parą funkcji odwzorowawczych ϕ_1, ϕ_2 , spełniających wyżej wymienione warunki: określoności, jednowartościowości, ciągłości, różniczkowalności i niezależności, nazywamy krótko *odwzorowaniem regularnym* tych powierzchni.

Tematem teorii odwzorowań są regularne odwzorowania regularnych powierzchni. Pomimo tych ogólnych, zrozumiałych dla zastosowań praktycznych, ograniczeń co do funkcji odwzorowawczych, pozostaje nadal obszerna swoboda w obiorze tych funkcji. Od własności i rodzaju funkcji odwzorowawczych zależą w znacznym stopniu własności i rodzaj odwzorowania.

Wyrugujemy z równań odwzorowawczych (3.1) parametr u . Wówczas otrzymamy równanie

$$\Phi_1(U, V, v) = 0, \quad (3.4)$$

określające rodzinę krzywych, zależną od jednego parametru v . Oczywiście równanie to będzie równaniem rodziny linii parametrowych v na powierzchni obrazu. W tenże sam sposób, jeśli wyrugujemy

¹⁾ Jak np. w tych płaskich odwzorowaniach stożkowych kuli, lub elipsoidy obrotowej, w których biegun geograficzny odtwarza się w postaci łuku koła; albo w płaskim odwzorowaniu Mercatora dla tychże powierzchni, w którym oba bieguny odtwarzają się jako linia prosta w nieskończoności.

²⁾ Jak np. dla jednego południka.

z równań odwzorowawczych (3.1) parametr v , uzyskamy równanie rodziny linii parametrycznych u na obrazie

$$\Phi_2(U, V, u) = 0, \quad (3.5)$$

Równaniami (3.4) i (3.5) posługujemy się przy studiowaniu rodzaju i kształtu odwzorowanych linii parametrycznych na powierzchni obrazu.

4. Porównanie obrazu z oryginałem

a) Porównanie własności.

Gdy dane są dwie powierzchnie, określone równaniami parametrycznymi (2.1) oraz dane jest ich wzajemne odwzorowanie, określone parą funkcji odwzorowawczych (3.1), to nasuwa się sprawa porównania obrazu z oryginałem. Oryginał posiada pewne własności lub cechy, które dla krótkości możemy nazwać: *cecha A*, *cecha B*, *cecha C* itd. Zapytujemy co się dzieje z tymi cechami na skutek procesu odwzorowawczego?

Na ogół mogą się zdarzyć trzy następujące ewentualności:

1) Pewne cechy oryginału mogą nie doznać żadnej zmiany; przekształcenie nie narusza pewnych cech oryginału, które zachowują się, ostają się, i są wspólne dla oryginału i obrazu; zwiemy je *niezmiennikami*. Są to jak gdyby cechy dziedziczne.

2) Pewne cechy oryginału mogą doznać zmian, albo też zatrać się zupełnie.

3) Obraz może nabyć nowych cech, których oryginał nie posiadał wcale.

Te trzy przypadki mogą się rozmaicie i jednocześnie kombinować, np. w jakimś odwzorowaniu *cecha B* pozostała niezmienniona, *cecha C* doznała zmiany, pojawiła się nowa *cecha K*, której oryginał nie posiadał, itp.

Teoria odwzorowań będzie miała za zadanie między innymi:

- 1) zbadać czy i jakie istnieją niezmienniki;
- 2) zbadać zmiany, jakościowo i ilościowo, wywołane odwzorowaniem.

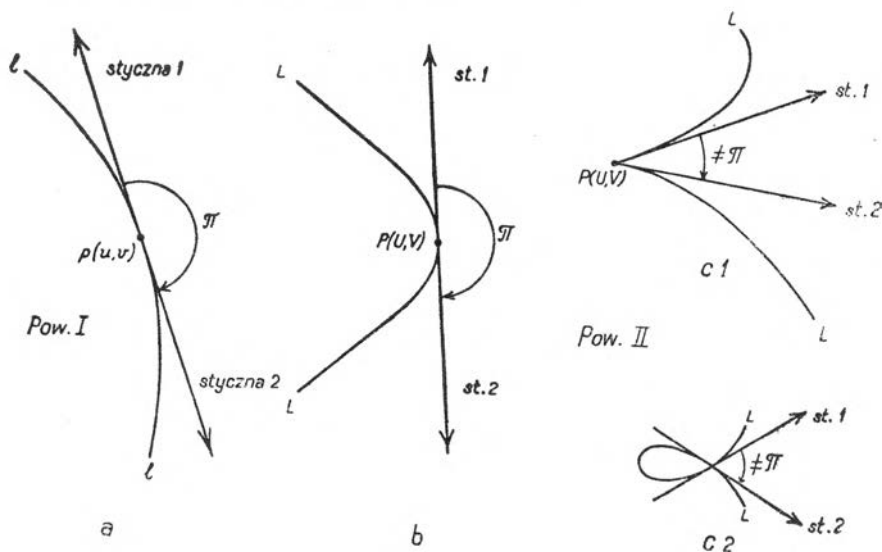
Nie będą nas interesowały wszystkie własności oryginału i obrazu, lecz głównie pewna ich grupa: *własności metryczne*, czyli *metryka*. Wystudiowanie niezmienników metrycznych, oraz zmian w metryce spowodowanych odwzorowaniem, jest jednym z głównych celów teorii odwzorowań i stanowi tę jej część, którą zwiemy *teorią zniekształceń*.

b) Twierdzenie.

W każdym regularnym odwzorowaniu jednej regularnej powierzchni na drugą regularną powierzchnię dwukierunek przechodzi na ogół zawsze w dwukierunek, albo krótko: *dwukierunek jest na ogół niezmiennikiem odwzorowania regularnego*. Wyjątki mogą mieć miejsce tylko w nielicznych pojedynczych punktach. (Zespół dwóch wprost przeciwnych sobie kierunków nazywamy *dwukierunkiem*).

Twierdzenie to jest niemal oczywiste z powodu ogólnych ograniczeń, poczynionych w Nr. 3 w stosunku do funkcji odwzorawczych, i wydawałoby się zbędne. Podajemy je jednak ze względu na wyjątki, zdarzające się nawet w zastosowaniach praktycznych, oraz jako ilustrację pojęcia niezmiennika.

Weźmy na powierzchni I dowolny punkt p i jakąś linię ciągłą l przechodzącą przez ten punkt. Na powierzchni II niech punkt P i linia ciągła L będą ich obrazami.



Rys. 1

Poprowadźmy w punkcie p dwukierunek, tj. styczną do linii l , i zróbmy to samo w punkcie P na powierzchni II. Jeśli punkt P jest punktem zwykłym linii L , to dwukierunek musi przechodzić na dwukierunek, jak widać z Rys. 1, a, b. Gdy natomiast punkt P jest punktem *osobliwym* linii L , to chociaż linia L jest ciągła w tym punkcie nie posiada ona pochodnej w tym punkcie, i dwukierunek przechodzi

w inny kąt, różny od π , jak widać z Rys. 1, c_1 , c_2 . Ten poglądowy geometryczny dowód, musimy teraz zastąpić dowodem analitycznym.

Weźmy na powierzchni I, w dowolnym jej punkcie p , dwa kierunki, określone wielkościami du , dv oraz δu , δv , tworzące ze sobą kąt β . Na powierzchni II w punkcie P , będącym obrazem punktu p , tym dwóm obranym kierunkom odpowiadają jakieś dwa inne kierunki, określone tymi samymi wielkościami du , dv oraz δu , δv (wskutek wprowadzenia funkcji odwzorowawczych w równania parametrowe powierzchni II), i tworzące ze sobą jakiś kąt β' , odpowiadający kątowi β .

Teoria powierzchni podaje następujący wzór na cosinus kąta między dwoma kierunkami:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} \text{ na powierzchni I,} \\ \cos \beta' &= \frac{E' du \delta u + F' (du \delta v + dv \delta u) + G' dv \delta v}{\sqrt{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2} \sqrt{E' \delta u^2 + 2F' \delta u \delta v + G' \delta v^2}} \text{ na powierzchni II.} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Załóżmy teraz, że kąt β na powierzchni I jest dwukierunkiem, to znaczy jest równy π ; zbadajmy jakie to pociągnie konsekwencje w stosunku do odpowiadającego mu kąta-obrazu β' . Ponieważ $\cos \beta$ dla $\beta = \pi$ jest równy -1 , przeto z pierwszego związku otrzymujemy

$$-1 = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}.$$

W mianowniku występuje iloczyn elementów liniowych dla dwóch dowolnych linii przechodzących przez punkt p na powierzchni I, w tych samych jak obrane poprzednio kierunkach; linie te przecinają się zatem w punkcie p pod kątem β (w naszym założeniu równym π). Elementy liniowe nigdy nie są zerami; możemy pomnożyć obie strony równania przez ich iloczyn i podnieść obie strony równania do kwadratu; otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} (E du^2 + 2F du dv + G dv^2) (E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2) = \\ = [E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v]^2, \end{aligned}$$

a po wymnożeniu i redukcji:

$$\begin{aligned} GE (dv^2 \delta u^2 + du^2 \delta v^2) + 4F^2 du \delta v dv \delta u = \\ = F^2 (du \delta v + dv \delta u)^2 + 2EG du dv \delta u \delta v; \\ EG (dv \delta u - du \delta v)^2 - [F^2 (du \delta v + dv \delta u)^2 - 4F^2 du \delta v dv \delta u] = 0; \\ EG (dv \delta u - du \delta v)^2 - F^2 (dv \delta u - du \delta v)^2 = 0; \\ (EG - F^2) (dv \delta u - du \delta v)^2 = 0, \end{aligned}$$

Wielkość $EG - F^2$ jest, jak wiadomo z teorii powierzchni, zawsze dodatnia i różna od zera w każdym regularnym punkcie powierzchni. Stąd

$$\pm (dv \delta u - du \delta v) = 0,$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{\delta v}{\delta u} = k.$$

Dla dowolnego dwukierunku na powierzchni I pochodne dv/du i $\delta v/\delta u$ są sobie równe.

Ale te same pochodne, na skutek odwzorowania, określają jakieś dwa kierunki w punkcie P na powierzchni II, odpowiadające poprzednim i tworzące ze sobą jakiś kąt β' . Drugi związek (4.1) podaje wartość cosinusa tego kąta i posłuży nam do jego obliczenia. Mamy

$$\cos \beta' = \frac{E' + 2F'k + G'k^2}{\sqrt{E' + 2F'k + G'k^2} \sqrt{E' + 2F'k + G'k^2}} = \pm 1,$$

i kąt β' odpowiadający dwukierunkowi β , musi być równy π , czyli sam jest też dwukierunkiem. W ten sposób twierdzenie jest udowodnione.

Twierdzenie zawodzi, w przypadku gdy $EG - F^2 = 0$. Wówczas ma miejsce wyjątek, omówiony poglądowo na początku twierdzenia. Jako przykład praktyczny może posłużyć wierzchołek stożka w odwzorowaniu stożkowym kuli (albo elipsoidy obrotowej spłaszczonej), w przypadku gdy jest on obrazem bieguna; rozwinięty stożek tworzy wycinek o kącie mniejszym od 2π i jest obrazem kąta 2π . Dowolny dwukierunek w biegunie na kuli, nie przechodzi w tym przykładzie w dwukierunek na płaszczyźnie, lecz w kąt mniejszy od π . Twierdzenie o zachowaniu dwukierunku może też być dowiedzione, posługując się kątami kierunkowymi; dowód ten jest podany w Przypisie 1.

c) *Twierdzenie.* Gdy punkty p, P dwóch powierzchni I, II, są w jedno-jednoznacznej odpowiedniości, to wszelkie regularne odwzorowanie, wiążąc styczne do krzywych w punkcie p na I ze stycznymi do odpowiadających krzywych w odpowiadającym punkcie P na II, jest rzutowością (cząsteczkową).

Odpowiadającymi sobie krzywymi na powierzchniach I i II są krzywe utworzone przez odpowiadające sobie punkty. Odpowiadające sobie styczne są to linie proste, styczne do odpowiadających sobie krzywych, w odpowiadających sobie punktach.

Na mocy zwykłej definicji rzutowości pomiędzy dwoma płaskimi pękami prostych, jako takiej jedno-jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy prostymi pęków, że dwustosunek jakiegokolwiek czwórki prostych jednego pęku jest równy dwustosunkowi czterech odpowiadających prostych w drugim pęku, możemy łatwo dowieść powyższego twierdzenia.

Dowód zaczyna się od zróżniczkowania funkcji odwzorowawczych (3.1), skąd uzyskujemy:

$$dU = U_u du + U_v dv,$$

$$dV = V_u du + V_v dv.$$

Podzielenie jednego równania przez drugie wyraża kierunek dV/dU krzywej w punkcie P na powierzchni II jako funkcję liniowo-ułamkową kierunku dv/du odpowiadającej krzywej w odpowiadającym punkcie p na powierzchni I:

$$\frac{dV}{dU} = \frac{V_u + V_v \cdot \frac{dv}{du}}{U_u + U_v \cdot \frac{dv}{du}}, \quad (4.A)$$

Ponieważ dwustosunek czterech stycznych w punkcie p jest równy dwustosunkowi ich kierunków dv/du , i podobnie w punkcie P , i ponieważ dwustosunek jest niezmiennikiem wszelkiej liniowo-ułamkowej transformacji¹⁾, wynika stąd, że korespondujące styczne są zrelacjowane przez rzutowość, co było do okazania.

Każde regularne odwzorowanie pomiędzy dwiema regularnymi powierzchniami ma strukturę rzutową. Należy podkreślić, że na ogół rzutowość ta jest tylko *lokalna*, lub mówiąc bardziej obrazowo — *cząsteczkowa*. Niektóre tylko odwzorowania, stanowiące grupę rzutów w sensie geometrycznym, oprócz rzutowości lokalnej mają także rzutowość *integralną*.

Szczegółowe rozpatrzenie rzutowości cząsteczkowej odwzorowania podano w teorii zniekształceń.

¹⁾ Dwustosunek czterech liczb $a_1, \dots, a_4$ jest równy dwustosunkowi czterech liczb $b_1, \dots, b_4$, w które przekształcają się liczby $a_1, \dots, a_4$ przez każdą liniowo-ułamkową transformację:

$$b_i = \frac{A a_i + B}{C a_i + D}, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (AD - BC \neq 0, \quad C \neq 0.)$$

Nadmienimy w tym miejscu, że fakt, iż każde przekształcenie za pomocą funkcji z ciągłymi pierwszymi pochodnymi jest rzutowością cząsteczkową zauważył pierwszy, jak się zdaje, A. Tissot, *Sur les cartes géographiques*, Paris, *Comptes Rendus* 49 (1859), str. 673, następnie w *Nouvelles annales de mathématique* (2) 17, 1878, a także w *Memoire sur la representation des surface*, Paris, 1881.

d) Sprowadzenie równań parametrowych powierzchni obrazu do tych samych zmiennych parametrowych, w których wyrażone są równania powierzchni oryginału.

Wprowadzenie funkcji odwzorowawczych do równań parametrowych powierzchni obrazu stanowi znane z geometrii różniczkowej zagadnienie *przekształcenia parametrów*.

1. *Siatki*. Przy rozważaniu powierzchni studiuje się zwykle rozmaite linie krzywe na tej powierzchni, a zwłaszcza pewne systemy krzywych, które ujawniają się w sposób naturalny przy badaniu powierzchni. Większość z tych systemów to *siatki linii krzywych*, mających specjalne własności.

Definicja. *Siatką krzywych na powierzchni nazywamy zespół dwóch jednoparametrowych rodzin linii krzywych na powierzchni, takich, że przez każdy punkt powierzchni przechodzi jedna krzywa z każdej rodziny, a obie styczne do tej pary krzywych w każdym punkcie powierzchni są różne.*

Niektóre siatki są *współzmiennikami* powierzchni, to znaczy są geometrycznie określone przez samą powierzchnię i są niezmiennie przy przekształceniu euklidesowym, czyli przy sztywnym ruchu w przestrzeni. Takimi są: siatka linii krzywiznowych, siatka linii minimalnych, siatka linii asymptotycznych i inne.

Parametrowa siatka krzywych na powierzchni niekoniecznie musi być współzmienna z powierzchnią. Przez stosowne przekształcenie parametrów, siatka parametrowa może się pokryć z każdą wyznaczoną siatką krzywych na powierzchni. W szczególności każda siatka współzmienna może być uczyniona parametrową. Geometria powierzchni musi być oczywiście niezależna od analitycznego przedstawienia użytego dla powierzchni, a więc musi być niezależna od obioru siatki parametrowej. Często analiza jakiegoś szczególnego problemu może być uproszczona przez stosowny obiór siatki parametrowej. Jeśli siatka ta jest współzmiennikiem powierzchni, wówczas własności tej siatki są w istocie własnościami samej powierzchni, i użycie jakiejś współzmiennnej siatki parametrowej jest często korzystne.

Rozważmy powierzchnię przedstawioną analitycznie za pomocą równań parametrycznych:

$$X = F_1(U, V), \quad Y = F_2(U, V), \quad Z = F_3(U, V), \quad (4.2)$$

dla których nie wszystkie trzy wyznaczniki funkcyjne

$$\bar{J}_1 = Y_U Z_V - Y_V Z_U, \quad \bar{J}_2 = Z_U X_V - Z_V X_U, \quad \bar{J}_3 = X_U Y_V - X_V Y_U,$$

znikają identycznie w pewnym obszarze zmiennych U, V . Każda siatka krzywych na tej powierzchni może być określona przez *krzywoliniowe równanie różniczkowe siatki*:

$$A dU^2 + 2B dU dV + C dV^2 = 0, \quad (AC - B^2 \neq 0), \quad (4.3)$$

w którym współczynniki A, B, C są funkcjami zmiennych U, V . Odwrotnie, każde równanie tej formy, z nieznikającym wyróżnikiem, przedstawia siatkę krzywych na powierzchni (4.2), ponieważ lewa strona tego równania może być rozłożona na dwa różne liniowe czynniki, które po przyrównaniu do zera, przedstawiają dwie składowe rodziny siatki.

Równanie

$$dU dV = 0, \quad (4.4)$$

przedstawiające *krzywoliniowe równanie różniczkowe siatki parametrowej* na powierzchni (4.2), jest szczególnym przypadkiem równania (4.3).

2. *Zmiana parametrów bez zmiany siatki parametrowej.* Jest rzeczą możliwą zmienić parametry powierzchni, nie zmieniając wcale siatki parametrowej.

Okażemy, że *przekształcenie*

$$U = \phi_1(u), \quad \cdot \quad V = \phi_2(v), \quad (U_u V_v \neq 0), \quad (4.5)$$

starych parametrów U, V na nowe u, v za pomocą funkcji jednej zmiennej, *nie zmienia siatki parametrowej powierzchni*. Przekształcenie to dokonuje się przez podstawienie tych funkcji do równań powierzchni (4.2). Każda krzywa U staje się krzywą u , ponieważ dla $V = \text{const.}$ jest także $v = \text{const.}$ Podobnie, każda krzywa V staje się krzywą v . W ten sposób parametry, które się zmieniają wzdłuż krzywych parametrycznych, zostały zmienione, lecz same krzywe nie zmieniły się wcale.

Niezmiennność siatki parametrowej przy przekształceniu (4.5) może być wykazana również w inny sposób. Jeśli zróżniczkujemy równania (4.5), a następnie pomnożymy przez siebie uzyskane równania, otrzymamy

$$dU dV = U_u V_v du dv. \quad (4.6)$$

Ponieważ siatka parametrowa powierzchni (4.2) ma równanie $dU dV = 0$, to równanie to pociąga za sobą także $du dv = 0$; stąd siatka parametrowa jest niezmiennikiem rozważanego przekształcenia. Co więcej, podobne rozumowanie pokaże, że *przekształcenie*

$$U = \psi_1(v), \quad V = \psi_2(u), \quad (U_v V_u \neq 0), \quad (4.7)$$

również pozostawia siatkę parametrową bez zmiany, chociaż przemienia ono parametry, które się zmieniają wzdłuż obu rodzin siatki, tak, że krzywe U stają się krzywymi v , i krzywe V stają się krzywymi u .

Zagadnienie odwrotne, czy przekształcenia (4.5) i (4.7) są jedyinymi przekształceniami, które zachowują siatkę parametrową, daje odpowiedź twierdzącą, na mocy następującego twierdzenia.

Twierdzenie. Przekształcenia (4.5) i (4.7) są jedyinymi przekształceniami parametrów powierzchni, pozostawiającymi siatkę parametrową bez zmiany.

Dowód tego twierdzenia można podać przez rozważenie *ogólnego przekształcenia parametrów*:

$$U = \psi_1(u, v), \quad V = \psi_2(u, v), \quad (J = U_u V_v - U_v V_u \neq 0). \quad (4.8)$$

Skutek tego przekształcenia na siatkę parametrową może być obliczony w następujący sposób. Zróżniczkowanie równań (4.8) daje

$$\begin{aligned} dU &= U_u du + U_v dv, \\ dV &= V_u du + V_v dv; \end{aligned} \quad (4.9)$$

mnożąc przez siebie te równania, uzyskuje się

$$dU dV = U_u V_u du^2 + (U_u V_v + U_v V_u) du dv + U_v V_v dv^2. \quad (4.10)$$

Nowa siatka parametrowa, $du dv = 0$, staje się starą siatką, $dU dV = 0$, w przypadku, gdy

$$U_u V_u = U_v V_v = 0, \quad U_u V_v + U_v V_u \neq 0.$$



Warunki te spełniają się, jeśli

$$\text{albo } U_v = V_u = 0, \quad U_u V_v \neq 0;$$

$$\text{albo } U_u = V_v = 0, \quad U_v V_u \neq 0;$$

i tylko jeśli jeden, albo drugi z tych dwóch zestawów warunków jest spełniony. Całkowanie tych równań zakończy dowód.

3. Ogólne przekształcenie parametrów.

Okażemy teraz, że siatka parametrowa może być zgrana z dowolnie przepisana siatką krzywych na powierzchni. Niechaj będzie dana dowolna siatka (4.3) krzywych na powierzchni (4.2); chcemy obrać przekształcenie parametrów (4.8) w taki sposób, żeby nowa siatka parametrowa $du dv = 0$ pokryła się z siatką (4.3). Najpierw należy napisać równanie nowej siatki parametrowej. Przez rozwiązanie równań (4.9) względem du i dv otrzymamy:

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{J} (V_v dU - U_v dV), \\ dv &= \frac{1}{J} (-V_u dU + U_u dV), \end{aligned} \quad (4.11)$$

a przez przemnożenie tych wyrażeń

$$dudv = \frac{1}{J^2} [-V_u V_v dU^2 + (U_u V_v + U_v V_u) dU dV - U_u U_v dV^2]. \quad (4.12)$$

Przyrównanie do zera prawej strony tego równania daje równanie nowej siatki parametrowej w starych parametrach. Z przyrównania równań (4.3) i (4.12) wynika, że, aby nowa siatka parametrowa pokryła się z siatką krzywych (4.3) wystarcza za U i V wziąć dwa niezależne rozwiązania dwóch równań różniczkowych

$$\frac{-V_u V_v}{A} = \frac{U_u V_v + U_v V_u}{2B} = \frac{-U_v U_u}{C}, \quad (4.13)$$

gdy $ABC \neq 0$. Ale przypadek, gdy mianownik znika nie przedstawia istotnego wyjątku; w ten sposób udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Przyjęcie jakiejś szczególnej siatki krzywych na powierzchni za siatkę parametrową w niczym nie ogranicza powierzchni, przedstawionej za pomocą równań parametrowych.

4. Wpływ przekształcenia parametrów na niektóre funkcje. Obliczmy teraz skutek jaki wywiera ogólne przekształcenie parametrów (4.8) na wielkości związane z teorią powierzchni.

Zróżniczkowanie równań powierzchni (4.2) względem nowych zmiennych parametrowych u, v daje

$$\begin{aligned}X_u &= X_U U_u + X_V V_u, \\X_v &= X_U U_v + X_V V_v,\end{aligned}\tag{4.14}$$

i podobne wzory dla pochodnych dla funkcji Y i Z .

Równania (4.11) podają wyrażenia dla du i dv , w których wielkość J jest zdefiniowana w równaniach (4.8). Lecz, jeśli u, v są uważane za funkcje zmiennych U, V , bezpośrednie różniczkowanie daje:

$$\begin{aligned}du &= u_U dU + u_V dV, \\dv &= v_U dU + v_V dV.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Porównanie ze sobą wzorów (4.11) i (4.15) prowadzi do związków:

$$\begin{aligned}u_U &= \frac{V_v}{J}, & u_V &= -\frac{U_v}{J}, \\v_U &= -\frac{V_u}{J}, & v_V &= \frac{U_u}{J},\end{aligned}\tag{4.16}$$

a stąd także i do związku

$$u_U v_V - u_V v_U = \frac{1}{J}.\tag{4.17}$$

Oznaczmy przez $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}; \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}; \bar{dS}$ wielkości podstawowe 1. i 2. rzędu, oraz element liniowy powierzchni (4.2). Są to funkcje parametrów U, V . Oznaczmy następnie przez $E', F', G'; L', M', N'; dS$ wielkości podstawowe tejże powierzchni po wykonaniu przekształcenia parametrów (4.8). Są to funkcje nowych parametrów u, v . Bezpośredni rachunek, który pomijamy, pozwala ustalić zestaw następujących wzorów przekształceniowych:

$$\begin{aligned}
J_i' &= \bar{J}_i \cdot J, & (i = 1, 2, 3), \\
E' &= \bar{E}U_u^2 + 2\bar{F}U_uV_u + \bar{G}V_u^2, \\
F' &= \bar{E}U_uU_v + \bar{F}(U_uV_v + U_vV_u) + \bar{G}V_uV_v, \\
G' &= \bar{E}U_v^2 + 2\bar{F}U_vV_v + \bar{G}V_v^2, \\
T' &= \pm \bar{T} \cdot J, \quad (+ \text{ gdy } J > 0, \quad - \text{ gdy } J < 0); \quad \text{Przypis 12.} \\
a' &= \pm \bar{a}, \quad b' = \pm \bar{b}, \quad c' = \pm \bar{c}, \quad (+ \text{ gdy } J > 0, \quad - \text{ gdy } J < 0), \\
L' &= \pm (\bar{L}U_u^2 + 2\bar{M}U_uV_u + \bar{N}V_u^2), \\
M' &= \pm (\bar{L}U_uU_v + \bar{M}(U_uV_v + U_vV_u) + \bar{N}V_uV_v), \\
N' &= \pm (\bar{L}U_v^2 + 2\bar{M}U_vV_v + \bar{N}V_v^2), \\
dS &= \bar{dS},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

przy czym uwzględniamy znaki górne gdy $J > 0$ i dolne gdy $J < 0$.

Niezmiennosc cosinusów kierunkowych $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ prostej normalnej, w każdym punkcie powierzchni, przy przekształceniu parametrów jest analitycznym wyrazem faktu, że normalna jest *współzmiennikiem* punktu i powierzchni, oraz nie zależy, z wyjątkiem znaku, od krzywych parametrowych. Jakobiany $\bar{J}_i$ i wyróżnik $\bar{T}$ są, jak widać ze wzorów, *niezmiennikami względnymi*, natomiast wielkości podstawowe $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ oraz $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ nie są nawet względnymi niezmiennikami. Pierwsza forma zasadnicza, wyrażająca element liniowy powierzchni, jest *niezmiennikiem bezwzględnym* przekształcenia parametrów, co zresztą jest jasne bezpośrednio z geometrycznego poglądu. Jest wiele innych funkcji, które są niezmiennikami bezwzględnymi przekształcenia parametrów; trzy takie funkcje, zwane *niezmiennikami różniczkowymi* (lub też parametrami różniczkowymi) *Beltrami'ego* podane są poniżej, bez przeprowadzenia rachunków.

Pierwszy parametr różniczkowy $\Delta_1 \varphi$ funkcji $\varphi(U, V)$, zdefiniowany wzorem

$$\Delta_1 \varphi = \frac{1}{T^2} [\bar{E} \varphi_V^2 - 2\bar{F} \varphi_V \varphi_U + \bar{G} \varphi_U^2]; \tag{4.19}$$

mieszany parametr różniczkowy $\Delta_1(\varphi, \psi)$ dwóch funkcji $\varphi(U, V)$ i $\psi(U, V)$, zdefiniowany wzorem

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = \frac{1}{T^2} [\bar{E} \varphi_V \psi_V - \bar{F}(\varphi_V \psi_U + \varphi_U \psi_V) + \bar{G} \varphi_U \psi_U]; \tag{4.20}$$

drugi parametr różniczkowy $\Delta_2 \varphi$ funkcji $\varphi(U, V)$, zdefiniowany wzorem

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\bar{E} \varphi_V - \bar{F} \varphi_U}{T} \right)_V + \left(\frac{\bar{G} \varphi_U - \bar{F} \varphi_V}{T} \right)_U \right]; \quad (4.21)$$

— są wszystkie trzy niezmiennikami bezwzględny przekształcenia parametrów. Niezmienniki te mają duże znaczenie dla geometrii powierzchni.

Łatwo sprawdzić następujące wzory dla szczególnych dwóch funkcji $\varphi(U, V) = U$ i $\psi(U, V) = V$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 U &= \frac{\bar{G}}{T^2}, \quad \Delta_1 V = \frac{\bar{E}}{T^2}, \quad \Delta_1(U, V) = -\frac{\bar{F}}{T^2}, \quad \Delta_1 U \cdot \Delta_1 V - \Delta_1^2(U, V) = \frac{1}{T^2}; \\ \bar{E} &= \frac{\Delta_1 V}{\Delta_1 U \cdot \Delta_1 V - \Delta_1^2(U, V)}, \quad \bar{F} = -\frac{\Delta_1(U, V)}{\Delta_1 U \cdot \Delta_1 V - \Delta_1^2(U, V)}, \\ \bar{G} &= \frac{\Delta_1 U}{\Delta_1 U \cdot \Delta_1 V - \Delta_1^2(U, V)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Jeśli uczyniono przekształcenie parametrów w ten sposób, że dwie rodziny krzywych, których równania w starych parametrach są $\varphi(U, V) = \text{const.}$ i $\psi(U, V) = \text{const.}$, stały się nowymi krzywymi parametrowymi, wtedy nowe wielkości podstawowe E', F', G' wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{\Delta_1 \psi}{\Delta_1 \varphi \cdot \Delta_1 \psi - \Delta_1^2(\varphi, \psi)}, \quad F' = -\frac{\Delta_1(\varphi, \psi)}{\Delta_1 \varphi \cdot \Delta_1 \psi - \Delta_1^2(\varphi, \psi)}, \\ G' &= \frac{\Delta_1 \varphi}{\Delta_1 \varphi \cdot \Delta_1 \psi - \Delta_1^2(\varphi, \psi)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

5. Uproszczenie funkcji odwzorowawczych przy odwzorowaniu dwóch powierzchni na siebie.

Przy porównywaniu obrazu z oryginałem należy rozważać odpowiadające sobie wielkości na obu powierzchniach. Współrzędne powierzchniowe u, v na powierzchni oryginału, oraz współrzędne powierzchniowe U, V na powierzchni obrazu, są na ogół dowolne, a ich obiór niezależny. Czynnikiem wiążącym obie powierzchnie, przedstawione za pomocą równań (2.1), są funkcje odwzorowawcze (3.1), które wyrażają współrzędne krzywoliniowe U, V w funkcji współrzędnych krzywoliniowych u, v . Korzystnie jest za siatkę

parametrową na powierzchni obrazu obrać *nie dowolną* siatkę, *lecz tę, która odpowiada* siatce parametrowej oryginału na skutek odwzorowania.

Odwzorowanie powierzchni zostanie, w sensie matematycznym, wykonane, gdy funkcje odwzorowawcze będą wprowadzone do równań parametrowych powierzchni obrazu, czyniąc dla tej powierzchni przekształcenie parametrów z U, V na u, v :

$$\begin{aligned} X &= F_1(U, V) = F_1[\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)] = \Phi_1(u, v), \\ Y &= F_2(U, V) = F_2[\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)] = \Phi_2(u, v), \\ Z &= F_3(U, V) = F_3[\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)] = \Phi_3(u, v). \end{aligned} \quad (4.24)$$

W rezultacie obie powierzchnie będą wtedy odniesione do *tych samych parametrów* u, v , tak że odpowiadające sobie punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe. Funkcje odwzorowawcze spełniły w ten sposób swą rolę, modyfikując równania powierzchni obrazu; naturalnie wprowadzenie nowych parametrów na powierzchni II nie zmienia samej powierzchni — parametrowe przedstawienie powierzchni za pomocą równań nie jest jedyne — zmienia tylko współrzędne powierzchniowe. Linie parametrowe u, v na powierzchni oryginału, oraz linie parametrowe u, v na powierzchni obrazu są dwiema siatkami całkiem różnych linii, ale *odpowiadającymi sobie* w rozważanym odwzorowaniu.

Wynik przekształcenia parametrów na powierzchni obrazu za pomocą funkcji odwzorowawczych, może być wyrażony także w tej formie, że uprościło ono funkcje odwzorowawcze do postaci

$$\begin{aligned} U &= u, \\ V &= v, \end{aligned} \quad (J = \pm 1). \quad (4.25)$$

W powyższym rozważaniu nie wprowadzono żadnych restrykcji ani w ogólności obu powierzchni, ani w ogólności funkcji odwzorowawczych. Można więc sformułować następującą konkluzję.

Twierdzenie. *Założenie, że parametry na jednej z powierzchni zostały obrane tak, że odpowiadające sobie punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe, w niczym nie ogranicza ani funkcji odwzorowawczych, ani samych powierzchni.*

Rzecz jasna, że parametry na pozostałej powierzchni są dowolne. Gdy odpowiadające sobie punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe, wszelkie równanie wiążące współrzędne krzywoliniowe jest

równaniem krzywej na jednej z powierzchni i jednocześnie jest równaniem odpowiadającej krzywej na pozostałej powierzchni. Co więcej, *gdy korespondujące punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe, odpowiadające kierunki w korespondujących punktach są sobie równe*. W rzeczy samej równanie (4.A), na skutek uproszczenia funkcji odwzorowawczych do postaci (4.25), redukuje się do postaci:

$$\frac{dV}{dU} = \frac{dv}{du},$$

co dowodzi twierdzenia.

5. Dwa podstawowe zadania teorii odwzorowań

Przy porównywaniu ze sobą dwóch powierzchni metodą odwzorowania, trzy czynniki wchodzą w grę:

zasada wzajemności:

1) powierzchnia oryginału	 (podmiot)	(przedmiot),
2) powierzchnia obrazu	 (przedmiot)	(podmiot),
3) funkcje odwzorowawcze	 (akcja)	(reakcja).

W teorii odwzorowań będzie nas głównie interesował czynnik trzeci — funkcje odwzorowawcze. Założymy, że powierzchnie oryginału i obrazu są dane za pomocą równań (2.1). Wtedy, w stosunku do funkcji odwzorowawczych, możemy zająć jedno z dwóch możliwych stanowisk:

1) Albo funkcje odwzorowawcze są *dane* (obojętne skąd, mogą być dowolnie z góry obrane); musimy wówczas umieć ocenić wartość odwzorowania, poznać jego zalety i wady, móc porównać go z innymi odwzorowaniami — krótko: musimy umieć zbadać dane odwzorowanie;

2) Albo funkcje odwzorowawcze są *poszukiwane*; wówczas musimy się czymś kierować w obiorze funkcji odwzorowawczych, musimy wyjść z pewnych wytycznych, postawić pewne żądania, czy warunki odwzorowaniu i na ich podstawie poszukiwać funkcji odwzorowawczych, spełniających te warunki.

Odpowiednio do tych dwóch stanowisk, możemy sformułować dwa podstawowe zadania teorii odwzorowań:

Pierwsze zadanie teorii odwzorowań. Dane są: powierzchnia oryginału, powierzchnia obrazu i jakieś ich odwzorowanie określone funkcjami odwzorowawczymi; *zbadać odwzorowanie*.

Drugie zadanie teorii odwzorowań. Dane są: powierzchnia oryginału i powierzchnia obrazu; *znaleźć odwzorowanie*, któreby spełniało z góry żądane warunki (o ile takie odwzorowanie w ogóle istnieje).

Zadanie pierwsze rozwiązuje kompletnie teoria zniekształceń odwzorowawczych. Zadanie to jest stosunkowo niezbyt trudne, i teoria odwzorowań daje środki za pomocą których zbadanie danego odwzorowania dla dwóch danych powierzchni nie przedstawia specjalnych trudności. W praktyce spotkać można książki, traktujące sprawę odwzorowań kartograficznych z tego tylko, ograniczonego, punktu widzenia; pochodzi to z zamiaru unikania trudności matematycznych; taka metoda traktowania teorii odwzorowań kartograficznych (kuli) częściowo tylko spełnia swe zadanie, ma dużo niedomówień i zbyt wąskie ramy; w większości przypadków nie znamy wówczas drogi uzyskania funkcji odwzorowawczych.

Zadanie drugie jest znacznie rozleglejsze, gdyż pozostawia do dyspozycji obiór warunków stawianych (albo żądanych od) odwzorowaniu (a). Żądać możemy bardzo dużo, rzeczy możliwych i niemożliwych; otóż ogólna teoria odwzorowań segreguje żądane warunki i ogranicza żądania zbyt wygórowane, daje możliwość racjonalnego stawiania warunków. Następnie uczy, jak rozwiązywać zadania w kilku najważniejszych przypadkach. Zadanie drugie nie ma i mieć nie może tak jednolitej i kompletnej teorii, jak zadanie pierwsze, co wynika z natury samego zadania: różnorodności stawianych warunków; prowadzi raczej do wielu teorii poszczególnych grup odwzorowań. Rozwiązywanie zadania drugiego, w jego rozmaitych możliwych rodzajach, jest na ogół trudne, wymaga gruntowej znajomości matematyki, i prowadzi zazwyczaj do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, których całkami będą poszukiwane funkcje odwzorowawcze. W wielu przypadkach w zadaniu tym musimy nadto rozróżnić dwa problemy, *A* i *B*. Problem *A* polega na określeniu takich (analitycznych) funkcji współrzędnych, które uskutecznią przepisane przyporządkowanie punktowe obu powierzchni. Jeśli ogólne rozwiązanie problemu *A* zawiera funkcje dowolne ¹⁾, powstaje problem *B*, który polega na przyporządkowaniu sobie *ograniczonych* obszarów powierzchni I i II, przy czym jeszcze, dla *wyjątkowych miejsc* wewnątrz obszaru, albo na brzegu, mogą być założone dalej idące *warunki brzegowe*. Problem *B* z natury swej jest problemem funkcyjno-teoretycznym.

¹⁾ Przy czym stałe dowolne uważamy ogólnie również za funkcje.

6. Odwzorowanie bezpośrednie i pośrednie

Odwzorowanie jednej powierzchni na drugą możemy traktować w dwojaki sposób:

a) Albo powierzchnię I (oryginału) możemy odwzorować *bezpośrednio* na powierzchnię II (obrazu) za pomocą dowolnej pary funkcji odwzorowawczych;

c) Albo to samo odwzorowanie możemy uzyskać dwuetapowo za pośrednictwem *trzeciej* powierzchni i stosownych dwóch par funkcji odwzorowawczych, w następujący sposób: możemy najpierw odwzorować powierzchnię I na powierzchnię III, i następnie powierzchnię III na powierzchnię II (albo, co na jedno wychodzi, odwzorować powierzchnię I na powierzchnię III, i powierzchnię II na powierzchnię III). Tym samym powierzchnie I i II będą też wzajemnie odwzorowane. Takie odwzorowanie możemy nazwać *pośrednim*.

Przy odwzorowaniu pośrednim dwóch powierzchni, pewne własności mogą się okazać własnościami *przechodnimi*; jeśli odwzorowanie powierzchni I na powierzchnię III posiada np. własność *A*, i odwzorowanie powierzchni II na powierzchnię III posiada również własność *A*, to w większości przypadków także i odwzorowanie powierzchni I na powierzchnię II będzie tę własność posiadać. Zwłaszcza własności metryczne powierzchni są takimi własnościami przechodnimi.

Jaką korzyść możemy uzyskać przez pośrednictwo trzeciej powierzchni w odwzorowaniu dwóch danych powierzchni? Zdawałoby się, że problem raczej się komplikuje, gdyż zamiast jednego odwzorowania i dwóch powierzchni mamy do czynienia z dwoma odwzorowaniami i z trzema powierzchniami. Korzyść polega na tym, że obiór trzeciej powierzchni jest w naszej dyspozycji; możemy obrać pewną *standardową* powierzchnię pośredniczącą, którą z reguły jest najprostsza powierzchnia, mianowicie *płaszczyzna*. W ten sposób problem odwzorowania dwóch dowolnych powierzchni, w wielu wypadkach może być sprowadzony do dwóch prostszych i łatwiejszych problemów: odwzorowania powierzchni I na płaszczyznę i odwzorowania powierzchni II na tę samą płaszczyznę. Taka redukcja problemu zawilszego do problemu prostszego ma miejsce np. w teorii odwzorowań konforemnych, również w teorii odwzorowań równopowierzchniowych, i w podobnych problemach. Ale również i problem odwzorowania dowolnej powierzchni na płaszczyznę może być nieraz sprowadzony do problemu prostszego; wystarczy znajomość jakiegoś *jednego* odwzorowania rozważanego typu w połączeniu ze *wszystkimi* odwzorowaniami płaszczyzny na inną płaszczyznę.

Odwzorowanie pośrednie dwóch powierzchni może być wykonane nie tylko za pomocą włączenia jednej powierzchni pośredniczącej, lecz także kilku takich powierzchni; odwzorowanie może być wykonane wieloetapowo; mówimy wówczas o odwzorowaniu podwójnym, potrójnym, ... i w ogóle wielokrotnym; (np. elipsoidę odwzorujemy na płaszczyznę, tę płaszczyznę odwzorujemy na inną płaszczyznę, na koniec kulę odwzorujemy na tę ostatnią płaszczyznę; w ten sposób ustanowimy pewne potrójne odwzorowanie elipsoidy na kulę).

Metoda pośredniego odwzorowania dwóch powierzchni znajduje zwłaszcza zastosowanie przy rozwiązywaniu drugiego podstawowego zadania teorii odwzorowań.

7. Odwzorowanie rzutowe

W drugim zadaniu teorii odwzorowań chodzi o znalezienie pary (lub czasami jednej tylko) funkcji odwzorowawczych z pewnych z góry żądanych warunków. Pod tym względem możemy pomyśleć bardzo wiele, bardzo rozmaitych koncepcji, które pozwolą określić funkcje odwzorowawcze, kojarzące punkty obu danych powierzchni w przynależne sobie pary. Najstarszą i najprostszą koncepcją obioru funkcji odwzorowawczych jest ich określenie z warunku *geometrycznego rzutowania* punktów jednej powierzchni na drugą za pomocą wiązki promieni centralnych, wychodzących z jednego punktu, albo równoległych do jednego kierunku. Ustanowienie odpowiedniości punktowej między dwiema powierzchniami w *ten szczególny* sposób daje powód do nazwania tej grupy odwzorowań *rzutami*, lub *projekcjami*. Rzut jest odwzorowaniem szczególnego rodzaju. W kartografii matematycznej często jednak nie odróżnia się ściśle pojęć rzut i odwzorowanie, i używa się terminu rzut w sensie szerszym — odwzorowania — nawet i wówczas, gdy odwzorowanie rzutowe nie jest. Zwrócić należy uwagę na tę nieco niepoprawną, lecz tradycyjną terminologię.

ROZDZIAŁ II

ODWZOROWANIE IZOMETRYCZNE

Problem izometrii dwóch powierzchni, oraz deformacji jednej powierzchni, wzbudził duże zainteresowanie i przyciągnął wielu badaczy. W najbardziej ogólnej formie dyskusję zapoczątkował Gauss w swym sławnym memuarze *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827; inne badania, o bardzo ważnym znaczeniu dla teorii powierzchni w ogóle, zawdzięczamy głównie następującym matematykom: H. Minding, E. Bour, O. Bonnet, G. Darboux i J. Weingarten. Następne numery (8 — 13) dają bardzo ogólnikowe pojęcie o problemie, w zakresie wystarczającym dla orientacji w zagadnieniu odwzorowania dwóch powierzchni w ogóle.

E. F. A. Minding — Über die Biegung krummer Flächen, J. f. Math. 18 (1838); 20 (1840).

— Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, J. f. Math. 19 (1839).

E. Bour (1860), Théorie de la déformation des surfaces, J. éc. polyt. cah. 39 (1862).

O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables à une surface donnée (1860), J. éc. polyt. cah. 41 (1865); cah. 42 (1867).

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris, 4 vols. (1887-1896).

J. Weingarten — Über die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von konstanter Krümmung;

— Über die Deformationen einer biegsamen unausgedehnbaren Fläche, J. f. Math. 100 (1887).

8. Definicja

Odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, w którym długości wszystkich odpowiadających sobie łuków są sobie równe, nazywamy odwzorowaniem równodługościowym¹⁾.

¹⁾ Wskazane jest wprowadzenie terminu *odwzorowanie wiernodługościowe*, w przypadku gdy wszystkie odpowiadające sobie łuki, wprawdzie nie są sobie równe, lecz pozostają zawsze w stałym do siebie stosunku, różnym od jedności: $s = kS$, $k \neq 1$.

Powyższą definicję wyrazimy w formie matematycznej w następujący sposób:

$$\begin{array}{l} \text{Odwzorowanie} \quad \begin{cases} U = \psi_1(u, v) \\ V = \psi_2(u, v), \end{cases} \\ \text{powierzchni} \quad \begin{cases} x = f_1(u, v) \\ y = f_2(u, v) \\ z = f_3(u, v) \end{cases} \text{ na powierzchnię } \begin{cases} X = F_1(U, V) \\ Y = F_2(U, V) \\ Z = F_3(U, V) \end{cases} \text{ jest równo-} \end{array}$$

długościowe wtedy i tylko wtedy, gdy $s = S$ dla wszelkich łuków odpowiadających sobie na obu powierzchniach.

Każde dowolne dwie powierzchnie można zawsze odwzorować wzajemnie za pomocą dwóch dowolnych (regularnych) funkcji odwzorowawczych. Uzyskane odwzorowanie albo posiada własność zachowania długości wszelkich korespondujących łuków, albo też tej własności nie posiada; krótko mówiąc, albo jest równodługościowe, albo nie jest. W tym ostatnim przypadku możemy pokusić się o poszukiwanie innej pary funkcji odwzorowawczych, któreby nadawała odwzorowaniu własność równodługościowości. Otóż nie dla każdych dwóch powierzchni taka para funkcji odwzorowawczych istnieje; nie każde dwie powierzchnie dadzą się odwzorować równodługościowo. Powierzchnie muszą posiadać pewne szczególne cechy, aby dały się przyporządkować punktowo z zachowaniem długości. Fakt istnienia albo nieistnienia pary funkcji odwzorowawczych, dla których zasadniczym niezmiennikiem jest długość wszystkich linii, stanowi o możliwości albo niemożliwości ustanowienia odpowiedniości punktowej równodługościowej dla dwóch rozważanych powierzchni.

9. Główne kryterium równodługościowości

Gdy punkty dwóch powierzchni I i II są w jedno-jednoznacznej odpowiedniości i korespondujące punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe na obu powierzchniach, warunkiem koniecznym i wystarczającym równodługościowości odwzorowania jednej powierzchni na drugą jest równość odpowiadających sobie wielkości podstawowych 1. rzędu obu powierzchni, dla każdej pary odpowiadających sobie punktów.

a) Załóżmy, że mamy dane dwie powierzchnie odniesione do siebie równodługościowo. Na mocy definicji, korespondujące łuki są tej samej długości na obu powierzchniach, a także i korespondujące elementy liniowe, ds i dS , na powierzchni I i, odpowiednio,

na powierzchni II, są sobie równe. Pierwsza forma różniczkowa teorii powierzchni wyraża element liniowy za pomocą wielkości podstawowych E, F, G oraz różniczek du, dv , określających kierunek elementu liniowego w jakimś punkcie powierzchni. Możemy więc napisać:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad \text{dla powierzchni I,}$$

$$dS^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2 \quad \text{dla powierzchni II.}$$

Elementy liniowe ds i dS odpowiadają sobie wzajemnie w rozważanym odwzorowaniu; odpowiedniość tę wyraża fakt, że w obu wzorach występują te same zmienne parametrowe.

Założenie równodługościowości odwzorowania pociąga za sobą równość $ds = dS$, a więc

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2,$$

ta zaś równość może mieć miejsce tylko wówczas, gdy

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'. \quad \dots (9.1)$$

Równość wielkości podstawowych w każdej parze odpowiadających sobie punktów jest koniecznym następstwem równodługościowości odwzorowania.

b) Warunek powyższy jest również i wystarczający; słuszne jest bowiem twierdzenie odwrotne: z równości $E=E', F=F', G=G'$ w każdej parze odpowiadających sobie punktów, wynika równodługościowość odwzorowania jednej powierzchni na drugą. Istotnie, wówczas $ds = dS$ dla *wszelkich* dowolnych linii odpowiadających sobie w ustanowionym odwzorowaniu, co dowodzi równodługościowości.

Powyższe twierdzenie daje pełne kryterium równodługościowości odwzorowania; na mocy tego twierdzenia jesteśmy w stanie rozwiązywać obydwa podstawowe zadania teorii odwzorowań, w zastosowaniu do odwzorowania równodługościowego.

Zadanie pierwsze: Dane są dwie powierzchnie i para funkcji odwzorowawczych, zbadać czy odwzorowanie uczynione przez te funkcje jest równodługościowe. W tym celu, po wprowadzeniu funkcji odwzorowawczych w równania parametrowe powierzchni obrazu, wystarczy sprawdzić czy korespondujące wielkości podstawowe obu powierzchni są sobie równe w każdej parze odpowiadających punktów. W przypadku równości tych wielkości, odwzorowanie jest równodługościowe. W przypadku nierówności (przy czym dla pewnych punktów lub nawet linii może wyjątkowo mieć miejsce

równość) odwzorowanie nie jest równodługościowe; nie przesądza to jednak sprawy niemożliwości uzyskania odwzorowania równodługościowego dla rozważanych powierzchni: jakaś inna para funkcji odwzorowawczych może ewentualnie równodługościowość osiągnąć.

Zadanie drugie: Dane są dwie powierzchnie; poszukujemy pary funkcji odwzorowawczych, któreby ustanawiały odwzorowanie równodługościowe jednej powierzchni na drugą. Poszukiwane funkcje muszą wówczas spełnić trzy warunki: $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$. Dwie nieznane funkcje mamy wyznaczyć z trzech równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Zadanie o ustanowieniu równodługościowości dla dwóch powierzchni nie zawsze będzie rozwiązywalne: dwie funkcje spełniające trzy równania mogą w ogóle nie istnieć dla danych dwóch powierzchni. Ta bezpośrednia droga badania możliwości ustanowienia odwzorowania równodługościowego dla dwóch danych powierzchni nastęrcza na ogół duże trudności natury matematycznej. Istnieje jednak prostszy, pośredni sposób stwierdzenia czy równodługościowość dla danych dwóch powierzchni w ogóle istnieje czy nie, a to na podstawie krzywizny.

10. Krzywiznowe kryterium równodługościowości

Warunkiem koniecznym i na ogół niewystarczającym równodługościowości odwzorowania jednej powierzchni na drugą, jest równość krzywizn obu powierzchni w każdej parze odpowiadających sobie punktów.

a) Równodługościowość odwzorowania pociąga za sobą, w sposób konieczny, równość krzywizn obu powierzchni w korespondujących punktach. Istotnie, na mocy głównego kryterium, zachowanie długości powoduje z konieczności równość wielkości podstawowych w odpowiadających sobie punktach. Krzywizna powierzchni, jak dowiódł Gauss¹⁾, może być analitycznie przedstawiona w funkcji samych tylko wielkości podstawowych 1. rzędu i ich pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu:

$$4(EG - F^2)(LN - M^2) + 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}) + \\ + E[(2F_u - E_v)G_v - G_u^2] + G[(2F_v - G_u)E_u - E_v^2] + \\ + F(2F_vE_v + 2F_uG_u + E_vG_u - E_uG_v - 4F_uF_v) = 0.$$

¹⁾ Badania Gauss'a, dotyczące teorii powierzchni, zawarte są w epokowej pracy p. t. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827, Gott. Comm. rec. 6 (1828); *Werke* 4; *Ostwalds Klassiker* Nr. 5. Polski przekład tej pracy wydany był w r. 1913 w Warszawie.

Jest to jedno z podstawowych równań teorii powierzchni, zwane *równaniem charakterystycznym Gauss'a*. Krzywizna powierzchni, jak uczy ogólna teoria powierzchni, najprościej wyraża się za pomocą wielkości podstawowych pierwszego i drugiego rzędu:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Wielkość $LN - M^2$, na mocy charakterystycznego równania Gauss'a, jest funkcją samych tylko wielkości E, F, G i ich pochodnych cząstkowych; możemy przeto napisać ogólnie:

$$K_1 = f(E, F, G) \quad \text{dla powierzchni I,}$$

$$K_2 = f(E', F', G') \quad \text{dla powierzchni II.}$$

Skoro równodługościowość pociąga za sobą równość wielkości podstawowych 1. rzędu w każdej parze odpowiadających sobie punktów, to i krzywizny obu powierzchni w tych punktach muszą być sobie równe, jako jednakowe funkcje od równych argumentów:

$$K_1 = K_2.$$

b) Równość krzywizn obu powierzchni w każdej parze korespondujących punktów nie jest na ogół warunkiem wystarczającym równodługościowości; jeśli w jakimś odwzorowaniu krzywizny w każdej parze odpowiadających sobie punktów obu powierzchni są sobie równe, odwzorowanie może zarówno być, jak i nie być równodługościowe. Wynika to stąd, że równość

$$f(E, F, G) = f(E', F', G'),$$

może mieć miejsce nie tylko wówczas, gdy

$$E = E', F = F', G = G',$$

lecz także i w innych przypadkach; dwie jednakowe funkcje od różnych argumentów mogą być równe nie tylko wskutek równości odpowiednich argumentów, lecz także i wskutek innych przyczyn. Równość

$$K_1 = K_2$$

może zatem mieć miejsce także i wtedy, gdy

$$E \neq E', F \neq F', G \neq G',$$

a więc dla odwzorowania nierównodługościowego.

Zastanówmy się teraz jak korzystać z powyższego kryterium krzywiznowego. Widzieliśmy, że z zachowania długości w odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą wynika zawsze, jako konieczne następstwo, równość krzywizn w każdej parze korespondujących punktów. Z równości krzywizn nie wynika równodługościowość odwzorowania. Ale z *nierówności krzywizn, we wszystkich na ogół odpowiadających sobie punktach, wynika zawsze nierównodługościowość odwzorowania*¹⁾, nie jest bowiem spełniony warunek konieczny. Możemy więc korzystać z kryterium krzywiznowego jedynie w sensie negatywnym. Jeśli jedna z powierzchni jest powierzchnią o stałej krzywiznie, negatywne kryterium krzywiznowe rozstrzyga sprawę o niemożliwości ustanowienia odwzorowania równodługościowego w ogóle: równości krzywizn we wszystkich korespondujących punktach obu powierzchni nie może być i nie ma nigdy, jakiegokolwiek byłyby funkcje odwzorowawcze.

11. Badanie niezmienników odwzorowania równodługościowego

Zasadniczym niezmiennikiem tego odwzorowania jest, na mocy definicji, długość *wszystkich* odpowiadających sobie linii. Poznaliśmy również dwa inne niezmienniki tego odwzorowania, mianowicie wielkości podstawowe 1. rzędu i krzywizna powierzchni, w odpowiadających sobie punktach. Interesuje nas przede wszystkim metryka, a więc kąty i pola. Wykażemy, że w odwzorowaniu równodługościowym również kąty i pola odpowiadających sobie figur są zachowane.

a) *Kąty są niezmiennikiem odwzorowania równodługościowego.* Niechaj na dwóch powierzchniach będą dwa kąty β i β' , odpowiadające sobie, określone za pomocą kierunków dv/du oraz $\delta v/\delta u$. Wówczas

$$\cos \beta = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}},$$

$$\cos \beta' = \frac{E' du \delta u + F' (du \delta v + dv \delta u) + G' dv \delta v}{\sqrt{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2} \cdot \sqrt{E' \delta u^2 + 2F' \delta u \delta v + G' \delta v^2}}. \quad (11.1)$$

Fakt, że są to kąty odpowiadające sobie na obu powierzchniach, na skutek odwzorowania jednej powierzchni na drugą, wyrażony

¹⁾ Nie przesądza to jednak sprawy nieistnienia w ogóle odwzorowania równodługościowego dla rozważanych dwóch powierzchni.

jest tym, że w obu wzorach występują te same zmienne parametrowe. Skoro odwzorowanie jest równodługościowe, to spełnia się warunek konieczny i wystarczający:

$$E = E', F = F', G = G'$$

w każdej parze korespondujących punktów. Wtedy prawe strony obu wzorów są jednakowe i otrzymujemy:

$$\cos \beta = \cos \beta', \text{ skąd } \beta = \beta'.$$

Kąty zatem są zachowane. *Odwzorowanie równodługościowe jest zawsze także i równokątne* (czyli izogonalne). Twierdzenie odwrotne nie jest słuszne, równokątność nie musi pociągać za sobą równodługościowości.

b) *Pola są niezmiennikiem odwzorowania równodługościowego.* Weźmy dwa odpowiadające sobie elementy powierzchniowe dp i dP na powierzchni oryginału i obrazu. Mamy

$$dp = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad dP = \sqrt{E'G' - F'^2} du dv.$$

Odpowiedniość elementów powierzchniowych w związku odwzorowawczym jest wyrażona przez występowanie tych samych zmiennych parametrowych na obu powierzchniach. Skoro odwzorowanie jest równodługościowe, to wielkości podstawowe E, F, G dla powierzchni I są odpowiednio równe wielkościom podstawowym E', F', G' dla powierzchni II, w każdej parze korespondujących punktów, a przeto $dp = dP$, skąd $p = P$. Pola odpowiadających sobie obszarów na obu powierzchniach są sobie równe, są zachowane w odwzorowaniu równodługościowym. *Odwzorowanie równodługościowe jest zarazem zawsze równopowierzchniowe.* Twierdzenie odwrotne nie jest słuszne, równopowierzchniowość nie musi pociągać równodługościowości.

c) Reasumując widzimy, że odwzorowanie równodługościowe dwóch powierzchni (o ile w ogóle istnieje) ma ważne niezmienniki metryczne: zachowuje długości wszystkich łuków, zachowuje wszystkie kąty i wszystkie pola odpowiadające sobie, zatem *zachowuje w całości metrykę*. Z tego powodu odwzorowanie równodługościowe nazywamy bardziej dobitnie *odwzorowaniem izometrycznym* lub *izometrią*; dwie powierzchnie przyporządkowane sobie punktowo za pomocą odwzorowania izometrycznego nazywamy *powierzchniami izometrycznymi*.

Z równodługościowości wynika zawsze izometria i odwrotnie, z izometrii wynika zawsze równodługościowość; dwa te pojęcia są więc *równoważne* (ale nie równoznaczne).

12. Deformacja, czyli gięcie powierzchni

Przypuśćmy, że powierzchnię traktujemy jako dwuwymiarową giętką i nierozciągliwą, cienką powłokę. Powierzchnia ta może dowolnie się zmieniać, na skutek dowolnego ciągłego gięcia powłoki bez rozdarcia lub zaginania. Każdą taką zmianę nazywamy *deformacją* powierzchni.

Wyobraźmy sobie jakąś linię, zakreśloną na powierzchni i przypuśćmy, że powierzchnia doznaje dowolnych deformacji. Ponieważ nie ma ani rozciągliwości, ani rozdarcia powłoki, długość linii między dwoma dowolnymi jej punktami pozostanie bez zmiany. Zasadniczym niezmiennikiem deformacji, czyli gięcia powierzchni, jest długość wszystkich linii. W sensie geometrycznym deformacja powierzchni jest niczym innym, jak odwzorowaniem równodługościowym, a przez to i izometrycznym danej powierzchni na jej formę wygiętą. Z punktu widzenia czystej geometrii lepiej jest deformację powierzchni traktować jako odwzorowanie (izometryczne) jednej powierzchni na drugą, gdyż przez to pozbywamy się pewnych fizykalnych założeń co do struktury powierzchni: takie cechy jak gięcie, nierozciągliwość, nierozrywalność powłoki są w zasadzie geometrii obce. Odwzorowanie izometryczne, jako relacja punktowa między dwiema powierzchniami definiowana funkcjami odwzorowawczymi, jest pojęciem niezależnym od możliwości gięcia, czyli deformacji powierzchni.

Deformacja jest jednym z rodzajów odwzorowania izometrycznego dwóch odpowiednich powierzchni. Izometria bowiem może mieć miejsce w dwóch innych jeszcze przypadkach: *kongruencji* i *symetrii* (albo: prostej i odwrotnej kongruencji). Również każda kombinacja tych trzech głównych typów izometrii: deformacji, kongruencji i symetrii, złożona z którychkolwiek dwóch, albo nawet ze wszystkich trzech przekształceń naraz, jest odwzorowaniem izometrycznym.

Istnieją pewne własności powierzchni, które nie ulegają zmianie wskutek procesu gięcia, czyli deformacji powierzchni, i które są wspólne dla końcowej formy powierzchni i początkowej.

Wszystkie niezmienniki odwzorowania równodługościowego, a tym samym i izometrycznego, są także niezmiennikami deformacji powierzchni. Jakkolwiek będziemy gięli powierzchnię, uważając ją za giętką i nierozciągliwą dwuwymiarową powłokę, nie zmienimy przez to nigdy metryki: długości wszystkich linii, wielkości wszystkich kątów i pól pozostaną niezmiennie, chociaż forma powierzchni

i figur na powierzchni ulegnie zmianie. *Metryka jest niezmiennikiem gięcia powierzchni*. Następnie wielkości podstawowe E, F, G są również niezmiennikami gięcia powierzchni. Wreszcie *krzywizna jest niezmiennikiem gięcia powierzchni* (gdyż zależy od wielkości podstawowych E, F, G i ich pochodnych, które nie zmieniają się przez gięcie powierzchni, jako funkcje punktu); ta ostatnia własność gięcia powierzchni, podana przez Gauss'a w jego *Disquisitiones* w r. 1827 jako *theorema egregium*, „teorema wspaniała”, przeczy zdawałoby się intuicji i, raczej, byłibyśmy skłonni uważać, że krzywizna w poszczególnych punktach powierzchni winna doznać zmiany wskutek deformacji, czyli gięcia jej powłoki.

W ogóle każdy metryczny niezmiennik teorii powierzchni, który wyraża się wzorem wprowadzającym tylko wielkości podstawowe 1. rzędu E, F, G i ich cząstkowe pochodne względem parametrów u, v , jest także niezmiennikiem gięcia, czyli izometrycznego odwzorowania powierzchni. Stąd można sformułować, bez potrzeby dowodu, następujące

Twierdzenie. Długości, kąty, pola, krzywizna geodezyjna, krzywizna Gaussowska, linie geodezyjne i linie inimalne są niezmiennikami gięcia powierzchni.

13. Powierzchnie rozwijalne i nierozwijalne

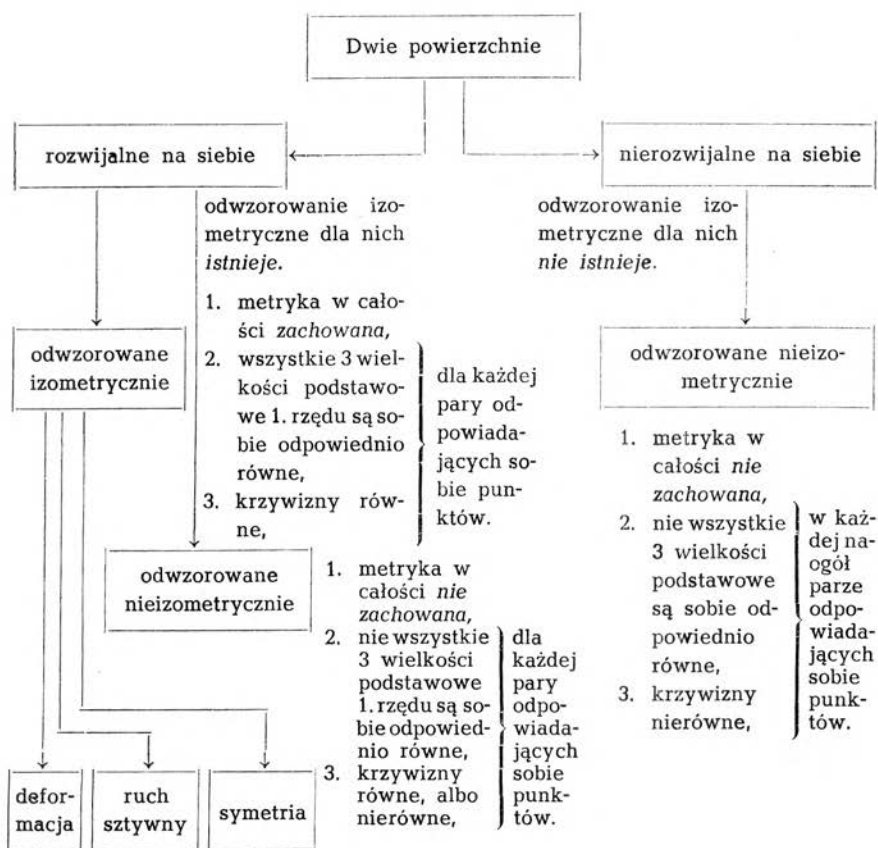
Przypuśćmy, że mamy dwie powierzchnie, takie że każda z nich może doznać deformacji w drugą, albo (co na jedno wychodzi) że obie one mogą doznać deformacji w jakąś jedną i tę samą trzecią powierzchnię. Dwie dane powierzchnie nazywamy wówczas *rozwijalnymi* na siebie. Matematyczna teoria rozwijalności *dwóch* powierzchni jest zazwyczaj (lecz nie zawsze) tym samym, co teoria deformacji *jednej* powierzchni, tak że zwykle dogodnie jest zajmować się tylko deformacją.

Możliwość albo niemożliwość ustanowienia izometrii między dwiema powierzchniami decyduje o rozwijalności, albo nierozwijalności wzajemnej tych powierzchni. Rozwijalność *dwóch* powierzchni nie jest więc żadnym ich odwzorowaniem, lecz tylko *możliwością* (istnieniem) pewnego odwzorowania dla tych powierzchni.

Dwie powierzchnie rozwijalne na siebie *mogą* (ale nie muszą) być odwzorowane na siebie izometrycznie; możliwość izometrii dla powierzchni rozwijalnych istnieje, niekoniecznie jednak musimy

z niej korzystać. Rozwijalność jest warunkiem koniecznym i niewystarczającym izometrii; z izometrii wynika zawsze rozwijalność powierzchni i zazwyczaj także (ale nie zawsze) deformacja; z rozwijalności nie musi wynikać izometria.

Dwie powierzchnie *nierozwijalne* na siebie *nie mogą* być odwzorowane izometrycznie i z konieczności *muszą* zawsze (jakiegokolwiek byłyby funkcje odwzorowawcze) być zrelacjonowane nieizometrycznie; możliwość izometrii dla takich dwóch powierzchni nie istnieje.



Zastanówmy się w końcu nad związkiem pomiędzy krzywizną powierzchni i rozwijalnością. Warunkiem koniecznym i na ogół niewystarczającym równości krzywizn w każdej parze korespondujących punktów dwóch powierzchni jest ich rozwijalność.

Dwie powierzchnie rozwijalne można zawsze odwzorować na siebie tak, żeby ich krzywizny w każdej parze przyporządkowanych sobie punktów były równe. Słuszne jest też twierdzenie odwrotne: jeśli w jakimś odwzorowaniu (izometrycznym albo nieizometrycznym) dwóch powierzchni ich krzywizny, w każdej parze skojarzonych punktów, są sobie równe, to powierzchnie są rozwijalne. Może się też zdarzyć, że w *każdym* dowolnym odwzorowaniu dwóch powierzchni ich krzywizny są zawsze równe, co ma miejsce gdy obie powierzchnie są o stałej i tej samej krzywiznie.

Jeśli w jakimś odwzorowaniu nieizometrycznym wszystkie na ogół korespondujące krzywizny obu powierzchni są nierówne, to powierzchnie mogą być zarówno rozwijalne, jak i nierozwijalne na siebie. Lecz jeśli w *żadnym* odwzorowaniu nie może być równości wszystkich korespondujących krzywizn obu powierzchni i z konieczności mamy zawsze na ogół nierówność krzywizn przy wszelkim odwzorowaniu, powierzchnie są nierozwijalne, a ich odwzorowanie musi być zawsze nieizometryczne.

Krzywizna powierzchni rozstrzyga sprawę rozwijalności albo nierozwijalności dwóch powierzchni na siebie.

Zastosujmy powyższe kryterium krzywiznowe do najprostszych, interesujących nas, powierzchni.

a) *Płaszczyzna i płaszczyzna*; oczywiście są to powierzchnie rozwijalne na siebie (przez kongruencję). Krzywizna płaszczyzny jest wielkością *stałą i równą zeru*; dla obu powierzchni równość krzywizn ma miejsce zawsze (i wszędzie, tj. we wszystkich ich punktach), bez względu na ich wzajemne odwzorowanie. Dwie płaszczyzny mogą być odwzorowane wzajemnie na siebie bądź izometrycznie, bądź też nieizometrycznie; w obu przypadkach krzywizny nie tylko w korespondujących, lecz w ogóle we wszystkich punktach są równe, co dowodzi rozwijalności obu powierzchni.

b) *Kula i kula*; na ogół są nierozwijalne, z wyjątkiem przypadku gdy obie kule mają tę samą wielkość, tj. ten sam promień. Krzywizna kuli I jest wielkością stałą dla całej kuli i równą $1/R'$; krzywizna kuli II jest również wielkością stałą dla całej kuli i równą $1/R''$. W *żadnym* skojarzeniu punktowym obu powierzchni nie może być równości wszystkich odpowiadających sobie krzywizn, z konieczności krzywizny są zawsze i wszędzie nierówne (wyjąwszy przypadek $R' = R''$). To dowodzi nierozwijalności obu powierzchni.

W ogóle dwie powierzchnie o stałej krzywiznie są nierozwijalne (a tym samym niemożliwe do odwzorowania izometrycznego), chyba że obie wartości stałe są te same.

c) *Kula i płaszczyzna*; obie powierzchnie są powierzchniami o stałej krzywiznie; równości krzywizn nie ma nigdy i nigdzie w żadnej parze punktów. Jakiegokolwiek byłoby odwzorowanie kuli na płaszczyznę, zawsze i wszędzie będzie miała miejsce nierówność krzywizn w każdej parze punktów. To dowodzi nierozwijalności kuli i płaszczyzny. Izometria dla kuli i płaszczyzny nie istnieje, ani dla całej kuli, ani dla żadnego obszaru leżącego na kuli.

d) *Stożek, walec* (niekoniecznie kołowe), *powierzchnia prosto-liniowa stycznaściowa* (utworzona przez ruch linii prostej w przestrzeni, w sposób ciągły, stycznie do dowolnej linii przestrzennej) — wszystkie są wzajemnie na sobie rozwijalne (przez deformację), gdyż są to powierzchnie o stałej zerowej krzywiznie. Każda z nich jest również rozwijalna na płaszczyźnie (przez deformację), z tego samego powodu.

e) *Stożek albo walec i kula* są powierzchniami nierozwijalnymi, gdyż równości krzywizn nigdy i nigdzie nie osiągniemy przy żadnym przyporządkowaniu punktowym tych powierzchni. Izometria dla takich powierzchni nie istnieje.

f) *Elipsoida obrotowa spłaszczona i płaszczyzna*. Krzywizna takiej elipsoidy,

$$K_{el} = \frac{1}{MN} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}{a^2 (1 - e^2)},$$

jest wielkością dodatnią i zmienną w zależności od szerokości geograficznej φ . W żadnym punkcie elipsoidy krzywizna nie staje się zerem ($M \cdot N$ jest zawsze wielkością skończoną). Krzywizna płaszczyzny jest równa zeru w każdym jej punkcie. Dla żadnej pary funkcji odwzorowawczych nie może być równości krzywizn nie tylko we wszystkich korespondujących, lecz w ogóle we wszystkich punktach. Nierówność krzywizn ma miejsce zawsze (i wszędzie), a to dowodzi nierozwijalności elipsoidy i płaszczyzny, i wskutek tego niemożliwości ich izometrii.

g) *Elipsoida obrotowa spłaszczona i kula*. Tutaj intuicja poniekąd nas zawodzi, nie jesteśmy w stanie wyczuć a priori, jak to miało miejsce w poprzednich przykładach, czy te powierzchnie są rozwijalne, czy nie. I dopiero kryterium krzywiznowe, tak pożyteczne przy rozstrzyganiu tej sprawy, może nam dać odpowiedź. Mamy:

$$K_{el} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}{a^2 (1 - e^2)}, \quad K_k = \frac{1}{R^2}.$$

Mogą być punkty na obu powierzchniach, w których krzywizny są sobie równe; możemy bowiem obrać stosownie promień kuli R . Dla wszystkich punktów elipsoidy dla których

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2\sin^2\varphi)},$$

to znaczy dla punktów leżących na pewnych dwóch równoleżnikach $\pm\varphi$, krzywizna elipsoidy i kuli będzie mogła być jednakowa. We wszystkich innych punktach równości krzywizn nie ma. W żadnym odwzorowaniu nie może być równości krzywizn w *każdej* parze korespondujących punktów; zawsze, chociaż nie wszędzie, mamy nierówność krzywizn. To dowodzi nierozwijalności obu powierzchni.

Ewentualna równość krzywizn w niektórych (nawet w nieskończenie wielu) punktach nie wystarcza do wzajemnej rozwijalności obu powierzchni; równość krzywizn we *wszystkich* korespondujących punktach powoduje rozwijalność.

Bezpośredni dowód nierozwijalności kuli i elipsoidy na płaszczyznę, oparty na poszukiwaniu pary funkcji odwzorowawczych spełniających trzy warunki $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$ i wykazaniu, że taka para funkcji w ogóle nie istnieje, będzie podany w teorii zniekształceń, Nr 22 i 23.

ROZDZIAŁ III

KLASYFIKACJA ODWZOROWAŃ

14. Zasady klasyfikacji

Zastanówmy się krótko nad kwestią uskutecznienia klasyfikacji jakiegoś zbioru przedmiotów, skończonego lub nieskończonego, w ogóle. Według jakich zasad taką klasyfikację zrobić, czym się kierować przy uskutecznieniu klasyfikacji zbioru?

Przedmioty należące do zbioru posiadają najrozmaitsze *cechy* i zbiór będzie zawierał przedmioty posiadające pewne *wspólne* cechy. Chcąc ustanowić jakąś zasadę klasyfikacji zbioru, należy ustalić *zespół cech i ich hierarchię*, jako podstawę klasyfikacji danego zbioru. Następnie musimy posiadać *środki*, tj. *kryteria*, za pomocą których będziemy w stanie rozstrzygać sprawę przynależności poszczególnych przedmiotów zbioru, podlegających klasyfikacji, do poszczególnych klas, stosownie do posiadania lub nieposiadania cech i podcech, obranych za podstawę klasyfikacji. Ustanawiając rozmaite zespoły cech i podcech, jako podstawę klasyfikacji, możemy mieć, dla jednego i tego samego zbioru, bardzo wiele rozmaitych klasyfikacyj. Z pośród nich wybieramy te, które z tych czy innych względów, są najbardziej pożądane i użyteczne.

W teorii odwzorowań jednej powierzchni na drugą wchodzi w grę trzy czynniki:

1. powierzchnia oryginału,
2. powierzchnia obrazu,
3. funkcje odwzorowawcze.

Każdy z tych trzech czynników może być obrany za *główną* *cechę* klasyfikacji, a dalszy szereg cech i podcech za *główną* podstawę rozbudowy klasyfikacji. Istnieją więc tylko trzy główne klasyfikacje

odwzorowań. Zainteresowania nasze kierują się jednak przeważnie do drugiego, a zwłaszcza trzeciego czynnika. Stosownie do tego, ograniczymy się do dwóch głównych klasyfikacji odwzorowań:

a) *Klasyfikacja przedmiotowa*, dla której cechą główną jest powierzchnia obrazu (przedmiot);

b) *Klasyfikacja rodzajowa*, dla której cechą główną jest rodzaj odwzorowania (funkcje odwzorowawcze).

15. Klasyfikacja przedmiotowa

Podstawą klasyfikacji jest zespół następujących cech:

rodzaj powierzchni obrazu	cecha główna (1. rzędu),
rodzaj powierzchni I } . .	cechy wtórne (cecha 2. rzędu),
rodzaj odwzorowania }	(cecha 3. rzędu).

Idea porównywania ze sobą dwóch powierzchni drogą odwzorowania punktowego jednej na drugą, albo rozwiązywania zadań na powierzchni drogą (pośrednią) sprowadzania ich do zadań na powierzchniach mniej skomplikowanych, wysuwa dwa najprostsze rodzaje powierzchni obrazu, jako powierzchnie *standardowe*, a mianowicie *kulę* i *płaszczyznę*. Wtedy schemat klasyfikacji odwzorowań będzie następujący: (patrz str. 41)

16. Klasyfikacja rodzajowa

Rodzaj odwzorowania jest cechą główną tej klasyfikacji. Względny teoretyczny, jak i praktyczny wysunęły dwie najważniejsze cechy główne (1. rzędu), według których następuje rozbudowa tej klasyfikacji, a mianowicie:

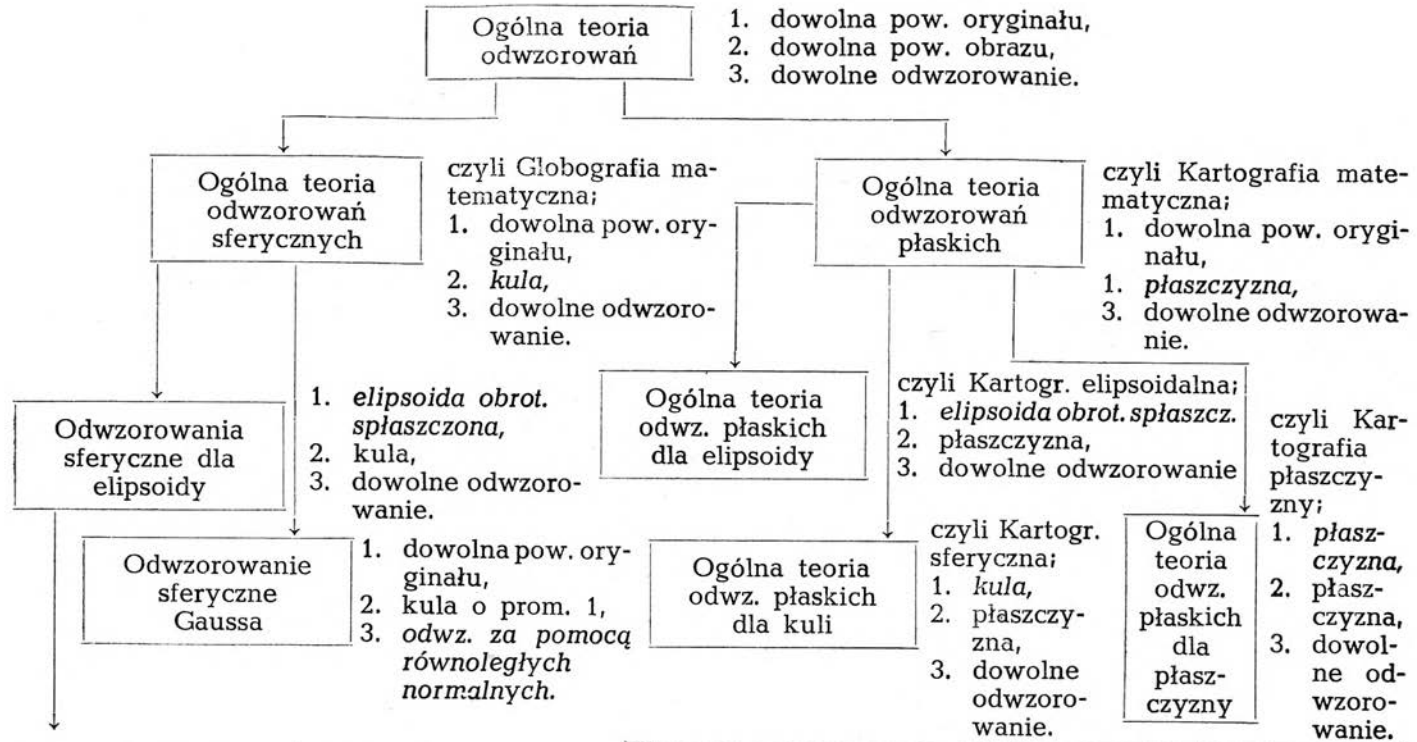
a) *metrykę*,

b) *rodzaj linii* na powierzchni obrazu, w które mają się przetrwać pewne linie lub rodziny linii.

Stosownie do tego, uzyskujemy dwa główne rozgałęzienia klasyfikacji rodzajowej, z których pierwsze nazwiemy *klasyfikacją metryczną*, drugie zaś — *klasyfikacją według rodzaju linii*. Tu zajmiemy się szczegółowo (Nr 17 — 20) klasyfikacją metryczną, wobec jej ponieważ kompletności i ważnego znaczenia, zarówno w teorii jak i w praktyce.

Klasyfikacja według rodzaju linii nie jest i być nie może tak kompletna, jak klasyfikacja metryczna; jak dotychczas, doznała ona stosunkowo słabej rozbudowy i ogranicza się do przypadków:

Klasyfikacja przedmiotowa odwzorowań



dalsza rozbudowa klasyfikacji opiera się na rodzaju odwzorowania.

dalsza rozbudowa klasyfikacji opiera się na rodzaju odwzorowania.

a) *odwzorowań geodezyjnych*, w których linie geodezyjne jednej powierzchni przechodzą w linie geodezyjne drugiej powierzchni;

b) *odwzorowań kołowych*, w których koła geodezyjne jednej powierzchni przechodzą w koła geodezyjne drugiej powierzchni; w szczególności odwzorowań kołowych *płaskich*, w których koła geodezyjne powierzchni oryginału przechodzą w koła na płaszczyźnie.

Osobną podgrupę w tej klasyfikacji stanowi *klasyfikacja praktyczna*, dotycząca odwzorowań *płaskich*, rozgałęziona w kilka grup; ograniczymy się tu jednak tylko do dwóch najważniejszych:

a) Odwzorowania płaskie *prostoliniowe*, w których pewna siatka na powierzchni oryginału (zwykle siatka parametrowa) odwzorowuje się na płaszczyźnie w linie najprostszego rodzaju: w dwie rodziny prostych;

b) Odwzorowania płaskie *stożkowe*, w których pewna siatka na powierzchni oryginału (zwykle parametrowa) odwzorowuje się na płaszczyźnie w dwie rodziny linii, przecinających się prostokątnie, z których jedna rodzina jest pękiem prostych, przechodzących przez jeden punkt, a druga składa się z koncentrycznych łuków kół (lub pełnych kół) o wspólnym środku w wierzchołku pęku.

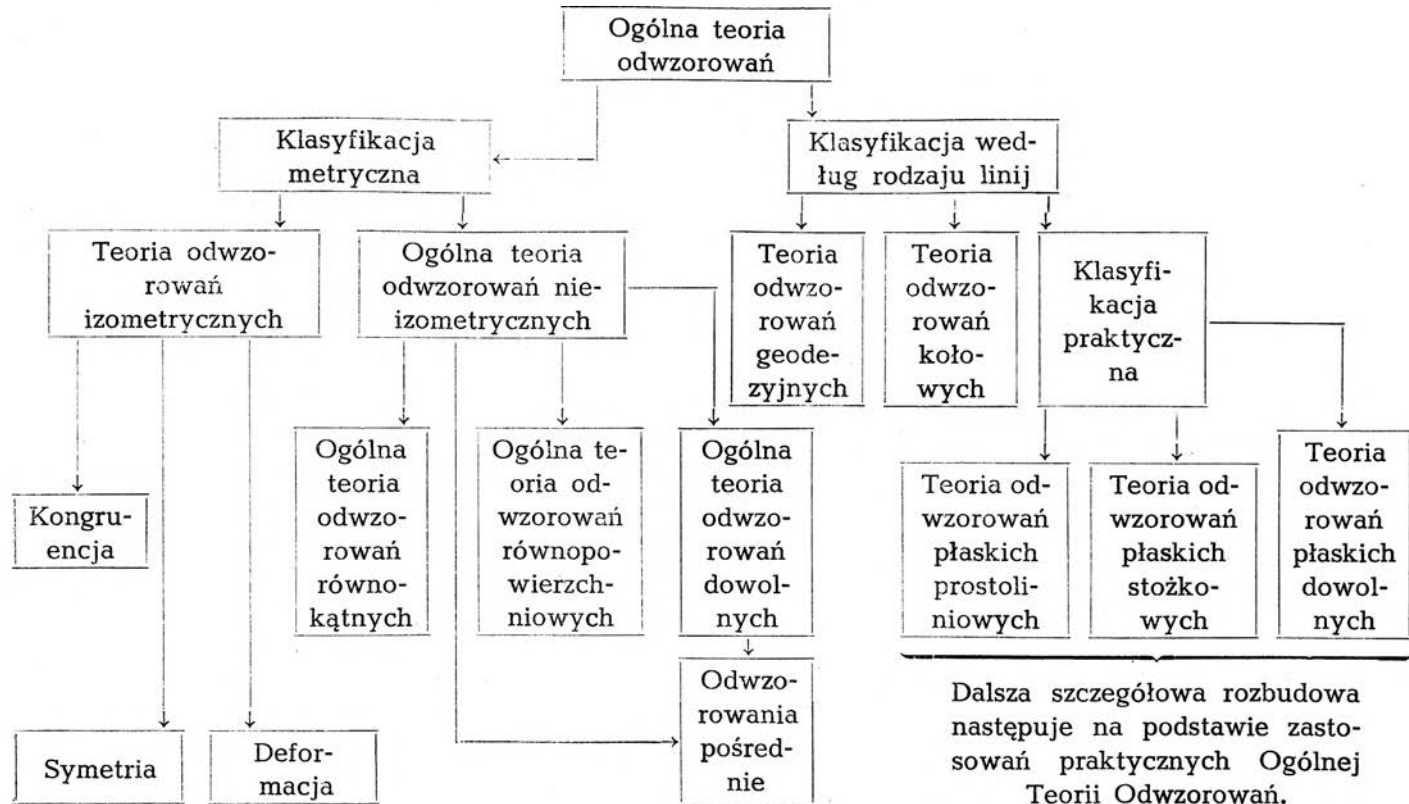
(Patrz str. 43).

17. Klasyfikacja metryczna

Nieskończoną rozmaitość odwzorowań jednej powierzchni na drugą rozklasyfikujemy na grupy i podgrupy, biorąc metrykę za cechę główną, zaś długości łuków, kąty i pola za podcechy.

Jak dotąd, porządkowanie nieskończonego zbioru, jakim rozporządzamy w problemie odwzorowania powierzchni, zostało dokonane w grubym podziale, przez wprowadzenie pojęć odwzorowania regularnego i nieregularnego. Odwzorowanie regularne mamy wtedy, gdy funkcje odwzorowawcze spełniają pewne ogólne warunki, na mocy których odwzorowanie jest pozbawione niepożądanych osobliwości i które nadają użytkową wartość odwzorowaniu. Następnie, odwzorowania regularne podzieliliśmy na dwie grupy za pomocą najważniejszego może dla nas pojęcia — *metryki*; odwzorowania izometryczne, zachowujące długości wszystkich łuków (a przez to i całą metrykę w ogóle), oraz odwzorowania nieizometryczne, które nie zachowują długości wszystkich łuków, lecz co najwyżej niektórych tylko, lub łuków pewnej, nawet nieskończonej, grupy linii; odwzorowania nieizometryczne na ogół zawsze psują metrykę w rozmaity sposób i w rozmaitym stopniu.

Klasyfikacja rodzajowa odwzorowań



Z czysto logicznego punktu widzenia, grupę odwzorowań nieizometrycznych możemy rozklasyfikować, w sposób dalej idący, na cztery podgrupy:

1. odwzorowania zachowujące kąty i pola jednocześnie;
2. odwzorowania zachowujące tylko kąty, pola nie;
3. odwzorowania zachowujące tylko pola, kąty nie;
4. odwzorowania nie zachowujące ani kątów, ani pól.

Okaże się w następstwie, że grupa pierwsza odwzorowań nieizometrycznych, zachowująca jak najwięcej własności metrycznych, a więc kąty i pola jednocześnie, *nie istnieje* i musi być skreślona z klasyfikacji. Jest to oczywiście duża strata, widzimy co tracimy w metryce i co się da z niej (możliwie jak najwięcej) uratować. Trzy pozostałe grupy są możliwe. Co do ostatniej grupy odwzorowań, nie zachowujących żadnego elementu metryki, objętych ogólną nazwą odwzorowań *dowolnych*, mogą one, kosztem strat w metryce, uzyskiwać inne pożądane własności, lub być czymś pośrednim między grupą równokątną i równopowierzchniową, zbliżając się w jedną lub w drugą stronę. Często tę grupę odwzorowań *dowolnych* nazywa się konwencjonalnymi; nazwa ta nie wydaje się udana, wszystkie bowiem odwzorowania są w istocie rzeczy konwencjonalne, czyli umowne.

Dalszy podział każdej z tych trzech grup, a więc grupy równokątnej, grupy równopowierzchniowej i grupy dowolnej, na podgrupy może być przeprowadzony przez wprowadzenie dalszych cech, mianowicie rozdzaju powierzchni oryginału, lub jakichś innych dalszych koncepcji.

Zasadniczą kwestią jest teraz posiadanie środków, a więc kryteriów, dających możliwość zasegregowania poszczególnych odwzorowań do powyższych grup. Takie kryteria podają następujące numery.

18. Odwzorowania konforemne

W literaturze naukowej spotykamy następującą terminologię:

— w jęz. angielskim: *orthomorphic* (ortomorficzne, prostokształtne; termin użyty przez Germain'a, 1865 i przez A. Cayley'a, 1892), *conformal* (konforemne);

— w jęz. francuskim: *conformes* (konforemne), *autogonales* (autogonalne, termin użyty przez Tissoł'a, 1881), *géographiques* (geograficzne; termin użyty przez J. Liouville'a, 1850, dla odróżnienia od funkcyjno-teoretycznego problemu odwzorowania konforemnego);

— w jęz. niemieckim: *in der kleinsten Theilen ähnliche* (częściukowo-podobne, Gauss, 1822), *konforme* (konforemne, nazwa wprowadzona przez Gauss'a, 1843), *winkeltreue* (wiernokątne, A. Breusing, 1882), *isogonale* (izogonalne, równokątne, F. Siebeck 1858);

— w jęz. rosyjskim: *rawnougoł'nyja izobraženija* (równokątne odwzorowania), *konformnyja izobraženija* (konforemne odwzorowania).

a) Definicja.

Weźmy pod uwagę stosunek elementów liniowych, odpowiadających sobie na powierzchni obrazu i oryginału:

$$m = \frac{dS}{ds},$$

który będziemy oznaczać literą m .

W odwzorowaniach izometrycznych, zachowujących długości wszelkich linii odpowiadających sobie, stosunek ten jest *wszędzie stały i równy jedności*. Także i stosunek wielkości podstawowych 1. rzędu, w każdej parze korespondujących punktów, jest, jak wiemy z głównego kryterium izometrii dwóch powierzchni, również stały i równy jedności:

$$m = \frac{dS}{ds} = 1, \quad \frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G} = 1.$$

W odwzorowaniu izometrycznym elementy liniowe, a także i wielkości podstawowe 1. rzędu, są proporcjonalne, przy czym czynnik proporcjonalności jest *ten sam* w każdej parze punktów i jest równy *jedności*. Mamy jednakową, czyli stałą proporcjonalność korespondujących elementów liniowych, z czynnikiem proporcjonalności równym jedności. *Taka* stała wartość czynnika proporcjonalności warunkuje *równość* wszystkich odpowiadających sobie łuków (równodługościowość), a co za tym idzie—równokątność i równopowierzchniowość.

Rozważmy teraz przypadek nieco ogólniejszy, gdy stosunek elementów liniowych, odpowiadających sobie, jest wszędzie wielkością stałą, lecz *różną od jedności*. Mamy, tak jak poprzednio, *stałą* proporcjonalność elementów liniowych, lecz czynnik proporcjonalności jest równy dowolnej stałej $C \neq 1$:

$$m = \frac{dS}{ds} = C \quad \text{i także} \quad \frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G} = C.$$

Wówczas odwzorowanie nie jest równodługościowe, a zatem nie jest i izometryczne; ma jednak własności zbliżone do odwzorowania izometrycznego:

a) równym sobie łukom powierzchni oryginału odpowiadają równe sobie łuki na powierzchni obrazu, własność którą nazwiemy *wiernodługościowością*;

b) równym sobie obszarom na powierzchni oryginału odpowiadają równe sobie obszary na powierzchni obrazu, własność którą nazwiemy *wiernopowierzchniowością*;

c) kąty, odpowiadające sobie na obu powierzchniach, są równe, a więc odwzorowanie jest równokątne. Równokątność i wiernokątność nie wymagają rozróżnienia i mogą być uważane za pojęcia identyczne.

Jeśli więc odwzorowanie zachowuje stałą proporcjonalność korespondujących elementów liniowych, z czynnikiem proporcjonalności różnym od jedności, odwzorowanie jest *wiernodługościowe*, *wiernopowierzchniowe* i *równokątne*. Takie odwzorowanie dwóch powierzchni na siebie nazywamy krótko *podobieństwem*. Podobieństwo nie jest odwzorowaniem izometrycznym, ale przez zastosowanie odpowiedniej redukcji (skali) może być doprowadzone do izometrii (a przez redukcję i ewentualnie deformację do kongruencji).

Rozważmy na koniec przypadek jeszcze ogólniejszy, gdy stosunek odpowiadających sobie elementów liniowych jest wielkością stałą w każdym poszczególnym punkcie powierzchni, lecz *różną stałą dla różnych punktów*. Zamiast stałej proporcjonalności elementów liniowych mamy teraz *zmienną* proporcjonalność: stosunek m elementów liniowych obrazu i oryginału jest *funkcją punktu powierzchni*.

Teraz możemy podać definicję: *odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, w którym korespondujące elementy liniowe są proporcjonalne, nazywamy odwzorowaniem konforemnym*. Czynniki proporcjonalności m może być przy tym albo funkcją punktu a proporcjonalność zmienną i różną w różnych punktach, albo wielkością stałą a proporcjonalność stałą i jednakową we wszystkich punktach powierzchni; w ten sposób podobieństwo, a także kongruencja, mogą być uważane za szczególne przypadki konforemności: czynnik stałej proporcjonalności jest wielkością stałą, w szczególności równą jedności.

W odwzorowaniu konforemnym będziemy zaznaczać wyraźnie fakt zmiennej proporcjonalności korespondujących elementów liniowych, pisząc że m jest na ogół funkcją punktu powierzchni:

$$m(u, v) = \frac{dS}{ds};$$

w szczególnych przypadkach m może być funkcją jednej tylko zmiennej parametrowej u albo v , albo może być stałą (dodatnią).

Zwróćmy jeszcze uwagę, że w odwzorowaniu konforemnym mamy *proporcjonalność cząsteczkową*. W odróżnieniu od niej, zwykłą

proporcjonalność skończonych figur będziemy nazywali *proporcjonalnością skończoną*. Proporcjonalność cząsteczkową charakteryzuje stosunek dS/ds ; proporcjonalność skończoną charakteryzuje stosunek S/s . Proporcjonalność skończona $S/s = \text{const.}$ pociąga za sobą także proporcjonalność cząsteczkową $dS/ds = \text{const.}$, i to tę *samą*; lecz niekoniecznie na odwrót: proporcjonalność cząsteczkowa $dS/ds = m(u, v)$ nie pociąga za sobą na ogół proporcjonalności skończonej, chyba że m jest wielkością stałą.

b) Kryterium konforemności.

Gdy punkty dwóch powierzchni I i II są w jedno-jednoznacznej odpowiedności i korespondujące punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe u, v na obu powierzchniach, warunkiem koniecznym i wystarczającym konforemności odwzorowania jednej powierzchni na drugą jest proporcjonalność odpowiednich wielkości podstawowych 1. rzędu, w każdej parze odpowiadających sobie punktów:

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}. \quad (18.1)$$

Stosunek ten jest na ogół jakąś funkcją punktu powierzchni, gdyż same wielkości podstawowe E', F', G' dla powierzchni obrazu i E, F, G dla powierzchni oryginału są funkcjami punktu powierzchni; możemy go tymczasem oznaczyć $f(u, v)$.

Konieczność. Wykażemy, że z konforemności odwzorowania warunek proporcjonalności korespondujących wielkości podstawowych wynika jako konieczne następstwo. Istotnie, z założenia konforemności odwzorowania, mamy:

$$m(u, v) = \frac{dS}{ds} \text{ oraz } \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = m^2(u, v) = \frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Prawa strona równania będzie funkcją punktu, czyli nie będzie zależna od du, dv wtedy, gdy $E':E = F':F = G':G = f(u, v)$; gdyż tylko wtedy będzie:

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = m^2(u, v) = \frac{f(u, v) \cdot [Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2]}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

$$\text{czyli } \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = m^2(u, v) = f(u, v).$$

Dowiedliśmy więc, że konforemność pociąga za sobą proporcjonalność wielkości podstawowych 1. rzędu, w każdej parze odpowiadających sobie punktów. Nadto wykazaliśmy, że stosunek proporcjonalności, będący na ogół funkcją punktu, przyjętą pierwotnie dowolnie jako $f(u, v)$, jest równy $m^2(u, v)$:

$$(dS/ds)^2 = m^2(u, v) = E' : E = F' : F = G' : G.$$

Wystarczalność. Odwrotnie, z proporcjonalności wielkości 1. rzędu wynika konforemność odwzorowania; warunek proporcjonalności jest nie tylko konieczny, lecz i wystarczający dla konforemności. Istotnie, jeśli $E' : E = F' : F = G' : G$ wówczas, jak łatwo widzieć, musi być:

$$\frac{dS}{ds} = m(u, v),$$

co dowodzi proporcjonalności korespondujących elementów liniowych, czyli konforemności.

W ten sposób twierdzenie jest udowodnione.

Wniosek. Jeśli w odwzorowaniu konforemnym, w którym siatki parametrowe na obu powierzchniach odpowiadają sobie, jedna z siatek (albo na powierzchni oryginału, albo na powierzchni obrazu) jest ortogonalna, to i druga siatka musi być też ortogonalna. Istotnie, jeśli w podwójnej proporcji:

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G},$$

wyrażającej warunek konforemności, F' jest zerem, zaś $F' : F$ określoną funkcją punktu, o wartości (zawsze) różnej od zera, to stosunek $F' : F$ musi być wielkością nieoznaczoną, czyli F musi być również równe zeru; podobnie, gdyby $F = 0$, to i F' musi być równe zeru dla tej samej przyczyny.

Znaczenie kryterium konforemności. Powyższe kryterium pozwala rozwiązać oba podstawowe zadania teorii odwzorowań.

Zadanie pierwsze: mając dane dwie powierzchnie i jakieś ich odwzorowanie, określone parą funkcji odwzorowawczych ϕ_1, ϕ_2 , zbadać czy to odwzorowanie jest konforemne, czy nie? Zadanie jest nietrudne do rozwiązania; sprowadzamy równania powierzchni obrazu, za pomocą funkcji odwzorowawczych, do tych samych parametrów jakie występują w równaniach powierzchni oryginału; znajdujemy korespondujące wielkości podstawowe 1. rzędu dla obu powierzchni; będą to

na ogół jakieś funkcje parametrów u, v ; sprawdzamy, czy ma miejsce wszędzie ich proporcjonalność, czy nie. To rozstrzyga sprawę. Nie każde więc odwzorowanie będzie konforemne, lecz tylko to, którego funkcje odwzorowawcze czynią zadość warunkowi kryterium.

Zadanie drugie: mając dane dwie powierzchnie *poszukujemy* odwzorowania, to jest pary funkcji odwzorowawczych, które by było konforemne. To zadanie jest znacznie trudniejsze od poprzedniego, ale na ogół zawsze rozwiązalne, gdyż z dwóch warunków (tj. z dwóch równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu o dwóch funkcjach niewiadomych):

$$E' : E = F' : F = G' : G,$$

czyli, zważając skutek (4.18) wywołany przekształceniem parametrów na wielkości E, F, G :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} [\bar{E} U_u^2 + 2 \bar{F} U_u V_u + \bar{G} V_u^2] = \\ &= \frac{1}{F} [\bar{E} U_u U_v + \bar{F} (U_u V_v + U_v V_u) + \bar{G} V_u V_v] = \\ &= \frac{1}{G} [\bar{E} U_v^2 + 2 \bar{F} U_v V_v + \bar{G} V_v^2], \end{aligned}$$

mamy określić dwie niewiadome funkcje, czyniące zadość tym dwóm warunkom. Zadanie jest w ogólności określone, a więc każde dwie powierzchnie dadzą się zawsze odwzorować konforemnie i, jak się okaże, w nieskończenie wiele sposobów. Równania te, jak wiadomo, dopuszczają nieskończenie wiele par rozwiązań dla U, V jako funkcji u, v . Stąd *wszelka powierzchnia może być odwzorowana konforemnie na wszelką inną powierzchnię i, w samej rzeczy, odwzorowanie jest możliwe na nieskończenie wiele sposobów*. Jednoznaczne określenie zadania wymaga uzupełnienia przez przyjęcie dalszych warunków brzegowych. Znalezienie pary funkcji polega na rozwiązaniu układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych i zwykle jest połączone ze znacznymi trudnościami natury matematycznej. Tylko pewna specjalna grupa funkcji będzie spełniała te dwa równania, a przeto ustanawiała grupę odwzorowań konforemnych.

Dwie powierzchnie, odniesione konforemnie do jednej i tej samej trzeciej powierzchni, są również do siebie konforemne, ponieważ w korespondujących punktach wszystkie trzy powierzchnie są wzajemnie cząsteczkowo podobne. Aby ustanowić konforemną relację między dwiema dowolnymi powierzchniami, wystarczy każdą z nich odnieść konforemnie do pewnej standartowej trzeciej powierzchni:

im prostsza jest ta standartowa powierzchnia, tym prostsze są równania konforemności. Zatem *płaszczyznę* obieramy jako powierzchnię pośredniczącą. W ten sposób problem konforemnego odwzorowania dla dwóch dowolnych powierzchni, sprowadza się do problemu prostszego: odwzorowania konforemnego dowolnej powierzchni na płaszczyznę. Ale również i ten problem redukuje się do jeszcze prostszego: wystarczy znajomość jakiegoś *jednego* (możliwie najprostszego) odwzorowania konforemnego powierzchni na płaszczyznę w połączeniu ze *wszystkimi* konforemnymi odwzorowaniami płaszczyzny na inną płaszczyznę. Ta redukcja ma miejsce przy wszystkich podobnych zadaniach, np. przy odwzorowaniach równopowierzchniowych, i t. p.

Zadanie drugie jest tematem *teorii odwzorowań konforemnych*, którą zajmujemy się szczegółowo w następstwie.

c) Badanie niezmienników odwzorowania konforemnego.

Odwzorowanie konforemne nieizometryczne, jak każde w ogóle odwzorowanie nieizometryczne, psuje metrykę, ale, jak się okaże, nie całą. Zasadniczym niezmiennikiem odwzorowania konforemnego są kąty.

Twierdzenie. Odwzorowanie konforemne jest zawsze równokątne, czyli izogonalne. Niechaj będzie dane jakieś konforemne odwzorowanie jednej powierzchni na drugą. Weźmy dowolną parę odpowiadających sobie punktów i w nich dowolną parę korespondujących kątów β i β' , utworzonych przez dwie pary korespondujących kierunków dv/du oraz $\delta v/\delta u$. Na mocy ogólnej teorii powierzchni mamy:

$$\cos \beta' = \frac{E' du \delta u + F' (du \delta v + dv \delta u) + G' dv \delta v}{\sqrt{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2} \cdot \sqrt{E' \delta u^2 + 2F' \delta u \delta v + G' \delta v^2}}, \quad (18.2)$$

$$\cos \beta = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}.$$

Z założenia konforemności odwzorowania mamy $E':E = F':F = G':G$; to pozwoli na zastąpienie wielkości E', F', G' w pierwszym wzorze przez wielkości E, F, G , dzięki podstawieniu: $E' = m^2 E$, $F' = m^2 F$, $G' = m^2 G$. Po wykonaniu tego podstawienia i skróceniu w liczniku i mianowniku wielkości m^2 , prawe strony równań (18.2) staną się jednakowe; a więc i lewe strony równań muszą być sobie równe:

$$\cos \beta' = \cos \beta,$$

skąd

$$\beta' = \pm \beta.$$

A więc kąty pod względem wartości są sobie równe.

Twierdzenie odwrotne. Odwzorowanie równokątne jest zawsze konforemne. Istotnie, z równości wszystkich odpowiadających sobie kątów na obu powierzchniach, $\beta' = \beta$, skąd wynika równość:

$$\cos \beta' = \cos \beta.$$

A więc lewe strony obu równań (18.2) są sobie równe. Wskutek tego i prawe strony obu tych równań muszą być identycznie równe (to znaczy dla wszystkich wartości $du, dv; \delta u, \delta v$). Taka zaś identyczna równość będzie miała miejsce tylko wtedy, gdy wielkości 1. rzędu będą proporcjonalne:

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G},$$

co, na mocy kryterium, dowodzi konforemności odwzorowania.

Konforemność i równokątność są to dwie cechy, które zawsze idą ze sobą w parze, nieodłącznie jedna od drugiej — cechy *konjunkcyjne*. Konforemność zawsze pociąga za sobą równokątność; równokątność zawsze pociąga za sobą konforemność; są to więc dwie cechy *równoważne* (lecz nie równoznaczne). Odwzorowania konforemne można przeto nazywać równokątnymi, co najczęściej zresztą ma miejsce. Oba twierdzenia, proste i odwrotne, moglibyśmy połączyć w jedno: warunkiem koniecznym i wystarczającym konforemności jest równokątność.

W nowszych czasach wprowadzono pewne rozróżnienie obu pojęć: równokątności i konforemności. Równokątność, czyli izogonalność, oznacza równość kątów pod względem ich wielkości, bez zwracania uwagi na *zwrot* (sens) obu kątów. Konforemność oznacza równość kątów z *zachowaniem zwrotu* kąta. Każde odwzorowanie konforemne jest równokątne, lecz nie każde odwzorowanie równokątne byłoby konforemne. To rozróżnienie wprowadził, jak się zdaje, matematyk C. Carathéodory ¹⁾, około 1932 roku.

Gdyby zająć stanowisko zgodne z powyższym, należało by odpowiednio dostosować do niego treść niniejszego paragrafu.

Niekiedy można spotkać termin: odwzorowanie podobne, zamiast odwzorowanie konforemne. Nie jest to poprawnie. Naturalnie, wskutek proporcjonalności elementów liniowych i równości kątów, podobieństwo zachodzi, *ale tylko cząsteczkowe*, lokalne, i jest dla każdej cząstki (punktu) inne; proporcjonalność elementów liniowych nie jest wszędzie stała, lecz zmienia się od punktu do punktu, będąc stałą w każdym pojedynczym punkcie. Stąd w obszarach

¹⁾ *Conformal Representation by C. Carathéodory, Dr Phil., Cambridge, 1932.*

skończonych podobieństwa w zwykłym znaczeniu (tak zw. skończonego) nie ma. Nazwa: odwzorowanie podobne wprowadzałaby więc pewne niepożądane pomieszanie; lepiej jej unikać. Podobieństwo skończone pociąga zawsze za sobą podobieństwo cząsteczkowe, i to *to samo*, lecz niekoniecznie na odwrót: podobieństwo cząsteczkowe nie pociąga za sobą na ogół podobieństwa skończonego. Konforemność jest warunkiem koniecznym i niewystarczającym podobieństwa.

Zwróćmy na koniec uwagę na stosunek konforemności do izometrii. Odwzorowanie izometryczne jest zawsze konforemne, na skutek zachowania kątów; twierdzenie odwrotne nie jest na ogół słuszne, konforemność nie musi pociągać za sobą izometrii. Konforemność jest warunkiem koniecznym i niewystarczającym izometrii.

Odwzorowanie konforemne nieizometryczne posiada jeden tylko niezmiennik metryczny: kąty; innych niezmienników metrycznych nie posiada, w szczególności nie może zachowywać pól; dowód tego twierdzenia będzie podany w Nr 20.

19. Odwzorowania równopowierzchniowe ¹⁾

W literaturze naukowej obcojęzycznej spotykamy następujące nazwy:

— w języku angielskim: *equal area* (równopowierzchniowe), *equivalent* (równoważne), *surface-true* (powierzchniowo-prawdziwe);

— w języku francuskim: *équivalentes* (równoważne), *authaliques* (autaliczne, termin użyty przez Tissot'a);

— w języku niemieckim: *flächentreue* (wiernopowierzchniowe), *äquivalent* (równoważne);

— w języku rosyjskim: *rawnowelikije* (równowielkie), *ekwiwalentnyje* (równoważne).

a) Definicja.

Odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, w którym elementy pól, odpowiadające sobie, są w każdym punkcie równe, nazywamy odwzorowaniem *równopowierzchniowym*. Stosunek elementów powierzchniowych jest wtedy wielkością stałą i *równą jedności* we wszystkich punktach powierzchni. W przypadku, gdy stosunek ten jest wszędzie wielkością *stałą*, lecz *różną od jedności*, odwzorowanie będziemy nazywać *wiernopowierzchniowym* ²⁾.

¹⁾ W literaturze polskiej można niekiedy spotkać termin *równoważne*.

²⁾ M. Fiorini, *Le proiezioni delle carte geografiche*, Bologna 1881, oraz *Le proiezioni quantitative ed equivalenti della cartografia*, Roma 1887, nazywa takie odwzorowania „quantitative” (kwantytatywnymi), w odróżnieniu od „equivalenti” (równopowierzchniowych).

b) Kryterium równopowierzchniowości.

Gdy punkty dwóch powierzchni I i II są w jedno-jednoznacznej odpowiedności i korespondujące punkty mają te same współrzędne krzywoliniowe u, v na obu powierzchniach, warunkiem koniecznym i wystarczającym równopowierzchniowości odwzorowania jednej powierzchni na drugą, jest następujący związek wielkości podstawowych 1. rzędu:

$$E' G' - F'^2 = EG - F^2, \quad (19.1)$$

ew. dla wiernopowierzchniowości:

$$E' G' - F'^2 = k (EG - F^2),$$

w każdej parze odpowiadających sobie punktów na obu powierzchniach, po sprowadzeniu równań parametrowych powierzchni obrazu, za pomocą funkcji odwzorowawczych, do tych samych parametrów, w których wyrażona jest powierzchnia oryginału.

Warunek ten jest konieczny. Weźmy dwa elementy powierzchniowe dp i dP , na powierzchni oryginału i obrazu, odpowiadające sobie w odwzorowaniu; jeśli odwzorowanie jest równopowierzchniowe, to $dP = dp$ w każdej parze korespondujących punktów. Równość ta, na podstawie ogólnej teorii powierzchni, wyraża się jak następuje:

$$\sqrt{E' G' - F'^2} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

skąd

$$E' G' - F'^2 = EG - F^2.$$

Warunek ten jest również wystarczający; z równości (19.1), mającej miejsce w każdej parze odpowiadających sobie punktów, wynika, oczywiście, $dP = dp$, czyli równopowierzchniowość odwzorowania.

Znaczenie kryterium równopowierzchniowości dla rozwiązywania obu podstawowych zadań teorii odwzorowań, wynika niemal bezpośrednio.

Zadanie pierwsze: mając dane dwie powierzchnie i jakieś ich odwzorowanie, określone parą funkcji odwzorowawczych, zbadać czy odwzorowanie jest równopowierzchniowe (ewentualnie wiernopowierzchniowe), czy też nie? Zadanie jest stosunkowo łatwe, wystarczy obliczyć, po sprowadzeniu równań powierzchni do tych samych parametrów, wielkości podstawowe E, F, G i odpowiadające im E', F', G' , i sprawdzić czy warunek (19.1), ewentualnie ze stałą k , spełnia się wszędzie, w każdej parze odpowiadających sobie punktów, czy też nie spełnia się wszędzie.

Zadanie drugie: mając dane dwie powierzchnie, *określić* równopowierzchniowe (ewentualnie wiernopowierzchniowe) odwzorowanie jednej z nich na drugą. Zadanie jest trudniejsze niż poprzednie i polega na znalezieniu dwóch funkcji odwzorowawczych z jednego równania różniczkowego cząstkowego 1. rzędu. Zadanie nie jest jednoznacznie określone i ma jeden stopień dowolności: jedną z funkcji możemy obrać dowolnie, a drugą określić z równania różniczkowego, warunkującego równopowierzchniowość. Oczywiście jest, że każda powierzchnia może być odwzorowana równopowierzchniowo na każdą inną powierzchnię.

Dwie powierzchnie odniesione równopowierzchniowo do jednej i tej samej trzeciej powierzchni, są również do siebie odniesione równopowierzchniowo, ponieważ w korespondujących punktach wszystkich trzech powierzchni, elementy powierzchniowe są sobie równe. Problem odwzorowania równopowierzchniowego jednej powierzchni na drugą sprowadza się do problemu *jednego* (możliwie najprostszego) odwzorowania równopowierzchniowego danej powierzchni na *płaszczyznę* oraz *wszystkich* równopowierzchniowych odwzorowań płaszczyzny na drugą płaszczyznę.

Zadanie drugie jest tematem teorii odwzorowań równopowierzchniowych, którą zajmujemy się szczegółowo w następstwie.

c) Badanie niezmienników odwzorowania równopowierzchniowego.

Odwzorowanie równopowierzchniowe nieizometryczne psuje na ogół metrykę, ale nie całą. Zasadniczym niezmiennikiem odwzorowania są pola. (To uzasadnia nazwę).

Twierdzenie. *Odwzorowanie równopowierzchniowe zachowuje pola wszystkich odpowiadających sobie obszarów.* Istotnie, z równości $dP = dp$ wynika przez całkowanie $P = p$ (stała całkowania jest równa zeru, gdyż dla $p = 0$, musi być też $P = 0$).

Twierdzenie odwrotne. *Odwzorowanie zachowujące równość pól dla wszystkich odpowiadających sobie obszarów jest równopowierzchniowe.* Jeśli $P = p$ dla wszystkich odpowiadających sobie obszarów, to równość ta pociąga za sobą także $dP = dp$, w każdej parze korespondujących punktów, a więc odwzorowanie musi być równopowierzchniowe.

Jeśliby równość pól miała miejsce nie dla wszystkich odpowiadających sobie obszarów, lecz dla niektórych, wówczas równość $P = p$ nie musi pociągać za sobą równości $dP = dp$, w każdej parze przyporządkowywanych sobie punktów; odwzorowanie nie jest równopowierzchniowe.

Zachowanie pól we wszystkich cząsteczkach stanowi zarazem o zachowaniu pól we wszystkich odpowiadających sobie obszarach skończonych, gdyż te ostatnie mogą być uważane za sumy nieskończenie wielu pól cząsteczkowych, wchodzących w rozważane obszary; *równopowierzchniowość cząsteczkowa powoduje również równopowierzchniowość skończoną* (równość pól wszelkich obszarów korespondujących). Twierdzenie odwrotne nie jest na ogół słuszne: pola skończonych, odpowiadających sobie, obszarów mogą być równe, pomimo że poletka, odpowiadające sobie lokalnie, nie są sobie wszystkie równe: z równości *niektórych* pól skończonych nie wynika równość pól w cząsteczkach, a więc nie wynika także równopowierzchniowość odwzorowania. Dopiero równość *wszelkich* odpowiadających sobie pól skończonych pociąga za sobą także równość elementów pól w każdej parze odpowiadających punktów, a przez to równopowierzchniowość odwzorowania.

Zwróćmy na koniec uwagę na stosunek równopowierzchniowości do izometrii. Odwzorowanie izometryczne jest zawsze równopowierzchniowe; twierdzenie odwrotne nie jest na ogół słuszne: równopowierzchniowość nie pociąga za sobą izometrii; jest więc warunkiem koniecznym i niewystarczającym izometrii.

Odwzorowanie równopowierzchniowe posiada jeden tylko niezmiennik metryczny: pola; innych niezmienników metrycznych nie posiada, w szczególności nie może zachowywać kątów.

20. Konforemność (równokątność) i równopowierzchniowość — dyzjunkcja

a) Twierdzenie.

Nieizometryczne odwzorowanie równokątne nie może być jednocześnie równopowierzchniowe i, odwrotnie: nieizometryczne odwzorowanie równopowierzchniowe nie może być równocześnie równokątne.

Równokątność i równopowierzchniowość są cechami dyzjunkcyjnymi, jednocześnie nie mogą współistnieć, chyba że odwzorowanie jest izometryczne.

Aby kąty i elementy pól (a przez to i same pola) były zarazem niezmiennikami odwzorowania nieizometrycznego dwóch powierzchni, musiałyby istnieć para funkcji odwzorowawczych, które by spełniały równocześnie dwa warunki (a trzy równania różniczkowe):

$$m^2(u, v) = \frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G} \neq 1, \text{ oraz } E' G' - F'^2 = E G - F^2.$$

Wykażemy, że te warunki nie mogą współistnieć dla żadnej pary funkcji odwzorowawczych: że są sprzeczne ze sobą.

Istotnie, z warunku pierwszego mamy:

$$m^2 E = E', \quad m^2 F = F', \quad m^2 G = G';$$

uwzględniając te wartości w warunku drugim, otrzymamy:

$$(m^2 E) (m^2 G) - (m^2 F)^2 = EG - F^2,$$

skąd

$$m^4 = 1,$$

$$m = \pm 1.$$

Równokątność i równopowierzchniowość może mieć miejsce jedynie tylko w przypadku $m(u, v) = 1$, a więc tylko w odwzorowaniach izometrycznych. W każdym odwzorowaniu nieizometrycznym obie te własności współistnieć nie mogą. Wskutek tego musieliśmy w schemacie klasyfikacyjnym skreślić podgrupę zachowującą kąty i pola, jako nie istniejącą.

b) Wnioski.

Klasyfikacja metryczna orientuje nas kompletnie w stratach jakie musimy ponieść w metryce i w możliwościach częściowego jej uratowania. W odwzorowaniach nieizometrycznych metryka się psuje, ale niekoniecznie cała. Wystudiowanie w jaki sposób i w jakim stopniu psuje się metryka, stanowi treść teorii zniekształceń. Znając szkody, jakie powstają w metryce na skutek odwzorowania, możemy ocenić wartość odwzorowania z punktu widzenia jego własności metrycznych i starać się coś zaradzić, przez sprowadzenie wywołanych i nieuniknionych szkód do możliwie małych granic, albo uzyskać pośrednie rozłożenie szkód, i t. p. Jeśli zdecydujemy się na rezygnację z niezmienników metrycznych w ogóle i przejdziemy do grupy odwzorowań dowolnych, to ta grupa zwłaszcza dostarcza wielu możliwości rozmaitych koncepcji rozkładu i wielkości szkód w metryce. Musimy wówczas kierować się jakimiś innymi względami oceny wartości odwzorowania. W grupie odwzorowań dowolnych na wyróżnienie zasługuje, jeśli chodzi o własności metryczne, grupa *odwzorowań pośrednich*, w których kąty doznają zniekształceń mniejszych niż w odwzorowaniu równopowierzchniowym i równocześnie pola doznają zniekształceń mniejszych niż w odwzorowaniu równokątnym; w grupie tej zainteresowanie wzbudziły zwłaszcza te odwzorowania, w których pewna rodzina linii (najczęściej parametrycznych) na powierzchni oryginału odtwarza się

na powierzchni obrazu na jakąś inną rodzinę linii (ewentualnie też parametrycznych) z zachowaniem długości wzdłuż tych linii ¹⁾. Fakt, że jedna rodzina linii odwzorowuje się równodługościowo nie przesądza sprawy równodługościowości odwzorowania, gdyż w takim odwzorowaniu własność ta musi być cechą ogólną dla *wszelkich* linii odpowiadających sobie, nie zaś tylko dla niektórych, lub nawet nieskończenie wielu linii jednej rodziny. W szczególności, jeśli ta jedna rodzina linii, odtwarzanych z zachowaniem długości, jest, na powierzchni oryginału, rodziną linii *geodezyjnych* i odpowiadający jej obraz jest również rodziną linii geodezyjnych na powierzchni obrazu, odwzorowanie zawyczaj nazywamy *równoodległościowym* (ponieważ pojęcie odległości definiowane jest przez długość linii geodezyjnej). Fakt, że jedna rodzina linii geodezyjnych odtwarza się w rodzinę linii również geodezyjnych (tutaj, nadto, z zachowaniem długości, czy raczej odległości), nie przesądza sprawy, że odwzorowanie jest geodezyjne, gdyż w takim odwzorowaniu *wszelkie* linie geodezyjne oryginału muszą przechodzić w linie geodezyjne obrazu (geodezyjność musi być cechą ogólną).

Nazwa odwzorowanie równoodległościowe (*automecoique* u Tissot'a, *equidistant(e)* — u wielu innych autorów, *rawnopromieżutocznoje* — w języku rosyjskim, *mittabstandstreue* — w literaturze niemieckiej), która uzyskała powszechne użycie w kartografii matematycznej w wyżej podanym znaczeniu, wydaje się nieco nieudana, odbiega bowiem od ogólnego systemu terminologii, przyjętego w teorii odwzorowań. Pod pojęciem odwzorowanie równoodległościowe, zgodnie z ogólną zasadą, skłonni bylibyśmy rozumieć odwzorowanie, w którym wszystkie odległości przechodzą w odległości; a więc byłoby to szczególne odwzorowanie geodezyjne: zachowujące długości wszystkich odpowiadających sobie linii geodezyjnych. W braku lepszego terminu zmuszeni jesteśmy pozostać przy dotychczasowym, węższym znaczeniu pojęcia równoodległościowości.

¹⁾ Byłoby bardzo pożądane wprowadzenie jakiejś stosownej, krótkiej nazwy dla grupy odwzorowań, posiadających taką własność.

CZĘŚĆ DRUGA

TEORIA ZNIEKSZTAŁCEŃ METRYCZNYCH

ROZDZIAŁ IV

NIEROZWIJALNOŚĆ KULI NA PŁASZCZYZNIE. SIATKI ORTOGONALNE TISSOTA

21. Wstęp

Istotą naukowego traktowania odwzorowań jest zbadanie szkód w metryce, czyli zniekształceń metrycznych, powodowanych odwzorowaniem jednej powierzchni na drugą. Chcąc mieć ocenę odwzorowania pod względem własności metrycznych, tak cennych zarówno w teorii jak i w praktyce, należy wystudiować *co, gdzie, jak i ile* się zniekształca w skutek procesu odwzorowawczego. Zadanie teorii zniekształceń polega na zbadaniu odwzorowania i wystudiowaniu psucia się własności metrycznych oryginału, przy jego odtwarzaniu na obraz. Jest to więc zadanie typu pierwszego teorii odwzorowań, a rozwiązaniem tego zadania jest teoria zniekształceń. Stanowi ona jedną z najistotniejszych części ogólnej teorii odwzorowań.

Teoria metrycznych zniekształceń odwzorowawczych została rozpracowana przez *Augusta Tissot'a* w drugiej połowie XIX stulecia, a rezultaty jego badań zostały zebrane w jedno dzieło, o klasycznym znaczeniu: *Memoire sur la representation des surfaces et les projections des cartes geographiques, Paris 1881.*

Teoria zniekształceń daje środki i kryteria do badania odwzorowań pod względem własności metrycznych i zniekształceń; daje sposoby oceny wartości odwzorowania, jego złych i dobrych stron, orientuje nas w możliwościach i użytkowaniu odwzorowania. Ujmuje wszystkie odwzorowania w ogólne prawa, jakim one podlegają, niezależnie od rodzaju powierzchni oryginału i obrazu, i niezależnie od rodzaju odwzorowania. Daje wspólne podłoże dla wszystkich odwzorowań, przez co teoria odwzorowań, a zwłaszcza jej część — kartografia matematyczna — stała się teoretycznie rozpracowaną i ponieważ wykończoną nauką: doznała usystematyzowania, a wcześniejszy dorobek wielu stuleci, z początku najczęściej fragmentaryczny i wąski, obejmujący zagadnienia nad poszczególnymi odwzorowaniami lub grupami odwzorowań, znalazł swe właściwe miejsce przez włączenie do jednej nauki i uzyskał znakomitą podstawę ogólną. Fakty, które wydawały się różne, okazywały się następstwem tego samego ogólnego prawa, które w pojedynczych przypadkach przyjmowało szczególny wyraz.

22. Dowód nierozwijalności kuli na płaszczyźnie

W numerze 13. podaliśmy pośredni dowód twierdzenia o nierozwijalności kuli na płaszczyznę, na podstawie kryterium krzywiznowego. Obecnie podamy dowód bezpośredni, na podstawie pełnego kryterium izometrii.

Dana jest kula o promieniu R i płaszczyzna; siatkę geograficzną na kuli obieramy za siatkę parametrową: równoleżniki φ , jako linie u ; południki λ , jako linie v . Na płaszczyźnie, za siatkę współrzędnych obieramy dwie dowolne rodziny linii: $U = \text{const.}$ i $V = \text{const.}$ Napiszmy równania parametrowe obu powierzchni:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= R \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= R \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ kula, } \quad \left. \begin{aligned} X &= F_1(U, V) \\ Y &= F_2(U, V) \\ Z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ płaszczyzna,}$$

oraz równania dowolnej pary funkcji odwzorowawczych:

$$U = \psi_1(\varphi, \lambda)$$

$$V = \psi_2(\varphi, \lambda),$$

które, po wprowadzeniu do równań płaszczyzny, przedstawiają nam tę płaszczyznę w innych współrzędnych, mianowicie obraz siatki

sferycznej φ, λ będzie teraz siatką współrzędnych krzywoliniowych na płaszczyźnie:

$$X = F_1 [\psi_1 (\varphi, \lambda), \psi_2 (\varphi, \lambda)] = \Phi_1 (\varphi, \lambda),$$

$$Y = F_2 [\psi_1 (\varphi, \lambda), \psi_2 (\varphi, \lambda)] = \Phi_2 (\varphi, \lambda),$$

$$Z = 0.$$

Uwaga. Równania płaszczyzny moglibyśmy również przyjąć w najprostszej formie, obierając współrzędne kartezjańskie X, Y na płaszczyźnie jako parametry. Wówczas równania parametrowe płaszczyzny byłyby:

$$X = U,$$

$$Y = V,$$

$$Z = 0,$$

a po wprowadzeniu w nie funkcji odwzorowawczych ψ_1, ψ_2 :

$$X = \psi_1 (\varphi, \lambda),$$

$$Y = \psi_2 (\varphi, \lambda),$$

$$Z = 0.$$

Moglibyśmy postąpić jeszcze inaczej, mianowicie pozostawić równania parametrowe płaszczyzny w ogólnej formie, wyrażonej w funkcji dowolnych parametrów U, V , natomiast funkcje odwzorowawcze przyjąć w najprostszej formie:

$$U = \varphi,$$

$$V = \lambda;$$

wówczas funkcje F_1, F_2 pozostają te same, zamieniamy w nich tylko wszędzie U na φ i V na λ .

Jakąkolwiek metodę oberzemy, przebieg dowodu twierdzenia jest taki sam.

Po sprowadzeniu równań płaszczyzny do parametrów φ, λ możemy obliczyć odpowiadające sobie wielkości podstawowe 1. rzędu dla kuli i dla płaszczyzny. Będą one:

$$\left. \begin{aligned} E &= R^2 \\ F &= 0 \\ G &= (R \cos \varphi)^2 \end{aligned} \right\} \text{ dla kuli,}$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} E' &= \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 = X_{\varphi}^2 + Y_{\varphi}^2 \\ F' &= \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = X_{\varphi} X_{\lambda} + Y_{\varphi} Y_{\lambda} \\ G' &= \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 = X_{\lambda}^2 + Y_{\lambda}^2 \end{aligned} \right\} \text{ dla płaszczyzny.}$$

Jeśli kula miałaby być rozwijalna na płaszczyźnie, to musiałyby istnieć przynajmniej jedna para funkcji odwzorowawczych ψ_1, ψ_2 , spełniająca warunek konieczny i wystarczający izometrii dwóch powierzchni, warunek, który daje trzy związki: $E' = E$, $F' = F$, $G' = G$; w naszym przypadku:

$$\begin{aligned} X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 &= R^2 \\ X_\varphi X_\lambda + Y_\varphi Y_\lambda &= 0 \\ X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 &= (R \cos \varphi)^2. \end{aligned} \quad (A)$$

Wykażemy, że te trzy związki nie mogą się spełniać wszystkie równocześnie przy *żadnym regularnym* odwzorowaniu kuli na płaszczyznę; nie mogą współistnieć: są sprzeczne ze sobą. Mamy tu przykład drugiego zadania ogólnej teorii powierzchni: poszukiwanie odwzorowania, spełniającego żądane warunki (izometrii, w danym przypadku). Wykażemy, że takiego odwzorowania dla danych dwóch powierzchni, w ogóle nie ma.

a) Obliczmy pochodne X_λ i Y_λ przy pomocy drugiego i trzeciego równania (A), uwzględniając przy rachunku pierwsze równanie; otrzymamy:

$$\begin{aligned} X_\lambda &= \pm Y_\varphi \cos \varphi \\ Y_\lambda &= \pm X_\varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (B)$$

a przez zróżniczkowanie obu tych równań względem zmiennej φ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X_{\lambda\varphi} &= \pm Y_{\varphi\varphi} \cos \varphi \mp Y_\varphi \sin \varphi \\ Y_{\lambda\varphi} &= \pm X_{\varphi\varphi} \cos \varphi \mp X_\varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (B')$$

b) Wróćmy teraz do równań (A). Zróżniczkujemy pierwsze równanie (A) osobno według φ i osobno według λ , i drugie według φ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} X_\varphi X_{\varphi\varphi} + Y_\varphi Y_{\varphi\varphi} &= 0 \\ X_\varphi X_{\varphi\lambda} + Y_\varphi Y_{\varphi\lambda} &= 0 \\ X_\lambda X_{\varphi\varphi} + Y_\lambda Y_{\varphi\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (C)$$

(po uwzględnieniu drugiego z otrzymanych równań w trzecim). Rozwiązując pierwsze i trzecie równanie (C) według $X_{\varphi\varphi}$ i $Y_{\varphi\varphi}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (X_\lambda Y_\varphi - X_\varphi Y_\lambda) X_{\varphi\varphi} &= 0 \\ (X_\lambda Y_\varphi - X_\varphi Y_\lambda) Y_{\varphi\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (C')$$

Możemy teraz mieć dwa przypadki:

$$\text{albo } X_{\lambda} Y_{\varphi} - X_{\varphi} Y_{\lambda} \neq 0, \text{ albo } X_{\lambda} Y_{\varphi} - X_{\varphi} Y_{\lambda} = 0.$$

Przypadek pierwszy.

Jeśli $X_{\lambda} Y_{\varphi} - X_{\varphi} Y_{\lambda} \neq 0$, odwzorowanie jest regularne i możemy równania (C') skrócić przez ten wyznacznik. Wówczas otrzymujemy:

$$X_{\varphi\varphi} = 0$$

$$Y_{\varphi\varphi} = 0.$$

Warunki te dowodzą, że X_{φ} i Y_{φ} nie zależą od φ , są więc albo funkcjami samego tylko λ — nazwijmy je $X_{\varphi} = F_1(\lambda)$, $Y_{\varphi} = F_2(\lambda)$ — albo wielkościami stałymi, albo wreszcie równe zero:

$$\text{albo } X_{\varphi} = F_1(\lambda), \text{ albo } = C_1, \text{ albo } = 0;$$

$$\text{i albo } Y_{\varphi} = F_2(\lambda), \text{ albo } = C_2, \text{ albo } = 0.$$

Możemy zatem mieć na ogół 9 kombinacyj, przez połączenie każdej alternatywy dla X_{φ} z każdą dla Y_{φ} . Kombinacja zerowa, gdy jednocześnie $X_{\varphi} = 0$ i $Y_{\varphi} = 0$, musi odpaść, a to wobec pierwszego równania (A):

$$X_{\varphi}^2 + Y_{\varphi}^2 = R^2 \neq 0.$$

Każda z pozostałych ośmiu kombinacyj prowadzi również do sprzeczności. Istotnie:

1) Załóżmy, że X_{φ} i Y_{φ} są funkcjami samego tylko λ :

$$X_{\varphi} = F_1(\lambda), \quad Y_{\varphi} = F_2(\lambda);$$

zatem także i ich pochodne względem λ :

$$X_{\varphi\lambda} = F_1'(\lambda),$$

$$Y_{\varphi\lambda} = F_2'(\lambda),$$

są funkcjami samego tylko λ .

Tymczasem z poprzednich równań (B'), które przyjmą postać:

$$X_{\varphi\lambda} = \mp Y_{\varphi} \sin \varphi = \mp F_2(\lambda) \sin \varphi,$$

$$Y_{\varphi\lambda} = \mp X_{\varphi} \sin \varphi = \mp F_1(\lambda) \sin \varphi,$$

wynika, że pochodne $X_{\varphi\lambda}$ i $Y_{\varphi\lambda}$ są funkcjami nie tylko λ , lecz także i zmiennej φ . Popadliśmy więc w sprzeczność; a zatem trzy warunki (A) nie mogą się spełniać wszystkie równocześnie.

2) do 6). Podobnie, każda z pięciu dalszych kombinacji, a więc założenie:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} X_{\varphi} = F_1(\lambda) & X_{\varphi} = F_1(\lambda) & X_{\varphi} = C_1 & X_{\varphi} = 0 & X_{\varphi} = C_1 \\ Y_{\varphi} = C_2 & Y_{\varphi} = 0 & Y_{\varphi} = F_2(\lambda) & Y_{\varphi} = F_2(\lambda) & Y_{\varphi} = C_2 \end{array}$$

prowadzi, jak łatwo pokazać, również do sprzeczności.

7) Założenie $X_{\varphi} = C_1$, $Y_{\varphi} = 0$ daje $X_{\varphi\lambda} = 0$, $Y_{\varphi\lambda} = 0$; a z równań (B'): $X_{\varphi\lambda} = \mp Y_{\varphi} \sin \varphi = 0$; $Y_{\varphi\lambda} = \mp X_{\varphi} \sin \varphi = \mp C_1 \sin \varphi$. W pierwszej z tych pochodnych, $X_{\varphi\lambda}$, sprzeczności nie ma: w obu obliczeniach są one równe zeru; natomiast mamy sprzeczność w drugiej z tych pochodnych, $Y_{\varphi\lambda}$, która raz wypada równa zeru, drugi raz równa $\mp C_1 \sin \varphi$.

8) Podobnie, ostatnie założenie: $X_{\varphi} = 0$, $Y_{\varphi} = C_2$, w obliczeniu jednej pochodnej da zgodność, a drugiej sprzeczność.

W ten sposób wyczerpaliliśmy wszystkie możliwości i okazaliśmy, że równania (A), w przypadku pierwszym, nie mogą się spełniać wszystkie równocześnie przy żadnym odwzorowaniu regularnym kuli na płaszczyznę; dowodzi to nieistnienia odwzorowania izometrycznego kuli na płaszczyznę, a przez to i nierozwijalności kuli na płaszczyznę.

Przypadek drugi.

Nie trudno okazać, że warunki (A), izometrii kuli i płaszczyzny, nie mogą się spełniać równocześnie także przy takim *nieregularnym* (zdegenerowanym) odwzorowaniu, w którym

$$X_{\lambda} Y_{\varphi} - X_{\varphi} Y_{\lambda} = 0, \quad (D)$$

W tym przypadku równania (C') nic nam nie mówią o wartościach $X_{\varphi\varphi}$ i $Y_{\varphi\varphi}$, a tym samym i o wartościach X_{φ} i Y_{φ} .

Możemy jednak poczynić pewne przypuszczenia co do wartości X_{φ} albo Y_{φ} i z nich wyciągnąć wnioski.

Gdyby np. $Y_{\varphi} \neq 0$, to z równania (D) otrzymamy $X_{\lambda} = X_{\varphi} Y_{\lambda} / Y_{\varphi}$, a wstawiając to w drugie równanie (A), otrzymalibyśmy:

$$Y_{\lambda} = 0;$$

uwzględniając to w warunku (D), otrzymujemy:

$$X_{\lambda} = 0;$$

byłoby więc $X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 = 0$, wbrew trzeciemu z równań (A). Założenie $Y_\varphi \neq 0$ prowadzi zatem do sprzeczności (wyjawszy dwa punkty powierzchni, mianowicie bieguny: $\varphi = \pm 90^\circ$). Musi więc być na ogół zawsze $Y_\varphi = 0$.

Do podobnej sprzeczności prowadzi przyjęcie $Y_\lambda \neq 0$, i wynikałoby analogicznie, że Y_λ musi być na ogół zawsze zerem.

Nie może zaś być równocześnie $Y_\varphi = Y_\lambda = 0$, gdyż z drugiego równania (A) wynikałoby, że równocześnie albo $X_\lambda = 0$, albo $X_\varphi = 0$, a więc znowu mielibyśmy sprzeczność z pierwszym lub z trzecim równaniem (A).

W ten sposób wykazaliśmy, że i w przypadku drugim równania (A) nie mogą się na ogół spełniać wszystkie równocześnie.

Dowód nierozwijalności kuli na płaszczyznę, według podobnej w zasadzie metody, podał pierwszy Leonhard Euler (1707 — 1783), matematyk szwajcarski, w swej rozprawie p. t. *De representatione superfliciei sphaericae super plano*, *Acta Acad. Scient. Imperial. Petropolitanae pro anno 1777*. Rozprawa ta, wraz z dwiema innymi rozprawami kartograficznymi tegoż autora, została wydana również w przekładzie niemieckim, w wydawnictwie *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften*, nr 93, *Leipzig* 1898, pod tytułem: *Drei Abhandlungen über Kartenprojection von Leonhard Euler (1777); herausgegeben von A. Wangerin*. Dowód Euler'a, dla porównania go z dowodem podanym tutaj, a także ze względów historycznych, przytaczamy w Przepisie 2, w przekładzie polskim z *Ostwalds Klassiker*.

Na podobnych zasadach opiera się też dowód E. Beltrami'ego, podany przez M. Florini'ego, *Le proiezioni delle carte geografiche*, *Bologna* 1881.

W literaturze naukowej polskiej, dowód nierozwijalności kuli na płaszczyznę podał prof. dr Antoni Łomnicki, *Kartografia matematyczna*, *Lwów — Warszawa*, 1927. Dowód podany tutaj, w dużej mierze wzoruje się na tej pracy, jest jednak nieco pełniejszy.

23. Dowód nierozwijalności elipsoidy obrotowej na płaszczyznę

Dowód niemożliwości ustanowienia izometrii między powierzchnią elipsoidy i płaszczyzną, (a tym samym i inny dowód tegoż dla kuli i płaszczyzny), jest następujący¹⁾.

Przyjmijmy siatkę geograficzną na elipsoidzie obrotowej za siatkę parametrową, a jej obraz na płaszczyźnie — za siatkę parametrową płaszczyzny.

Weźmy pod uwagę dwa konsekwentne równoleżniki φ i $\varphi + d\varphi$ na elipsoidzie i ich obrazy na płaszczyźnie; obrazy południków muszą przecinać obrazy równoleżników ortogonalnie, jeśli odwzo-

¹⁾ Dowód ten podano, z niewielkimi zmianami, według J. I. Craig, M. A., *The Theory of Map Projections*, *Cairo* 1910; Craig przypisuje ten dowód T. L. Bennett'owi.

rowanie ma być izometryczne. Ponieważ długość wzdłuż łuku południka, zawarta pomiędzy dwoma kolejnymi obrazami równoleżników, musi być niezależna od długości geograficznej, oba równoleżniki-obrazy muszą być wszędzie w tym samym od siebie odstępzie, mierzonym wzdłuż normalnej. Nadto, dzięki symetrii, krzywizna równoleżników-obrazów musi być stała. Przeto równoleżniki elipsoidalne muszą odtwarzać się na płaszczyźnie w koncentryczne koła, w odstępzie wzajemnym takim samym, jak na elipsoidzie:

$$d\sigma = \int_{\varphi}^{\varphi+d\varphi} M d\varphi = M d\varphi;$$

M oznacza promień krzywizny południka dla elipsoidy, w szerokości φ . Jeśli ρ i $\rho + d\rho$ będą promieniami tych dwóch kół na płaszczyźnie, mamy $d\sigma = -d\rho$.

Kąt środkowy, podparty łukiem równoleżnika φ o długości $r d\lambda$, będzie $r d\lambda/\rho$, gdyż łuk równoleżnika na płaszczyźnie musi być równy łukowi równoleżnika na elipsoidzie, wobec izometrii; (r = promień równoleżnika φ na elipsoidzie); kąt środkowy, podparty łukiem równoleżnika $\varphi + d\varphi$ o długości $(r + dr) d\lambda$, jest, z tego samego powodu, równy:

$$\frac{(r + dr) d\lambda}{\rho + d\rho};$$

i oba te wyrażenia muszą być sobie równe, gdyż przedstawiają tę samą wielkość. To prowadzi do warunku:

$$\frac{r d\lambda}{\rho} = \frac{(r + dr) d\lambda}{\rho + d\rho}, \quad \text{skąd} \quad r d\rho = \rho dr;$$

wprowadzając zmienną φ i biorąc $d\rho = -d\sigma = -M d\varphi$, otrzymamy $(N \cos \varphi) (-M d\varphi) = \rho (-M \sin \varphi d\varphi)$ i $\rho = N \operatorname{ctg} \varphi = r \operatorname{cosec} \varphi$; N oznacza promień krzywizny przekroju normalnego, prostopadłego do południka, w szerokości φ .

Taką wartość musiałby mieć promień równoleżnika φ na płaszczyźnie.

Przez różniczkowanie mamy:

$$d\rho = \frac{d}{d\varphi} (r \operatorname{cosec} \varphi) d\varphi = -(M + r \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{ctg} \varphi) d\varphi.$$

Z drugiej strony jest $d\sigma = -d\rho$ i

$$M d\varphi = (M + r \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{ctg} \varphi) d\varphi,$$

dla wspólnej wartości φ . Stąd, aby równość ta miała miejsce, wyrażenie $r \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{ctg} \varphi$ musi zniknąć dla rozważanej wartości φ . Ale wyrażenie to znika tylko w biegunach, dla $\varphi = \pm \pi/2$, lecz nigdzie poza tym. Przeto odwzorowanie izometryczne powierzchni elipsoidy, albo dowolnego obszaru powierzchni elipsoidy, na płaszczyznę jest niemożliwe.

W przypadku kuli byłoby: $M = N = R$, $r = R \cos \varphi$, $\rho = r \cdot \operatorname{cosec} \varphi$,

$$R d\varphi = -d\rho = -\frac{d}{d\varphi} (r \operatorname{cosec} \varphi) d\varphi = (R + r \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{ctg} \varphi) d\varphi.$$

24. Pierwsze twierdzenie Tissota (o siatkach ortogonalnych)

a) Twierdzenie.

W dowolnym regularnym odwzorowaniu jednej regularnej powierzchni na drugą istnieje zawsze przynajmniej jedna i — jeśli odwzorowanie nie jest konforemne — tylko jedna siatka ortogonalna na powierzchni oryginału, której obraz na drugiej powierzchni będzie siatką również ortogonalną.

W przypadku odwzorowania konforemnego, siatek ortogonalnych odpowiadających sobie jest nieskończenie wiele, każda bowiem siatka ortogonalna na powierzchni oryginału odwzorowuje się w siatkę również ortogonalną na powierzchni obrazu, z powodu zachowania kątów.

W regularnym odwzorowaniu jednej regularnej powierzchni na drugą, albo istnieje nieskończenie wiele par siatek ortogonalnych odpowiadających sobie (każda siatka ortogonalna przechodzi w ortogonalną), albo też istnieje *tylko jedna jedyna* para takich siatek. Innym przypadków, przy regularnych odwzorowaniach dwóch dowolnych regularnych powierzchni na siebie, nie ma.

Dowód. Niechaj będą dane dwie dowolne regularne powierzchnie, określone za pomocą równań parametrycznych, w dwóch prostokątnych przestrzennych układach xyz i XYZ :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(u, v) \\ y &= f_2(u, v) \\ z &= f_3(u, v) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{powierzchnia I} \\ \text{(oryginał),} \end{array} \quad \left. \begin{aligned} X &= F_1(U, V) \\ Y &= F_2(U, V) \\ Z &= F_3(U, V) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{powierzchnia II} \\ \text{(obraz),} \end{array} \quad (24.1)$$

oraz dwie dowolne funkcje odwzorowawcze, określające regularne odwzorowanie powierzchni pierwszej, jako oryginału, na powierzchnię drugą, jako obrazu:

$$\begin{aligned} U &= \psi_1(u, v) \\ V &= \psi_2(u, v), \end{aligned} \quad (J \equiv \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \neq 0). \quad (24.2)$$

Uskutecznimy odwzorowanie w sensie matematycznym, gdy wprowadzimy funkcje odwzorowawcze do równań parametrycznych powierzchni obrazu (zamiana zmiennych parametrycznych), sprowadzając te równania do nowego rodzaju współrzędnych powierzchniowych, mianowicie do tych samych parametrów u, v , które występują na powierzchni oryginału. Wtedy linie u i linie v na obu powierzchniach *odpowiadają* sobie, a siatki utworzone przez te dwie rodziny linii na obu powierzchniach są *odpowiadającymi* sobie siatkami współrzędnych powierzchniowych. Możemy wówczas mówić o elementach i wielkościach odpowiadających sobie wzajemnie na skutek odwzorowania.

Niech E, F, G i E', F', G' będą odpowiadającymi sobie wielkościami podstawowymi 1. rzędu na pierwszej i, odpowiednio, na drugiej powierzchni.

Dowód twierdzenia będzie polegał na wykazaniu:

1) że para siatek ortogonalnych, odpowiadających sobie, *musi istnieć w ogóle*,

2) że—jeśli odwzorowanie nie jest konforemne—*jest tylko jedna*.

Weźmy na powierzchni oryginału dowolny punkt (u, v) i dwie dowolne linie, leżące na tej powierzchni, przecinające się w tym punkcie pod kątem β . Na powierzchni obrazu, obranemu punktowi odpowiada punkt-obraz o tych samych (wobec wprowadzenia funkcji odwzorowawczych do równań powierzchni II) parametrach (u, v) , w swoim układzie współrzędnych powierzchniowych, a dwóm obranym liniom odpowiadają dwie inne linie obrazowe, przecinające się w punkcie, będącym obrazem pierwszego; niech odpowiadający kąt, pod którym przecinają się te dwie linie obrazowe, będzie β' .

Z ogólnej teorii powierzchni mamy następujące wzory na cosinus kąta, jaki tworzą dwie dowolne linie na powierzchni, wyznaczone kierunkami dv/du i $\partial v/\partial u$, w ich punkcie przecięcia:

$$\cos \beta = \frac{E du \partial u + F (du \partial v + dv \partial u) + G dv \partial v}{\sqrt{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E \partial u^2 + 2 F \partial u \partial v + G \partial v^2}}$$

na powierzchni I, (24.3)

$$\cos \beta' = \frac{E' du \partial u + F' (du \partial v + dv \partial u) + G' dv \partial v}{\sqrt{E' du^2 + 2 F' du dv + G' dv^2} \cdot \sqrt{E' \partial u^2 + 2 F' \partial u \partial v + G' \partial v^2}}$$

na powierzchni II.

Fakt, że kąty β i β' są *odpowiadającymi* sobie kątami, wyraża się tym, że w obu wzorach występują te same parametry.

Aby siatki na obu powierzchniach mogły być ortogonalne i jedna była obrazem drugiej, trzeba zbadać czy jest możliwe, aby jednocześnie $\beta = \pi/2$ i $\beta' = \pi/2$, i jakie to spowoduje wymagania, oraz czy te wymagania mogą być spełnione, i kiedy ewentualnie?

A więc mamy zbadać, czy jest możliwe, aby $\cos \beta = \cos \beta' = 0$. Aby tak było, trzeba żeby równocześnie oba liczniki w powyższych wyrażeniach były zerami. (Mianowniki są oczywiście różne od zera, są bowiem pierwiastkami kwadratowymi z formy kwadratowej zawsze dodatniej).

Stąd:

$$\begin{aligned} E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v &= 0, \\ E' du \delta u + F' (du \delta v + dv \delta u) + G' dv \delta v &= 0, \end{aligned} \quad (24.4)$$

albo, dzieląc oba równania przez $du \delta u$ i oznaczając pochodne $\delta v / \delta u$ i dv/du przez k_1 i k_2 , otrzymamy:

$$\begin{aligned} E + F (k_1 + k_2) + G k_1 k_2 &= 0, \\ E' + F' (k_1 + k_2) + G' k_1 k_2 &= 0, \end{aligned} \quad (24.5)$$

układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu a drugiego stopnia, z dwiema niewiadomymi. Pochodne k_1 i k_2 wyznaczają prostopadłe do siebie kierunki obu linii, w ich wspólnym punkcie przecięcia; dotyczy to zarówno powierzchni pierwszej, jak i powierzchni drugiej. Zadanie sprowadza się do stwierdzenia:

1) czy istnieją wielkości k_1 i k_2 , czyniące zadość tym dwóm warunkom;

2) jeśli istnieją, to czy tylko jedna para, czy więcej?

Co do punktu drugiego, odpowiedź jest natychmiastowa: mamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, jeśli więc ten układ równań w ogóle posiada rozwiązania rzeczywiste na k_1 i k_2 , to posiada ich tylko jedno. A więc ta część twierdzenia (w założeniu, że odwzorowanie nie jest konforemne) jest dowiedziona.

Ale czy rozwiązania k_1 i k_2 w ogóle istnieją? Okażemy, że dla powyższego układu równań istnieją zawsze rozwiązania, to znaczy, że ten układ równań różniczkowych ma zawsze *rzeczywiste* rozwiązania.

W tym celu dwa te równania, drugiego stopnia o dwóch niewiadomych, wobec występowania w nich sumy i iloczynu niewiadomych, możemy przekształcić na *jedno* równanie drugiego stopnia, o jednej niewiadomej k i o tych samych pierwiastkach k_1 i k_2 .

Rozwiązując powyższy układ równań względem $(k_1 + k_2)$ i $(k_1 k_2)$, jako układ równań liniowych, otrzymamy:

$$k_1 + k_2 = \frac{\begin{vmatrix} -E, G \\ -E', G' \\ F, G \\ F', G' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F, G \\ F', G' \end{vmatrix}} = \frac{E'G - EG'}{FG' - F'G}; \quad (24.6)$$

$$k_1 k_2 = \frac{\begin{vmatrix} F, -E \\ F', -E' \\ F, G \\ F', G' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F, G \\ F', G' \end{vmatrix}} = \frac{EF' - E'F}{FG' - F'G} = -\frac{E}{G} - \frac{F}{G} \frac{E'G - EG'}{FG' - F'G}.$$

Układamy teraz równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą k_1 i k_2 , na mocy ich sumy i iloczynu:

$$k^2 - \frac{E'G - EG'}{FG' - F'G} k + \frac{EF' - E'F}{FG' - F'G} = 0, \quad k = \frac{dv}{du},$$

$$\text{czyli} \quad (FG' - F'G) k^2 - (E'G - EG') k + (EF' - E'F) = 0, \quad (24.7)$$

Jest to równanie różniczkowe 1. rzędu a drugiego stopnia, o jednej niewiadomej k , równoważne poprzedniemu układowi dwóch równań drugiego stopnia, o dwóch niewiadomych k_1 i k_2 .

Chodzi teraz o to, czy równanie to posiada zawsze rzeczywiste rozwiązania k_1 i k_2 .

Zauważmy najpierw, że równanie spełnia się identycznie, to znaczy dla wszystkich możliwych par kierunków prostopadłych (dla każdego k), jeśli wszystkie trzy wyrazy, występujące w tym równaniu, są równe zeru:

$$FG' - F'G = 0, \quad E'G - EG' = 0, \quad EF' - F'E = 0,$$

co prowadzi do warunku:

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G},$$

wyrażającego konforemność odwzorowania; w odwzorowaniu konforemnym jednej powierzchni na drugą mamy przeto nieskończenie wiele par siatek ortogonalnych, odpowiadających sobie: każda dowolna para kierunków prostopadłych odtwarza się również jako para kierunków prostopadłych. (Wynika to zresztą także i z warunku zachowania kątów w takim odwzorowaniu).

Okażemy jednak, że także wtedy, gdy odwzorowanie nie jest konforemne i proporcjonalność wielkości podstawowych nie zachodzi, równanie kwadratowe na k ma zawsze rzeczywiste rozwiązania k_1 i k_2 , a więc istnieje tylko jedna siatka ortogonalna, mająca jako obraz także siatkę ortogonalną.

W tym celu przejdziemy do jeszcze nieco innego równania: napiszemy równanie kwadratowe, którego pierwiastki z_1 i z_2 będą o F/G większe od pierwiastków k_1 i k_2 , poprzedniego równania kwadratowego:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) &= \left(k_1 + \frac{F}{G}\right) + \left(k_2 + \frac{F}{G}\right) = (k_1 + k_2) + \frac{2F}{G} = \\ &= \frac{E'G - EG'}{FG' - F'G} + \frac{2F}{G} = C, \\ z_1 z_2 &= \left(k_1 + \frac{F}{G}\right) \left(k_2 + \frac{F}{G}\right) = k_1 k_2 + \frac{F}{G} (k_1 + k_2) + \left(\frac{F}{G}\right)^2 = \\ &= \left(-\frac{E}{G} - \frac{F}{G} \frac{E'G - EG'}{FG' - F'G}\right) + \left(\frac{F}{G} \frac{E'G - EG'}{FG' - F'G}\right) + \left(\frac{F}{G}\right)^2 = \\ &= -\frac{E}{G} + \frac{F^2}{G^2} = -\frac{EG - F^2}{G^2} = -\frac{T^2}{G^2};\end{aligned}$$

dla krótkości oznaczyliśmy:

$$z_1 + z_2 = C \quad \text{oraz} \quad z_1 z_2 = -\frac{T^2}{G^2}.$$

C jest liczbą rzeczywistą, stałą, niezależną od k , gdy pozostajemy w jednym punkcie powierzchni (to jest dajemy liczbom u i v stałe wartości); wielkości $T^2 = EG - F^2$ jest, jak wiemy, zawsze dodatnia. Równanie kwadratowe dla z będzie więc:

$$z^2 - Cz - \frac{T^2}{G^2} = 0,$$

a to równanie posiada zawsze rzeczywiste pierwiastki:

$$z_{1,2} = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{T^2}{G^2}},$$

ponieważ pod znakiem pierwiastka występuje suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych, a więc liczba dodatnia; pierwiastki rów-

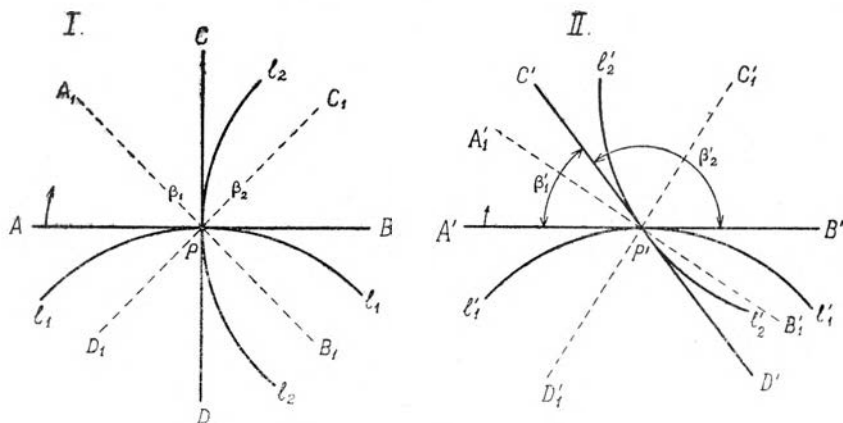
nania kwadratowego na z nie mogą być nigdy zespolone. Zatem również i pierwiastki k_1 i k_2 , które są o F/G mniejsze od pierwiastków z_1 i z_2 , będą też rzeczywiste:

$$k_{1,2} = z_{1,2} - \frac{F}{G} = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{T^2}{G^2}} - \frac{F}{G}.$$

W ten sposób pierwsze twierdzenie Tissot'a o siatkach ortogonalnych jest zupełnie udowodnione. Istnieje więc, albo tylko jedna jedyna para siatek ortogonalnych, odpowiadających sobie w relacji odwzorowawczej dwóch powierzchni, albo takich par jest nieskończenie wiele; ten ostatni przypadek ma miejsce tylko w odwzorowaniach konforemnych.

August Tissot podał swoje twierdzenie o siatkach ortogonalnych w *Nouvelles Annales Mathématiques*, 2-e Série, t. XVII, 1878, w memuarze, który później, wraz z innymi badaniami, włączył do ogólnego dzieła *Mémoire sur la Représentation des Surfaces et les Projections des Cartes Géographiques*, Paris 1881. Tissot nie podał analitycznego dowodu swego twierdzenia, lecz tylko poglądowy dowód geometryczny.

Podamy tu, idąc za Tissot'em, ten poglądowy dowód tego zasadniczego twierdzenia (według Dr. A. Łomnickiego, Kart. Matem.). Niechaj na Rys. 2, liniom l_1 i l_2



Rys. 2

(posiadającym w punkcie P określone styczne), przecinającym się pod kątem prostym na jednej powierzchni, odpowiadają linie l_1' i l_2' (także posiadające określone styczne) na drugiej, przecinające się pod kątem ostrym β_1' z jednej strony, a rozwartym β_2' z drugiej. Weźmy pod uwagę styczne AB , CD i $A'B'$, $C'D'$ do tych linii. Obracajmy teraz układ $ABCD$ około punktu P o 90° , aż kąt β_1 przejdzie w położenie BC . W odwzorowaniu kąt β_1' przechodzi w kąt β_2' , zmienia się więc z ostrego na rozwarty. Wskutek ciągłości odwzorowania musi więc istnieć takie

pośrednie położenie układu $ABCD$, nazwijmy je $A_1 B_1 C_1 D_1$, że w odwzorowaniu odpowie mu również układ prostokątny $A_1' B_1' C_1' D_1'$, tj. że kąt prosty $A_1 P C_1$, zamienia się też na prosty $A_1' P' C_1'$. Rozumowanie to stosuje się do każdego punktu powierzchni. Posuwając się po powierzchniach w tych dwu prostopadłych do siebie kierunkach i wynajdując po drodze ciągle, znowuż odpowiadające sobie kierunki prostopadłe, powlecemy obydwie powierzchnie siatkami ortogonalnymi, odpowiadającymi sobie w odwzorowaniu. Zmieniając we wszelki możliwy sposób, z zachowaniem ciągłości, kolejne następstwo krzywych, każdej z dwu rodzin na obu powierzchniach, otrzymamy dwie siatki nieskończenie wielu linii, z których każda rozkłada swoją powierzchnię na *cząsteczkowe prostokąty*, odpowiadające sobie, i rozkład ten jest jedynym posiadającym tę własność w rozważanym (niekonforemnym) odwzorowaniu.

Tissot w swym poglądowym, geometrycznym dowodzie zakłada, że odwzorowanie posiada własność ciągłości i że dwukierunek przechodzi na dwukierunek; mogą jednak zdarzyć się w pewnych osobliwych punktach powierzchni wyjątki od tej reguły, wówczas twierdzenie dla tych wyjątkowych punktów zawodzi.

b) Krzywe główne odwzorowania.

Ta jedyna para siatek ortogonalnych, istniejąca w każdym dowolnym (niekonforemnym) regularnym odwzorowaniu dwóch dowolnych regularnych powierzchni na siebie, nazywa się *siatką krzywych głównych*. Oczywiście mamy siatkę krzywych głównych na powierzchni oryginału i siatkę krzywych głównych na powierzchni obrazu, obie ortogonalne, i jedna *odpowiada* drugiej (jest jej obrazem) w relacji odwzorowawczej.

W odwzorowaniach konforemnych nie ma siatki krzywych głównych; skoro każda siatka ortogonalna przechodzi również w ortogonalną, nie ma powodu do wyróżnienia którejs z nich. To samo ma miejsce w odwzorowaniu izometrycznym i w podobieństwie; oba te odwzorowania mogą być uważane za szczególnie przypadki konforemności.

Fakt istnienia i znajomość siatki krzywych głównych w każdym (niekonforemnym) odwzorowaniu nieizometrycznym, dla każdych dwóch powierzchni, są bardzo cenne i — jak się okaże w następstwie — bardzo ważne.

Cenność siatki krzywych głównych polega na tym, że możemy ją wykorzystać, przyjmując ją za siatkę parametrową na obu powierzchniach, dzięki czemu uzyskamy znaczne korzyści i uproszczenia; dla takich współrzędnych powierzchniowych mamy bowiem równocześnie:

$$F = 0 \quad \text{ i } \quad F' = 0.$$

Często się zdarza, że siatka geograficzna powierzchni obrotowej jest, dla pewnych odwzorowań (niekonforemnych) na płaszczyznę, siatką krzywych głównych, na ogół jednak tak nie jest. W odwzorowaniach konforemnych siatka geograficzna odzwierciedla się zawsze w siatkę ortogonalną, ale wtedy traci sens pojęcie krzywych głównych.

Ważność siatki krzywych głównych polega na jej związku ze zniekształceniami metrycznymi, o czym będzie mowa w Nr. 27, c.

Na podstawie pierwszego twierdzenia Tissot'a, możemy napisać równanie różniczkowe siatki krzywych głównych:

$$(FG' - F'G) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - (E'G - EG') \frac{dv}{du} + (EF' - E'F) = 0,$$

(24.8)

lub

$$\frac{du dv}{(EF' - E'F) du^2 + (G'F - GF') dv^2} = \frac{1}{E'G - EG'},$$

lub wreszcie, w formie wyznacnikowej, łatwej do zapamiętania:

$$\begin{vmatrix} dv^2, & -du dv, & du^2 \\ E, & F, & G \\ E', & F', & G' \end{vmatrix} = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne 1. rzędu a drugiego stopnia. Wyrażenia $(FG' - F'G)$, $(E'G - EG')$, $(EF' - E'F)$ są na ogół funkcjami obu parametrów u , v , znanymi, gdy dane są obie powierzchnie i para funkcji odwzorowawczych.

We współrzędnych powierzchniowych u , v na powierzchnioryginału, równanie to jest równaniem siatki krzywych głównych na powierzchnioryginału. We współrzędnych powierzchniowych u , v na powierzchni obrazu, to samo równanie jest równaniem siatki krzywych głównych na powierzchni obrazu. Dla obu powierzchni równanie siatki krzywych głównych jest to samo, lecz znaczenie współrzędnych powierzchniowych u , v jest inne.

Rozwiązaniem takiego równania są, jak wiadomo, dwie rodziny funkcji:

$$v = F_1(u, C_1),$$

$$v = F_2(u, C_2).$$

Wstawiając te wartości v w parametrowe równania obu powierzchni, otrzymamy na nich po dwie rodziny linii krzywych ortogonalnych, odpowiadających sobie wzajemnie przy odwzorowaniu. Będą to krzywe główne.

Z tych dwóch równań możnaby obliczyć u i v , jako funkcje dwóch zmiennych C_1 , C_2 , a mianowicie:

$$u = \chi_1(C_1, C_2),$$

$$v = \chi_2(C_1, C_2),$$

a podstawiawszy te u i v w równania obu powierzchni, otrzymalibyśmy nowe parametrowe przedstawienie tych powierzchni, za pomocą parametrów C_1 i C_2 . W tym nowym przedstawieniu, siatki linii parametrowych byłyby już ortogonalne na jednej i na drugiej powierzchni. W ten sposób krzywe główne byłyby przyjęte za siatki parametrowe.

Jeśli na powierzchni oryginału siatka parametrowa jest ortogonalna, wówczas $F = 0$ i równanie różniczkowe siatki krzywych głównych uprości się do postaci:

$$\frac{du dv}{E du^2 - G dv^2} = \frac{F'}{E'G - EG'}.$$

Jeśli nadto $F' = 0$ i $(E'G - EG') \neq 0$ (to znaczy $E':E \neq G':G$), równanie powyższe będzie spełnione dla $du = 0$, czyli dla $u = \text{const.}$; i dla $dv = 0$, czyli dla $v = \text{const.}$ W ten sposób, gdy ortogonalna siatka parametrowa na powierzchni oryginału, odtwarza się jako ortogonalna siatka parametrowa na powierzchni obrazu, to jest ona siatką krzywych głównych. Gdy $F' = 0$ i $(E'G - EG') = 0$, siatka krzywych głównych staje się nieokreślona; w tym przypadku istnieje nieskończenie wiele par siatek ortogonalnych odpowiadających sobie, a odwzorowanie jest konforemne.

Równanie różniczkowe siatki krzywych głównych może być też uzyskane na innej drodze, co podane jest w Przypisie 3.

c) Kierunki główne.

Przez każdy punkt na powierzchni oryginału przechodzą dwie linie krzywe, leżące na tej powierzchni, przecinające się pod kątem prostym i będące dwiema krzywymi głównymi, należącymi do obraznego punktu. To samo ma miejsce w odpowiednim punkcie na powierzchni obrazu.

Linie proste, styczne do krzywych głównych w dowolnym punkcie powierzchni oryginału, zwiemy *stycznymi głównymi*, a ich kierunki — *kierunkami głównymi* na powierzchni oryginału w tym punkcie.

Podobnie, linie proste styczne do krzywych głównych w dowolnym punkcie powierzchni obrazu, zwiemy *stycznymi głównymi*, a ich kierunki — *kierunkami głównymi* na powierzchni obrazu w tym punkcie.

Styczne główne i kierunki główne są prostopadłe do siebie, co wynika z ortogonalności siatki krzywych głównych.

Jeśli para rozważanych punktów jest odpowiadająca sobie w relacji odwzorowawczej, to pary stycznych głównych i pary kierunków głównych są również parami odpowiadającymi sobie.

Kierunki główne w dowolnym punkcie powierzchni oryginału, bądź obrazu, możemy wyznaczyć w następujący sposób.

Z układu dwóch równań o dwóch niewiadomych:

$$E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0,$$

$$E' + F'(k_1 + k_2) + G' k_1 k_2 = 0,$$

obliczamy liczby k_1 i k_2 ; podstawiając znalezione wartości do wzoru na kąt kierunkowy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{EG - F^2} \frac{k}{E + kF},$$

otrzymamy dwa żądane dwukierunki prostopadłe do siebie, α_1 i α_2 , w rozważanym punkcie na powierzchni oryginału; podobnie, podstawiając te same wartości k_1 i k_2 do wzoru na kąt kierunkowy:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \sqrt{E'G' - F'^2} \frac{k}{E' + kF'},$$

otrzymamy odpowiadające im dwa dwukierunki, α_1' i α_2' , które są również prostopadłe do siebie, w odpowiednim punkcie na powierzchni obrazu.

Można też wyznaczyć kierunki główne z jednego kwadratowego równania różniczkowego siatki krzywych głównych:

$$(FG' - F'G) dv^2 - (E'G - EG') du dv + (EF' - E'F) du^2 = 0,$$

czyli

$$(FG' - F'G) k^2 - (E'G - EG') k + (EF' - E'F) = 0,$$

w którym $k = dv/du$.

Rozwiązując to równanie kwadratowe, otrzymujemy:

$$k_{1,2} = \frac{(E'G - EG') \pm \sqrt{(E'G - EG')^2 - 4(FG' - F'G)(EF' - E'F)}}{2(FG' - F'G)},$$

z tych zaś wartości k_1 i k_2 obliczamy kąty kierunkowe kierunków głównych na obu powierzchniach, w sposób wyżej wskazany.

ROZDZIAŁ V

TEORIA SKALI

25. Skala i podziałka

a) Definicja skali.

Weźmy pod uwagę stosunek elementu liniowego dS na powierzchni obrazu do odpowiadającego mu elementu liniowego ds na powierzchni oryginału i oznaczmy go literą m :

$$m = \frac{dS}{ds}.$$

Liczbę m , zawsze dodatnią, wyrażającą stosunek korespondujących elementów liniowych, obrazu do oryginału, nazywamy skalą.

W literaturze naukowej spotykamy różną terminologię odnośnie stosunku dS/ds :

— w języku angielskim: *scale* (skala), *linear magnification* (powiększenie liniowe), *extention ratio* (stosunek rozciągłości, stosunek wydłużenia);

— w języku francuskim: *rapport de longueurs* (stosunek długości), *rapport de similitude* (stosunek podobieństwa; tylko w odwzorowaniach konforemnych);

— w języku niemieckim: *Vergrößerungsverhältnis* (stosunek powiększenia), *Längenverhältnis* (stosunek długości), *lineare Modul* (moduł liniowy);

— w języku rosyjskim: *massztab linij* (skala linii), *liniejnyj massztab* (skala liniowa), *massztab* (skala).

Najwłaściwszą wydaje się nazwa *skala* i tę nazwę zachowamy na oznaczenie tego stosunku.

b) Skala, jako funkcja wielu zmiennych.

Skala m jest na ogół funkcją zmiennych parametrowych u, v i ich różniczek du, dv . Wynika to stąd, że elementy liniowe dS i ds są funkcjami tych wielkości. Fakt, że skala jest funkcją tych zmiennych będziemy uwidaczniali wyraźnie, pisząc:

$$m(u, v, du, dv) = \frac{dS}{ds}.$$

Zważywszy, że para zmiennych parametrowych (u, v) wyznacza punkt na powierzchni I i punkt-obraz na powierzchni II, oraz że różniczki du, dv wyznaczają, albo kąt kierunkowy α rozważanego elementu ds na powierzchni oryginału, albo też kąt kierunkowy α' odpowiadającego mu elementu liniowego dS na powierzchni obrazu, w rozważanym punkcie, możemy również napisać:

$$m(u, v, \alpha) = m(u, v, \alpha') = \frac{dS}{ds}.$$

Skala jest na ogół funkcją trzech zmiennych: punktu (u, v) powierzchni i kierunku α albo α' rozważanego elementu liniowego ds albo dS , odpowiednio. W szczególnych przypadkach skala może być funkcją dwóch tylko, lub nawet jednej zmiennej, w rozmaitych kombinacjach trzech wielkości u, v, α albo u, v, α' . Wreszcie może być wielkością stałą, co ma miejsce w podobieństwie; w szczególności ta stała może być równa jedności, co ma miejsce w izometrii.

W odwzorowaniach konforemnych skala, jak widzieliśmy w Nr. 18a, jest funkcją tylko punktu i jest niezależna od kierunku, to znaczy od różniczek du, dv . Warunek konforemności $E' : E = F' : F = G' : G$ eliminuje bowiem te różniczki w stosunku dS/ds , i skala staje się funkcją tylko punktu, to jest dwóch zmiennych parametrowych u, v , lub ewentualnie jednej z nich:

$$m(u, v), \quad m(u), \quad m(v).$$

W odwzorowaniach niekonforemnych skala będzie na ogół zależała od punktu i od kierunku, to jest od trzech zmiennych; przy czym możemy mieć również zależność od dwóch lub jednej zmiennej parametrowej, a nawet tylko od samego kierunku:

$$m(u, v, \alpha), \quad m(u, \alpha), \quad m(v, \alpha), \quad m(\alpha);$$

oraz

$$m(u, v, \alpha'), \quad m(u, \alpha'), \quad m(v, \alpha'), \quad m(\alpha').$$

Przypadek, gdy skala m jest funkcją samego tylko kierunku i nie zależy od punktu (od miejsca na powierzchni), może mieć miejsce dla takich powierzchni, takich zmiennych parametrowych, i takich odwzorowań, dla których wielkości podstawowe E, F, G i E', F', G' są wszystkimi wielkościami stałymi, albo iloczynami wielkości stałych przez tę samą funkcję parametrów u, v ; np. w odwzorowaniu płaszczyzny na płaszczyznę za pomocą pokrewieństwa.

c) Skala główna, skala poszczególna.

Zasadniczo, w teorii odwzorowań będziemy rozważali odwzorowania jednej powierzchni na drugą, wykonywane w wielkości naturalnej, a więc w *skali głównej* 1:1. Wówczas wielkość m , funkcja na ogół trzech zmiennych, może być bardziej dobitnie nazywana *skalą poszczególną*. Będzie to liczba zbliżona na ogół do jedności (w rejonach użytkownych odwzorowania), raz większa, raz mniejsza od jedności, zależnie od tego, czy obrazowy element liniowy dS jest większy, czy też mniejszy od swego oryginału ds .

W odwzorowaniach konforemnych można skalę poszczególną nazywać także *skalą lokalną*, lub *miejscową*, ponieważ zależy ona tylko od miejsca na powierzchni.

Jeśli przed dokonaniem odwzorowania, powierzchnię oryginału pomniejszymy w pewnym stałym stosunku $1/N$ (odwzorowanie przez podobieństwo), to liczbę $1/N$ nazywamy *skalą główną*. Dokonując odwzorowania tak pomniejszonej powierzchni oryginału na drugą powierzchnię, w skali 1:1, otrzymujemy skalę poszczególną m , lecz względem pierwotnej powierzchni oryginału, niepomniejszonej — skalę poszczególną ($m \cdot 1/N$), liczbę raz nieco większą, inny raz nieco mniejszą od liczby $1/N$ (skali głównej), zależnie od zmian skali m .

Mamy więc następujące pojęcia:

skala główna: $m_0 = 1/N$,

skala poszczególna: $m' = m \cdot m_0 = m \cdot 1/N$;

w szczególności gdy $1/N = 1$, skala główna m_0 jest 1:1, skala poszczególna m' jest równa m .

d) Zniekształcenie liniowe.

Skala m , zawsze dodatnia i w użytkownych rejonach odwzorowania bliska jedności, może być mniejsza lub większa od jedności. Odchyłkę skali m od jedności, która może być liczbą większą albo mniejszą od zera (powiększenie, pomniejszenie), albo równą zeru, nazywamy *zniekształceniem liniowym elementarnym* (lub zniekształceniem elementu liniowego dS , lub też *błędem skali*):

$$(m - 1) = \frac{dS}{ds} - 1 = \frac{dS - ds}{ds}.$$

Wielkość tę można również wyrazić w procentach albo w promillach:

$$(m - 1) \cdot 100\% \quad \text{lub} \quad \frac{dS - ds}{ds} \cdot 100\%;$$

oraz

$$(m - 1) \cdot 1000\text{‰} \quad \text{lub} \quad \frac{dS - ds}{ds} \cdot 1000\text{‰}.$$

Jeśli skala główna jest 1:1, błąd skali, czyli zniekształcenie elementarne długości, jest $(m - 1)$; jeśli skala główna jest m_0 , czyli $1/N$, wówczas skala poszczególna jest m' :

$$m' = m \cdot m_0 = m (1/N) = \frac{dS}{ds} \cdot \frac{1}{N},$$

i zniekształcenie liniowe elementarne jest:

$$\left(\frac{m'}{m_0} - 1 \right), \text{ czyli, jak poprzednio, } (m - 1).$$

W literaturze naukowej spotykamy następującą terminologię:

— w języku angielskim: *scale error* (błąd skali), *linear distortion* (dystorsja liniowa);

— w języku francuskim: *déformations de longueurs* (deformacje długości; ten termin wydaje się mniej udany, gdyż pod pojęciem deformacji rozumiemy zwykle zmianę formy bez zmiany metryki), *altérations de longueurs* (zmiany długości);

— w języku niemieckim: *Längenverzerrung* (zniekształcenie długości);

— w języku rosyjskim: *искажение длин* (zniekształcenie długości), *искажение линий* (zniekształcenie linii).

Niekiedy można spotkać odmienną nieco terminologię pojęciową, mianowicie wielkość $m = dS/ds$ jest często nazywana zniekształceniem liniowym. Wydaje się słuszniejsze wielkość m nazywać skalą, zaś jej odchyłkę od jedności nazywać zniekształceniem. Tę odmienną pojęciową terminologię spotykamy, między innymi, i w literaturze polskiej: A. Łomnicki, *Kartografia matematyczna*, 1927.

e) Definicja podziałki ¹⁾.

W języku polskim rozporządzamy jeszcze pojęciem podziałki. Podziałką nazywamy graficzne przedstawienie skali. Skala jest zawsze liczbą, lub na ogół funkcją; podziałka jest wykresem tej liczby lub funkcji (porównaj: równanie koła i koło). Nie należy mieszać obu tych pojęć: skali i podziałki, albo uważać je za identyczne. Powiedzenie: „podziałka 1:100 000” nie ma sensu; poprawnie można tylko powiedzieć: „skala 1:100 000”. Ale zupełnie poprawną jest forma: „podziałka dla skali 1:100 000”.

Skonstruowanie podziałki jest łatwe dla skali głównej, jako stałej; obierając podstawę podziałki, w postaci dowolnego odcinka prostej, możemy wykreślić prostoliniową podziałkę. Oczywiście dla jednej i tej samej skali głównej (lub w ogóle stałej) możemy skonstruować mnóstwo podziałek, stosownie do obioru odcinka podstawowego podziałki.

¹⁾ Fr. Biernacki, kpt. WIG. *Terminologia w teorii rzutów kartograficznych*, Wiadomości Służby Geograficznej, Zeszyt 1/1927.

Fr. Biernacki, mjr. korp. geogr. *Skala i podziałka*, Wiad. Sł. Geogr. Zeszyt 1/1938.

Skonstruowanie podziałki dla skali poszczególnej jest sprawą znacznie trudniejszą, z powodu zmienności tej skali; mamy wtedy zadanie wykresu funkcji i, zależnie od charakteru tej funkcji, a zwłaszcza od ilości zmiennych, wykres podziałki (lub w ogóle jej konstrukcja graficzna) może być mniej lub więcej skomplikowany(a). W najprostszych przypadkach, gdy skala poszczególnej jest funkcją jednej tylko zmiennej, wykres podziałki nie przedstawia specjalnej trudności i często można spotkać *krzywoliniową podziałkę złożoną* na arkuszach mapy w odwzorowaniu konforemnym (np. Mercatora lub stożkowym Lamberta, w których skala jest funkcją tylko szerokości geograficznej).

26. Skala, jako funkcja kąta kierunkowego

na powierzchni oryginału		na powierzchni obrazu
--------------------------	--	-----------------------

a) Wywód wzoru.

Ważne jest analityczne wyrażenie, przedstawiające skalę m albo zniekształcenie liniowe elementarne ($m - 1$) elementu liniowego dS na powierzchni obrazu, w postaci funkcji wyrażonej

kąta kierunkowego α elementu liniowego ds na powierzchni oryginału.		kąta kierunkowego α' elementu liniowego dS na powierzchni obrazu.
--	--	--

Rozważanie dotyczy oczywiście dowolnego, lecz pojedynczego punktu (u, v) na powierzchni oryginału.		obrazu.
--	--	---------

Z definicji wielkości m mamy:

$$m^2 = \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 = \frac{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{E' + 2F'(dv/du) + G'(dv/du)^2}{E + 2F(dv/du) + G(dv/du)^2}.$$

Aby wprowadzić kąt kierunkowy α , rozważanego elementu liniowego ds na powierzchni oryginału, należy pochodną dv/du wyrazić w zależności od tego kąta. Według ogólnej teorii powierzchni

$$\frac{dv}{du} = k = \frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha}.$$

Aby wprowadzić kąt kierunkowy α' , rozważanego elementu liniowego dS na powierzchni obrazu, należy pochodną dv/du wyrazić w zależności od tego kąta. Według ogólnej teorii powierzchni

$$\frac{dv}{du} = k = \frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E'G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'}.$$

Podstawiając tę wartość do równania na m^2 , otrzymamy:

$$m^2(u, v, \alpha) = \frac{E' + 2F' \left[\frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha} \right] +}{E + 2F \left[\frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha} \right] +} + G' \left[\frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha} \right]^2 + G \left[\frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha} \right]^2.$$

Po wykonaniu rachunku, otrzymamy następujący rezultat:

$$m^2(u, v, \alpha) = \frac{E'}{E} \cos^2 \alpha + \frac{F'E - FE'}{E\sqrt{EG - F^2}} \sin 2\alpha + \frac{EF'^2 - 2F'FE + G'E^2}{E(EG - F^2)} \sin^2 \alpha,$$

czyli

$$m^2(u, v, \alpha) = P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha,$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy oznaczenia:

$$P = \frac{E'}{E}, \quad Q = \frac{F'E - FE'}{E\sqrt{EG - F^2}},$$

$$R = \frac{EF'^2 - 2F'FE + G'E^2}{E(EG - F^2)}.$$

Podstawiając tę wartość do równania na m^2 , otrzymamy:

$$m^2(u, v, \alpha') = \frac{E' + 2F' \left[\frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E'G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'} \right] +}{E + 2F \left[\frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E'G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'} \right] +} + G' \left[\frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E'G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'} \right]^2 + G \left[\frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E'G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'} \right]^2.$$

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = \frac{E}{E'} \cos^2 \alpha' + \frac{FE' - F'E}{E'\sqrt{E'G' - F'^2}} \sin 2\alpha' + \frac{EF'^2 - 2F'FE' + GE'^2}{E'(E'G' - F'^2)} \sin^2 \alpha',$$

czyli

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha',$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy oznaczenia:

$$P' = \frac{E}{E'}, \quad Q' = \frac{FE' - F'E}{E'\sqrt{E'G' - F'^2}},$$

$$R' = \frac{EF'^2 - 2F'FE' + GE'^2}{E'(E'G' - F'^2)}.$$

W ten sposób wyraziliśmy skalę dla elementów liniowych ds i dS , odpowiadających sobie na obu powierzchniach, w postaci funkcji wyraźnej kąta kierunkowego α elementu ds na powierzchni oryginału, albo kąta kierunkowego α' elementu dS na powierzchni obrazu. Wielkości E, F, G i E', F', G' , dotyczące pierwszej i drugiej po-

wierzchni, a także wielkości $P, Q, R; P', Q', R'$ z nich utworzone, są funkcjami punktu powierzchni; w określonym punkcie (u, v) są wszystkimi wielkościami stałymi.

b) Wniosek 1. Równość skal na dwukierunku.

Na każdym dwukierunku w dowolnym punkcie powierzchni oryginału, skale w obu zwrotach są sobie równe.

W dowolnym punkcie powierzchni oryginału weźmy dowolny dwukierunek, wyznaczony kątami kierunkowymi α i $\pi + \alpha$.

Na podstawie wzoru na skalę, mamy:

$$\begin{aligned} m^2(u, v, \alpha) &= \\ &= P \cos^2 \alpha + Q \sin^2 \alpha + R \sin^2 \alpha \\ m^2(u, v, \pi + \alpha) &= P \cos^2(\pi + \alpha) + \\ &+ Q \sin^2(\pi + \alpha) + R \sin^2(\pi + \alpha), \end{aligned}$$

skąd, jak łatwo widzieć,

$$m(u, v, \alpha) = m(u, v, \pi + \alpha).$$

W ten sposób, w kierunkach różniących się o 180° na powierzchni oryginału, skale są jednakowe; w szczególności będą jednakowe dla kątów kierunkowych 0 i π , oraz $\pi/2$ i $3\pi/2$.

c) Wniosek 2. Niezmiennik skali.

Suma kwadratów skal dla dwóch dowolnych, prostopadłych do siebie kierunków na powierzchni oryginału jest wielkością stałą w rozważanym punkcie powierzchni.

W dowolnym punkcie (u, v) powierzchni oryginału, weźmy dwa dowolne, prostopadłe do

Na każdym dwukierunku w dowolnym punkcie powierzchni obrazu, skale w obu zwrotach są sobie równe.

W dowolnym punkcie powierzchni obrazu weźmy dowolny dwukierunek, wyznaczony kątami kierunkowymi α' i $\pi + \alpha'$.

Na podstawie wzoru na skalę, mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} &= \\ &= P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin^2 \alpha' + R' \sin^2 \alpha' \\ \frac{1}{m^2(u, v, \pi + \alpha')} &= P' \cos^2(\pi + \alpha') + \\ &+ Q' \sin^2(\pi + \alpha') + R' \sin^2(\pi + \alpha'), \end{aligned}$$

skąd, jak łatwo widzieć,

$$m(u, v, \alpha') = m(u, v, \pi + \alpha').$$

W ten sposób, w kierunkach różniących się o 180° na powierzchni obrazu, skale są jednakowe; w szczególności równość ta zachodzi dla kierunków 0 i π , oraz $\pi/2$ i $3\pi/2$.

Suma kwadratów odwrotności skal dla dwóch dowolnych, prostopadłych do siebie kierunków na powierzchni obrazu jest wielkością stałą w rozważanym punkcie powierzchni.

W dowolnym punkcie (u, v) powierzchni obrazu, weźmy dwa dowolne, prostopadłe do siebie

siebie kierunki, wyznaczone kątami kierunkowymi α i $\pi/2 + \alpha$.

Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} m^2(u, v, \alpha) &= \\ &= P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha \\ m^2(u, v, \pi/2 + \alpha) &= P \cos^2(\pi/2 + \alpha) + \\ &+ Q \sin 2(\pi/2 + \alpha) + R \sin^2(\pi/2 + \alpha) \\ m^2(u, v, \pi/2 + \alpha) &= P(-\sin \alpha)^2 + \\ &+ Q(-\sin 2\alpha) + R(+\cos \alpha)^2, \\ \text{skąd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^2(u, v, \alpha) + m^2(u, v, \pi/2 + \alpha) &= \\ &= P + R. \end{aligned}$$

d) Wniosek 3. Skale wzdłuż linii parametrycznych.

Skala m jest funkcją kąta kierunkowego α na powierzchni oryginału. Łatwo obliczyć skalę m dla dwóch szczególnych kątów kierunkowych, mianowicie dla linii parametrycznych.

Wzdłuż linii parametrycznej v , jest $\alpha = 0$; wzdłuż linii parametrycznej u , jest $\alpha = \Theta$ (kąt, jaki tworzą linie parametryczne w rozważanym punkcie powierzchni oryginału). Uwzględniając te wartości we wzorze na m^2 , otrzymujemy:

$$m_v = m(u, v, 0) = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{E'}{E}},$$

$$m_u = m(u, v, \Theta) = \sqrt{\frac{G'}{G}}.$$

kierunki, wyznaczone kątami kierunkowymi α' i $\pi/2 + \alpha'$.

Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} &= \\ &= P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2(u, v, \pi/2 + \alpha')} &= P'(-\sin \alpha')^2 + \\ &+ Q'(-\sin 2\alpha') + R'(+\cos \alpha')^2, \\ \text{skąd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} + \frac{1}{m^2(u, v, \pi/2 + \alpha')} &= \\ &= P' + R'. \end{aligned}$$

Skala m jest funkcją kąta kierunkowego α' na powierzchni obrazu. Łatwo obliczyć skalę m dla dwóch szczególnych kątów kierunkowych, mianowicie dla linii parametrycznych.

Wzdłuż linii parametrycznej v , jest $\alpha' = 0$; wzdłuż linii parametrycznej u , jest $\alpha' = \Theta'$ (kąt, jaki tworzą linie parametryczne w rozważanym punkcie powierzchni obrazu). Uwzględniając te wartości we wzorze na $1/m^2$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{m_v^2} = \frac{1}{m^2(u, v, 0)} = P' = \frac{E'}{E},$$

$$m_v = m(u, v, 0) = \sqrt{\frac{E'}{E}};$$

$$\frac{1}{m_u^2} = \frac{1}{m^2(u, v, \Theta')} = \frac{G'}{G},$$

$$m_u = m(u, v, \Theta') = \sqrt{\frac{G'}{G}}.$$

W ostatnim wzorze należy uwzględnić w rachunku związki:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}},$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2F\sqrt{EG - F^2}}{EG}, \end{aligned}$$

oraz znaczenia dla P, Q, R .

Zarówno na powierzchni oryginału, jak i na powierzchni obrazu, dla skali wzdłuż linii parametrowych otrzymaliśmy ten sam rezultat, co zresztą wynika z faktu, że jedna siatka parametrowa jest obrazem drugiej.

Rezultaty powyższe można też uzyskać, prościej i bezpośrednio, z ogólnego wzoru:

$$m^2 = \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 = \frac{E' du^2 + 2F' dudv + G' dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2},$$

zakładając w nim $dv = 0$ ($v = \text{const.}$) dla linii parametrowej v , albo $du = 0$ ($u = \text{const.}$) dla linii parametrowej u .

Skale wzdłuż linii parametrowych wyrażają się, prostymi stosunkowo wzorami, za pomocą wielkości podstawowych 1. rzędu obu powierzchni. Łatwo zatem możemy obliczyć obie skale dla linii współrzędnych powierzchniowych, w dowolnym punkcie powierzchni, oraz kąt linii parametrowych w tym punkcie. Fakt ten jest bardzo ważny, zwłaszcza dla celów praktycznych, i będzie wykorzystany w Nr. 30.

e) Uproszczenia i wnioski, związane z ortogonalnością siatki parametrowej.

Założmy, że siatka parametrowa na powierzchni oryginału jest ortogonalna, a więc $F = 0$. Obraz tej siatki na drugiej powierzchni, przyjęty, na skutek odwzorowania, za siatkę parametrową na tej powierzchni,

W ostatnim wzorze należy uwzględnić w rachunku związki:

$$\cos \theta' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}},$$

$$\sin \theta' = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{E'G'}},$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta' &= 2 \sin \theta' \cos \theta' \\ &= \frac{2F'\sqrt{E'G' - F'^2}}{E'G'}, \end{aligned}$$

oraz znaczenia dla P', Q', R' .

Założmy, że siatka parametrowa na powierzchni obrazu jest ortogonalna, a więc $F' = 0$. Siatka odpowiadająca jej na powierzchni oryginału, będąca siatką parametrową tej powierzchni, może być obrana z góry

może być albo ortogonalny, albo nieortogonalny; czyli albo $F'=0$, albo też $F' \neq 0$.

1. Niech $F=0$ i $F' \neq 0$; siatka parametrowa ortogonalna na powierzchni oryginału przechodzi w siatkę parametrową nieortogonalną na powierzchni obrazu. Wówczas wielkości P, Q, R i P', Q', R' przyjmą nieco prostszą postać:

$$P = \frac{E'}{E}, \quad Q = \frac{F'}{\sqrt{EG}}, \quad R = \frac{G'}{G};$$

$$P' = \frac{E}{E'}, \quad Q' = -\frac{EF'}{E' \sqrt{E'G' - F'^2}},$$

$$R' = \frac{EF'^2 + GE'^2}{E'(E'G' - F'^2)}.$$

Odpowiednio do tego, uproszczą się też wzory na skalę m :

$$m^2(u, v, \alpha) = \frac{E'}{E} \cos^2 \alpha +$$

$$+ \frac{F'}{\sqrt{EG}} \sin 2\alpha + \frac{G'}{G} \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = \frac{E}{E'} \cos^2 \alpha' -$$

$$- \frac{EF'}{E' \sqrt{E'G' - F'^2}} \sin 2\alpha' +$$

$$+ \frac{EF'^2 + GE'^2}{E'(E'G' - F'^2)} \sin^2 \alpha'.$$

2. Niech $F=0$ i $F'=0$; siatki parametrowe, odpowiadające sobie na obu powierzchniach, są równocześnie ortogonalne. Wówczas wielkości P, Q, R i P', Q', R' uproszczą się jeszcze bardziej i przyjmą postać:

$$P = \frac{E'}{E}, \quad Q = 0, \quad R = \frac{G'}{G};$$

jako ortogonalna albo nieortogonalna; czyli albo $F=0$, albo $F \neq 0$.

1. Niech $F'=0$ i $F \neq 0$; siatka parametrowa ortogonalna na powierzchni drugiej jest obrazem siatki parametrowej nieortogonalnej na powierzchni pierwszej. Wówczas wielkości P, Q, R i P', Q', R' przyjmą nieco prostszą postać:

$$P = \frac{E'}{E}, \quad Q = -\frac{E'F}{E\sqrt{EG - F^2}},$$

$$R = \frac{E'F^2 + G'E^2}{E(EG - F^2)};$$

$$P' = \frac{E}{E'}, \quad Q' = \frac{F}{\sqrt{E'G'}}, \quad R' = \frac{G}{G'}.$$

Odpowiednio do tego, uproszczą się też wzory na skalę m :

$$m^2(u, v, \alpha) = \frac{E'}{E} \cos^2 \alpha -$$

$$- \frac{E'F}{E\sqrt{EG - F^2}} \sin 2\alpha +$$

$$+ \frac{E'F^2 + G'E^2}{E(EG - F^2)} \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = \frac{E}{E'} \cos^2 \alpha' +$$

$$+ \frac{F}{\sqrt{E'G'}} \sin 2\alpha' + \frac{G}{G'} \sin^2 \alpha'.$$

Odpowiednio do tego, uproszczą się też wzory na skalę m :

$$m^2(u, v, \alpha) = \frac{E'}{E} \cos^2 \alpha + \frac{G'}{G} \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = \frac{E}{E'} \cos^2 \alpha' + \frac{G}{G'} \sin^2 \alpha'.$$

Jeśli, dalej, $P = R$ albo $P' = R'$ — mamy *konforemność*; jeśli zaś $P \neq R$ albo $P' \neq R'$ — mamy *siatkę krzywych głównych*.

Jeżeli więc siatka ortogonalna przetwarza się w siatkę ortogonalną, to może to się dzieć z dwóch tylko przyczyn: albo wskutek konforemności odwzorowania, albo też wskutek tego, że mamy do czynienia z tą *jedyną* parą siatek ortogonalnych, istniejącą zawsze w każdym odwzorowaniu nieizometrycznym i niekonforemnym, o której mówi pierwsze twierdzenie Tissot'a i którą nazwaliśmy krzywymi głównymi.

Konforemność (albo równokątność) odwzorowania jednej powierzchni na drugą pociąga za sobą zawsze ortogonalność obrazu siatki pierwotnie ortogonalnej (np. geograficznej). Twierdzenie odwrotne nie jest słuszne: z ortogonalności obrazu siatki pierwotnie ortogonalnej nie musi wynikać konforemność odwzorowania, ale może wynikać to, że mamy do czynienia z siatką krzywych głównych, a to na mocy twierdzenia Tissot'a.

Warunki konforemności odwzorowania, przy użyciu oznaczeń P, Q, R , wyrażają się przeto w postaci:

$$P = R \text{ i } Q = 0;$$

można łatwo okazać, że warunki te są równoważne warunkom $E' : E = F' : F = G' : G$. Łatwo też zauważyć, że skala m nie będzie zależna od kierunku α tylko wówczas, gdy $P = R$ i $Q = 0$, a więc gdy odwzorowanie jest konforemne¹⁾.

¹⁾ Bezpośredni dowód jest następujący. Skala $m^2 = P \cos^2 \alpha + Q \sin^2 \alpha + R \sin^2 \alpha$ nie będzie zależna od kierunku α wówczas, gdy pochodna $dm^2/d\alpha$ będzie tożsamościowo równa zeru. Mamy wobec tego:

$$\begin{aligned} \frac{dm^2}{d\alpha} &= -2P \cos \alpha \sin \alpha + 2Q \cos 2\alpha + 2R \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2Q \cos 2\alpha - (P - R) \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Musi więc być tożsamościowo (to znaczy dla każdego α):

$$2Q \cos 2\alpha - (P - R) \sin 2\alpha = 0,$$

co może mieć miejsce tylko wówczas, gdy $P = R$ i $Q = 0$.

Odwrotnie, z warunku $P = R$ i $Q = 0$, wynika $dm^2/d\alpha = 0$. Stąd mamy
Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności skali od kierunku jest $P = R$ i $Q = 0$.

Skala może się wówczas zmieniać tylko przy przejściu od jednego punktu do punktu drugiego.

Ten sam wynik otrzymać można również z warunków:

$$P' = R' \text{ i } Q' = 0,$$

i wykazać, że są one równoważne warunkom $E' : E = F' : F = G' : G$.

f) Wnioski, związane z wielkościami P, Q, R i P', Q', R' .

1. Zależność wielkości P, Q, R i P', Q', R' . Sześć wielkości: P, Q, R i P', Q', R' nie są wielkościami niezależnymi. Między nimi zachodzą, jak łatwo się przekonać za pomocą prostego, sprawdzającego rachunku, trzy następujące niezależne związki:

$$P P' = 1,$$

$$(P R - Q^2) (P' R' - Q'^2) = 1,$$

$$\frac{P + R}{P' + R'} = P R - Q^2.$$

Dzięki temu, wielkości P', Q', R' możemy wyrazić za pomocą wielkości P, Q, R (lub odwrotnie), przez rozwiązanie powyższego układu równań. Otrzymamy wtedy:

$$P' = \frac{1}{P}, \quad Q'^2 = \frac{Q^2}{P^2(P R - Q^2)}, \quad R' = \frac{P^2 + Q^2}{P(P R - Q^2)}.$$

2. Podamy teraz pewne wyrażenia, które będą potrzebne w następstwie i które łatwo uzyskać przez prosty rachunek algebraiczny:

$P + R = \frac{E' G - 2 F F' + G' E}{E G - F^2},$	$P' + R' = \frac{E G' - 2 F' F + G E'}{E' G' - F'^2},$
$P R - Q^2 = \frac{E' G' - F'^2}{E G - F^2},$	$P' R' - Q'^2 = \frac{E G' - F'^2}{E' G' - F'^2},$
(wyrażenie zawsze dodatnie);	(wyrażenie zawsze dodatnie);
$(P + R)^2 - 4(P R - Q^2) =$ $= (P - R)^2 + 4 Q^2.$	$(P' + R')^2 - 4(P' R' - Q'^2) =$ $= (P' - R')^2 + 4 Q'^2.$

Zauważmy na koniec, że Q i Q' mogą być zerami, tylko równocześnie.

27. Badanie ekstremów skali

a) Poszukiwanie ekstremów skali. Pierwsze twierdzenie o ekstremach skali.

Ze wzoru

$$m^2(u, v, \alpha) = \\ = P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha,$$

widzimy, że wraz ze zmianą kąta kierunkowego α elementu liniowego ds na powierzchni oryginału, zmienia się też i skala m . Będziemy rozważać skalę w pewnym obranym punkcie (u, v) na powierzchni oryginału, traktując m jako funkcję jednej zmiennej α , i zapytujemy o ekstrema tej funkcji: czy w ogóle istnieją, kiedy, ile i jakiego rodzaju?

Postępujemy według ogólnych reguł analizy matematycznej, poszukując tych wartości kąta kierunkowego, dla których znika pierwsza pochodna funkcji; jest to, jak wiadomo, warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji.

Różniczkując funkcję

$$m^2(u, v, \alpha)$$

według zmiennej α , otrzymujemy:

$$\frac{d m^2}{d \alpha} = P(-2 \cos \alpha \sin \alpha) + \\ + Q \cdot 2 \cos 2\alpha + R \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

a przyrównując tę pochodną do zera, otrzymamy warunek konieczny (i jeszcze nie wystarczający) na ekstremum rozważanej funkcji:

$$(-P + R) \sin 2\alpha_e + 2Q \cos \alpha_e = 0.$$

Zauważmy przede wszystkim, że dla $P = R$ i $Q = 0$ równanie to spełnia się identycznie, to znaczy dla każdego α .

Ze wzoru

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = \\ = P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha',$$

widzimy, że wraz ze zmianą kąta kierunkowego α' elementu liniowego dS na powierzchni obrazu, zmienia się też i skala m . Będziemy rozważać skalę w pewnym obranym punkcie (u, v) na powierzchni obrazu, traktując m jako funkcję jednej zmiennej α' , i zapytujemy o ekstrema tej funkcji: czy w ogóle istnieją, kiedy, ile i jakiego rodzaju?

Różniczkując funkcję

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')}$$

według zmiennej α' , otrzymujemy:

$$\frac{d[1/m^2(u, v, \alpha')]}{d \alpha'} = P'(-2 \cos \alpha' \sin \alpha') + \\ + Q' \cdot 2 \cos 2\alpha' + R' \cdot 2 \sin \alpha' \cos \alpha',$$

$$(-P' + R') \sin 2\alpha'_e + 2Q' \cos 2\alpha'_e = 0.$$

Zauważmy przede wszystkim, że dla $P' = R'$ i $Q' = 0$ równanie to spełnia się identycznie, to znaczy dla każdego α' .

Wówczas nie ma ekstremów, odwzorowanie zaś jest, jak wiemy, konforemne. Formułujemy więc wniosek: w odwzorowaniu konforemnym nie ma ekstremów dla skali m ; skala nie zależy wówczas od kierunku i jest funkcją tylko punktu: we wszystkich kierunkach z danego punktu powierzchni skala jest jednakowa.

Pomijając ten przypadek, mamy następujące rozwiązanie równania

$$\frac{d m^2}{d \alpha} = 0:$$

$$(-P + R) \operatorname{tg} 2 \alpha_e = 0,$$

skąd

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_e = \frac{2Q}{P - R}.$$

Kąty α_e , czyniące zadość temu warunkowi, dają kierunki na powierzchni oryginału, w których m^2 może ewentualnie osiągać swe ekstremalne wartości. Takich kątów, w zakresie od 0 do 2π , dla których $\operatorname{tg} 2 \alpha_e$ jest ten sam, mamy *cztery*:

$$2(0 + \alpha_e), \quad 2(\pi/2 + \alpha_e),$$

$$2(\pi + \alpha_e), \quad 2(3\pi/2 + \alpha_e),$$

gdyż:

$$\operatorname{tg} [2(n \cdot \pi/2 + \alpha_e)] = \operatorname{tg} 2 \alpha_e,$$

$$n = 0, 1, 2, 3.$$

$$\frac{d(1/m^2)}{d \alpha'} = 0:$$

$$(-P' + R') \operatorname{tg} 2 \alpha'_e = 0,$$

skąd

$$\operatorname{tg} 2 \alpha'_e = \frac{2Q'}{P' - R'}.$$

Kąty α'_e , czyniące zadość temu warunkowi, dają kierunki na powierzchni obrazu, w których $1/m^2$ może ewentualnie osiągać swe ekstremalne wartości. Takich kątów, w zakresie od 0 do 2π , dla których $\operatorname{tg} 2 \alpha'_e$ jest ten sam, mamy *cztery*:

$$2(0 + \alpha'_e), \quad 2(\pi/2 + \alpha'_e),$$

$$2(\pi + \alpha'_e), \quad 2(3\pi/2 + \alpha'_e)$$

gdyż:

$$\operatorname{tg} [2(n \cdot \pi/2 + \alpha'_e)] = \operatorname{tg} 2 \alpha'_e,$$

$$n = 0, 1, 2, 3.$$

Z tych czterech kątów, pierwszy i trzeci oraz drugi i czwarty są tylko zmianą kierunków o π , stanowią więc dwukierunki. Natomiast kąty pierwszy i drugi oraz kąty trzeci i czwarty stanowią dwie pary prostopadłych do siebie kierunków. Wszystkie cztery kąty tworzą zatem dwa prostopadłe do siebie dwukierunki. Mamy więc ewentualnie cztery ekstrema funkcji, w rozważanym punkcie powierzchni; zważywszy jednak, (Nr 26 b), że na każdym dwukierunku skale, w obu zwrotach, są sobie równe, sprawa redukuje się do dwóch ekstremów.

Według analizy matematycznej, warunek znikania pierwszej pochodnej funkcji (jednej zmiennej niezależnej) dla pewnych wartości zmiennej, nie jest warunkiem wystarczającym istnienia ekstremów funkcji dla tych wartości zmiennej. Aby tak było, musi jeszcze druga pochodna funkcji, dla tych wartości zmiennej, dla których znika pierwsza pochodna, być różna od zera, a znak drugiej pochodnej rozstrzyga o rodzaju ekstremum.

Zbadajmy drugą pochodną:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 m^2}{d \alpha^2} &= \frac{d}{d \alpha} [(-P + R) \sin 2 \alpha_e + \\ &+ 2 Q \cos 2 \alpha_e] = 2(-P + R) \cos 2 \alpha_e - \\ &- 4 Q \sin 2 \alpha_e = \cos 2 \alpha_e [2(-P + R) - \\ &- 4 Q \operatorname{tg} 2 \alpha_e].\end{aligned}$$

Zbadajmy drugą pochodną:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 (1/m^2)}{d \alpha'^2} &= \frac{d}{d \alpha'} [(-P' + R') \sin 2 \alpha_e' + \\ &+ 2 Q' \cos 2 \alpha_e'] = 2(-P' + R') \cos 2 \alpha_e' - \\ &- 4 Q' \sin 2 \alpha_e' = \cos 2 \alpha_e' [2(-P' + R') - \\ &- 4 Q' \operatorname{tg} 2 \alpha_e'].\end{aligned}$$

Zauważmy najpierw, że druga pochodna skali, dla wszystkich czterech wyżej podanych kierunków, na ogół nie jest zerem. Możemy się o tym przekonać w następujący sposób. Druga pochodna dla kierunków

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2 \alpha_e &= \frac{2 Q}{P - R}, \\ \left(\text{skąd } \cos 2 \alpha_e &= \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2 \alpha_e}} = \right. \\ &= \left. \sqrt{\frac{(P - R)^2}{(P - R)^2 + 4 Q^2}} \right),\end{aligned}$$

przyjmuje wartość:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 m^2}{d \alpha^2} &= \sqrt{\frac{(P - R)^2}{(P - R)^2 + 4 Q^2}} \cdot \\ &\cdot \left[2(-P + R) - 4 Q \frac{2 Q}{P - R} \right] = \\ &= -\frac{2}{P - R} \sqrt{\frac{(P - R)^2}{(P - R)^2 + 4 Q^2}} [(P - R)^2 + 4 Q^2]; \\ \frac{d^2 m^2}{d \alpha^2} &= \mp 2 \sqrt{(P - R)^2 + 4 Q^2},\end{aligned}$$

która może być zerem tylko w przypadku, gdy $P = R$ i $Q = 0$, to znaczy w odwzorowaniu konforemnym.

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_e' = \frac{2 Q'}{P' - R'}$$

$$\begin{aligned}(\text{skąd } \cos 2 \alpha_e' &= \\ &= \sqrt{\frac{(P' - R')^2}{(P' - R')^2 + 4 Q'^2}}),\end{aligned}$$

przyjmuje wartość:

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{m^2} \right)}{d \alpha'^2} = \mp \sqrt{(P' - R')^2 + 4 Q'^2},$$

która może być zerem tylko w przypadku, gdy $P' = R'$ i $Q' = 0$, to znaczy w odwzorowaniu konforemnym.

W każdym innym odwzorowaniu, druga pochodna, dla tych wartości zmiennej niezależnej, dla których znika pierwsza pochodna, jest zawsze różna od zera, wobec czego ekstrema istnieją.

Pozostaje zbadać jakiego rodzaju są te cztery (a właściwie dwa, wzięte dwa razy) ekstrema. W tym celu trzeba zbadać znak drugiej pochodnej, dla znalezionych czterech wartości kąta kierunkowego.

Wyrażenie w nawiasie, przy drugiej pochodnej, dla wszystkich czterech wartości kątowych, dla których zachodzą ekstrema, nie zmienia znaku, gdyż występuje w nim tylko funkcja tangens, która ma jednakową wartość dla wszystkich tych czterech kątów. O znaku drugiej pochodnej decydować więc może tylko czynnik występujący przed nawiasem, to znaczy funkcja cosinus. Otóż cosinus jest taki sam dla pierwszego i trzeciego kąta, oraz taki sam dla drugiego i czwartego kąta, wskutek periodyczności tej funkcji. Ale zmienia znak dla pierwszego i drugiego, oraz dla trzeciego i czwartego kąta. Druga pochodna zmienia zatem znak dla dwóch spośród tych czterech kątów. To dowodzi, że istnieją dwa maksima: dla tych dwóch kątów, dla których druga pochodna jest ujemna, i dwa minima: dla tych dwóch kątów, dla których druga pochodna jest dodatnia. Ponieważ mamy do czynienia z dwoma dwukierunkami, a na każdym dwukierunku obie skale są sobie równe, więc oba maksima, a także oba minima, będą jednakowe.

Powyższe badanie ujmijemy w następujące

Pierwsze twierdzenie o ekstremach skali.

W każdym dowolnym regularnym odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą, z wyłączeniem odwzorowań konforemnych, skala $m(1/m)$, jako funkcja kąta kierunkowego $\alpha(\alpha')$ na powierzchni oryginału (obrazu), osiąga, w każdym na ogół poszczególnym punkcie powierzchni, dwa jednakowe maksima i dwa jednakowe minima dla dwóch dwukierunków, wyznaczonych wartościami

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2Q}{P-R}, \quad \left(\operatorname{tg} 2\alpha'_e = \frac{2Q'}{P'-R'} \right),$$

prostopadłych do siebie na powierzchni oryginału (obrazu).

W przypadku odwzorowania konforemnego, skala nie ma ekstremów w żadnym punkcie powierzchni i jest jednakowa we wszystkich kierunkach w każdym poszczególnym punkcie.

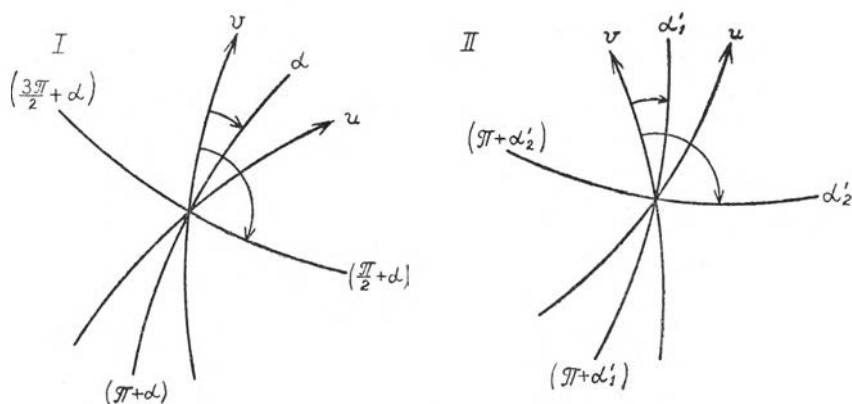
b) Drugie twierdzenie o ekstremach skali.

Wiemy, że ekstrema skali zachodzą dla pary wzajemnie do siebie prostopadłych dwukierunków na powierzchni .

oryginału.

| obrazu.

Zapytujemy teraz pod jakim kątem będzie się przecinała odpowiadająca im para dwukierunków¹⁾ na powierzchni obrazu? | oryginalu?



Rys. 3

Założmy, że α i $(\pi/2 + \alpha)$ oraz $(\pi + \alpha)$ i $(3\pi/2 + \alpha)$ jest parą prostopadłych do siebie dwukierunków na powierzchni oryginalu, dla których zachodzą ekstremalne wartości skali; a więc dla nich jest

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2Q}{P-R}.$$

Niech α_1' i α_2' oraz $(\pi + \alpha_1')$ i $(\pi + \alpha_2')$ będzie parą odpowiadających im dwukierunków na powierzchni obrazu.

Okażemy, że ta para dwukierunków będzie również prostopadła.

Założmy, że α' i $(\pi/2 + \alpha')$ oraz $(\pi + \alpha')$ i $(3\pi/2 + \alpha')$ jest parą prostopadłych do siebie dwukierunków na powierzchni obrazu, dla których zachodzą ekstremalne wartości skali; a więc dla nich jest

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e' = \frac{2Q'}{P' - R'}.$$

Niech α_1 i α_2 oraz $(\pi + \alpha_1)$ i $(\pi + \alpha_2)$ będzie parą odpowiadających im dwukierunków na powierzchni oryginalu.

¹⁾ Na podstawie twierdzenia (Nr 4, b), w każdym regularnym odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą, dwukierunki przechodzą w dwukierunki.

Dowód. Z ogólnej teorii powierzchni mamy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1' &= \operatorname{tg} (\pi + \alpha_1') = \\ &= \frac{(dv/du)_\alpha \sqrt{E' G' - F'^2}}{E' + (dv/du)_\alpha F'} = \\ &= \frac{(dv/du)_{\pi + \alpha} \sqrt{E' G' - F'^2}}{E' + (dv/du)_{\pi + \alpha} F'}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2' &= \operatorname{tg} (\pi + \alpha_2') = \\ &= \frac{(dv/du)_{\pi/2 + \alpha} \sqrt{E' G' - F'^2}}{E' + (dv/du)_{\pi/2 + \alpha} F'} = \\ &= \frac{(dv/du)_{3\pi/2 + \alpha} \sqrt{E' G' - F'^2}}{E' + (dv/du)_{3\pi/2 + \alpha} F'}. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{du}\right)_\alpha &= \frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha}, \\ \left(\frac{dv}{du}\right)_{\pi + \alpha} &= \\ &= \frac{E \operatorname{tg} (\pi + \alpha)}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} (\pi + \alpha)} = \left(\frac{dv}{du}\right)_\alpha; \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{du}\right)_{\pi/2 + \alpha} &= \frac{E \operatorname{tg} (\pi/2 + \alpha)}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} (\pi/2 + \alpha)}, \\ \left(\frac{dv}{du}\right)_{3\pi/2 + \alpha} &= \\ &= \frac{E \operatorname{tg} (3\pi/2 + \alpha)}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} (3\pi/2 + \alpha)} = \left(\frac{dv}{du}\right)_{\pi/2 + \alpha}, \end{aligned}$$

podstawiając te pochodne do obu powyższych równań i mnożąc te równania stronami, otrzymamy:

Dowód. Z ogólnej teorii powierzchni mamy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \operatorname{tg} (\pi + \alpha_1) = \\ &= \frac{(dv/du)_\alpha \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du)_\alpha F} = \\ &= \frac{(dv/du)_{\pi + \alpha} \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du)_{\pi + \alpha} F}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \operatorname{tg} (\pi + \alpha_2) = \\ &= \frac{(dv/du)_{\pi/2 + \alpha} \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du)_{\pi/2 + \alpha} F} = \\ &= \frac{(dv/du)_{3\pi/2 + \alpha} \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du)_{3\pi/2 + \alpha} F}. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{du}\right)_{\alpha'} &= \frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E' G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'}, \\ \left(\frac{dv}{du}\right)_{\pi + \alpha'} &= \\ &= \frac{E' \operatorname{tg} (\pi + \alpha')}{\sqrt{E' G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} (\pi + \alpha')} = \left(\frac{dv}{du}\right)_{\alpha'}; \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{du}\right)_{\pi/2 + \alpha'} &= \frac{E' \operatorname{tg} (\pi/2 + \alpha')}{\sqrt{E' G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} (\pi/2 + \alpha')}, \\ \left(\frac{dv}{du}\right)_{3\pi/2 + \alpha'} &= \\ &= \frac{E' \operatorname{tg} (3\pi/2 + \alpha')}{\sqrt{E' G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} (3\pi/2 + \alpha')} = \left(\frac{dv}{du}\right)_{\pi/2 + \alpha'}, \end{aligned}$$

podstawiając te pochodne do obu powyższych równań i mnożąc te równania stronami, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tg} \alpha_1' \operatorname{tg} \alpha_2' = \\
 &= \frac{[E \operatorname{tg} \alpha \sqrt{E' G' - F'^2}] \cdot}{[E' (\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha) + EF' \operatorname{tg} \alpha] \cdot} \\
 & \quad \cdot [E (-\operatorname{ctg} \alpha) \sqrt{E' G' - F'^2}] = \\
 &= \frac{(-1) E^2 \cdot}{E' (FG - F^2) - (EF' - E' F)^2 +} \\
 & \quad \cdot (E' G' - F'^2)}{+ [(EF' - E' F) E' \sqrt{EG - F^2}] (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)} .
 \end{aligned}$$

Zważywszy, że

$$(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) = -\frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha},$$

i że chodzi nam nie o dowolne dwa prostopadłe do siebie kierunki, ale o te, dla których zachodzą ekstrema skali, musimy uwzględnić warunek:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2Q}{P-R} = \frac{2(EF' - E' F) \sqrt{EG - F^2}}{E' EG - 2E' F^2 + 2EFF' - E^2 G'}.$$

Wtedy, po wykonaniu rachunku, uzyskamy wynik:

$$\operatorname{tg} \alpha_1' \operatorname{tg} \alpha_2' = -1.$$

To dowodzi, że dwa dwukierunki, α_1' i $\pi + \alpha_1'$ oraz α_2' i $\pi + \alpha_2'$, na powierzchni obrazu są również prostopadłe do siebie:

$$\alpha_1' = \pi/2 + \alpha_2',$$

$$\pi + \alpha_1' = \pi + (\pi/2 + \alpha_2') = 3\pi/2 + \alpha_2'.$$

Powyższy wynik sformułujemy jako

Drugie twierdzenie o ekstremach skali: Dwa dwukierunki na powierzchni obrazu, które odpowiadają dwóm prostopadłym do siebie dwukierunkom na powierzchni oryginału dla których zachodzą ekstrema skali — są także prostopadłe do siebie.

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = \\
 &= \frac{[E' \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{EG - F^2}] \cdot}{[E' (\sqrt{E' G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha') + E' F \operatorname{tg} \alpha'] \cdot} \\
 & \quad \cdot [E (-\operatorname{ctg} \alpha') \sqrt{EG - F^2}] = \\
 &= \frac{(-1) E'^2 \cdot}{E (E' G' - F'^2) - (E' F - E F')^2 +} \\
 & \quad \cdot (EG - F^2)}{+ [(E' F - E F') E' \sqrt{E' G' - F'^2}] (\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{ctg} \alpha')} .
 \end{aligned}$$

Zważywszy, że

$$(\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{ctg} \alpha') = -\frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha'},$$

i że chodzi nam nie o dowolne dwa prostopadłe do siebie kierunki, ale o te, dla których zachodzą ekstrema skali, musimy uwzględnić warunek:

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{2Q'}{P'-R'} = \frac{2(E' F - E F') \sqrt{E' G' - F'^2}}{E' E' G' - 2E' F'^2 + 2E' F F' - E'^2 G'}.$$

Wtedy, po wykonaniu rachunku, uzyskamy wynik:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1.$$

To dowodzi, że dwa dwukierunki, α_1 i $\pi + \alpha_1$ oraz α_2 i $\pi + \alpha_2$, na powierzchni oryginału są również prostopadłe do siebie:

$$\alpha_1 = \pi/2 + \alpha_2,$$

$$\pi + \alpha_1 = \pi + (\pi/2 + \alpha_2) = 3\pi/2 + \alpha_2.$$

Powyższy wynik sformułujemy jako

Drugie twierdzenie o ekstremach skali: Dwa dwukierunki na powierzchni oryginału, które odpowiadają dwóm prostopadłym do siebie dwukierunkom na powierzchni obrazu dla których zachodzą ekstrema skali — są także prostopadłe do siebie.

Widzimy więc, że dla dwukierunków o ekstremalnych wartościach skali ¹⁾, prostopadłość zostaje zachowana (jest niezmiennikiem odwzorowania), niezależnie od natury obu powierzchni i rodzaju ich odwzorowania.

Inny, nieco prostszy i krótszy dowód tego twierdzenia podany jest w Przypisie 4.

Zwróćmy na koniec uwagę, że wskutek przyjętej przez nas zasady dualizmu (Nr 2), zestawiamy twierdzenia równolegle, dla powierzchni oryginału i obrazu. Przy tej metodzie traktowania teorii odwzorowań, drugie twierdzenie o ekstremach skali mogłoby być zbędne, gdyż dwoiste pierwsze twierdzenie wykazuje, że ekstrema skali zachodzą dla pary dwukierunków prostopadłych do siebie na powierzchni oryginału i dla pary dwukierunków prostopadłych do siebie na powierzchni obrazu. Obie te pary prostopadłych do siebie dwukierunków muszą być *odpowiadającymi sobie*, ponieważ skala dotyczy odpowiadających sobie elementów liniowych na obu powierzchniach. Stąd drugie twierdzenie o ekstremach tkwi, w gruncie rzeczy, w obu częściach pierwszego twierdzenia o ekstremach. Gdybyśmy jednak porzucili zasadę dualizmu i wybrali jedną spośród dwu dróg postępowania, drugie twierdzenie o ekstremach nie mogłoby być pominięte. Na tę ewentualność podaliśmy więc niezależnie to twierdzenie.

c) Trzecie, ogólne twierdzenie o ekstremach skali.

Twierdzenie to wynika z zestawienia ze sobą dwóch twierdzeń: pierwszego twierdzenia Tissot'a o siatkach ortogonalnych (Nr 24) i drugiego twierdzenia o ekstremach skali.

Według twierdzenia Tissot'a, w każdym regularnym odwzorowaniu (wyjąwszy odwzorowania konforemne) jednej powierzchni na drugą, istnieje zawsze jedna i tylko jedna para siatek, zachowujących ortogonalność. Drugie twierdzenie o ekstremach skali mówi, że dla pary dwukierunków o ekstremalnych skalach, prostopadłość jest ich zasadniczą cechą, zarówno na powierzchni oryginału, jak i na powierzchni obrazu. Łącząc oba te twierdzenia uzyskujemy

Trzecie, ogólne twierdzenie o ekstremach skali: Ekstremalne wartości skali zachodzą w kierunkach głównych, a więc wzdłuż krzywych głównych odwzorowania.

Jest to bardzo ważny wynik naszych badań. Siatka krzywych głównych daje bowiem, na obu powierzchniach, odpowiadające sobie linie i kierunki, dla których skala osiąga swe ekstremalne wartości. Fakt, że dla jednego z prostopadłych do siebie dwukierunków mamy maksimum, a dla drugiego minimum skali (1. twierdzenie o ekstremach, Nr 27 a), daje powód do odróżnienia na obu powierzchniach jednej rodziny krzywych głównych, dla których skale są maksymalne, od drugiej rodziny krzywych głównych, dla których skale są minimalne.

¹⁾ Na każdym dwukierunku skala jest jednakowa w obu zwrotach, (Nr 26 b).

Zwykle rodzinę krzywych głównych o skalach maksymalnych nazywamy *pierwszą rodziną krzywych głównych*, a każdą poszczególną krzywą tej rodziny — *pierwszą krzywą główną*; a jeśli rozważamy dwukierunek — *pierwszą styczną główną*; zaś rodzinę krzywych głównych o skalach minimalnych nazywamy *drugą rodziną krzywych głównych*, a każdą poszczególną krzywą tej rodziny — *drugą krzywą główną*, i — odpowiednio — *drugą styczną główną*. Można też je nazywać krótko: krzywe główne maksymalne i krzywe główne minimalne.

d) Własności siatki krzywych głównych.

Streścimy krótko własności siatki krzywych głównych, zanalizowane w twierdzeniu Tissot'a (Nr 24) i w twierdzeniach o ekstremach skali (Nr 27).

Dla odwzorowań niekonforemnych:

1. siatka krzywych głównych istnieje;
2. jest ortogonalna na powierzchni oryginału;
3. jest ortogonalna na powierzchni obrazu;
4. jest jedyną siatką ortogonalną, która, w danym odwzorowaniu, przetwarza się na ortogonalną;

5. daje linie i dwukierunki o ekstremalnych wartościach skali, mianowicie: pierwszą rodzinę krzywych głównych, o maksymalnych wartościach skali i drugą rodzinę krzywych głównych, o minimalnych wartościach skali; tym samym daje też linie o ekstremalnych zniekształceniach liniowych;

6. wskutek istnienia niezmiennika skali (Nr 26 c) dla dowolnych prostopadłych do siebie kierunków, suma kwadratów maksymalnej i minimalnej skali daje wartość tego niezmiennika dla danego punktu powierzchni.

Dla odwzorowań konforemnych:

1. nie ma siatki krzywych głównych;
2. każda siatka ortogonalna przechodzi w siatkę ortogonalną;
3. nie ma ekstremów skali; skala jest dla każdego poszczególnego punktu stała, i nie zależy od kierunku, zmienia się natomiast na ogół od punktu do punktu.

28. Wartości ekstremalne skali

a) Znalezienie ekstremalnych wartości skali.

Różne mogą być drogi do znalezienia ekstremalnych wartości skali. Powszechną analityczną metodą znajdowania wartości ekstremów funkcji

$$m^2(u, v, \alpha) = P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha, \quad \left| \quad \frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha', \right.$$

w zależności od kąta kierunkowego α elementu liniowego ds na powierzchni oryginału, jest podstawienie do powyższego wzoru *tych* wartości na kąt α , dla których pierwsza pochodna funkcji znika, a więc

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2Q}{P-R},$$

i obliczenie odpowiadających wartości skali m , które będą poszukiwanymi wartościami ekstremalnymi. W tym celu należy obliczyć wartości $\cos^2 \alpha_e$, $\sin 2\alpha_e$, $\sin^2 \alpha_e$ na podstawie znajomości $\operatorname{tg} 2\alpha_e$.

Najlepiej sprowadzić wszystkie funkcje trygonometryczne kąta α_e do kąta $2\alpha_e$:

$$\cos^2 \alpha_e = \frac{1 + \cos 2\alpha_e}{2},$$

$$\sin^2 \alpha_e = \frac{1 - \cos 2\alpha_e}{2},$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha_e &= \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_e}} \\ &= \sqrt{\frac{(P-R)^2}{(P-R)^2 + 4Q^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha_e &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha_e}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_e}} \\ &= \sqrt{\frac{4Q^2}{(P-R)^2 + 4Q^2}}. \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrażenia w równanie na m^2 , otrzymamy:

w zależności od kąta kierunkowego α' elementu liniowego dS na powierzchni obrazu, jest podstawienie do powyższego wzoru *tych* wartości na kąt α' , dla których pierwsza pochodna funkcji znika, a więc

$$\operatorname{tg} 2\alpha'_e = \frac{2Q'}{P'-R'},$$

i obliczenie odpowiadających wartości skali $1/m$, które będą poszukiwanymi wartościami ekstremalnymi. W tym celu należy obliczyć wartości $\cos^2 \alpha'_e$, $\sin 2\alpha'_e$, $\sin^2 \alpha'_e$ na podstawie znajomości $\operatorname{tg} 2\alpha'_e$.

Najlepiej sprowadzić wszystkie funkcje trygonometryczne kąta α'_e do kąta $2\alpha'_e$:

$$\cos^2 \alpha'_e = \frac{1 + \cos 2\alpha'_e}{2},$$

$$\sin^2 \alpha'_e = \frac{1 - \cos 2\alpha'_e}{2},$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha'_e &= \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha'_e}} \\ &= \sqrt{\frac{(P'-R')^2}{(P'-R')^2 + 4Q'^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha'_e &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha'_e}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha'_e}} \\ &= \sqrt{\frac{4Q'^2}{(P'-R')^2 + 4Q'^2}}. \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrażenia w równanie na $1/m^2$, otrzymamy:

$$m^2(u, v, \alpha_e) = P \frac{1 \pm \cos 2 \alpha_e}{2} \pm$$

$$\pm Q \sin 2 \alpha_e + R \frac{1 \mp \cos 2 \alpha_e}{2} ;$$

górne znaki dotyczą kąta α_e albo $(\pi + \alpha_e)$, zaś dolne — kąta $(\pi/2 + \alpha_e)$ albo $(3\pi/2 + \alpha_e)$;

$$m^2(u, v, \alpha_e) =$$

$$= \frac{1}{2} P \left(1 \pm \sqrt{\frac{(P-R)^2}{(P-R)^2 + 4 Q^2}} \right) \pm$$

$$\pm Q \sqrt{\frac{4 Q^2}{(P-R)^2 + 4 Q^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2} R \left(1 \mp \sqrt{\frac{(P-R)^2}{(P-R)^2 + 4 Q^2}} \right).$$

Po wykonaniu rachunku, otrzymamy:

$$m^2(u, v, \alpha_e) =$$

$$= \frac{1}{2} [(P+R) \pm \sqrt{(P-R)^2 + 4 Q^2}].$$

Jeśli, jak zwykle, oznaczymy maksymalną wartość skali w rozważanym punkcie przez a , zaś minimalną przez b , mamy:

$$a^2 = \frac{1}{2} [(P+R) + \sqrt{(P-R)^2 + 4 Q^2}],$$

$$b^2 = \frac{1}{2} [(P+R) - \sqrt{(P-R)^2 + 4 Q^2}],$$

oraz:

$$a^2 + b^2 = P + R,$$

jako niezmiennik skali.

Również mamy

$$a^2 b^2 = P R - Q^2.$$

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = P' \frac{1 \pm \cos 2 \alpha_e'}{2} \pm$$

$$\pm Q' \sin 2 \alpha_e' + R' \frac{1 \mp \cos 2 \alpha_e'}{2} ;$$

górne znaki dotyczą kąta α_e' albo $(\pi + \alpha_e')$, zaś dolne — kąta $(\pi/2 + \alpha_e')$ albo $(3\pi/2 + \alpha_e')$;

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha_e')} =$$

$$= \frac{1}{2} P' \left(1 \pm \sqrt{\frac{(P'-R')^2}{(P'-R')^2 + 4 Q'^2}} \right) \pm$$

$$\pm Q' \sqrt{\frac{4 Q'^2}{(P'-R')^2 + 4 Q'^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2} R' \left(1 \mp \sqrt{\frac{(P'-R')^2}{(P'-R')^2 + 4 Q'^2}} \right).$$

Po wykonaniu rachunku, otrzymamy:

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha_e')} =$$

$$= \frac{1}{2} [(P'+R') \pm \sqrt{(P'-R')^2 + 4 Q'^2}].$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} [(P'+R') - \sqrt{(P'-R')^2 + 4 Q'^2}],$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{2} [(P'+R') + \sqrt{(P'-R')^2 + 4 Q'^2}],$$

oraz:

$$1/a^2 + 1/b^2 = P' + R',$$

jako niezmiennik skali.

Również mamy

$$1/a^2 b^2 = P' R' - Q'^2.$$

Chcąc znaleźć same wartości a i b , możemy postąpić jak następuje:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab \\ &= (P+R) + 2\sqrt{PR-Q^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a^2 + b^2) - 2ab \\ &= (P+R) - 2\sqrt{PR-Q^2},\end{aligned}$$

skąd:

$$a = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P+R) + 2\sqrt{PR-Q^2}} + \sqrt{(P+R) - 2\sqrt{PR-Q^2}} \right],$$

$$b = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P+R) + 2\sqrt{PR-Q^2}} - \sqrt{(P+R) - 2\sqrt{PR-Q^2}} \right].$$

Chcąc znaleźć same wartości $1/a$ i $1/b$, możemy postąpić jak następuje:

$$\begin{aligned}(1/a + 1/b)^2 &= (1/a^2 + 1/b^2) + 2/ab \\ &= (P'+R') + 2\sqrt{P'R'-Q'^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1/a - 1/b)^2 &= (1/a^2 + 1/b^2) - 2/ab \\ &= (P'+R') - 2\sqrt{P'R'-Q'^2},\end{aligned}$$

skąd¹⁾:

$$\begin{aligned}1/a &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1/b &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} \right],\end{aligned}$$

oraz:

$$a = 2 \left[\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} - \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} \right]^{-1},$$

$$b = 2 \left[\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} + \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} \right]^{-1}.$$

Inną, bezpośrednią i prostszą metodę znalezienia ekstremalnych wartości skali, podaje Przypis 5.

Uproszczenia, wynikające z przyjęcia siatki krzywych głównych za siatkę parametrową, podaje Nr 37.

Powyższe bezpośrednio obliczenie ekstremalnych wartości skali: maksymalnej a i minimalnej b , jest dość skomplikowane. W Nr. 30 będzie podana najprostsza, chociaż pośrednia, droga obliczenia tych wartości, na mocy związków pomiędzy skalami ekstremalnymi a , b i skalami parametrowymi m_u , m_v , oraz kątami parametrowymi θ i θ' , w rozważanej parze odpowiadających sobie punktów na obu powierzchniach.

¹⁾ Przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego otrzymujemy:

$$1/a + 1/b = \pm \sqrt{\dots}, \quad 1/a - 1/b = \pm \sqrt{\dots};$$

ponieważ a i b są zawsze dodatnie i $a > b$, to przy pierwszym pierwiastku musimy wziąć znak plus, przy drugim znak minus.

b) Suma kwadratów zniekształceń liniowych ekstremalnych w punkcie powierzchni.

Dla późniejszych rozważań będzie potrzebna funkcja:

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2,$$

czyli suma kwadratów zniekształceń ekstremalnych elementu liniowego dS na powierzchni obrazu, wywołanych procesem odwzorowawczym, w jakimś punkcie (u, v) powierzchni; albo inaczej, suma kwadratów zniekształceń liniowych elementarnych w obu głównych kierunkach, w rozważanym punkcie powierzchni.

Mamy:

$$\begin{aligned} (a - 1)^2 + (b - 1)^2 &= 2 + (a^2 + b^2) - 2(a + b) \\ &= 2 + (P + R) - 2\sqrt{(P + R) + 2\sqrt{PR - Q^2}} \quad \left| \quad = 2 + \frac{P' + R'}{P'R' - Q'^2} - 2\sqrt{\frac{(P' + R') + 2\sqrt{P'R' - Q'^2}}{P'R' - Q'^2}} \right. \end{aligned}$$

c) Warunki konforemności oraz równopowierzchniowości odwzorowania, wyrażone za pomocą skal ekstremalnych, czyli skal w kierunkach głównych.

Twierdzenie 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym konforemności odwzorowania jednej powierzchni na drugą jest

$$a = b$$

w każdym punkcie powierzchni.

Istotnie, dowiedzimy, że warunek ten jest koniecznym następstwem konforemności. Załóżmy, że odwzorowanie jest konforemne, czyli

$$P = R \text{ i } Q = 0.$$

Uwzględniając to we wzorach na skale ekstremalne a i b , otrzymujemy:

$$a = \sqrt{P} \quad (\text{albo} = \sqrt{R}),$$

$$b = \sqrt{P} \quad (\text{albo} = \sqrt{R}),$$

a więc

$$a = b.$$

$$P' = R' \text{ i } Q' = 0.$$

Uwzględniając to we wzorach na skale ekstremalne $1/a$ i $1/b$, otrzymujemy:

$$1/a = \sqrt{P'} \quad (\text{albo} = \sqrt{R'}),$$

$$1/b = \sqrt{P'} \quad (\text{albo} = \sqrt{R'}),$$

a więc $1/a = 1/b$ oraz

$$a = b.$$

Łatwo również wykazać, że warunek ten jest także i wystarczający dla konforemności odwzorowania. W samej rzeczy z równości

$$\begin{aligned} & a = b \\ \text{mamy} & \\ & a^2 = b^2, \\ \text{oraz} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(P+R) + \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2}] = \\ & = \frac{1}{2} [(P+R) - \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2}], \\ & \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2} = 0, \end{aligned}$$

co jest możliwe tylko wówczas,
gdy

$$P = R \text{ i } Q = 0,$$

a to dowodzi konforemności
odwzorowania.

$$\begin{aligned} & 1/a = 1/b \\ \text{mamy} & \\ & 1/a^2 = 1/b^2, \\ \text{oraz} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(P'+R') - \sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2}] = \\ & = \frac{1}{2} [(P'+R') + \sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2}], \\ & \sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2} = 0, \end{aligned}$$

co jest możliwe tylko wówczas,
gdy

$$P' = R' \text{ i } Q' = 0,$$

a to dowodzi konforemności
odwzorowania.

Twierdzenie 2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równopowierzchniowości odwzorowania jest:

$$ab = 1$$

w każdym punkcie powierzchni.

Warunek ten jest konieczny, to znaczy wynika jako konieczne następstwo równopowierzchniowości odwzorowania. Istotnie, jeśli

$$E'G' - F'^2 = EG - F^2,$$

$$\begin{aligned} & \text{to} \\ & PR - Q^2 = \frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2} = 1, \text{ (Nr 26 f),} \\ & \text{co daje} \end{aligned}$$

$$ab = \sqrt{PR - Q^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} & \text{to} \\ & P'R' - Q'^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} = 1, \text{ (Nr 26 f),} \\ & \text{co daje} \end{aligned}$$

$$ab = \frac{1}{\sqrt{P'R' - Q'^2}} = 1.$$

Warunek ten jest także i wystarczający dla równopowierzchniowości odwzorowania. Istotnie, jeśli $ab = 1$ to

$$ab = \sqrt{PR - Q^2} = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2}} = 1,$$

skąd

$$E'G' - F'^2 = EG - F^2,$$

$$ab = \frac{1}{\sqrt{P'R' - Q'^2}} = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2}} = 1,$$

skąd

$$E'G' - F'^2 = EG - F^2,$$

a to dowodzi równopowierzchniowości odwzorowania.

d) Zestaw wzorów dla skal ekstremalnych.

$$a^2 = \frac{1}{2} [(P+R) + \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2}],$$

$$b^2 = \frac{1}{2} [(P+R) - \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2}],$$

$$a^2 + b^2 = P + R,$$

$$a^2 - b^2 = \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2},$$

$$ab = \sqrt{PR - Q^2},$$

$$(a+b)^2 = (P+R) + 2\sqrt{PR - Q^2},$$

$$(a-b)^2 = (P+R) - 2\sqrt{PR - Q^2},$$

$$a = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P+R) + 2\sqrt{PR - Q^2}} + \sqrt{(P+R) - 2\sqrt{PR - Q^2}} \right],$$

$$b = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P+R) + 2\sqrt{PR - Q^2}} - \sqrt{(P+R) - 2\sqrt{PR - Q^2}} \right],$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \sqrt{\frac{(P+R) - 2\sqrt{PR - Q^2}}{(P+R) + 2\sqrt{PR - Q^2}}},$$

$$(P+R)^2 - 4(PR - Q^2) = (P-R)^2 + 4Q^2,$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 =$$

$$= 2 + (P+R) - 2\sqrt{(P+R) + 2\sqrt{PR - Q^2}}.$$

$$1/a^2 = \frac{1}{2} [(P'+R') - \sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2}],$$

$$1/b^2 = \frac{1}{2} [(P'+R') + \sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2}],$$

$$1/a^2 + 1/b^2 = P' + R',$$

$$1/a^2 - 1/b^2 = -\sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2},$$

$$1/ab = \sqrt{P'R' - Q'^2},$$

$$(1/a + 1/b)^2 = (P' + R') + 2\sqrt{P'R' - Q'^2},$$

$$(1/a - 1/b)^2 = (P' + R') - 2\sqrt{P'R' - Q'^2},$$

$$1/a = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R' - Q'^2}} - \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R' - Q'^2}} \right],$$

$$1/b = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R' - Q'^2}} + \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R' - Q'^2}} \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= -\frac{1/a - 1/b}{1/a + 1/b} \\ &= \sqrt{\frac{(P'+R') - 2\sqrt{P'R' - Q'^2}}{(P'+R') + 2\sqrt{P'R' - Q'^2}}}, \end{aligned}$$

$$(P' + R')^2 - 4(P'R' - Q'^2) = (P' - R')^2 + 4Q'^2,$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 =$$

$$= 2 + \frac{P'+R'}{P'R' - Q'^2} - 2\sqrt{\frac{(P'+R') + 2\sqrt{P'R' - Q'^2}}{P'R' - Q'^2}}.$$

29. Linie równościowe¹⁾

Skala jest funkcją *ciągłą* trzech zmiennych. Na powierzchni oryginału i obrazu będą przeto istniały pary odpowiadających sobie linii wzdłuż których skala, dla każdej pary, będzie miała stałą wartość. Linie jednakowych skal, a tym samym i jednakowych zniekształceń liniowych, będziemy nazywali *izoskalami*²⁾.

W szczególności będą nas interesowały izoskale o wartości 1, czyli linie o zerowym zniekształceniu liniowym.

¹⁾ Automekoiczne — według Tissot'a.

²⁾ Nazywane są one także *izokolami*, lub *ekwideformatami*.

Odwzorowanie nieizometryczne nigdy nie jest równodługościowe, nie wyklucza to jednak możliwości istnienia niektórych linii, a nawet całej rodziny linii, zachowujących długości (Nr 20 b).

Izoskale jednostkowe znajdziemy w następujący sposób.

a) Wzdłuż izoskali jednostkowej, dla każdego jej punktu, jest $m = 1$. Uwzględniając to we wzorze na skalę, otrzymujemy:

$$\begin{array}{l|l} m^2(u, v, \alpha) = P \cos^2 \alpha + & 1/m^2(u, v, \alpha') = P' \cos^2 \alpha' + \\ + Q \sin^2 \alpha + R \sin^2 \alpha = 1; & + Q' \sin^2 \alpha' + R' \sin^2 \alpha' = 1; \\ \text{a pisząc } (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \text{ zamiast} & \text{a pisząc } (\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha') \text{ zamiast} \\ \text{jedności,} & \text{jedności,} \\ (P-1) + 2Q \operatorname{tg} \alpha + (R-1) \operatorname{tg}^2 \alpha = 0. & (P'-1) + 2Q' \operatorname{tg} \alpha' + (R'-1) \operatorname{tg}^2 \alpha' = 0. \end{array}$$

Jest to równanie kwadratowe względem tangensa kąta kierunkowego, które daje możność wyznaczenia kątów kierunkowych linii, odtwarzających się bez zniekształceń liniowych, w rozważanym punkcie powierzchni (o ile linie takie w danym odwzorowaniu w ogóle istnieją).

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy:

$$\begin{array}{l|l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - (P-1)(R-1)}}{R-1} & \operatorname{tg} \alpha' = \frac{-Q' \pm \sqrt{Q'^2 - (P'-1)(R'-1)}}{R'-1} \\ = \frac{-Q \pm \sqrt{(P+R)-1-(PR-Q^2)}}{R-1} & = \frac{-Q' \pm \sqrt{(P'+R')-1-(P'R'-Q'^2)}}{R'-1} \end{array}$$

Według ogólnej teorii powierzchni, równanie różniczkowe dowolnej linii na powierzchni wyraża się, jak wiadomo, wzorem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F}; \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{(dv/du) \sqrt{E'G' - F'^2}}{E' + (dv/du) F'};$$

uwzględniając w tym równaniu warunek na kąt kierunkowy, znaleziony powyżej dla izoskal jednostkowych, uzyskujemy równanie różniczkowe linii odtwarzających się bez zniekształceń liniowych na powierzchni

oryginału:

$$\begin{aligned} \frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F} &= \\ &= \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - (P-1)(R-1)}}{R-1}. \end{aligned}$$

obrazu:

$$\begin{aligned} \frac{(dv/du) \sqrt{E'G' - F'^2}}{E' + (dv/du) F'} &= \\ &= \frac{-Q' \pm \sqrt{Q'^2 - (P'-1)(R'-1)}}{R'-1}. \end{aligned}$$

b) Według wzorów Nr. 36 b, możemy także wyrazić tangens kąta kierunkowego, dla którego skala jest równa jedności, za pomocą skal ekstremalnych a i b w kierunkach głównych:

$$\begin{aligned} m^2(u, v, \alpha) &= \\ &= a^2 \cos^2(\alpha - \alpha_e) + b^2 \sin^2(\alpha - \alpha_e), \\ 1 &= a^2 \cos^2(\alpha - \alpha_e) + b^2 \sin^2(\alpha - \alpha_e), \\ \sin^2(\alpha - \alpha_e) + \cos^2(\alpha - \alpha_e) &= \\ &= a^2 \cos^2(\alpha - \alpha_e) + b^2 \sin^2(\alpha - \alpha_e), \\ \sin^2(\alpha - \alpha_e)(1 - b^2) &= \\ &= \cos^2(\alpha - \alpha_e)(a^2 - 1), \end{aligned}$$

skąd:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_e) = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{1 - b^2}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} &= \\ &= (1/a^2) \cos^2(\alpha' - \alpha_e') + (1/b^2) \sin^2(\alpha' - \alpha_e'), \\ 1 &= (1/a^2) \cos^2(\alpha' - \alpha_e') + (1/b^2) \sin^2(\alpha' - \alpha_e'), \\ \sin^2(\alpha' - \alpha_e')(1 - 1/b^2) &= \\ &= \cos^2(\alpha' - \alpha_e')(1/a^2 - 1), \end{aligned}$$

skąd:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha_e') = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 - a^2}{b^2 - 1}}.$$

Równanie różniczkowe linii równodługościowych otrzymamy jak następuje:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_e}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_e} = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{1 - b^2}},$$

skąd:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{\frac{a^2 - 1}{1 - b^2}} + \operatorname{tg} \alpha_e}{1 - \operatorname{tg} \alpha_e \sqrt{\frac{a^2 - 1}{1 - b^2}}},$$

$$\begin{aligned} \frac{dv \sqrt{EG - F^2}}{du} &= \\ E + \frac{dv}{du} F &= \\ &= \frac{\sqrt{\frac{a^2 - 1}{1 - b^2}} + \operatorname{tg} \alpha_e}{1 - \operatorname{tg} \alpha_e \sqrt{\frac{a^2 - 1}{1 - b^2}}}. \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha_e'}{1 - \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha_e'} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 - a^2}{b^2 - 1}},$$

skąd:

$$\begin{aligned} \frac{dv \sqrt{E'G' - F'^2}}{du} &= \\ E' + \frac{dv}{du} F' &= \\ &= \frac{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 - a^2}{b^2 - 1}} + \operatorname{tg} \alpha_e'}{1 - \operatorname{tg} \alpha_e' \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 - a^2}{b^2 - 1}}}. \end{aligned}$$

30. Związki między skalami ekstremalnymi i skalami parametrowymi

a) Pierwszy i drugi związek.

Obliczanie skal ekstremalnych wzdłuż krzywych głównych odwzorowania jest dość kłopotliwe, gdyż wyrażają się one skomplikowanymi wzorami (Nr 28 a). Obliczenie skal m_u i m_v (Nr 26 d) wzdłuż linii parametrowych u i v , w punkcie powierzchni, oraz obliczenie kątów parametrowych θ i θ' , jakie tworzą linie parametrowe w odpowiadających sobie punktach na powierzchni oryginału i obrazu, jest stosunkowo nietrudne. Otóż istnieją proste związki między tymi sześcioma wielkościami: a , b , m_u , m_v , θ , θ' , za pomocą których będziemy w stanie obliczyć ekstremalne wartości skal, a i b , w dowolnym punkcie powierzchni, na mocy znajomości skal parametrowych m_u , m_v , oraz kątów parametrowych θ i θ' , na obu powierzchniach w tymże punkcie. Ta pośrednia droga obliczania skali maksymalnej a i minimalnej b jest łatwiejsza i prostsza od podanej poprzednio metody ogólnej.

Związek pierwszy.

Obliczmy wyrażenie

$$ab \sin \theta,$$

zależne od kąta parametrowego θ na powierzchni oryginału. Mamy:

$$\begin{aligned} ab \sin \theta &= \\ &= \sqrt{PR - Q^2} \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} \\ &= \sqrt{PR - Q^2} \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG} \frac{E'G' - F'^2}{E'G' - F'^2}} \\ &= \sqrt{PR - Q^2} \frac{1}{\sqrt{PR - Q^2}} \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{EG - F'^2}} \\ &= \sqrt{\frac{E'}{E}} \sqrt{\frac{G'}{G}} \sqrt{1 - \frac{F'^2}{E'G'}} \\ &= \sqrt{\frac{E'}{E}} \sqrt{\frac{G'}{G}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta'}, \end{aligned}$$

$$ab \sin \theta = m_u m_v \sin \theta'.$$

Związek pierwszy.

Obliczmy wyrażenie

$$(1/ab) \sin \theta',$$

zależne od kąta parametrowego θ' na powierzchni obrazu. Mamy:

$$\begin{aligned} (1/ab) \sin \theta' &= \\ &= \sqrt{P'R' - Q'^2} \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{E'G'}} \\ &= \sqrt{P'R' - Q'^2} \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{EG - F'^2} \frac{EG - F'^2}{E'G'}} \\ &= \sqrt{P'R' - Q'^2} \frac{1}{\sqrt{P'R' - Q'^2}} \sqrt{\frac{EG - F'^2}{E'G' - F'^2}} \\ &= \sqrt{\frac{E}{E'}} \sqrt{\frac{G}{G'}} \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} \\ &= \sqrt{\frac{E}{E'}} \sqrt{\frac{G}{G'}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta}, \end{aligned}$$

$$(1/ab) \sin \theta' = (1/m_u m_v) \sin \theta,$$

$$ab \sin \theta = m_u m_v \sin \theta'.$$

Związek drugi.

Podobnie, obliczmy wyrażenie

$$(a^2 + b^2) \sin^2 \theta.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \sin^2 \theta &= \\ &= (P + R) \frac{EG - F^2}{EG} \\ &= \left(\frac{E'}{E} + \frac{E'F^2 - 2FF'E + G'E^2}{E(EG - F^2)} \right) \frac{EG - F^2}{EG} \\ &= \frac{E'}{E} + \frac{G'E^2 - 2FF'E}{E^2G} \\ &= \frac{E'}{E} + \frac{G'}{G} - 2 \frac{FF'}{EG} \\ &= \frac{E'}{E} + \frac{G'}{G} - 2 \sqrt{\frac{E'}{E}} \sqrt{\frac{G'}{G}} \frac{F}{\sqrt{EG}} \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \sin^2 \theta &= \\ &= m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos \theta \cos \theta'. \end{aligned}$$

Pomiędzy skalami m_u , m_v wzdłuż linii parametrowych u i v , oraz skalami ekstremalnymi a , b wzdłuż linii głównych, mamy więc dwa następujące związki:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \sin^2 \theta &= \\ &= m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos \theta \cos \theta', \\ a b \sin \theta &= m_u m_v \sin \theta', \end{aligned}$$

które również możemy napisać w postaci następującej:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 \sin^2 \theta &= \\ &= m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos (\theta + \theta'), \\ (a - b)^2 \sin^2 \theta &= \\ &= m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos (\theta - \theta'). \end{aligned}$$

Związek drugi.

Podobnie, obliczmy wyrażenie

$$(1/a^2 + 1/b^2) \sin^2 \theta'.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} (1/a^2 + 1/b^2) \sin^2 \theta' &= \\ &= (P' + R') \frac{E'G' - F'^2}{E'G'} \\ &= \left(\frac{E}{E'} + \frac{EF'^2 - 2F'FE' + GE'^2}{E'(E'G' - F'^2)} \right) \frac{E'G' - F'^2}{E'G'} \\ &= \frac{E}{E'} + \frac{GE'^2 - 2F'FE'}{E'^2G'} \\ &= \frac{E}{E'} + \frac{G}{G'} - 2 \frac{F'F}{E'G'} \\ &= \frac{E}{E'} + \frac{G}{G'} - 2 \sqrt{\frac{E}{E'}} \sqrt{\frac{G}{G'}} \frac{F}{\sqrt{EG}} \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}; \end{aligned}$$

$$= 1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2(1/m_u m_v) \cos \theta \cos \theta';$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \sin^2 \theta' &= \\ &= \frac{m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos \theta \cos \theta'}{m_u^2 m_v^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + b^2) \sin^2 \theta'}{m_u^2 m_v^2 (\sin^2 \theta' / \sin^2 \theta)} &= \\ &= \frac{m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos \theta \cos \theta'}{m_u^2 m_v^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \sin^2 \theta &= \\ &= m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos \theta \cos \theta'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1/a^2 + 1/b^2) \sin^2 \theta' &= \\ &= 1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2(1/m_u m_v) \cos \theta \cos \theta', \\ (1/a b) \sin \theta' &= (1/m_u m_v) \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1/a + 1/b)^2 \sin^2 \theta' &= \\ &= 1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2(1/m_u m_v) \cos (\theta + \theta'), \\ (1/a - 1/b)^2 \sin^2 \theta' &= \\ &= 1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2(1/m_u m_v) \cos (\theta - \theta'). \end{aligned}$$

Związki te pozwalają nam obliczyć skale ekstremalne a i b za pomocą skal parametrowych m_u i m_v oraz kątów parametrowych θ i θ' , w następujący sposób:

$$a + b = \left[\frac{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta + \theta')}{\sin^2 \theta} \right]^{1/2},$$

$$a - b = \left[\frac{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta - \theta')}{\sin^2 \theta} \right]^{1/2},$$

skąd:

$$a = \frac{1}{2 \sin \theta} \cdot \left[\sqrt{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta + \theta')} + \sqrt{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta - \theta')} \right],$$

$$b = \frac{1}{2 \sin \theta} \cdot \left[\sqrt{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta + \theta')} - \sqrt{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta - \theta')} \right],$$

oraz

$$\frac{a - b}{a + b} = \sqrt{\frac{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta - \theta')}{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta + \theta')}}.$$

$$1/a + 1/b = \left[\frac{1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2/m_u m_v \cos(\theta + \theta')}{\sin^2 \theta'} \right]^{1/2},$$

$$1/a - 1/b = - \left[\frac{1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2/m_u m_v \cos(\theta - \theta')}{\sin^2 \theta'} \right]^{1/2},$$

skąd:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2 \sin \theta'} \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_v^2} - 2 \frac{1}{m_u m_v} \cos(\theta + \theta')} - \sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_v^2} - 2 \frac{1}{m_u m_v} \cos(\theta - \theta')} \right],$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2 \sin \theta'} \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_v^2} - 2 \frac{1}{m_u m_v} \cos(\theta + \theta')} + \sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_v^2} - 2 \frac{1}{m_u m_v} \cos(\theta - \theta')} \right],$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{a - b}{a + b} &= - \frac{1/a - 1/b}{1/a + 1/b} = \\ &= \sqrt{\frac{1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2/m_u m_v \cos(\theta - \theta')}{1/m_u^2 + 1/m_v^2 - 2/m_u m_v \cos(\theta + \theta')}} \\ &= \sqrt{\frac{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta - \theta')}{m_u^2 + m_v^2 - 2m_u m_v \cos(\theta + \theta')}}. \end{aligned}$$

W odwzorowaniu konforemnym jest $a = b = m_u = m_v$ i $\theta = \theta'$ w każdym punkcie powierzchni.

b) Wniosek 1. Ortogonalność siatki parametrowej na powierzchni oryginału albo na powierzchni obrazu.

Jeśli, w przypadku szczególnym, siatka współrzędnych powierzchniowych na powierzchni *oryginału* jest ortogonalna, wówczas $\Theta = \pi/2$, i związki powyższe uproszczą się do postaci następującej:

$$a^2 + b^2 = m_u^2 + m_o^2,$$

$$ab = m_u m_o \sin \Theta';$$

$$(a+b)^2 = m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta',$$

$$(a-b)^2 = m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta';$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left[\sqrt{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta'} + \sqrt{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta'} \right],$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left[\sqrt{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta'} - \sqrt{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta'} \right];$$

oraz

$$\frac{a-b}{a+b} = \sqrt{\frac{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta'}{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta'}}.$$

$$(1/a^2 + 1/b^2) \sin^2 \Theta' = 1/m_u^2 + 1/m_o^2,$$

$$(1/ab) \sin \Theta' = 1/m_u m_o;$$

$$(1/a + 1/b)^2 \sin^2 \Theta' = 1/m_u^2 + 1/m_o^2 + 2 (1/m_u m_o) \sin \Theta',$$

$$(1/a - 1/b)^2 \sin^2 \Theta' = 1/m_u^2 + 1/m_o^2 - 2 (1/m_u m_o) \sin \Theta';$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2 \sin \Theta'}.$$

$$\cdot \left[\sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} + 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta'} - \sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} - 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta'} \right],$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2 \sin \Theta'}.$$

$$\cdot \left[\sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} + 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta'} + \sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} - 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta'} \right];$$

oraz

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1/a - 1/b}{1/a + 1/b} =$$

$$= \sqrt{\frac{1/m_u^2 + 1/m_o^2 - 2(1/m_u m_o) \sin \Theta'}{1/m_u^2 + 1/m_o^2 + 2(1/m_u m_o) \sin \Theta'}};$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \sqrt{\frac{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta'}{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta'}}.$$

¹⁾ Interpretacja geometryczna tych związków jest podana w Nr. 38 c.

Jeśli, w przypadku szczególnym, siatka współrzędnych powierzchniowych na powierzchni *obrazu* jest ortogonalna, wówczas $\Theta' = \pi/2$, i związki ogólne uproszczą się do postaci następującej:

$$(a^2 + b^2) \sin^2 \Theta = m_u^2 + m_o^2,$$

$$a b \sin \Theta = m_u m_o;$$

$$(a + b)^2 \sin^2 \Theta = m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta,$$

$$(a - b)^2 \sin^2 \Theta = m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta;$$

$$a = \frac{1}{2 \sin \Theta} \left[\sqrt{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta} + \sqrt{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta} \right],$$

$$b = \frac{1}{2 \sin \Theta} \left[\sqrt{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta} - \sqrt{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta} \right];$$

oraz

$$\frac{a - b}{a + b} = \sqrt{\frac{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta}{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta}}.$$

$$1/a^2 + 1/b^2 = 1/m_u^2 + 1/m_o^2,$$

$$1/ab = (1/m_u m_o) \sin \Theta;$$

$$(1/a + 1/b)^2 = 1/m_u^2 + 1/m_o^2 + 2 (1/m_u m_o) \sin \Theta,$$

$$(1/a - 1/b)^2 = 1/m_u^2 + 1/m_o^2 - 2 (1/m_u m_o) \sin \Theta;$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} + 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta} - \sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} - 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta} \right],$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} + 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta} + \sqrt{\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_o^2} - 2 \frac{1}{m_u m_o} \sin \Theta} \right];$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{a - b}{a + b} &= - \frac{1/a - 1/b}{1/a + 1/b} = \\ &= \sqrt{\frac{1/m_u^2 + 1/m_o^2 - 2 (1/m_u m_o) \sin \Theta}{1/m_u^2 + 1/m_o^2 + 2 (1/m_u m_o) \sin \Theta}}, \\ \frac{a - b}{a + b} &= \sqrt{\frac{m_u^2 + m_o^2 - 2 m_u m_o \sin \Theta}{m_u^2 + m_o^2 + 2 m_u m_o \sin \Theta}}. \end{aligned}$$

c) Wniosek 2. Siatka krzywych głównych jest siatką parametrową.

Jeśli, w szczególnym przypadku dalej idącym, siatka parametrowa jest ortogonalna na powierzchni oryginału i równocześnie jej obraz jest siatką parametrową także ortogonalną na powierzchni obrazu, czyli krótko: jeśli siatka krzywych głównych jest obrana za siatkę parametrową, wtedy $\Theta = \pi/2$ i $\Theta' = \pi/2$, a skale parametrowe m_u i m_o stają się skalami ekstremalnymi. Mamy bowiem w tym przypadku:

$$a^2 + b^2 = m_u^2 + m_v^2,$$

$$ab = m_u m_v ;$$

$$(a + b)^2 = (m_u + m_v)^2,$$

$$(a - b)^2 = (m_u - m_v)^2;$$

$$a + b = (m_u + m_v),$$

$$a - b = \pm (m_u - m_v),$$

$$+ \text{ dla } m_u > m_v,$$

$$- \text{ dla } m_u < m_v ;$$

skąd:

$$a = m_u, \quad b = m_v \text{ dla } m_u > m_v,$$

albo

$$a = m_v, \quad b = m_u \text{ dla } m_u < m_v.$$

$$1/a^2 + 1/b^2 = 1/m_u^2 + 1/m_v^2,$$

$$1/ab = 1/m_u m_v ;$$

$$(1/a + 1/b)^2 = (1/m_u + 1/m_v)^2,$$

$$(1/a - 1/b)^2 = (1/m_u - 1/m_v)^2;$$

$$1/a + 1/b = (1/m_u + 1/m_v),$$

$$1/a - 1/b = \pm (1/m_u - 1/m_v),$$

$$+ \text{ dla } m_u > m_v,$$

$$- \text{ dla } m_u < m_v ;$$

skąd:

$$1/a = 1/m_u, \quad 1/b = 1/m_v \text{ dla } m_u > m_v,$$

albo

$$1/a = 1/m_v, \quad 1/b = 1/m_u \text{ dla } m_u < m_v.$$

a jest większą zaś b mniejszą z dwóch liczb m_u , m_v , i może mieć miejsce albo pierwsza, albo druga alternatywa, zależnie od zorientowania linii parametrowych, będących tu krzywymi głównymi, bądź z pierwszą, bądź też z drugą krzywą główną.

ROZDZIAŁ VI

ZNIEKSZTAŁCENIE KĄTÓW I PÓŁ

31. Zniekształcenie kątów

a) Definicja.

Zniekształceniem kąta β' na powierzchni obrazu, na skutek odwzorowania jednej powierzchni na drugą, nazywamy różnicę δ między kątem β na oryginale i odpowiadającym mu kątem β' na obrazie:

$$\delta = \beta - \beta'.$$

Różnica ta może być albo dodatnia, albo ujemna, albo równa zeru, zależnie od tego, czy kąt na obrazie doznaje pomniejszenia, czy powiększenia, czy też wcale nie zmienia swej wielkości.

Definicja ta wymaga paru uwag krytycznych. Zauważmy najpierw, że właściwiej byłoby przyjąć różnicę $\beta' - \beta$ za zniekształcenie kąta β' , a to w myśl ogólnej zasady definiowania zniekształceń metrycznych, jako wielkości wyrażających pewne relacje obrazu do oryginału¹⁾. Oczywiście jest to tylko kwestia znaku, lecz przyjęło się powszechnie określać zniekształcenie kąta β' jako wartość $\beta - \beta'$. Następnie zauważmy dalej, że chcąc zachować jednolitą zasadę, winniśmy raczej brać nie różnicę, lecz stosunek β'/β , i odchyłkę tego stosunku od 1, czyli wielkość $(\beta'/\beta - 1)$, nazywać zniekształceniem kąta β' . Dla kątów praktycznie jest jednak samą różnicę $\beta - \beta'$ (lub słuszniej $\beta' - \beta$) nazwać zniekształceniem kąta β' .

¹⁾ Taka definicja została przyjęta w bardzo wyczerpującym dziele: *Traité des Projections des Cartes Géographiques à l'usage des Cartographes et des Géodésiens* par L. Driencourt et J. Laborde, Paris 1932; 4 tomy.

Na podstawie równości:

$$\beta' = \beta - (\beta - \beta') = \beta - \delta,$$

$$\beta = \beta' + (\beta - \beta') = \beta' + \delta,$$

możemy stwierdzić, że kąt na obrazie (oryginalie) jest zawsze algebraicznie zmniejszony (powiększony) o wartość zniekształcenia, w stosunku do kąta na oryginalie (obrazie).

Każdy kąt na powierzchni może być zawsze wyrażony przez różnicę kątów kierunkowych obu ramion tego kąta:

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \beta' = \alpha_2' - \alpha_1'.$$

Zniekształcenie $(\beta - \beta')$ może więc być wyrażone jak następuje:

$$\begin{aligned} \delta = (\beta - \beta') &= (\alpha_2 - \alpha_1) - (\alpha_2' - \alpha_1') \\ &= (\alpha_2 - \alpha_2') - (\alpha_1 - \alpha_1'), \end{aligned} \quad (31.1)$$

czyli

$$\delta = \omega_2 - \omega_1.$$

Zniekształcenie dowolnego kąta β' redukuje się do różnicy zniekształceń kątów kierunkowych obu ramion tego kąta. Wystarczy więc zająć się badaniem zniekształceń kątowych dla kątów kierunkowych. Zniekształcenie kąta kierunkowego α' oznaczajmy symbolem ω :

$$\omega = \alpha - \alpha'.$$

Ze wzoru (31.1) na zniekształcenie kąta β' wnosimy, że kąt β odtwarza się w równy mu kąt β' (bez zniekształceń) w dwóch przypadkach: albo gdy kąty kierunkowe α_2 i α_1 obu ramion kąta β odtwarzają się na równe im kąty kierunkowe α_2' i α_1' , albo gdy zniekształcenia kątów kierunkowych obu ramion kąta są sobie równe:

$$(\alpha_2 - \alpha_2') = (\alpha_1 - \alpha_1').$$

b) Związek pomiędzy kątem kierunkowym α na powierzchni oryginału i odpowiadającym mu kątem kierunkowym α' na powierzchni obrazu.

Niechaj będą dane dwie powierzchnie i para funkcji odwzorowawczych, czyniąca odwzorowanie pierwszej powierzchni na drugą. Weźmy pod uwagę parę odpowiadających sobie punktów i parę odpowiadających sobie kierunków w tych punktach. Załóżmy, że kierunki te określone są odpowiednio kątami kierunkowymi α i α' , liczonymi, jak zawsze, od kierunkowej linii parametrowej v , zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Według teorii powierzchni mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{(dv/du) \sqrt{E'G' - F'^2}}{E' + (dv/du) F'}.$$

Fakt, że kąty kierunkowe α i α' , na powierzchni oryginału i obrazu, są kątami odpowiadającymi sobie, wyraża się przez to, że w obu równościach występują te same parametry w pochodnej dv/du . Z powyższych równań mamy:

$$\frac{dv}{du} = \frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E'G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'}.$$

Przez zrównanie prawych stron tych wyrażań, otrzymujemy szukany związek między α i α' :

$$\frac{E \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{EG - F^2} - F \operatorname{tg} \alpha} = \frac{E' \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{E'G' - F'^2} - F' \operatorname{tg} \alpha'},$$

który, po łatwych przeróbkach, przyjmie postać:

$\frac{E'}{E} \operatorname{ctg} \alpha =$ $= \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2}} \operatorname{ctg} \alpha' - \frac{E'F - EF}{E\sqrt{EG - F^2}},$ czyli $P \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q. \quad (31.2)$	$\frac{E}{E'} \operatorname{ctg} \alpha' =$ $= \sqrt{\frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2}} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{EF - E'F'}{E'\sqrt{E'G' - F'^2}},$ czyli $P' \operatorname{ctg} \alpha' = \sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q'. \quad (31.2')$
--	---

Wniosek 1. Równość kątów kierunkowych odpowiadających sobie.

Aby kąt kierunkowy na obrazie był równy kątowi kierunkowemu naoryginalu, trzeba, żeby zachodziła równość:

$\operatorname{ctg} \alpha (P - \sqrt{PR - Q^2}) + Q = 0. \quad (31.3)$	$\operatorname{ctg} \alpha' (P' - \sqrt{P'R' - Q'^2}) + Q' = 0. \quad (31.3')$
---	--

Równość ta zachodzi identycznie, to znaczy dla każdego kąta kierunkowego, gdy

$$Q = 0 \text{ i } P = R;$$

$$Q' = 0 \text{ i } P' = R';$$

a więc: albo dla odwzorowania równokątnego (o ile warunki te spełniają się nie tylko dla rozważanego punktu, lecz dla każdego punktu w ogóle), albo dla odwzorowania nierównokątnego, lecz w rozważanym punkcie posiadającego własność zachowania kątów.

Pomijając ten przypadek identycznego spełniania się warunku (31.3), równość ta ma miejsce dla takich kątów kierunkowych, dla których

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha' = -\frac{Q}{P - \sqrt{PR - Q^2}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha' = \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{Q'}{P' - \sqrt{P'R' - Q'^2}}.$$

Kątów takich mamy dwa: α i $(\pi + \alpha)$, albo równe im α' i $(\pi + \alpha')$, które tworzą jeden dwukierunek na powierzchni oryginału i odpowiadający mu dwukierunek (o równym kącie kierunkowym) na powierzchni obrazu.

Z równości prawych stron obu ostatnich równań, mamy też związek:

$$-\frac{Q}{P - \sqrt{PR - Q^2}} = -\frac{Q'}{P' - \sqrt{P'R' - Q'^2}},$$

skąd (zważywszy że $(PR - Q^2)(P'R' - Q'^2) = 1$, oraz $PP' = 1$), otrzymujemy:

$$PR - Q^2 = \frac{Q}{Q'}, \text{ albo też } P'R' - Q'^2 = \frac{Q'}{Q}.$$

Nadmieńmy, że Q i Q' mogą być zerami zawsze tylko jednocześnie, co zresztą potwierdzają ostatnie równości.

Wniosek 2. Wyrażenie związku pomiędzy odpowiadającymi sobie kątami kierunkowymi α i α' za pomocą skal parametrowych m_u i m_v oraz kątów parametrowych θ , θ' .

Jeśli uwzględnimy, że

$$P = m_v^2,$$

$$\sqrt{PR - Q^2} =$$

$$= ab = m_u m_v \frac{\sin \theta'}{\sin \theta},$$

$$Q = \frac{EF' - E'F}{E\sqrt{EG - F^2}} = \frac{EF'/\sqrt{EG - E'F/\sqrt{EG}}}{E\sqrt{1 - F^2/EG}} =$$

$$= \frac{F'/\sqrt{EG} - (F/\sqrt{EG})(E'/E)}{\sqrt{1 - F^2/EG}} =$$

$$= \frac{\sqrt{E'G'/EG}(F'/\sqrt{E'G'}) - (F/\sqrt{EG})(E'/E)}{\sqrt{1 - F^2/EG}} =$$

$$= \frac{m_v m_u \cos \theta' - m_v^2 \cos \theta}{\sin \theta},$$

Jeśli uwzględnimy, że

$$P' = 1/m_v'^2,$$

$$\sqrt{P'R' - Q'^2} = \sqrt{1/(PR - Q^2)} =$$

$$= 1/ab = (1/m_u m_v) \frac{\sin \theta}{\sin \theta'},$$

$$Q' = \frac{E'F - EF'}{E'\sqrt{E'G' - F'^2}} =$$

$$= \frac{F/\sqrt{E'G'} - (F'/\sqrt{E'G'})(E/E')}{\sqrt{1 - F'^2/E'G'}} =$$

$$= \frac{\sqrt{EG'E'G}(F/\sqrt{EG}) - (F'/\sqrt{E'G'})(E/E')}{\sqrt{1 - F'^2/E'G'}} =$$

$$= \frac{(1/m_u m_v) \cos \theta - (1/m_v'^2 \cos \theta')}{\sin \theta'}.$$

i podstawimy te równania do wzoru, otrzymamy:

$$m_v^2 \operatorname{ctg} \alpha = m_o m_u \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \alpha' - \\ - m_v m_u \frac{\cos \theta'}{\sin \theta} + m_v^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

skąd:

$$m_v (\operatorname{ctg} \alpha \sin \theta - \cos \theta) = \\ = m_u (\operatorname{ctg} \alpha' \sin \theta' - \cos \theta'). \quad (31.4)$$

Wniosek 3. Przypadki szczególne dla siatki parametrowej ortogonalnej.

1. Jeśli, w przypadku szczególnym, siatka współrzędnych parametrowych na powierzchni

oryginału

jest ortogonalna, wówczas $F=0$,
i zależność (31.2) między kątami

obrazu

jest ortogonalna, wówczas $F'=0$,
kierunkowymi α i α' wyrazi się

$$\frac{E'}{E} \operatorname{ctg} \alpha = \\ = \sqrt{\frac{E'G' - E'^2}{EG}} \operatorname{ctg} \alpha' - \frac{F'}{\sqrt{EG}}.$$

Podobnie zależność (31.4) dla $\theta = \pi/2$, wyrazi się wzorem:

$$m_v \operatorname{ctg} \alpha = m_u (\operatorname{ctg} \alpha' \sin \theta' - \cos \theta').$$

$$\frac{E}{E'} \operatorname{ctg} \alpha' = \\ = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E'G'}} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{F}{\sqrt{E'G'}}.$$

Podobnie zależność (31.4') dla $\theta' = \pi/2$, wyrazi się wzorem:

$$\frac{1}{m_v} \operatorname{ctg} \alpha' = \frac{1}{m_u} (\operatorname{ctg} \alpha \sin \theta - \cos \theta).$$

2. Jeśli, w przypadku szczególnym dalej idącym, jednocześnie $F=0$ i $F'=0$, czyli obie siatki parametrowe, odpowiadające sobie, są ortogonalne, wówczas $Q=0$ i $Q'=0$, oraz $\theta = \theta' = \pi/2$, a zależność między kątami kierunkowymi α i α' wyrazi się wzorami:

$$P \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{P R} \operatorname{ctg} \alpha',$$

czyli

$$\sqrt{P} \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{R} \operatorname{ctg} \alpha',$$

oraz

$$m_v \operatorname{ctg} \alpha = m_u \operatorname{ctg} \alpha'.$$

$$P' \operatorname{ctg} \alpha' = \sqrt{P' R'} \operatorname{ctg} \alpha,$$

czyli

$$\sqrt{P'} \operatorname{ctg} \alpha' = \sqrt{R'} \operatorname{ctg} \alpha,$$

oraz

$$\frac{1}{m_v} \operatorname{ctg} \alpha' = \frac{1}{m_u} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Jeśli odwzorowanie nie jest równokątne, mamy wówczas do czynienia z siatką krzywych głównych, jako siatką parametrową, i a jest większą, zaś b mniejszą z dwóch liczb m_u i m_v . Wtedy: albo

$$a \operatorname{ctg} \alpha = b \operatorname{ctg} \alpha'; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha', \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha; \quad \text{pierwsza linia główna } a \text{ pokrywa linię } v;$$

albo

$$b \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{ctg} \alpha'; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha', \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha; \quad \text{pierwsza linia główna } a \text{ pokrywa linię } u.$$

W tym ostatnim przypadku, chcąc sprowadzić a do linii v , należy α i α' zastąpić kątami $3\pi/2 + \alpha$ i $3\pi/2 + \alpha'$:

$$b \operatorname{ctg} (3\pi/2 + \alpha) = a \operatorname{ctg} (3\pi/2 + \alpha')$$

lub

$$-b \operatorname{tg} \alpha = -a \operatorname{tg} \alpha' \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha',$$

jak poprzednio.

32. Zniekształcenie kąta kierunkowego

Znamy związek

$$P \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q, \quad \left| \quad P' \operatorname{ctg} \alpha' = \sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q', \right.$$

między kątem kierunkowym α i jego obrazem α' . Interesuje nas jednak nie tyle ten związek, ile różnica $(\alpha - \alpha') = \omega$, którą nazwaliśmy zniekształceniem kąta kierunkowego α' .

Na podstawie własności funkcji trygonometrycznych mamy:

$$\operatorname{tg} (\alpha - \alpha') = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin (\alpha - \alpha')}{\sin (\alpha + \alpha')} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha'}.$$

Związki te pozwolą nam obliczyć tangens albo sinus zniekształcenia kąтового $(\alpha - \alpha')$ dla kąta kierunkowego α' , za pomocą kąta α na oryginale, bądź też za pomocą kąta α' na obrazie, przez podstawienie odpowiedniej wartości na $\operatorname{tg} \alpha'$, bądź na $\operatorname{tg} \alpha$, z zasadniczego związku wyżej podanego.

a) Wzory tangensowe.

W pierwszym przypadku mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q},$$

a podstawiając to do wzoru tangensowego, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}/(P \operatorname{ctg} \alpha + Q)}{1 + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR - Q^2}/(P \operatorname{ctg} \alpha + Q)} \\ &= \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR - Q^2}} \end{aligned} \quad (32.1)$$

W drugim przypadku mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{\sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q},$$

a podstawiając to do wzoru tangensowego, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{P/(\sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q) - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha' P/(\sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q)} \\ &= \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{tg} \alpha' - Q + \operatorname{ctg} \alpha' \sqrt{PR - Q^2}}. \end{aligned} \quad (32.2)$$

b) Wzory sinusowe.

W pierwszym przypadku mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \frac{\sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q}}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q}} \\ &= \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}}{P + Q \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{PR - Q^2}}. \end{aligned} \quad (32.3)$$

W pierwszym przypadku mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{P'}{\sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q'},$$

a podstawiając to do wzoru tangensowego, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - P'/(\sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q')}{1 + \operatorname{tg} \alpha P'/(\sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q')} \\ &= \frac{-P' - Q' \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{tg} \alpha - Q' + \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{P'R' - Q'^2}} \end{aligned} \quad (32.1')$$

W drugim przypadku mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q'},$$

a podstawiając to do wzoru tangensowego, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{\sqrt{P'R' - Q'^2}/(P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q') - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2}/(P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q')} \\ &= \frac{-P' - Q' \operatorname{tg} \alpha' + \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2}}. \end{aligned} \quad (32.2')$$

W pierwszym przypadku mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \frac{P'}{\sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q'}}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{P'}{\sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q'}} \\ &= \frac{-P' - Q' \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' - Q' \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{P'R' - Q'^2}}. \end{aligned} \quad (32.3')$$

W drugim przypadku mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= \\ &= \frac{\frac{P}{\sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q} - \operatorname{tg} \alpha'}{\frac{P}{\sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q} + \operatorname{tg} \alpha'} \\ &= \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{PR - Q^2}}{P - Q \operatorname{tg} \alpha' + \sqrt{PR - Q^2}}. \end{aligned} \quad (32.4)$$

W drugim przypadku mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= \\ &= \frac{\frac{\sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q'} - \operatorname{tg} \alpha'}{\frac{\sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q'} + \operatorname{tg} \alpha'} \\ &= \frac{-P' - Q' \operatorname{tg} \alpha' + \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' + \sqrt{P'R' - Q'^2}}. \end{aligned} \quad (32.4')$$

Ze wzorów tych widzimy, że zniekształcenie kątowe, podobnie jak i zniekształcenie liniowe, jest na ogół funkcją trzech zmiennych: punktu i kierunku.

Łatwo można z tych wzorów wyprowadzić inne, mianowicie

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') \text{ i } \sin(\alpha - \alpha')/\sin(\alpha + \alpha')$$

wyrazić w funkcji składowych parametrów m_u , m_v i kątów parametrycznych θ i θ' ; wystarczy w tym celu we wzory te zamiast $P, Q, \sqrt{PR - Q^2}$ i zamiast $P', Q', \sqrt{P'R' - Q'^2}$ podstawić wyrażenia podane w Nr. 31 b. (Wniosek 2).

c) Wniosek. W przypadku, gdy siatką współrzędnych powierzchniowych będzie siatka krzywych głównych, wówczas $\theta = 0$, $\theta' = 0$, i wzory tangensowe i sinusowe na zniekształcenie kąta kierunkowego znacznie się uproszczą. Otrzymamy wówczas, zachowując tę samą kolejność wzorów:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{P - \sqrt{PR}}{P \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR}} \\ &= \frac{(\sqrt{P} - \sqrt{R}) \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{P} + \operatorname{tg}^2 \alpha \sqrt{R}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{P - \sqrt{PR}}{P \operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha' \sqrt{PR}} \\ &= \frac{(\sqrt{P} - \sqrt{R}) \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{R} + \operatorname{tg}^2 \alpha' \sqrt{P}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= \frac{P - \sqrt{PR}}{P + \sqrt{PR}} \\ &= \frac{\sqrt{P} - \sqrt{R}}{\sqrt{P} + \sqrt{R}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{-P' + \sqrt{P'R'}}{P' \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{P'R'}} \\ &= \frac{(\sqrt{P'} - \sqrt{R'}) \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{P'} \operatorname{tg}^2 \alpha + \sqrt{R'}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{-P' + \sqrt{P'R'}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R'}} \\ &= \frac{(\sqrt{P'} - \sqrt{R'}) \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{P'} + \operatorname{tg}^2 \alpha' \sqrt{R'}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= \frac{-P' + \sqrt{P'R'}}{P' + \sqrt{P'R'}} \\ &= \frac{\sqrt{P'} - \sqrt{R'}}{\sqrt{P'} + \sqrt{R'}}. \end{aligned}$$

Krzywe główne są zarazem liniami maksymalnych i minimalnych zniekształceń liniowych. Możemy mieć dwojakie zorientowanie siatki krzywych głównych, gdy siatka ta jest obrócona za siatkę parametrową, stosownie do tego, czy za linie parametrowe kierunkowe obierzemy krzywe główne maksymalne, czy minimalne. Jeśli umówimy się, że linie główne maksymalne będą liniami kierunkowymi w siatki parametrowej, wówczas

$$a^2 = P, \quad b^2 = R \quad | \quad 1/a^2 = P', \quad 1/b^2 = R'$$

i wzory powyższe możemy napisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha}{a+b \operatorname{tg}^2 \alpha} & \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= -\frac{(1/a - 1/b) \operatorname{tg} \alpha}{(1/a) \operatorname{tg}^2 \alpha + 1/b} \\ &= \frac{(a-b) \sin 2\alpha}{(a+b) + (a-b) \cos 2\alpha}, & &= \frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha}{a+b \operatorname{tg}^2 \alpha}, \\ \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha'}{b+a \operatorname{tg}^2 \alpha'} & \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= -\frac{(1/a - 1/b) \operatorname{tg} \alpha'}{1/a - (1/b) \operatorname{tg}^2 \alpha'} \\ &= \frac{(a-b) \sin 2\alpha'}{(a+b) - (a-b) \cos 2\alpha'}, & &= \frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha'}{b+a \operatorname{tg}^2 \alpha'}, \\ \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= \frac{a-b}{a+b}, & \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} &= -\frac{1/a - 1/b}{1/a + 1/b} = \frac{a-b}{a+b}. \end{aligned}$$

d) Linie równych zniekształceń kątów kierunkowych.

Zniekształcenie kąta kierunkowego α' , które oznaczyliśmy literą $\omega = (\alpha - \alpha')$, jest, podobnie jak i zniekształcenie liniowe, funkcją ciągłą trzech zmiennych: dwóch współrzędnych powierzchniowych, u i v , określających położenie punktu na powierzchni, oraz samego kąta kierunkowego α (lub α'), określającego kierunek. Na powierzchni oryginału i obrazu będą przeto istniały pary odpowiadających sobie linii, wzdłuż których kąty kierunkowe, dla każdej pary, doznają jednakowych zniekształceń.

Linie jednakowych zniekształceń kątów kierunkowych będziemy nazywali *izogonami odwzorowawczymi*¹⁾.

¹⁾ Nazywane są one także *ekwiformatami kątowymi*, lub też *izokolami kątowymi*. Nazwa izogony odwzorowawczej wydaje się najwłaściwsza: jest zgodna z powszechną zasadą nomenklatury dla linii równych wartości jakichś wielkości (np. izobary, izotermy, izoskale, itd.). W naszym przypadku chodzi o *linie równych wartości kątowych* pewnej wielkości; ogólnie używaną nazwą dla takich linii jest nazwa izogony. Dla odróżnienia od izogon magnetycznych uzupełnimy tę główną nazwę dodatkiem wyróżniającym: *odwzorowawcze*.

Równanie różniczkowe izogon odwzorowawczych możemy użyć w następujący sposób.

We wzorach tangensowych (32.1) i (32.2') na zniekształcenie kąta kierunkowego:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega &= \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \\ &= \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR - Q^2}} \quad \left| \quad \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \right. \\ &\quad \left. = \frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2}} \right. \end{aligned}$$

zakładamy dla ω pewną stałą wartość (np. 0 dla izogony zerowej, lub dowolną inną wartość kątową). Wówczas lewa strona równania jest wielkością stałą i znaną. Możemy uporządkować to równanie według $\operatorname{tg} \alpha$ ($\operatorname{tg} \alpha'$):

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}^2 \alpha (\operatorname{tg} \omega \sqrt{PR - Q^2} - Q) + \\ &+ \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \omega Q - P + \sqrt{PR - Q^2}) + \\ &+ P \operatorname{tg} \omega = 0. \quad \left| \quad \operatorname{tg}^2 \alpha' (\operatorname{tg} \omega \sqrt{P'R' - Q'^2} + Q') + \right. \\ &+ \operatorname{tg} \alpha' (\operatorname{tg} \omega Q' + P' - \sqrt{P'R' - Q'^2}) + \\ &+ P' \operatorname{tg} \omega = 0. \end{aligned}$$

Jest to równanie kwadratowe względem tangensa kąta kierunkowego, które daje możliwość określenia kątów kierunkowych doznających zniekształcenia o wartości ω w punkcie powierzchni (o ile w rozważanym punkcie takie kąty w ogóle istnieją).

Rozwiązując to równanie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{-(\operatorname{tg} \omega Q - P + \sqrt{PR - Q^2}) \pm}{2 \cdot} \\ &\pm \frac{\sqrt{(\operatorname{tg} \omega Q - P + \sqrt{PR - Q^2})^2 -}}{(\operatorname{tg} \omega \sqrt{PR - Q^2} - Q) \cdot} \\ &\frac{-4 P \operatorname{tg} \omega (\operatorname{tg} \omega \sqrt{PR - Q^2} - Q)}{1} = \\ &= F_1(E, F, G, E', F', G', \omega). \quad \left| \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{-(\operatorname{tg} \omega Q' + P' - \sqrt{P'R' - Q'^2}) \pm}{2 \cdot} \right. \\ &\pm \frac{\sqrt{(\operatorname{tg} \omega Q' + P' - \sqrt{P'R' - Q'^2})^2 -}}{(\operatorname{tg} \omega \sqrt{P'R' - Q'^2} + Q') \cdot} \\ &\frac{-4 P' \operatorname{tg} \omega (\operatorname{tg} \omega \sqrt{P'R' - Q'^2} + Q')}{1} = \\ &= F_2(E, F, G, E', F', G', \omega). \end{aligned}$$

Według ogólnej teorii powierzchni, równanie różniczkowe dowolnej linii na powierzchni wyraża się, jak wiadomo, wzorem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F}; \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{(dv/du) \sqrt{E'G' - F'^2}}{E' + (dv/du) F'};$$

stąd uzyskujemy równanie różniczkowe izogon odwzorowawczych na powierzchni

oryginału:

$$\frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F} = F_1(E, F, G, E', F', G', \omega).$$

obrazu:

$$\frac{(dv/du) \sqrt{E'G' - F'^2}}{E' + (dv/du) F'} = F_2(E, F, G, E', F', G', \omega).$$

33. Maksymalne zniekształcenie kąta kierunkowego

Ze wzorów:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \\ &= \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR - Q^2}}, \\ \omega = \alpha - \alpha' &= \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR - Q^2}} \right],\end{aligned}$$

widzimy, że wraz ze zmianą kąta kierunkowego zmienia się też jego zniekształcenie ω . Będziemy rozważali zniekształcenie kątowe w dowolnym punkcie (u, v) powierzchni, traktując ω jako funkcję jednej zmiennej α (α'), i zapytujemy o ekstrema tej funkcji.

W tym celu należy obliczyć pierwszą pochodną funkcji względem kąta kierunkowego α (α') i przyrównać tę pochodną do zera.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{d\alpha} &= \frac{1}{1 + [\dots]^2} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{(P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR - Q^2})^2} \cdot \\ &\cdot \{ Q(1/\cos^2 \alpha) (P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha \cdot \\ &\cdot \sqrt{PR - Q^2}) - (P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}) \cdot \\ &\cdot (P(-1/\sin^2 \alpha) + (1/\cos^2 \alpha) \sqrt{PR - Q^2}) \} = 0,\end{aligned}$$

skąd:

$$P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha - \sqrt{PR - Q^2} = 0,$$

czyli

$$m^2(u, v, \alpha_{\max}) = ab. \quad (33.1)$$

Ze wzorów:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \\ &= - \frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2}}, \\ \omega = \alpha - \alpha' &= \\ &= \operatorname{arctg} \left[- \frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2}} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{d\alpha'} &= \frac{1}{1 + [\dots]^2} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{(P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2})^2} \cdot \\ &\cdot \{ -Q'(1/\cos^2 \alpha') (P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha' \cdot \\ &\cdot \sqrt{P'R' - Q'^2}) + (P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{P'R' - Q'^2}) \cdot \\ &\cdot (P'(-1/\sin^2 \alpha') + (1/\cos^2 \alpha') \sqrt{P'R' - Q'^2}) \} = 0,\end{aligned}$$

skąd:

$$P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha' - \sqrt{P'R' - Q'^2} = 0,$$

czyli

$$1/m^2(u, v, \alpha'_{\max}) = 1/ab,$$

$$m^2(u, v, \alpha'_{\max}) = ab. \quad (33.1')$$

Wniosek 1. Dla kierunku, którego kąt kierunkowy $\alpha_{\max}$ ($\alpha'_{\max}$) na powierzchni oryginału (obrazu) doznaje ekstremalnego zniekształcenia, skala jest równa $\sqrt{ab}$.

Wniosek 2. Jeśli $ab = 1$, to $m(u, v, \alpha_{\max}) = 1$, oraz $m(u, v, \alpha'_{\max}) = 1$, stąd: W odwzorowaniu równopowierzchniowym skala wzdłuż kierunku, którego kąt kierunkowy doznaje ekstremalnego zniekształcenia, zostaje zachowana.

Aby obliczyć kąt kierunkowy $\alpha_{\max}$ ($\alpha'_{\max}$) na powierzchni oryginału (obrazu), który doznaje ekstremalnego zniekształcenia, należy rozwiązać, względem tego kąta, następujące równanie:

$$\begin{aligned} P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha - \sqrt{PR - Q^2} &= 0, \\ P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha' - \sqrt{P'R' - Q'^2} &= 0. \end{aligned}$$

Najprościej sprowadzić wszystkie funkcje trygonometryczne do kąta podwójnego:

$$\begin{aligned} &P(1 + \cos 2\alpha)/2 + Q \sin 2\alpha + \\ &+ R(1 - \cos 2\alpha)/2 - \sqrt{PR - Q^2} = 0, \\ &\frac{2Q}{P-R} \sin 2\alpha + \frac{P+R-2\sqrt{PR-Q^2}}{P-R} + \\ &+ \cos 2\alpha = 0. \end{aligned} \quad (33.2)$$

Zważywszy, że:

$$\frac{2Q}{P-R} = \operatorname{tg} 2\alpha_e,$$

$$P+R-2\sqrt{PR-Q^2} = (a-b)^2,$$

$$P-R = (a^2-b^2) \cos 2\alpha_e,$$

mamy:

$$\begin{aligned} (a+b)(\sin 2\alpha \sin 2\alpha_e + \cos 2\alpha \cos 2\alpha_e) = \\ = -(a-b), \end{aligned}$$

oraz

$$\cos 2(\alpha_{\max} - \alpha_e) = -\frac{a-b}{a+b}. \quad (33.3)$$

Stąd:

$$\sin^2(\alpha_{\max} - \alpha_e) = \frac{a}{a+b},$$

$$\cos^2(\alpha_{\max} - \alpha_e) = \frac{b}{a+b},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_{\max} - \alpha_e) = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad (33.4)$$

oraz

skąd

$$\operatorname{tg}(\alpha_{\max} - \alpha_e) \operatorname{tg}(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = \pm 1, \quad (33.5)$$

$$(\alpha_{\max} - \alpha_e) + (\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = \pi/2. \quad (33.6)$$

$$\begin{aligned} &P'(1 + \cos 2\alpha')/2 + Q' \sin 2\alpha' + \\ &+ R'(1 - \cos 2\alpha')/2 - \sqrt{P'R' - Q'^2} = 0, \\ &\frac{2Q'}{P'-R'} \sin 2\alpha' + \frac{P'+R'-2\sqrt{P'R'-Q'^2}}{P'-R'} + \\ &+ \cos 2\alpha' = 0. \end{aligned} \quad (33.2')$$

Zważywszy, że:

$$\frac{2Q'}{P'-R'} = \operatorname{tg} 2\alpha'_e,$$

$$P'+R'-2\sqrt{P'R'-Q'^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2,$$

$$P'-R' = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cos 2\alpha'_e,$$

mamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(\sin 2\alpha' \sin 2\alpha'_e + \cos 2\alpha' \cos 2\alpha'_e) = \\ = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), \end{aligned}$$

oraz

$$\cos 2(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = -\frac{1/a - 1/b}{1/a + 1/b}. \quad (33.3')$$

Stąd:

$$\sin^2(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = \frac{1/a}{1/a + 1/b} = \frac{b}{a+b},$$

$$\cos^2(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = \frac{1/b}{1/a + 1/b} = \frac{a}{a+b},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad (33.4')$$

oraz

Następnie mamy:

$$(\alpha_{\max} - \alpha_e) - (\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = \omega_{\max} - \omega_e; \quad (33.7)$$

ze wzorów (33.6) i 33.7) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} - \alpha_e &= \frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}, \\ \alpha'_{\max} - \alpha'_e &= \frac{\pi}{4} - \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}. \end{aligned} \right\} (33.8)$$

Wreszcie:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_{\max} - \omega_e) &= \sin[(\alpha_{\max} - \alpha_e) - (\alpha'_{\max} - \alpha'_e)] = \\ &= \sin(\alpha_{\max} - \alpha_e) \cos(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) - \cos(\alpha_{\max} - \alpha_e) \sin(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) \\ &= \sqrt{\frac{a}{a+b}} \sqrt{\frac{a}{a+b}} - \sqrt{\frac{b}{a+b}} \sqrt{\frac{b}{a+b}} \\ \sin(\omega_{\max} - \omega_e) &= \frac{a-b}{a+b}, \quad \operatorname{tg}(\omega_{\max} - \omega_e) = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}, \\ \cos(\omega_{\max} - \omega_e) &= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\omega_{\max} - \omega_e) = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \end{aligned} \quad (33.9)$$

Ze wzorów tych widzimy, że maksymalne zniekształcenie kąta kierunkowego jest funkcją tylko punktu powierzchni.

Najbardziej zniekształconym kątem, o wierzchołku w rozważanym punkcie powierzchni (nie będącym kątem kierunkowym), będzie kąt utworzony przez dwa kierunki $+(\alpha_{\max} - \alpha_e)$ i $-(\alpha_{\max} - \alpha_e)$, symetrycznie leżące względem pierwszej stycznej głównej. Obrazem tego kąta będzie kąt równy jego dopełnieniu do π , ponieważ $2(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = \pi - 2(\alpha_{\max} - \alpha_e)$. Maksymalne zniekształcenie kąta w punkcie powierzchni jest więc równe $2(\omega_{\max} - \omega_e)$ i jest dodatnie. Kąt, który tworzy kierunek $(\alpha_{\max} - \alpha_e)$ z kierunkiem $-(\alpha_{\max} - \alpha_e) \pm \pi$, symetrycznym względem drugiej stycznej głównej (przedłużeniem poprzedniej symetrycznej), doznaje, co do wartości bezwzględnej, tego samego zniekształcenia kąтового, lecz o znaku przeciwnym: $-2(\omega_{\max} - \omega_e)$, a więc ma ujemne zniekształcenie kątowe.

W żadnym przypadku maksymalne zniekształcenie kątowe, dodatnie lub ujemne, nie może dotyczyć dwóch kierunków prostopadłych do siebie.

W przypadku, gdy siatka krzywych głównych jest siatką parametrową i gdy linie kierunkowe siatki są obrane wzdłuż rodziny pierwszych krzywych głównych skierowanych, wówczas $\alpha_e = \alpha'_e = 0$ i wszystkie wzory podane powyżej znacznie się uproszczą.

34. Zniekształcenie kątowe jako funkcja kierunku

Przyjmijmy krzywe główne odwzorowania za siatki współrzędnych parametrycznych, odpowiednio na obu powierzchniach, przy czym za linie kierunkowe siatki obierzmy skierowane krzywe główne maksymalne.

Związek (31.2) między kątem kierunkowym α na powierzchnioryginału i odpowiadającym mu kątem kierunkowym α' na powierzchni obrazu, wyrazi się wówczas wzorem:

$$a \operatorname{ctg} \alpha = b \operatorname{ctg} \alpha'.$$

Zauważmy, że gdy za α podstawimy $(\pi/2 - \alpha')$ i jednocześnie za α' podstawimy $(\pi/2 - \alpha)$, to związek ten pozostanie bez zmiany. Zatem: jeśli kąt kierunkowy α na oryginale przechodzi w kąt kierunkowy α' na obrazie, to kąt kierunkowy $(\pi/2 - \alpha')$ na oryginale przechodzi w kąt kierunkowy $(\pi/2 - \alpha)$ na obrazie, i oba te kąty kierunkowe doznają jednakowych zniekształceń kątowych:

$$\omega_1 = \alpha - \alpha',$$

$$\omega_2 = (\pi/2 - \alpha') - (\pi/2 - \alpha) = \alpha - \alpha',$$

a więc $\omega_1 = \omega_2$; stąd:

Twierdzenie 1. Jeżeli dwa kąty kierunkowe w dowolnym punkcie na powierzchni oryginału, liczone od pierwszej stycznej głównej, doznają jednakowych zniekształceń na skutek odwzorowania, to każdy z nich jest uzupełnieniem do $\pi/2$ obrazu drugiego.

Kąt β na powierzchni oryginału, utworzony przez dwa rozważane kierunki: $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha'$ i $\alpha_1 = \alpha$, wyrazi się wzorem:

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1 = (\pi/2 - \alpha') - \alpha.$$

Odpowiadający mu kąt β' na powierzchni obrazu, utworzony przez odpowiadające kierunki: $\alpha_2' = (\pi/2 - \alpha)$ i $\alpha_1' = \alpha'$, wyrazi się jako

$$\beta' = (\alpha_2' - \alpha_1') = (\pi/2 - \alpha) - \alpha'.$$

Widzimy, że oba te kąty są sobie równe: $\beta = \beta'$, a więc kąt β nie doznaje zniekształcenia. Stąd:

Twierdzenie 2. Dla każdego dowolnego kierunku istnieje jeden, i tylko jeden inny kierunek, taki że kąt utworzony przez te dwa kierunki zachowuje się w odwzorowaniu, i jeśli pierwszy kierunek jest α to drugi będzie $(\pi/2 - \alpha')$ [albo, na powierzchni obrazu: jeśli pierwszy jest α' , to drugi będzie $(\pi/2 - \alpha)$].

Wniosek. W szczególności drugi kierunek zlewa się z pierwszym, gdy ten ostatni tworzy kąt kierunkowy $\alpha_{\max}$. Wówczas bowiem mamy:

$\alpha_{\max}$ naoryginale przechodzi na $\alpha'_{\max}$ na obrazie,
 $(\pi/2 - \alpha'_{\max})$ naoryginale przechodzi na $(\pi/2 - \alpha_{\max})$ na obrazie,

$$\alpha_{\max} + \alpha'_{\max} = \pi/2.$$

Stąd:

$$\omega_{1\max} = \alpha_{\max} - \alpha'_{\max},$$

$$\omega_{2\max} = (\pi/2 - \alpha'_{\max}) - (\pi/2 - \alpha_{\max}) = \alpha_{\max} - \alpha'_{\max},$$

$$\omega_{1\max} = \omega_{2\max};$$

oraz:

$$\beta = (\pi/2 - \alpha'_{\max}) - \alpha_{\max} = \pi/2 - (\alpha'_{\max} + \alpha_{\max}) = \pi/2 - \pi/2 = 0,$$

$$\beta' = (\pi/2 - \alpha_{\max}) - \alpha'_{\max} = \pi/2 - (\alpha_{\max} + \alpha'_{\max}) = \pi/2 - \pi/2 = 0.$$

Twierdzenie 3. Dla wszystkich kątów zachowujących się w odwzorowaniu w punkcie powierzchni, iloczyn skal wzdłuż obu ramion każdego kąta jest ten sam i równa się $a \cdot b$.

Weźmy dwa ramiona na powierzchni oryginatu, określone kątami kierunkowymi α_1 i α_2 , liczonymi od pierwszej krzywej głównej w obranym punkcie powierzchni, tworzące kąt $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$. Niechaj na powierzchni obrazu odpowiada mu kąt $\beta' = \alpha'_2 - \alpha'_1$. Załóżmy, że kąt β zachowuje się w odwzorowaniu, a więc $\beta = \beta'$. Wskutek tego, każdy z kątów kierunkowych α_2 i α_1 obu ramion kąta β jest uzupełnieniem do $\pi/2$ obrazu pozostałego kąta kierunkowego:

$$\alpha_2 = \pi/2 - \alpha'_1,$$

$$\alpha_1 = \pi/2 - \alpha'_2.$$

Skale wzdłuż kierunków α_2 i α_1 na powierzchni oryginatu są:

$$m_1^2 = m^2(u, v, \alpha_1) = a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \sin^2 \alpha_1,$$

$$m_2^2 = m^2(u, v, \alpha_2) = a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2,$$

a podstawiając w drugim wzorze $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha'_1$, otrzymamy

$$m_1^2 = a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \sin^2 \alpha_1,$$

$$m_2^2 = a^2 \sin^2 \alpha'_1 + b^2 \cos^2 \alpha'_1.$$

Uwzględnijmy teraz związek między kątami kierunkowymi α_1 i α'_1 :

$$a \operatorname{ctg} \alpha_1 = b \operatorname{ctg} \alpha'_1,$$

skąd $\operatorname{tg} \alpha_1' = (b/a) \operatorname{tg} \alpha_1$; oraz, na mocy własności funkcji trygonometrycznych:

$$\sin^2 \alpha_1' = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1'}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1'} = \frac{[(b/a) \operatorname{tg} \alpha_1]^2}{1 + [(b/a) \operatorname{tg} \alpha_1]^2},$$

$$\cos^2 \alpha_1' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1'} = \frac{1}{1 + [(b/a) \operatorname{tg} \alpha_1]^2}.$$

Podstawiając te wartości do wzoru na skalę i sprowadzając wyrażenia do tego samego kąta α_1 i do funkcji tangens, otrzymamy:

$$m_1^2 = a^2 \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} + b^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1},$$

$$m_2^2 = a^2 \frac{[(b/a) \operatorname{tg} \alpha_1]^2}{1 + [(b/a) \operatorname{tg} \alpha_1]^2} + b^2 \frac{1}{1 + [(b/a) \operatorname{tg} \alpha_1]^2},$$

a po pomnożeniu przez siebie stronami obu tych równań:

$$m_1^2 m_2^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1 + b^2 \operatorname{tg}^4 \alpha_1 + a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1)}{(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)},$$

skąd

$$m_1 m_2 = ab.$$

Wniosek. Ponieważ dla kąta kierunkowego $\alpha_{\max}$ oba kierunki, zachowujące kąt w odwzorowaniu, zlewają się ze sobą, a więc kąt zachowany redukuje się do zera, przeto $m_1 = m_2$. Wobec tego mamy:

$$m^2(u, v, \alpha_{\max}) = ab, \quad m(u, v, \alpha_{\max}) = \sqrt{ab}.$$

Skale wzdłuż dwóch kierunków, których kąt doznaje maksymalnego zniekształcenia, są równe $\sqrt{ab}$.

Wniosek ten można dowieść także bezpośrednio. Mianowicie

$$m^2(u, v, \alpha_{\max}) = a^2 \cos^2 \alpha_{\max} + b^2 \sin^2 \alpha_{\max};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{skąd} \quad \cos^2 \alpha_{\max} = \frac{b}{a+b}, \quad \sin^2 \alpha_{\max} = \frac{a}{a+b};$$

podstawiając te wartości do wzoru na skalę, otrzymamy:

$$m^2(u, v, \alpha_{\max}) = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b} = ab.$$

Jeśli odwzorowanie jest równopowierzchniowe, to $ab = 1$ i $m(u, v, \alpha_{\max}) = 1$, stąd: w odwzorowaniu równopowierzchniowym, skala wzdłuż kierunku, którego kąt kierunkowy, odniesiony do pierwszej stycznej głównej w danym punkcie, doznaje maksymalnego zniekształcenia, zostaje zachowana.

Twierdzenie 4. *Pomiędzy zniekształceniem δ dowolnego kąta prostego, określonego kątem kierunkowym α jednego z jego ramion względem pierwszej stycznej głównej, oraz skalami ekstremalnymi a , b i skalami m_1 , m_2 wzdłuż ramion kąta prostego, zachodzą następujące związki:*

$$\frac{\sin \delta}{(a^2 - b^2) \sin 2\alpha} = \frac{\cos \delta}{2ab} = \frac{1}{2m_1 m_2}.$$

W dowolnym punkcie powierzchni oryginału weźmy dowolny kąt prosty β , określony kierunkami α_1 i $\alpha_2 = \pi/2 + \alpha_1$. Skale $m_1(u, v, \alpha_1)$ i $m_2(u, v, \alpha_2)$ dla tych dwóch prostopadłych do siebie kierunków będą więc następujące:

$$\begin{aligned} m_1^2 &= a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \sin^2 \alpha_1, \\ m_2^2 &= a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1, \end{aligned}$$

a ich iloczyn wyrazi się w formie:

$$\begin{aligned} m_1^2 m_2^2 &= (a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \sin^2 \alpha_1) (a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1) \\ &= \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 (a^4 + b^4) + (\sin^4 \alpha_1 + \cos^4 \alpha_1) a^2 b^2 \\ &= \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 (a^4 + b^4) + (1 - 2 \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_1) a^2 b^2. \end{aligned}$$

Zniekształcenie δ rozważanego kąta prostego β będzie mogło być wyrażone jako różnica zniekształceń kątów kierunkowych obu ramion kąta:

$$\begin{aligned} \delta &= \beta - \beta' = (\alpha_2 - \alpha_1) - (\alpha'_2 - \alpha'_1) \\ &= (\alpha_2 - \alpha'_2) - (\alpha_1 - \alpha'_1) \\ &= \omega_2 - \omega_1. \end{aligned}$$

Z relacji:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega_2 &= \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha'_2) = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \alpha_2}{a + b \operatorname{tg}^2 \alpha_2}, \\ \operatorname{tg} \omega_1 &= \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha'_1) = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \alpha_1}{a + b \operatorname{tg}^2 \alpha_1}, \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= \pi/2, \end{aligned}$$

nie trudno okazać, że

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(a^2 - b^2) \sin 2\alpha_1}{2ab},$$

skąd

$$\frac{\sin \delta}{(a^2 - b^2) \sin 2\alpha_1} = \frac{\cos \delta}{2ab},$$

Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\omega_2 - \omega_1) &= \frac{\operatorname{tg} \omega_2 - \operatorname{tg} \omega_1}{1 + \operatorname{tg} \omega_2 \operatorname{tg} \omega_1} = \frac{\frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha_2}{a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_2} - \frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha_1}{a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}{1 + \frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha_2}{a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_2} \frac{(a-b) \operatorname{tg} \alpha_1}{a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} \\ &= \frac{[(a-b) \operatorname{tg} \alpha_2](a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_1) - [(a-b) \operatorname{tg} \alpha_1](a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_2)}{(a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_2)(a+b \operatorname{tg}^2 \alpha_1) - (a-b) \operatorname{tg} \alpha_2 (a-b) \operatorname{tg} \alpha_1} \\ &= \frac{-(a^2 - b^2)(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_1)}{2ab[1 + \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)]} = \frac{-(a^2 - b^2)(2/\sin 2\alpha_1)}{2ab(-2/\sin^2 2\alpha_1)} \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \sin 2\alpha_1}{2ab}.\end{aligned}$$

Obliczmy teraz $\cos \delta$ na mocy znajomości $\operatorname{tg} \delta$:

$$\cos^2 \delta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 2\alpha_1 (a^2 - b^2)^2}{4a^2 b^2}} = \frac{4a^2 b^2}{4a^2 b^2 + \sin^2 2\alpha_1 (a^2 - b^2)^2}.$$

Następnie:

$$\begin{aligned}\frac{\cos \delta}{2ab} &= \frac{1}{2ab} \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 b^2 + \sin^2 2\alpha_1 (a^2 - b^2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4[\sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 (a^4 + b^4) + a^2 b^2 (1 - 2\sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_1)]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4m_1^2 m_2^2}} = \frac{1}{2m_1 m_2},\end{aligned}$$

i stąd związek:

$$\frac{\sin \delta}{(a^2 - b^2) \sin 2\alpha_1} = \frac{\cos \delta}{2ab} = \frac{1}{2m_1 m_2}.$$

35. Skala pól i zniekształcenie elementarne pól

a) Skala pól (elementów pól).

Stosunek elementu powierzchniowego dP na obrazie do odpowiadającego mu elementu powierzchniowego dp na oryginale zwiemy skalą pól i oznaczamy literą f :

$$f(u, v) = \frac{dP}{dp}.$$

Zgodnie z teorią powierzchni, skalę pól możemy wyrazić jak następuje:

$$f = \frac{dP}{dp} = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2} du dv}{\sqrt{EG - F^2} du dv} = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2}} = \sqrt{PR - Q^2} = ab. \quad (35.1)$$

Skala pól jest funkcją punktu powierzchni, nie zależy od kierunku, co znajduje swój wyraz w tym, że różniczki du, dv , nie występują w wyrażeniu na f .

Wielkość $PR - Q^2$ jest, jak wiemy, zawsze dodatnia; funkcja $f(u, v)$, dająca skalę elementarną pól w rozważanym punkcie powierzchni, jest funkcją rzeczywistą.

Jeśli $f = \text{const.}$ we wszystkich punktach powierzchni, wówczas

$$E'G' - F'^2 = k(EG - F^2),$$

a odwzorowanie jest wiernopowierzchniowe; w szczególności gdy stała $k = 1$ — równopowierzchniowe. Pola wszelkich skończonych obszarów, odpowiadających sobie, będą w stałym do siebie stosunku, w szczególności będą sobie równe.

Równość pól w cząsteczkach pociąga za sobą równość pól w obszarach skończonych, gdyż są one sumą nieskończenie wielu cząsteczek pól; twierdzenie odwrotne nie jest słuszne (Nr 19 c).

Gdy skala główna jest 1:1, skala główna pól jest również 1:1, zaś skala (poszczególne) pól jest $f(u, v)$. Gdy skala główna jest m_0 , czyli $1/N$, skala główna pól jest m_0^2 , czyli $(1/N)^2$, zaś skala (poszczególne) pól jest:

$$f' = f \cdot m_0^2 = f \cdot (1/N)^2.$$

b) Zniekształcenie elementu pola (albo zniekształcenie cząsteczkowe pola).

Skala pól f , liczba zawsze dodatnia i w użytecznych rejonach odwzorowania bliska jedności, może być większa lub mniejsza od jedności, albo równa jedności. *Odchyłkę skali pól f od jedności, która może być liczbą większą albo mniejszą od zera (powiększenie, pomniejszenie) albo równą zeru, nazywamy zniekształceniem powierzchniowym elementarnym* (lub zniekształceniem elementu pola dP):

$$(f - 1) = \frac{dP}{dp} - 1 = \frac{dP - dp}{dp}.$$

Wielkość tę, podobnie jak zniekształcenie liniowe (Nr 25 d), można również wyrazić w procentach albo w promillach, przez pomnożenie liczby $(f - 1)$ odpowiednio przez 100, albo przez 1000.

Gdy skala główna jest 1 : 1, skala główna pól jest również 1 : 1, a zniekształcenie elementu pola jest $(f - 1)$.

Gdy skala główna jest m_0 , czyli $1/N$, wówczas skala główna pól jest m_0^2 , czyli $(1/N)^2$, zaś skala poszczególna pól jest $f' = f \cdot m_0^2$. Zniekształcenie elementarne pól jest wtedy:

$$\left(\frac{f'}{m_0^2} - 1 \right), \text{ czyli, jak poprzednio, } (f - 1).$$

W literaturze naukowej spotykamy następującą terminologię:

— w jęz. angielskim: *ratio of areas* (stosunek pól), *scale of areas* (skala pól); *distortion of area* (dystorsja pola), *alteration of areas* (zmiana pól);

— w jęz. francuskim: *rapport des éléments superficiels* (stosunek elementów powierzchniowych); *altérations de surfaces* (zmiany powierzchni);

— w jęz. niemieckim: *Flächenverhältnis* (stosunek pól); *Flächenverzerrung* (zniekształcenie pól);

— w jęz. rosyjskim: *massztab płoszczadiej* (skala pól); *(otnositielnoje) iskażenije płoszczadiej* (względne zniekształcenie pól).

Niekiedy spotkać można odmienną nieco terminologię pojęciową, mianowicie wielkość $f = dP/dp$ często nazywana jest zniekształceniem pól. Wydaje się słuszniejsze wielkość tę nazywać *skalą pól*, zaś jej odchyłkę od jedności nazywać zniekształceniem elementarnym pól. Tę odmienną pojęciową terminologię spotykamy, między innymi, i w literaturze naukowej polskiej.

c) Linie równych zniekształceń (elementów) pól.

Skala pól jest funkcją ciągłą punktu powierzchni. Na powierzchni oryginału i obrazu będą przeto istniały pary odpowiadających sobie linii, wzdłuż których skala pól, dla każdej pary, będzie miała stałą wartość.

Linie jednakowych skal pól, a tym samym i jednakowych zniekształceń (elementów) pól, będziemy nazywali *izoskalami pól*¹⁾.

W szczególności mogą nas interesować izoskale pól o wartości jeden, czyli linie o zerowym zniekształceniu pól.

Równanie izoskal pól uzyskać można bezpośrednio z definicji skali pól, zakładając na f , kolejno, pewne wartości stałe:

$$f(u, v) = \text{const.}$$

Powyższe równanie daje związek pomiędzy parametrami u, v ; a więc jest równaniem (we współrzędnych parametrowych) linii na powierzchni oryginału, a także (wobec sprowadzenia równań parametrowych powierzchni obrazu do tych samych parametrów u, v) jest równaniem linii na powierzchni obrazu.

¹⁾ Nazywane są one także *ekwideformatami pól*, lub też *izokolami pól* (Nr 29, Nr 32 d).

d) Zależność skali pól i skali liniowej.

Według (33.1), w dowolnym niekonforemnym odwzorowaniu, skala dla kierunku, którego kąt kierunkowy doznaje maksymalnego zniekształcenia, jest równa $\sqrt{ab}$:

$$m^2(u, v, \alpha_{\max}) = m^2(u, v, \alpha'_{\max}) = ab.$$

Skala pól $f(u, v)$, zgodnie z definicją (35.1), jest również równa tej samej wielkości ab .

Stąd:

$$f(u, v) = m^2(u, v, \alpha_{\max}) = m^2(u, v, \alpha'_{\max}); \quad (35.2)$$

kwadrat skali liniowej dla kierunku o maksymalnym zniekształceniu kąta kierunkowego, jest równy skali pól.

Na podstawie wzorów (33.4), (33.4') i wzoru (35.2) możemy zestawić nowe wzory dla obliczenia skal ekstremalnych a i b za pomocą skali pól i kątów $(\alpha_{\max} - \alpha_e)$, $(\alpha'_{\max} - \alpha'_e)$, w następujący sposób:

$$\sqrt{ab} \sqrt{\frac{a}{a+b}} = a \sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

$$m(u, v, \alpha_{\max}) \cos(\alpha'_{\max} - \alpha'_e) = a \cos(\alpha_{\max} - \alpha_e),$$

skąd, na podstawie wzorów (33.8):

$$\begin{aligned} a &= m(u, v, \alpha_{\max}) \frac{\cos(\alpha'_{\max} - \alpha'_e)}{\cos(\alpha_{\max} - \alpha_e)} = m(u, v, \alpha_{\max}) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right)} = \\ &= m(u, v, \alpha_{\max}) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right)}; \end{aligned}$$

lub

$$a = m(u, v, \alpha_{\max}) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right) = \sqrt{f} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right),$$

i podobnie (35.3)

$$b = m(u, v, \alpha_{\max}) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right) = \sqrt{f} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right).$$

Stąd:

$$a + b = 2\sqrt{f} \sec(\omega_{\max} - \omega_e), \quad a - b = 2\sqrt{f} \operatorname{tg}(\omega_{\max} - \omega_e),$$

$$\frac{a - b}{a + b} = \sin(\omega_{\max} - \omega_e). \quad (35.4)$$

e) Wnioski dla odwzorowania równopowierzchniowego.

W przypadku odwzorowania równopowierzchniowego

$$f = ab = 1,$$

wskutek czego wiele wzorów z teorii zniekształceń odpowiednio się uprości. Będziemy mieli:

(Nr 28 d):

$$ab = 1,$$

$$(a+b)^2 = (P+R) + 2,$$

$$(a-b)^2 = (P+R) - 2,$$

$$a = \frac{1}{2}[\sqrt{(P+R)+2} + \sqrt{(P+R)-2}],$$

$$b = \frac{1}{2}[\sqrt{(P+R)+2} - \sqrt{(P+R)-2}],$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \sqrt{\frac{P+R-2}{P+R+2}},$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 =$$

$$= 2 + (P+R) - 2\sqrt{(P+R)+2}.$$

(Nr 31 b):

$$P \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha' - Q.$$

(Nr 32):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - 1}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - 1}{P + Q \operatorname{tg} \alpha + 1}.$$

(Nr 33):

$$m(u, v, \alpha_{\max}) = 1,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_{\max} - \alpha_e) = \pm a = \pm 1/b,$$

(Nr 28 d):

$$1/ab = 1,$$

$$(1/a + 1/b)^2 = (P' + R') + 2,$$

$$(1/a - 1/b)^2 = (P' + R') - 2,$$

$$1/a = \frac{1}{2}[\sqrt{(P'+R')+2} + \sqrt{(P'+R')-2}],$$

$$1/b = \frac{1}{2}[\sqrt{(P'+R')+2} - \sqrt{(P'+R')-2}],$$

$$\frac{a-b}{a+b} = -\frac{1/a - 1/b}{1/a + 1/b} = \sqrt{\frac{P'+R'-2}{P'+R'+2}},$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 =$$

$$= 2 + (P' + R') - 2\sqrt{(P' + R') + 2}.$$

(Nr 31 b):

$$P' \operatorname{ctg} \alpha' = \operatorname{ctg} \alpha - Q'.$$

(Nr 32):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = -\frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - 1}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha'},$$

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = -\frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - 1}{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' + 1}.$$

(Nr 33):

$$m(u, a, \alpha'_{\max}) = 1,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha'_{\max} - \alpha_e) = \pm 1/a = \pm b,$$

$$\sin(\omega_{\max} - \omega_e) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}, \quad \cos(\omega_{\max} - \omega_e) = \frac{2a}{a^2 + 1} = \frac{2b}{b^2 + 1},$$

$$\operatorname{tg}(\omega_{\max} - \omega_e) = \frac{a^2 - 1}{2a} = \frac{1 - b^2}{2b} = \frac{a - b}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right) = \frac{a - 1}{a + 1} = \frac{1 - b}{1 + b}.$$

(Nr 35 d):

$$a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right), \quad b = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2}\right),$$

$$a + b = 2 \sec(\omega_{\max} - \omega_e), \quad a - b = 2 \operatorname{tg}(\omega_{\max} - \omega_e).$$

Również wzory Nr. 30., podające związki pomiędzy wielkościami $a, b, m_u, m_v, \Theta, \Theta'$ odpowiednio się uproszczą, zwłaszcza w przypadku, gdy siatka parametrowa na powierzchni oryginału jest prostokątna ($\Theta = \pi/2$).

ROZDZIAŁ VII

ZNIEKSZTAŁCENIA METRYCZNE JAKO FUNKCJE SKAL I KIERUNKÓW EKSTREMALNYCH. RZUTOWOŚĆ CZĄSTECZKOWA

36. Wyrażenie zniekształceń metrycznych za pomocą skal i kierunków ekstremalnych: $a, b, \alpha_e (\alpha_e')$

Jeżeli, w dowolnym punkcie powierzchni, obliczymy maksymalną a i minimalną b skalę liniową (elementarną) oraz kąt kierunkowy $\alpha_e (\alpha_e')$ kierunku o ekstremalnej skali, jesteśmy w stanie całą teorię zniekształceń znacznie uprościć, i wyrazić wszelkie inne wielkości w tymże punkcie: skalę m w dowolnym kierunku, zniekształcenie $(\alpha - \alpha')$ dowolnego kąta kierunkowego, maksymalne zniekształcenie kąta, oraz skalę pól f , za pomocą wielkości a, b , i $\alpha_e (\alpha_e')$.

W ogólniejszym przypadku, teorię odwzorowawczych zniekształceń metrycznych można oprzeć na wielkościach $m_u, m_v, \theta, \theta'$, związanych z siatką parametrową powierzchni, i wszystkie zniekształcenia metryczne, w dowolnym punkcie powierzchni, wyrazić za pomocą skal parametrowych m_u, m_v i kątów parametrowych θ i θ' w tymże punkcie.

Gdy siatka parametrowa jest zarazem siatką krzywych głównych odwzorowania, obie powyższe metody identyfikują się ze sobą. Wówczas bowiem $\theta = \theta' = \pi/2$, $\alpha_e = \alpha_e' = 0$ i:

$$\text{albo } m_v = a, \quad m_u = b,$$

$$\text{albo } m_v = b, \quad m_u = a,$$

zależnie od obioru pierwszej (maksymalnej), albo drugiej (minimalnej) rodziny krzywych głównych za siatkę kierunkową.

W zastosowaniach praktycznych korzystamy bądź z pierwszej (a, b, α_e) , bądź z drugiej $(m_v, m_u, \theta, \theta')$ z powyższych metod, stosownie do warunków zadania, przy czym z reguły, przy sprzyjających warunkach, korzystamy z metody pierwszej, jako najprostszej.

a) Wyrażenie wielkości P, Q, R , i P', Q', R' , za pomocą wielkości a, b , i $\alpha_e (\alpha_e')$:

W Nr. 28 d mieliśmy następujące związki:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &= P + R, \\ ab &= +\sqrt{PR - Q^2}, \\ a^2 - b^2 &= +\sqrt{(P - R)^2 + 4Q^2}. \end{aligned} \right\} (36.1) \quad \left. \begin{aligned} 1/a^2 + 1/b^2 &= P' + R', \\ 1/a &= +\sqrt{P'R' - Q'^2}, \\ 1/a^2 - 1/b^2 &= -\sqrt{(P' - R')^2 + 4Q'^2}. \end{aligned} \right\} (36.1')$$

Kąty $\alpha_e (\alpha_e')$ na powierzchni oryginału (obrazu), dla których zachodzą ekstrema skali, wyrażają się, jak wiemy (Nr 27 a), wzorem:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2Q}{P - R},$$

skąd

$$2Q = (P - R) \operatorname{tg} 2\alpha_e.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e' = \frac{2Q'}{P' - R'},$$

skąd

$$2Q' = (P' - R') \operatorname{tg} 2\alpha_e'.$$

Podstawiając tę wartość do ostatniego ze wzorów (36.1), otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= \\ &= +\sqrt{(P - R)^2 + \frac{4(P - R)^2 \operatorname{tg}^2 2\alpha_e}{4}} = \\ &= \pm (P - R) / \cos 2\alpha_e, \\ &\quad + \text{ dla } P > R, \\ &\quad - \text{ dla } P < R. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 1/a^2 - 1/b^2 &= \\ &= -\sqrt{(P' - R')^2 + \frac{4(P' - R')^2 \operatorname{tg}^2 2\alpha_e'}{4}} = \\ &= \mp (P' - R') / \cos 2\alpha_e', \\ &\quad - \text{ dla } P' > R', \\ &\quad + \text{ dla } P' < R'. \end{aligned} \right\}$$

Weźmy teraz dwa równania:

$$(a^2 - b^2) \cos 2\alpha_e = \pm (P - R),$$

$$a^2 + b^2 = P + R;$$

$$(1/a^2 - 1/b^2) \cos 2\alpha_e' = \mp (P' - R'),$$

$$1/a^2 + 1/b^2 = P' + R';$$

dodając i odejmując od siebie oba te równania, otrzymujemy:

$$\left. \begin{array}{c|c} \text{dla} & \\ \hline P > R & P < R \\ \hline + & - \\ \hline a^2 \cos^2 \alpha_e + b^2 \sin^2 \alpha_e = P, & = R, \\ a^2 \sin^2 \alpha_e + b^2 \cos^2 \alpha_e = R, & = P. \end{array} \right\} (36.2) \quad \left. \begin{array}{c|c} \text{dla} & \\ \hline P' < R' & P' > R' \\ \hline + & - \\ \hline (1/a^2) \cos^2 \alpha_e' + (1/b^2) \sin^2 \alpha_e' = P', & = R', \\ (1/a^2) \sin^2 \alpha_e' + (1/b^2) \cos^2 \alpha_e' = R', & = P'. \end{array} \right\} (36.2')$$

Wreszcie dla obliczenia wielkości Q i Q' mamy:

$$a^2 - b^2 = + \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2};$$

podstawiając tu

$$P - R = 2Q/\operatorname{tg} 2\alpha_e,$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \\ &= + \sqrt{\frac{4Q^2}{\operatorname{tg}^2 2\alpha_e} + 4Q^2} = \pm 2Q/\sin 2\alpha_e, \\ Q &= \pm (a^2 - b^2) \sin \alpha_e \cos \alpha_e, \quad (36.3) \\ &\quad + \text{ dla } P > R, \\ &\quad - \text{ dla } P < R. \end{aligned}$$

$$1/a^2 - 1/b^2 = - \sqrt{(P' - R')^2 + 4Q'^2};$$

podstawiając tu

$$P' - R' = 2Q'/\operatorname{tg} 2\alpha_e',$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} 1/a^2 - 1/b^2 &= \\ &= - \sqrt{\frac{4Q'^2}{\operatorname{tg}^2 2\alpha_e'} + 4Q'^2} = \mp 2Q'/\sin 2\alpha_e', \\ Q' &= \mp (1/a^2 - 1/b^2) \sin \alpha_e' \cos \alpha_e', \quad (36.3') \\ &\quad - \text{ dla } P' > R', \\ &\quad + \text{ dla } P' < R'. \end{aligned}$$

b) Wyrażenie skali m^2 przez wielkości a , b i α_e (α_e').

Do ogólnego wzoru na skalę:

$$m^2(u, v, \alpha) = P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha, \quad | \quad 1/m^2(u, v, \alpha') = P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha',$$

podstawiamy zamiast $P, Q, R, (P', Q', R')$ wyżej obliczone wartości.

Otrzymamy:

1. w przypadku $P > R$:

$$\begin{aligned} m^2 &= (a^2 \cos^2 \alpha_e + b^2 \sin^2 \alpha_e) \cos^2 \alpha + \\ &\quad + (a^2 - b^2) \sin \alpha_e \cos \alpha_e \sin 2\alpha + \\ &\quad + (a^2 \sin^2 \alpha_e + b^2 \cos^2 \alpha_e) \sin^2 \alpha, \\ m^2(u, v, \alpha) &= a^2 \cos^2(\alpha - \alpha_e) + b^2 \sin^2(\alpha - \alpha_e). \end{aligned}$$

2. w przypadku $P < R$:

$$\begin{aligned} m^2 &= (a^2 \sin^2 \alpha_e + b^2 \cos^2 \alpha_e) \cos^2 \alpha - \\ &\quad - (a^2 - b^2) \sin \alpha_e \cos \alpha_e \sin 2\alpha + \\ &\quad + (a^2 \cos^2 \alpha_e + b^2 \sin^2 \alpha_e) \sin^2 \alpha, \\ m^2(u, v, \alpha) &= a^2 \sin^2(\alpha - \alpha_e) + b^2 \cos^2(\alpha - \alpha_e). \end{aligned}$$

1. w przypadku $P' < R'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2} &= \left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha_e' + \frac{1}{b^2} \sin^2 \alpha_e' \right) \cos^2 \alpha' + \\ &\quad + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \alpha_e' \cos \alpha_e' \sin 2\alpha' + \\ &\quad + \left(\frac{1}{a^2} \sin^2 \alpha_e' + \frac{1}{b^2} \cos^2 \alpha_e' \right) \sin^2 \alpha', \\ \frac{1}{m^2} &= \frac{1}{a^2} \cos^2(\alpha' - \alpha_e') + \frac{1}{b^2} \sin^2(\alpha' - \alpha_e'), \\ m^2(u, v, \alpha') &= \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2(\alpha' - \alpha_e') + b^2 \cos^2(\alpha' - \alpha_e')}. \end{aligned}$$

2. w przypadku $P' > R'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2} &= \left(\frac{1}{a^2} \sin^2 \alpha_e' + \frac{1}{b^2} \cos^2 \alpha_e' \right) \cos^2 \alpha' - \\ &\quad - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \alpha_e' \cos \alpha_e' \sin 2\alpha' + \\ &\quad + \left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha_e' + \frac{1}{b^2} \sin^2 \alpha_e' \right) \sin^2 \alpha', \\ \frac{1}{m^2} &= \frac{1}{a^2} \sin^2(\alpha' - \alpha_e') + \frac{1}{b^2} \cos^2(\alpha' - \alpha_e'), \\ m^2(u, v, \alpha') &= \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2(\alpha' - \alpha_e') + b^2 \sin^2(\alpha' - \alpha_e')}. \end{aligned}$$

Z powyższych wzorów na skalę m^2 otrzymujemy:

dla $\alpha - \alpha_e = 0$:

$$m^2(u, v, \alpha_e) \quad \left| \begin{array}{l} \text{dla } P > R \\ \text{dla } P < R \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} = a^2, \\ \text{albo} = b^2, \end{array} \right.$$

dla $\alpha - \alpha_e = \pi/2$:

$$m^2(u, v, \pi/2 + \alpha_e) = \quad \left| \begin{array}{l} b^2, \\ \text{albo} = a^2, \end{array} \right.$$

Z powyższych wzorów na skalę $1/m^2$ otrzymujemy:

dla $\alpha' - \alpha'_e = 0$:

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha'_e)} = \quad \left| \begin{array}{l} \text{dla } P' < R' \\ \text{dla } P' > R' \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} = \frac{1}{a^2}, \\ \text{albo} = \frac{1}{b^2}, \\ \text{albo} = b^2, \end{array} \right.$$

dla $\alpha' - \alpha'_e = \pi/2$:

$$\frac{1}{m^2(u, v, \pi/2 + \alpha'_e)} = \quad \left| \begin{array}{l} = \frac{1}{b^2}, \\ \text{albo} = \frac{1}{a^2}, \\ \text{albo} = a^2, \end{array} \right.$$

stosownie do tego, czy kierunek α_e (α'_e) dotyczy pierwszej, czy też drugiej stycznej głównej na powierzchni oryginału (obrazu). Kierunki obu tych stycznych różnią się, jak wiadomo, od siebie o $\pi/2$, co zresztą zgodne jest z powyższymi wzorami: dla $\alpha_e = \pi/2 + \alpha'_e$ ($\alpha'_e = \pi/2 + \alpha_e$) wzory pierwszego przypadku przechodzą we wzory drugiego przypadku.

c) Wyrażenie zniekształcenia kąтового za pomocą skal i kierunków ekstremalnych.

1. Związek między odpowiadającymi sobie kątami kierunkowymi α i α' na powierzchni oryginału i obrazu.

Wzór (31.2),

$$P \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha' - Q,$$

Wzór (31.2'),

$$P' \operatorname{ctg} \alpha' = \sqrt{P'R' - Q'^2} \operatorname{ctg} \alpha - Q',$$

przez podstawienie w nim zamiast wielkości $P, Q, R, (P', Q', R')$ wyrażeń Nr. 36 a, oraz zamiast $\sqrt{PR - Q^2}$ wyrażenia $a b$, (zamiast $\sqrt{P'R' - Q'^2}$ wyrażenia $1/a b$), przekształci się w następujący:

w 1. przypadku $P > R$:

$$(a^2 \cos^2 \alpha_e + b^2 \sin^2 \alpha_e) \operatorname{ctg} \alpha = a b \operatorname{ctg} \alpha' - \\ - (a^2 - b^2) \sin \alpha_e \cos \alpha_e,$$

w 1. przypadku $P' < R'$:

$$\left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha'_e + \frac{1}{b^2} \sin^2 \alpha'_e \right) \operatorname{ctg} \alpha' = \frac{1}{a b} \operatorname{ctg} \alpha - \\ - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \alpha'_e \cos \alpha'_e,$$

co można także przedstawić w postaci:

$$(a^2 - b^2) \frac{\cos \alpha_e}{\sin \alpha} \cos (\alpha - \alpha_e) =$$

$$= a b \operatorname{ctg} \alpha' - b^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

w 2. przypadku $P < R$:

$$(a^2 \sin^2 \alpha_e + b^2 \cos^2 \alpha_e) \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$= a b \operatorname{ctg} \alpha' + (a^2 - b^2) \sin \alpha_e \cos \alpha_e,$$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\cos \alpha_e}{\sin \alpha'} \cos (\alpha' - \alpha_e') =$$

$$= \frac{1}{a b} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{b^2} \operatorname{ctg} \alpha'.$$

w 2. przypadku $P' > R'$:

$$\left(\frac{1}{a^2} \sin^2 \alpha_e' + \frac{1}{b^2} \cos^2 \alpha_e' \right) \operatorname{ctg} \alpha' =$$

$$= \frac{1}{a b} \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \alpha_e' \cos \alpha_e',$$

co można także przedstawić w postaci:

$$(a^2 - b^2) \frac{\sin \alpha_e}{\sin \alpha} \sin (\alpha - \alpha_e) =$$

$$= a b \operatorname{ctg} \alpha' - b^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\sin \alpha_e'}{\sin \alpha'} \sin (\alpha' - \alpha_e') =$$

$$= \frac{1}{a b} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{b^2} \operatorname{ctg} \alpha'.$$

2. Zniekształcenie kąta kierunkowego.

Wzór tangensowy (32.1),

$$\operatorname{tg} (\alpha - \alpha') = \frac{(P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}) \operatorname{tg} \alpha}{P + Q \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sqrt{PR - Q^2}},$$

Wzór tangensowy (32.2'),

$$\operatorname{tg} (\alpha - \alpha') = - \frac{(P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{P'R' - Q'^2}) \operatorname{tg} \alpha'}{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg}^2 \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2}},$$

przez podstawienie w nim zamiast $P, Q, \sqrt{PR + Q^2}$, $(P', Q', \sqrt{P'R' - Q'^2})$ odpowiednich wyrażeń, przekształci się w następujący:

$$= \frac{[(a^2 \cos^2 \alpha_e + b^2 \sin^2 \alpha_e) + (a^2 - b^2) \sin \alpha_e \cos \alpha_e \operatorname{tg} \alpha - a b] \operatorname{tg} \alpha}{(a^2 \cos^2 \alpha_e + b^2 \sin^2 \alpha_e) + (a^2 - b^2) \sin \alpha_e \cos \alpha_e \operatorname{tg} \alpha + a b \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$= \frac{\left[(a^2 - b^2) \frac{\cos \alpha_e}{\cos \alpha} \cos (\alpha - \alpha_e) + (a^2 - b^2) \frac{\cos \alpha_e}{\cos \alpha} \cos (\alpha - \alpha_e) + b^2 - a b \right] \operatorname{tg} \alpha}{+ b^2 + a b \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha_e' + \frac{1}{b^2} \sin^2 \alpha_e' \right) + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \alpha_e' \cos \alpha_e' \operatorname{tg} \alpha' - \frac{1}{a b} \right] \operatorname{tg} \alpha'}{\left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha_e' + \frac{1}{b^2} \sin^2 \alpha_e' \right) + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \alpha_e' \cos \alpha_e' \operatorname{tg} \alpha' + \frac{1}{a b} \operatorname{tg}^2 \alpha'}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\cos \alpha_e'}{\cos \alpha'} \cos (\alpha' - \alpha_e') + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\cos \alpha_e'}{\cos \alpha'} \cos (\alpha' - \alpha_e') + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a b} \right] \operatorname{tg} \alpha'}{+ \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a b} \operatorname{tg}^2 \alpha'}$$

Wzór sinusowy (32.3),

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{P R - Q^2}}{P + Q \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{P R - Q^2}},$$

Wzór sinusowy (32.4'),

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = -\frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{P' R' - Q'^2}}{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' + \sqrt{P' R' - Q'^2}},$$

przekształci się odpowiednio w następujący:

$$\frac{(a^2 - b^2) \frac{\cos \alpha_e}{\cos \alpha} \cos(\alpha - \alpha_e) + b^2 - ab}{(a^2 - b^2) \frac{\cos \alpha_e}{\cos \alpha} \cos(\alpha - \alpha_e) + b^2 + ab} = -\frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{\cos \alpha'_e}{\cos \alpha'} \cos(\alpha' - \alpha'_e) + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab}}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{\cos \alpha'_e}{\cos \alpha'} \cos(\alpha' - \alpha'_e) + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}}.$$

Zarówno wzór tangensowy, jak i wzór sinusowy podany został tylko dla przypadku $P > R$ ($P' < R'$).

3. Maksymalne zniekształcenie kątowe.

Wzory Nr. 33. podają wartości maksymalnego zniekształcenia kąta kierunkowego i maksymalnego zniekształcenia kąta w ogóle, w punkcie powierzchni, wyrażone bezpośrednio w funkcji wielkości $a, b, \alpha_e (\alpha'_e)$.

d) Wyrażenie skali pól za pomocą skal ekstremalnych.

Z definicji skal pól (Nr. 35) mamy bezpośrednio:

$$f = ab,$$

co zresztą można sprawdzić także rachunkiem, przez podstawienie wielkości $P, Q, R, (P', Q', R')$ w wyrażenie $\sqrt{P R - Q^2}$ ($\sqrt{P' R' - Q'^2}$).

Wzory Nr. 35 e dla odwzorowania równopowierzchniowego mogą być również łatwo przekształcone w podobny sposób, i wyrażone w funkcji wielkości $a, b, \alpha_e (\alpha'_e)$.

W Przypisie 6. podano wzory dotyczące drugiej, ogólniejszej metody rozwinięcia teorii zniekształceń w funkcji wielkości parametrycznych $m_u, m_v, \Theta, \Theta'$.

37. Przyjęcie siatki krzywych głównych odwzorowania za siatkę współrzędnych powierzchniowych

a) Cel.

W ogólnym zadaniu odwzorowawczym dwóch dowolnych powierzchni na siebie, obieraliśmy z początku dowolne współrzędne krzywoliniowe u, v i U, V na powierzchni oryginału i obrazu, odpowiednio. Nie były to odpowiadające sobie układy siatek współrzędnych powierzchniowych.

Następnie, na skutek akcji funkcyj odwzorowawczych, byliśmy w stanie obrać za siatkę współrzędnych powierzchniowych na obrazie *tę siatkę, która jest obrazem* dowolnie obranej siatki (u, v) na powierzchni oryginału. Wtedy siatki parametryczne na obu powierzchniach będą *odpowiadały sobie* w obranym odwzorowaniu: jedna będzie

obrazem drugiej. Parametrami na powierzchni obrazu nie będą już dowolne parametry U, V nie zrelacjonowane z powierzchnią oryginału, lecz *te same parametry* u, v , co i na powierzchni oryginału. Oczywiście siatki parametrowe, pomimo występowania tych samych parametrów, będą zupełnie różne i odrębne, dotyczą bowiem dwóch różnych powierzchni.

Wiadomo, że od obioru *rodzaju i układu* współrzędnych powierzchniowych zależy, w dużej mierze, dogodność, prostota i łatwość rozwiązywania wielu zadań geometrycznych. Najdogodniejszymi siatkami współrzędnych powierzchniowych w problemie o (niekonforemnym) odwzorowaniu dwóch powierzchni na siebie, będą *siatki krzywych głównych*, w których zadanie odwzorowawcze przedstawia się najprościej. Będą to układy współrzędnych najlepiej, z punktu widzenia teoretycznego, przystosowane do warunków zadania. Wynika to z czterech faktów:

- 1) że są to siatki *odpowiadające* sobie,
- 2) że są to siatki *ortogonalne* na obu powierzchniach,
- 3) że są *jedyną parą* ortogonalnych siatek, w ogóle istniejących w (niekonforemnej) odpowiedniości punktowej dwóch powierzchni (1. twierdzenie Tissota),
- 4) że są liniami *ekstremalnych* wartości skali.

Różne (niekonforemne) odwzorowania tych samych dwóch powierzchni na siebie mają na ogół inne siatki za siatki krzywych głównych. Teoretycznie, zadanie o odwzorowaniu rozwiązuje się i studiuje najprościej we współrzędnych powierzchniowych krzywych głównych. W praktyce siatka krzywych głównych danego odwzorowania, tak ważna dla teorii, nie zawsze stanowi podstawę orientacyjną; często inna siatka, np. geograficzna na powierzchni obrotowej, jest taką podstawą. I tylko w niektórych odwzorowaniach (oczywiście z wyłączeniem konforemnych) siatka geograficzna powierzchni obrotowej, z definicji swej ortogonalna, będzie zarazem siatką krzywych głównych: mianowicie w tych, w których odtwarza się ona ortogonalnie na powierzchni obrazu. Na ogół siatka geograficzna nie musi być siatką krzywych głównych odwzorowania.

Aby zbadać i wystudiować dane odwzorowanie, poznać jego własności metryczne, wady i zalety — krótko: aby poznać teorię danego odwzorowania — trzeba najpierw znaleźć siatki krzywych głównych, a następnie obrać je za siatki parametrowe. W praktyce, dla niektórych prostych grup odwzorowań, zrobić to łatwo: można a priori odgadnąć jaką siatka będzie siatką krzywych głównych odwzorowania. Na ogół znalezienie siatki krzywych głównych jest

dość trudne, nie możemy postępować drogą prób, lub polegać tylko na intuicji, i przekonywać się post factum czy siatki rozwiążane są krzywymi głównymi, czy nie. Musimy raczej rozwiązać zadanie o poszukiwaniu siatki krzywych głównych, w myśl pierwszego twierdzenia Tissota, na podstawie całkowania równania różniczkowego krzywych głównych (Nr 24 b).

b) Uproszczenia w teorii odwzorowań, wynikające z przyjęcia siatek krzywych głównych za siatki współrzędnych krzywoliniowych.

Założmy, że znamy krzywe główne (niekonforemne) odwzorowania jednej powierzchni na drugą, i obierzmy je za siatki parametrowe. Wyprowadzimy konsekwencje takiego założenia.

1. Na skutek *ortogonalności* obu siatek parametrowych, odpowiadających sobie, mamy $F=0$ i $F'=0$. Pociągnie to za sobą cały szereg uproszczeń w teorii odwzorowań, a zwłaszcza w teorii zniekształceń:

$$P = \frac{E'}{E} = m_v^2, Q=0, R = \frac{G'}{G} = m_u^2;$$

$$\Theta = \Theta' = \pi/2;$$

skala:

$$m^2(v, u, \alpha) = P \cos^2 \alpha + R \sin^2 \alpha,$$

$$= m_v^2 \cos^2 \alpha + m_u^2 \sin^2 \alpha;$$

zależność kątów kierunkowych:

$$P \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{P R} \operatorname{ctg} \alpha',$$

$$m_v \operatorname{ctg} \alpha = m_u \operatorname{ctg} \alpha';$$

zniekształcenie kątów:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \frac{(P - \sqrt{P R}) \operatorname{tg} \alpha}{P + \operatorname{tg}^2 \alpha \sqrt{P R}}$$

$$= \frac{(m_v - m_u) \operatorname{tg} \alpha}{m_v + m_u \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(m_v - m_u) \sin 2 \alpha}{(m_v + m_u) + (m_v - m_u) \cos 2 \alpha},$$

$$P' = \frac{E}{E'} = \frac{1}{m_v^2}, Q'=0, R' = \frac{G}{G'} = \frac{1}{m_u^2};$$

$$\Theta' = \Theta = \pi/2;$$

skala:

$$\frac{1}{m^2(u, v, \alpha')} = P' \cos^2 \alpha' + R' \sin^2 \alpha',$$

$$= \frac{1}{m_v^2} \cos^2 \alpha' + \frac{1}{m_u^2} \sin^2 \alpha';$$

zależność kątów kierunkowych:

$$P' \operatorname{ctg} \alpha' = \sqrt{P' R'} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{1}{m_v} \operatorname{ctg} \alpha' = \frac{1}{m_u} \operatorname{ctg} \alpha;$$

zniekształcenie kątów:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = - \frac{(P' - \sqrt{P' R'}) \operatorname{tg} \alpha'}{P' + \operatorname{tg}^2 \alpha' \sqrt{P' R'}}$$

$$= - \frac{\left(\frac{1}{m_v} - \frac{1}{m_u} \right) \operatorname{tg} \alpha'}{\frac{1}{m_v} + \frac{1}{m_u} \operatorname{tg}^2 \alpha'} =$$

$$= - \frac{\left(\frac{1}{m_v} - \frac{1}{m_u} \right) \sin 2 \alpha'}{\left(\frac{1}{m_v} + \frac{1}{m_u} \right) + \left(\frac{1}{m_v} - \frac{1}{m_u} \right) \cos 2 \alpha'}.$$

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{P - \sqrt{PR}}{P + \sqrt{PR}}$$

$$= \frac{m_v - m_u}{m_v + m_u};$$

skala pól:

$$f = \sqrt{PR} = m_v m_u.$$

(37.1)

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{P' - \sqrt{P'R'}}{P' + \sqrt{P'R'}}$$

$$= -\frac{\frac{1}{m_v} - \frac{1}{m_u}}{\frac{1}{m_v} + \frac{1}{m_u}};$$

skala pól:

$$f = \sqrt{\frac{1}{P'R'}} = \frac{1}{1/m_v m_u} = m_v m_u.$$

(37.1')

2. Na skutek faktu, że wzdłuż krzywych głównych zachodzą *ekstrema skali*: maksimum wzdłuż rodziny *pierwszych*, minimum wzdłuż rodziny *drugich* krzywych głównych. Przyjmując krzywe główne za siatki parametrowe na obu powierzchniach, musimy jedną z dwóch rodzin krzywych głównych, dla każdej powierzchni, obrać za linię parametrowe kierunkowe $v = \text{const.}$, pozostałą rodzinę krzywych głównych — za linie parametrowe $u = \text{const.}$ Oczywiście wybór jest dowolny i może być dwojaki, gdyż dla jednej rodziny mamy maksimum, dla innej minimum skali. Musimy się zdecydować na zorientowanie wzajemne tych dwóch okoliczności; umówimy się więc, że za *linie parametrowe kierunkowe* $v = \text{const.}$ *obierzemy krzywe główne maksymalne*. To założenie daje:

$$\left. \begin{aligned} P &= m_v^2 = a^2, & R &= m_u^2 = b^2, \\ P' &= 1/m_v^2 = 1/a^2, & R' &= 1/m_u^2 = 1/b^2, \\ \alpha_e &= \alpha_e' = 0. \end{aligned} \right\} (37.2)$$

Odpowiednio do tych wartości, wzory poprzednie uproszczą się jeszcze bardziej. Ekstrema skali zachodzą wówczas dla kierunków $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ na powierzchni oryginału (przy czym dla 0 i π mamy maksimum, dla $\pi/2$ i $3\pi/2$ minimum skali) i dla odpowiadających im, równych poprzednim, kierunków $\alpha' = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ na powierzchni obrazu.

Wiele wniosków, związanych z przyjęciem krzywych głównych za siatki parametrowe, podano, w stosownych miejscach, w trakcie rozwijania teorii odwzorowań (Nr 26 e, 2; Nr 30 c; Nr 31 b, wniosek 3; Nr 32 c; Nr 34).

38. Drugie twierdzenie Tissota, czyli ogólne prawo odwzorowawcze

a) Twierdzenie i jego znaczenie.

Drugie twierdzenie Tissota dotyczy *cząsteczkowej struktury* odwzorowania i stanowi najważniejsze twierdzenie całej teorii odwzorowań. Streszcza ono i koncentruje w sobie cały proces odwzorowawczy, a przez to i całą teorię zniekształceń metrycznych, która może być zbudowana na podstawie tego twierdzenia, dając, w sposób prostszy i, dzięki interpretacji geometrycznej, bardziej poglądowy, te same wyniki, jakie uzyskaliśmy bezpośrednio na drodze analizy matematycznej. Wnika ono w sam mechanizm procesu odwzorowawczego w pojedynczym punkcie powierzchni i daje pewne ogólne prawo, rządzące wszelkim odwzorowaniem jakichkolwiek dwóch powierzchni na siebie.

Twierdzenie. W każdym regularnym odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą, struktura obrazu polega na pokrewieństwie cząsteczkowym.

Twierdzenie to zwie się również *ogólnym prawem odwzorowawczym*¹⁾.

Ponieważ pokrewieństwo jest *rzutowością*, mianowicie jej szczególnym przypadkiem, przeto *struktura cząsteczkowa wszelkiego regularnego odwzorowania dwóch dowolnych powierzchni na siebie jest rzutowa, czyli projekcyjna*. To do pewnego stopnia usprawiedliwia nazywanie wszelkich odwzorowań rzutami, czyli projekcjami. Jednakże rzutowość cząsteczkowa nie pociąga za sobą na ogół rzutowości w obszarach skończonych, i ten fakt przemawia za odrzuceniem terminu rzut na rzecz ogólniejszej nazwy — odwzorowanie. Nazwę rzut należy ograniczyć do jej właściwej i skromniejszej roli: rzutowości obszarów skończonych dwóch powierzchni. Rzutowość w obszarach skończonych pociąga za sobą także i ich rzutowość cząsteczkową, lecz twierdzenie odwrotne nie jest na ogół słuszne (Nr 4 c i Nr 7).

Szczególnym przypadkiem pokrewieństwa cząsteczkowego jest *podobieństwo cząsteczkowe*; odwzorowanie na siebie dwóch powierzchni, oparte na takiej szczególnej strukturze cząsteczkowej, jest, jak wiemy (Nr 18 c), *konforemne*.

Fakt zauważony przez Tissota: pokrewieństwo cząsteczkowe obrazu i oryginału, w każdym odwzorowaniu dwóch powierzchni na siebie, stanowi znakomite ujęcie i zobrazowanie struktury obrazu.

¹⁾ W języku francuskim: *loi de déformation*; w języku niemieckim: *allgemeine Abbildungsgesetz*.

Tissot sformułował twierdzenie w inny nieco sposób, podając „prawo deformacji”, które nie zależy ani od natury obu powierzchni, ani od sposobu ich odwzorowania: *wszelkie odwzorowanie jednej powierzchni na drugą może być zastąpione, w otoczeniu każdego punktu, przez projekcję ortogonalną, uczynioną w stosownej skali*. Dla każdego punktu powierzchni, z nielicznymi wyjątkami, istnieje szczególna płaszczyzna na którą rzutujemy prostokątnie otoczenie rozważanego punktu, i szczególny czynnik (skala), który warunkuje wielkość zrzutowanej cząsteczki.

b) Wskaźnica Tissota ¹⁾.

Założmy, że dane są dwie powierzchnie:

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v), & X &= F_1(U, V), \\ y &= f_2(u, v), & Y &= F_2(U, V), \\ z &= f_3(u, v), & Z &= F_3(U, V), \end{aligned} \quad (38.1)$$

oraz para funkcji odwzorowawczych:

$$\begin{aligned} U &= \psi_1(u, v), \\ V &= \psi_2(u, v), \end{aligned} \quad (38.2)$$

czyniąca odwzorowanie pierwszej powierzchni na drugą.

Weźmy punkt (u, v) na powierzchni oryginału i odpowiadający mu punkt (U, V) na powierzchni obrazu. Z punktu (u, v) , jako ze środka, zatoczmy na powierzchni oryginału koło geodezyjne infinitesimalne o promieniu ds . W odpowiadającym mu punkcie (U, V) na powierzchni II, obrazem tego koła będzie jakaś linia krzywa, którą nazywamy (krzywą) *przekształconą*.

Także i cząsteczka kołowa na oryginale, utworzona przez rozważane koło infinitesimalne, przeobrazi się w jakąś odpowiadającą jej cząsteczkę na powierzchni obrazu, ograniczoną odpowiadającą krzywą *przekształconą*.

Wykażemy teraz, że słuszne jest następujące

Twierdzenie. *Krzywa przekształcona koła elementarnego jest na ogół zawsze elipsą, niezależnie od rodzaju obu powierzchni i ich odwzorowania. W odwzorowaniu konforemnym jest kołem.*

¹⁾ Również: *elipsa wyznaczająca Tissota*. W języku angielskim: *indicatrix*; w jęz. francuskim: *Indicatrice de Tissot*; w jęz. niemieckim: *Verzerrungsellipse* (elipsa zniekształceń); w jęz. rosyjskim: *ukazatielnica, indikatrissa Tisso, ellips iskażenij* (elipsa zniekształceń).

Dowód. Element liniowy, w punkcie (u, v) na powierzchni oryginału, jest

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (38.3)$$

dla każdej dowolnej linii przechodzącej przez ten punkt na tej powierzchni. Dla różnych linii w tym punkcie element liniowy będzie oczywiście różny, zależnie od rodzaju linii. Weźmy wszystkie linie geodezyjne powierzchni, przechodzące przez rozważany punkt, i odłożymy na każdej z nich stałą wartość długości łuku, $ds = \text{const.}$: utworzymy elementarne koło geodezyjne w punkcie (u, v) , jako środka, na powierzchni oryginału. Związek (38.3) będzie wówczas równaniem tego koła elementarnego. Kiedy przechodzimy od punktu (u, v) do dowolnego innego punktu na obwodzie tego koła, współrzędne parametrowe u, v punktu doznają przyrostów du, dv , związanych ze sobą relacją (38.3), w której E, F, G są wielkościami stałymi dla obranego punktu.

Koło (38.3) poddajemy teraz przekształceniu odwzorowawczemu (38.2), celem uzyskania jego obrazu na powierzchni II. Przyrosty dU, dV , jakich doznaje odpowiadający punkt (U, V) na powierzchni obrazu, dane są za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} dU &= U_u du + U_v dv, \\ dV &= V_u du + V_v dv; \end{aligned} \quad J = \begin{vmatrix} U_u & U_v \\ V_u & V_v \end{vmatrix}; \quad (38.4)$$

w których znaczki dolne oznaczają pochodne cząstkowe funkcji odwzorowawczych.

Równanie krzywej przekształconej na powierzchni obrazu uzyskamy z równania koła elementarnego (38.3) powierzchni oryginału, eliminując du, dv z równań (38.3) i (38.4). W tym celu wyznaczmy wielkości du, dv z równań przekształcenia (38.4), i podstawimy je do równania koła (36.3).

$$\begin{aligned} J du &= -U_v dV + V_v dU, \\ J dv &= U_u dV - V_u dU, \end{aligned} \quad (38.5)$$

$$\begin{aligned} J^2 ds^2 &= E(-U_v dV + V_v dU)^2 + \\ &+ 2F(-U_v dV + V_v dU)(U_u dV - V_u dU) + G(U_u dV - V_u dU)^2, \end{aligned}$$

a po wykonaniu działań i uporządkowaniu względem dU, dV ,

$$\begin{aligned} dU^2(EV_v^2 - 2FV_vV_u + GV_u^2) - 2dUdV[EU_vV_v - F(U_uV_v + U_vV_u) + GU_uV_u] + \\ + dV^2(EU_u^2 - 2FU_uU_v + GU_v^2) = J^2 ds^2, \end{aligned}$$

czyli

$$A dU^2 - 2 B dU dV + C dV^2 - ds^2 = 0, \quad (38.6)$$

gdzie, dla uproszczenia, oznaczyliśmy:

$$\begin{aligned} A &= J^{-2}(E V_v^2 - 2 F V_v V_u + G V_u^2), \\ B &= J^{-2}[E U_v V_v - F(U_u V_v + U_v V_u) + G U_u V_u], \\ C &= J^{-2}(E U_v^2 - 2 F U_v U_u + G U_u^2). \end{aligned} \quad (38.7)$$

Formę kwadratową dodatnią (38.3), która przyrównana do wartości $ds^2 = \text{constans}$, przedstawia równanie koła elementarnego w punkcie (u, v) powierzchni oryginału, poddaliśmy *liniowemu przekształceniu* (38.4). Takie przekształcenie nie zmienia, jak wiadomo, stopnia równania, i otrzymaliśmy rezultat (38.6), który jest równaniem stopnia również *drugiego*.

Funkcje E, F, G, U, V, J , a zatem także i funkcje A, B, C są znanymi funkcjami zmiennych u, v , gdy powierzchnia oryginału i funkcje odwzorowawcze są dane. Są to funkcje punktu powierzchni, i w obranym punkcie są wielkościami stałymi. Jeśli więc U i V weźmiemy jako bieżące współrzędne punktu, równanie (38.6) przedstawia na powierzchni obrazu figurę elementarną, w którą przekształciło się koło elementarne w rozważanym punkcie. Jest więc równaniem krzywej przekształconej.

Równanie krzywej przekształconej (38.6) przedstawia, jak widać, jakąś *stożkową*, odniesioną do jej środka. Zbadajmy jaka to jest stożkowa. W tym celu obliczmy wyróżnik Δ formy kwadratowej występującej po lewej stronie równania.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} A & -B \\ -B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \\ &= J^{-4}(E V_v^2 - 2 F V_v V_u + G V_u^2)(E U_v^2 - 2 F U_v U_u + G U_u^2) - \\ &\quad - [J^{-2}(E U_v V_v - F(U_u V_v + U_v V_u) + G U_u V_u)]^2 \\ &= J^{-4}\{E G J^2 - F^2[-4 U_v U_u V_v V_u + (U_u V_v + U_v V_u)^2]\} \\ &= J^{-4}\{E G J^2 - F^2 J^2\} \\ &= J^{-2}(E G - F^2). \end{aligned} \quad (38.8)$$

Wielkość $EG - F^2$ jest, jak wiadomo, zawsze dodatnia; wielkość J^{-2} , jako potęga parzystego stopnia, jest również zawsze dodatnia. Wyróżnik formy kwadratowej (38.6) jest więc zawsze dodatni:

$$\Delta = AC - B^2 = J^{-2}(EG - F^2) > 0;$$

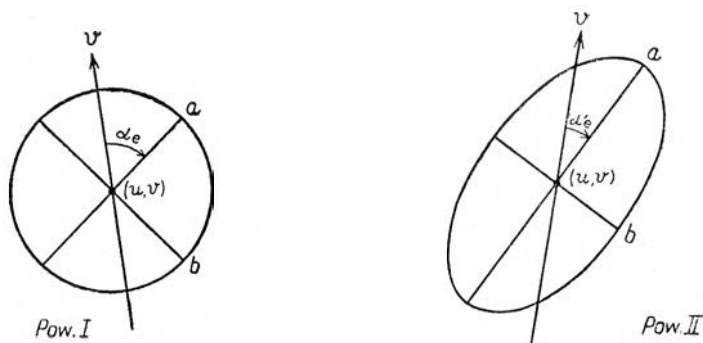
stożkowa, przedstawiająca krzywą przekształconą, jest na ogół *elipsą*, niezależnie od rodzaju powierzchni obrazu (która zresztą wcale nie wchodziła w analityczne rozważanie) i od rodzaju odwzorowania. Jest to następstwem faktu, że *każde przekształcenie za pomocą funkcji z ciągłymi pierwszymi pochodnymi jest w cząsteczkach przekształceniem rzutowym*, ponieważ równania przekształcenia (38.4) są liniowe względem różniczek du, dv , (Nr 4 c).

Jeśli podzielimy obie strony równania (38.6) przez ds^2 , lub, co na jedno wychodzi, przyjmiemy promień ds koła elementarnego za *jednostkę długości*, krzywa przekształcona, która przedstawia w układzie ukośnokątnym na płaszczyźnie stycznej do powierzchni obrazu, elipsę, będącą obrazem tego koła, będzie miała rozmiary wyrażone liczbami skończonymi. Krzywa ta, według wyrażenia Tissota, stanowi „rodzaj wskaźnicy sposobu odwzorowania w rozważanym punkcie” (une sorte d'indicatrice du mode de projection au point considere). Będziemy ją nazywali *wskaźnicą Tissota*.

Definicja. *Wskaźnicą Tissota* w punkcie (U, V) na powierzchni obrazu nazywamy *elipsę* (w odwz. konforemnym *koło*), *będącą obrazem koła elementarnego o promieniu 1*, w odpowiadającym mu punkcie (u, v) na powierzchni oryginału. Jest to więc powiększony obraz infinitezymalnej elipsy (38.6), która jest krzywą przekształconą infinitezymalnego koła (38.3).

Taką koncepcję i nazwę wprowadził A. Tissot i ogłosił w r. 1859, najpierw w formie krótkiej wzmianki w memuarze *Sur les cartes géographiques*, w tomie XLIX, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*; a następnie w r. 1878 i 1881, w formie bardziej rozpracowanej, w *Nouvelles Annales de Mathématique*, t. XVII oraz w dziele *Mémoire sur la représentation des surfaces*.

c) Wzajemna relacja pomiędzy kołem cząsteczkowym i elipsą Tissota.



Rys. 4

Niechaj:

punktowi (u, v) na powierzchni oryginału odpowiada punkt (u, v) na powierzchni obrazu;

linii parametrowej kierunkowej v w tym punkcie na powierzchni I, odpowiada linia parametrowa v na powierzchni II;

kierunkom głównym na powierzchni I, odpowiadają kierunki główne na powierzchni II;

kątowi kierunkowemu α_e pierwszego kierunku głównego na powierzchni I, odpowiada kąt kierunkowy α_e' pierwszego kierunku głównego na powierzchni II;

kołu cząsteczkowemu w punkcie (u, v) na powierzchni I, odpowiada elipsa cząsteczkowa w odpowiadającym punkcie (u, v) na powierzchni II.

W każdym punkcie odwzorowania mamy przynależną wskaźnicę Tissota, której

1) wielkość (określona półosią dużą a , albo małą b),

2) kształt (określony obiema liczbami a i b),

3) położenie (określone punktem (u, v) i orientacją α_e'),

zmieniają się od punktu do punktu, a także zależą od rodzaju odwzorowania, i całkowicie charakteryzują metryczną strukturę cząsteczkową odwzorowania w rozważanym punkcie.

Nałożmy na siebie obie cząsteczki, które mogą być uważane za płaskie, np. obraz na oryginał. To nałożenie skutecznym z zachowaniem pewnego porządku co do:

1) *punktu przyłożenia*; naturalnie będziemy chcieli skoincydować jedną parę odpowiadających sobie punktów; taką parę znamy na razie tylko jedną: punkt (u, v) i jego obraz, środek koła i elipsy odpowiednio. Nałożmy więc na siebie obie cząsteczki tak, aby punktem przyłożenia była para punktów środkowych odpowiadających sobie;

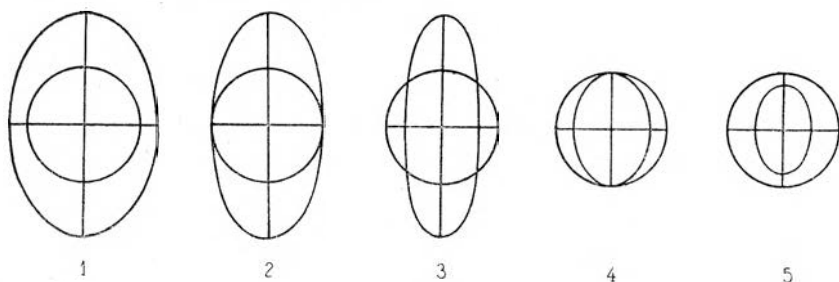
2) *zorientowania*; po nałożeniu środków obu figur, możemy dowolnie obracać obraz około nieruchomego, założmy, oryginału. Możemy rozmaicie zorientować obie figury; nasuwają się dwa szczególne położenia, dające pewną korzyść: a) możemy *skoincydować odpowiadające sobie linie parametrowe* kierunkowe v , wtedy linie parametrowe u , odpowiadające sobie, na ogół się nie skoincydują (chyba, że kąty parametrowe θ i θ' w rozważanym punkcie są sobie równe); b) możemy *skoincydować krzywe główne* i uzyskać najbardziej korzystną orientację; pokryją się one zawsze w rozważanym punkcie, gdyż są *prostopadłe* na obu powierzchniach i *odpowiadają* sobie. Wtedy linie parametrowe kierunkowe na ogół się nie

pokryją. Zorientowanie obu figur według kierunków głównych może być dwojakie, najlepiej jednak zorientować je tak, aby pokryły się odpowiadające sobie ramiona kątów prostych, to jest tak, aby pierwsze i drugie stycznne skoincydowały się ze sobą odpowiednio. Jeśli siatka krzywych głównych jest zarazem siatką parametrową, przy czym pierwsza krzywa główna jest linią parametrową *kierunkową*, wówczas $\alpha_e = 0$ i $\alpha_e' = 0$.

Jeśli więc nałożymy na siebie obie cząsteczki, obrazową na oryginalną, ze skoincydowaniem pary rozważanych, odpowiadających sobie, punktów: środków koła i elipsy odpowiednio, jako pary punktów przyłożenia, oraz jeśli zorientujemy względem siebie obraz i oryginał przez pokrycie się w tym punkcie odpowiadających sobie krzywych głównych i obierzemy te krzywe za siatki parametrowe, otrzymamy najkorzystniejsze warunki do badania struktury cząsteczkowej odwzorowania.

Zadysonowaliśmy dotychczas punktem przyłożenia i najkorzystniejszą orientacją obu figur cząsteczkowych. Pozostała sprawa *wielkości i kształtu*, określanych połówkami osi wskaźnicy Tissota.

Możemy mieć 5 różnych kombinacji wzajemnego ustosunkowania się *co do wielkości* figury-koła i odpowiadającej jej figury-elipsy, co ilustrują poniższe rysunki:



Rys. 5

Jeżeli koło-oryginał ma promień równy 1, we wszystkich kombinacjach, to w przypadku:

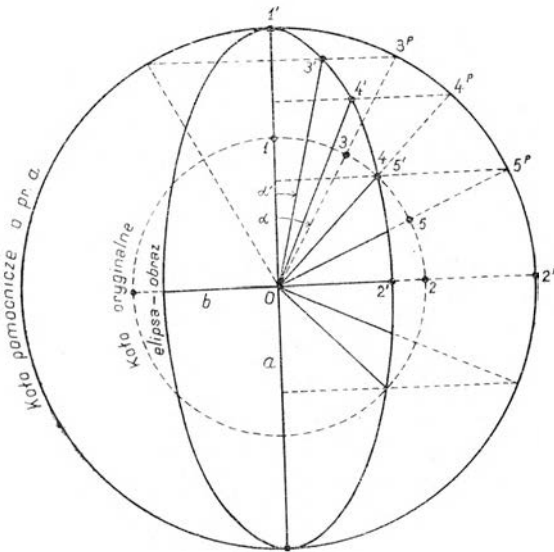
$$\left. \begin{array}{l} 1. \ a > 1, \ b > 1, \ a > b \\ 2. \ a > 1, \ b = 1, \quad " \\ 3. \ a > 1, \ b < 1, \quad " \\ 4. \ a = 1, \ b < 1, \quad " \\ 5. \ a < 1, \ b < 1, \quad " \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \leq b < a, \\ b < 1 < a, \\ b < a \leq 1. \end{array}$$

Jeśli weźmiemy jakąś linię na powierzchni obrazu i w każdym punkcie tej linii przynależną wskaźnicę, to na ogół będzie to elipsa, co do wielkości, kształtu i orientacji, *zmienna* w sposób ciągły

w punktach tej linii. Gdy linia obrana jest krzywą główną, np. pierwszą, wskaźnica będzie na ogół zmienna wzdłuż tej krzywej, lecz jej orientacja będzie usystematyzowana.

Po skutecznieniu nałożenia i najkorzystniejszego zorientowania cząsteczki oryginału i obrazu, możemy teraz przejść do szczegółowego zbadania wzajemnej relacji odwzorowawczej w pojedynczej cząsteczce.

Koło elementarne na powierzchni oryginału, o promieniu $ds=1$, przetwarza się na ogół w elipsę elementarną, która jest obrazem tego koła. Cała „tajemnica” struktury odwzorowania jest rozwikłana i doskonale wyjaśniona przez to pogładowe i przystępne ujęcie, będące treścią drugiego twierdzenia Tissota. Wskaźnica daje graficzny obraz całego procesu odwzorowawczego i tego, co się dzieje w każdej pojedynczej cząsteczce powierzchni. Daje obraz wszystkich relacyj i zniekształceń metrycznych, wywołanych odwzorowaniem: wartości skali we wszystkich kierunkach w rozważanym punkcie, a tym samym i wartości zniekształceń elementu liniowego, wartości zniekształceń kątowych, i skalę oraz zniekształcenie elementów pól, odpowiadających sobie. Matematyczna teoria wskaźnicy Tissota jest innym, i przeważnie zwykłym, wyrazem ujęcia teorii zniekształceń, bardziej przejrzystym wskutek prostej interpretacji geometrycznej.



Rys. 6

Zważmy rysunek, przedstawiający koło elementarne oryginału i wskaźnicę, skojarzone ze sobą i zorientowane w wyżej omówiony sposób. Zatoczmy ze wspólnego środka obu figur *koło pomocnicze* na dużej osi wskaźnicy. Promień d_s koła oryginalnego $= 1$, promień koła pomocniczego $= a$; zmieniliśmy więc promień koła oryginalnego w stosunku $1:a$ (gdyż $1:1/a = a$); zamiast skali głównej $1:1$, jaka ma miejsce przy przejściu od koła oryginalnego do jego wskaźnicy, mamy teraz koło pomocnicze w skali $1:1/a$. Jeśli to koło pomocnicze *zrzutujemy prostokątnie* na płaszczyznę pochyloną naokoło osi dużej pod kątem $\arccos(b/a)$ do płaszczyzny oryginalnej, to otrzymamy elipsę obrazową, naszą wskaźnicę Tissota. Pomiedzy kołem pomocniczym i elipsą istnieje rzutowość, co więcej — pokrewieństwo geometryczne.

Koło pomocnicze jest w pokrewieństwie i w *tej samej skali* z elipsą-wskaźnicą. Koło oryginalne miało *inną skalę*, dlatego musieliśmy najpierw zrównać skale obu figur i wprowadzić koło pomocnicze.

Możemy teraz łatwo, jak w każdym pokrewieństwie dwóch utworów płaskich, wyznaczać odpowiadające sobie elementy na oryginale i obrazie przez pośrednictwo koła pomocniczego.

Punkty leżące na osiach na kole oryginalnym i elipsie, oczywiście odpowiadają sobie; obrazem punktu 1 na kole jest punkt 1' na elipsie, obrazem punktu 2 na kole jest punkt 2' na elipsie. Weźmy teraz dowolny punkt pośredni 3 na kole oryginału i szukajmy jego obrazu na elipsie. Najpierw, dla zrównania skali pokrewieństwa, znajdziemy odpowiadający mu punkt na kole pomocniczym; punkt 3^p uzyskamy, gdy przeprowadzimy ze środka koła promień przez punkt 3 i przedłużymy go do przecięcia się z kołem pomocniczym. Następnie, dzięki zależności rzutowej koła pomocniczego i elipsy, prosta prostopadła do osi dużej, przeprowadzona przez punkt 3^p, przetnie elipsę w punkcie 3', który będzie obrazem punktu 3.

Innymi słowy, najpierw rzutujemy centralnie punkty koła oryginalnego na punkty koła pomocniczego (przez podobieństwo, czyli zmianę skali), a następnie punkty koła pomocniczego rzutujemy wiązką równoległą, prostokątnie do osi dużej elipsy; w przecięciu z elipsą otrzymujemy odpowiadające punkty elipsy.

Odwrotnie, chcąc dla dowolnego punktu-obrazu na elipsie znaleźć odpowiadający mu punkt-oryginał na kole, należy postępowanie powyższe wykonać w odwrotnej kolejności: punkty elipsy rzutować na koło pomocnicze wiązką równoległą, prostokątnie do

osi dużej elipsy, a następnie koło pomocnicze rzutować centralnie na koło oryginalne. Np. weźmy punkt przecięcia się koła oryginalnego i elipsy (o ile taki punkt w ogóle istnieje); jeśli potraktujemy go jako punkt 4 na kole oryginalnym, jego obraz na elipsie będzie 4'; jeśli potraktujemy go jako punkt 5' na elipsie, jego oryginał będzie punktem 5 na kole.

W ten sposób punkty wskaźnicy-obrazu mogą być wyprowadzone przez czysto geometryczną projekcję koła oryginalnego, złożoną z dwóch rzutów składowych: środkowego i równoległego.

Relacja rzutowa cząsteczek obrazu i oryginału znajduje także swój wyraz we wzorach teorii zniekształceń.

Widzieliśmy, że skala m^2 elementu liniowego wyraża się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} m^2 &= P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha \\ &= a^2 \cos^2 (\alpha - \alpha_e) + b^2 \sin^2 (\alpha - \alpha_e). \end{aligned}$$

(38.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2} &= P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha' \\ &= \frac{1}{a^2} \cos^2 (\alpha' - \alpha_e') + \frac{1}{b^2} \sin^2 (\alpha' - \alpha_e'), \end{aligned}$$

skąd

$$\left(\frac{m \cos (\alpha' - \alpha_e')}{a} \right)^2 + \left(\frac{m \sin (\alpha' - \alpha_e')}{b} \right)^2 = 1.$$

(38.9')

Powyższe wzory mają prostą interpretację geometryczną. Wzór (38.9) jest dobrze znaną relacją pomiędzy promieniem wodzącym punktu opisującego elipsę o półosiach a i b i pomocniczym kątem $(\alpha - \alpha_e)$. Podobnie wzór (38.9') jest równaniem wskaźnicy we współrzędnych biegunowych $(m, \alpha' - \alpha_e')$. Wzory upraszczają się przez zorientowanie według kierunków głównych, gdyż wtedy $\alpha_e = 0$ i $\alpha_e' = 0$.

Widzieliśmy, że punktowi 3 na kole oryginalnym odpowiada punkt 3' na elipsie, zatem elementowi liniowemu $ds (= 1)$, używanemu przez połączenie środka 0 z punktem 3 na kole, odpowiada element liniowy dS , uzyskany przez połączenie środka 0 z punktem-obrazem 3' na elipsie. Skala $m = dS/ds$; dla $ds = 1$ mamy wprost $m = dS$; wielkość dS , *promień wodzący wskaźnicy*, przedstawia skalę dla rozważanego elementu liniowego. Połowa osi dużej a wskaźnicy przedstawia maksymalną, zaś połowa osi małej b — minimalną skalę liniową w rozważanym punkcie powierzchni.

Wzory Nr. 30., podające związki między skalami ekstremalnymi a, b i skalami parametrowymi m_u, m_v :

$$(a^2 + b^2) \sin^2 \Theta = m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos \Theta \cos \Theta',$$

$$a b \sin \Theta = m_u m_v \sin \Theta',$$

odniesione do wskaźnicy Tissota, mają również interpretację geometryczną, szczególnie prostą gdy siatka parametrowa na powierzchni oryginału jest ortogonalna i $\Theta = \pi/2$:

$$a^2 + b^2 = m_u^2 + m_v^2,$$

$$a b = m_u m_v \sin \Theta'.$$

Wzory te wyrażają własności średnic sprzężonych elipsy, znane pod nazwą twierdzeń Apolloniusza z Pyrgos (koniec III wieku przed Chr.):

Twierdzenie 1. Suma kwadratów średnic sprzężonych elipsy jest równa sumie kwadratów osi.

Twierdzenie 2. Pole równoległoboku, zbudowanego na średnicach sprzężonych elipsy, jest równe polu prostokąta, zbudowanego na osiach elipsy.

ROZDZIAŁ VIII

ZNIEKSZTAŁCENIA SKOŃCZONE I REDUKCJE ODWZOROWAWCZE¹⁾

39. Zniekształcenia odwzorowawcze elementarne i skończone

a) Relacje metryczne elementarne i zniekształcenia elementarne.

Relacje metryczne przy odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą dotyczyły, jak dotychczas, *elementów* metrycznych i były następujące:

$m = dS/ds$, *skala*, stosunek odpowiadających sobie *elementów liniowych* na obu powierzchniach; funkcja na ogół *trzech* zmiennych: wielkość lokalno-kierunkowa; w odwzorowaniu konforemnym—funkcja na ogół *dwóch* zmiennych: wielkość lokalna;

$f = dP/dp$, *skala pól*, stosunek odpowiadających sobie *elementów pól* na obu powierzchniach; funkcja na ogół *dwóch* zmiennych: wielkość lokalna.

Podobnie dla zniekształceń metrycznych elementarnych mieliśmy:

$m-1 = \frac{dS}{ds} - 1 = \frac{dS-ds}{ds}$, *zniekształcenie elementu liniowego* w danym punkcie i w danym kierunku;

¹⁾ Fr. Biernacki, O zniekształceniach odwzorowawczych i o redukcjach odwzorowawczych, *Przegląd Geodezyjny* Nr 2, Luty, 1949, Warszawa.

$$\omega = \alpha - \alpha',$$

zniekształcenie kąta kierunkowego, różnica pomiędzy kątem oryginalnym i odtworzonym; funkcja na ogół trzech zmiennych; wielkość lokalno-kierunkowa; w odwzorowaniu konforemnym $\omega = 0$, zniekształceń kątowych nie ma;

$$f - 1 = \frac{dP}{dp} - 1 = \frac{dP - dp}{dp},$$

zniekształcenie elementu pola w danym punkcie powierzchni: wielkość lokalna.

Zniekształcenia elementarne możemy także wyrażać w procentach, albo w promillach, jako:

$$(m - 1) 100^0_0, \text{ albo } (m - 1) 1000^0_{00},$$

$$(f - 1) 100^0_0, \text{ albo } (f - 1) 1000^0_{00}.$$

Powyższe definicje teorii zniekształceń odwzorowawczych miały do czynienia z elementami liniowymi i powierzchniowymi, nie zaś ze skończonymi wielkościami łuków i obszarów. Przy zniekształceniu kątowym kwestia ta jest bez znaczenia, definicja kąta między dwoma kierunkami w punkcie powierzchni jest niezależna od długości ramion tego kąta.

b) Relacje metryczne dla wielkości skończonych i zniekształcenia skończone.

Przejdźmy teraz do sprawy relacji metrycznych między *skończonymi*, odpowiadającymi sobie, wielkościami i do *zniekształceń skończonych*.

Niechaj łukowi s na powierzchni oryginału odpowiada łuk S na powierzchni obrazu (natura linii krzywych na obu powierzchniach może być bardzo rozmaita, nas interesuje tu tylko kwestia metryki). Podobnie, niechaj pewnemu obszarowi p na oryginale odpowiada obszar P na obrazie. Będziemy mieli następujące, analogiczne definicje:

$S/s,$	stosunek odpowiadających sobie łuków na obu powierzchniach: <i>Skala łuku</i> S^1);
$P/p,$	stosunek odpowiadających sobie pól obszarów skończonych: <i>skala pola</i> P^1);
$(S/s) - 1 = (S - s)/s,$	<i>zniekształcenie (skończone) łuku</i> S^2);
$(P/p) - 1 = (P - p)/p,$	<i>zniekształcenie (skończone) pola</i> P^2).

¹⁾ W braku lepszych nazw i przez analogię do stosunków elementów metrycznych, użyto terminu *skala* z odpowiednim dodatkiem.

²⁾ Mogą być również wyrażane w procentach lub w promillach.

Aby znaleźć stosunki wielkości skończonych oraz zniekształcenia skończone dla odpowiadających sobie wielkości, należy obliczyć długość łuku S i wartość pola P na powierzchni obrazu, odpowiednio, na podstawie znajomości wielkości s i p na powierzchni oryginału, oraz znanych relacji metrycznych elementarnych m i f w rozważanym odwzorowaniu. Zarówno obliczenie długości łuku S , jak i obliczenie pola P jest sprawą rachunku całkowego.

Mamy:

$$dS = m ds; \quad S = \int_{u_1, v_1}^{u_2, v_2} m(u, v, du, dv) \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

$$dP = f dp; \quad P = \int_{(D)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Jeśli linia o łuku s (albo kontur zamykający pole p) na powierzchni oryginału dana(y) jest przez jej równanie w postaci

$$v = \chi(u),$$

(albo ogólniej $\chi(u, v) = 0$, lub w postaci parametrowej $u = \chi_1(t)$, $v = \chi_2(t)$), wówczas funkcje występujące pod znakiem całki, w obu przypadkach można sprowadzić do jednej zmiennej. Pozostaje wykonać, w określonych warunkami początkowymi granicach, całkowanie, które przeważnie jest dość trudne i skomplikowane. W wielu jednak zagadnieniach praktycznych zadowolamy się rezultatami przybliżonymi.

Ogólna teoria zniekształceń skończonych nie została, jak dotychczas, rozpracowana w ogólnej formie, podobnie do ogólnej teorii zniekształceń elementarnych.

c) Wielkość zniekształceń skończonych.

Zniekształcenia skończone łuków, albo pól, zależą od czterech następujących czynników:

- 1) natury powierzchni oryginału,
- 2) natury powierzchni obrazu,
- 3) rodzaju odwzorowania,
- 4) wielkości łuku lub pola.

Pomińmy pierwsze trzy, zwykle z góry ustalone, czynniki i zwróćmy uwagę na czynnik czwarty: *wielkość* rozważanej figury skończonej, bardziej podległy naszej dyspozycji.

Im mniejsza jest rozważana figura skończona (łuk, pole), tym bardziej zniekształcenia skończone zbliżają się do zniekształceń elementarnych; wreszcie dla figury o dostatecznie małej wielkości,

zniekształcenia skończone mogą być praktycznie uważane za równe zniekształceniom elementarnym.

Dla kątów sprawa ta jest obojętna; zniekształcenie kątowe elementarne i skończone są zawsze w każdym odwzorowaniu pojęciami identycznymi.

40. Redukcje odwzorowawcze

a) Geneza i definicja.

Przy rozwiązywaniu zadań na różnych powierzchniach (w praktyce: na płaszczyźnie, kuli, lub elipsoidzie obrotowej) posługujemy się figurami, utworzonymi z *linij geodezyjnych* powierzchni, stosując *trygonometrię geodezyjną, właściwą dla rozważanej powierzchni* (w praktyce: trygonometrię płaską, sferyczną, albo elipsoidalną).

Wyobraźmy sobie na powierzchni oryginału pewną ilość punktów, połączonych liniami geodezyjnymi w pewną figurę, np. trójkąt geodezyjny. Po odwzorowaniu tego trójkąta na powierzchnię II, otrzymamy inny trójkąt, utworzony przez (odpowiadające liniom geodezyjnym) linie obrazowe, które na ogół *nie będą liniami geodezyjnymi* powierzchni obrazu.

Figura geodezyjna na powierzchni oryginału przekształca się na ogół w odpowiadającą jej figurę niegeodezyjną na powierzchni obrazu.

Tylko w odwzorowaniach *geodezyjnych* (Nr 56) linie geodezyjne jednej powierzchni przechodzą w linie geodezyjne drugiej powierzchni. Jednak odwzorowania używane do celów praktycznych, z nielicznymi wyjątkami, nie są geodezyjne.

Ponieważ potrafimy rozwiązywać tylko figury geodezyjne, gdyż dla *takich tylko* figur (i dla najprostszych, jak dotychczas, powierzchni) została rozwinięta i rozpracowana geometria geodezyjna, to, na powierzchni obrazu, figury niegeodezyjnej nie potrafimy rozwiązać, nawet w przypuszczeniu, że dla powierzchni tej została stworzona i rozwinięta geometria geodezyjna. Powstaje stąd pewien kłopot i niedogodność.

Dla zaradzenia tej niedogodności, znajdujemy pośrednie wyjście przez wprowadzenie na powierzchni obrazu *pomocniczej figury geodezyjnej*, zbudowanej na tych samych punktach, co obrazowa figura niegeodezyjna. Tę pomocniczą figurę możemy nazwać *geodezyjnym quasi-obrazem*, przynależnym właściwemu obrazowi. Boki, kąty i pola pomocniczej figury geodezyjnej będą się różniły od przynależnych boków, kątów i pól obrazowej figury niegeodezyjnej.

Relacje metryczne pomiędzy figurą-obrazem a figurą-oryginałem nazywamy zniekształceniami odwzorowawczymi skończonymi.

Relacje metryczne pomiędzy quasi-obrazową figurą geodezyjną a figurą oryginalną nazywamy redukcjami odwzorowawczymi.

Nie należy mieszać zniekształceń odwzorowawczych z redukcjami odwzorowawczymi; wiele nieporozumień może wynikać z pomieszania tych pojęć; zniekształcenia stanowią relacje między obrazem i oryginałem, redukcje stanowią relacje między geodezyjnym quasi-obrazem i oryginałem.

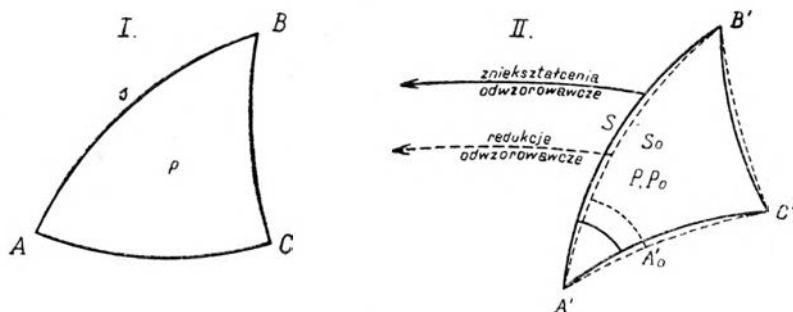
Racją wprowadzenia pomocniczej figury geodezyjnej na powierzchni obrazu jest cel rachunkowy: możliwość rozwiązania figury geodezyjnej, a przez to i możliwość rozwiązywania zadań, drogą pośrednią, na powierzchni.

W odwzorowaniach geodezyjnych oba te pojęcia identyfikują się ze sobą: zniekształcenia i redukcje stają się tym samym, ponieważ obraz jest bezpośrednio figurą geodezyjną. Nie ma więc potrzeby wprowadzania pomocniczej figury i rozróżniania zniekształceń i redukcji odwzorowawczych; mówimy wówczas tylko o zniekształceniach.

W odwzorowaniach konforemnych, a więc i równokątnych, nie ma zniekształceń kątowych, są natomiast redukcje kątowe. W odwzorowaniach geodezyjnych równokątnych (to może mieć miejsce tylko w izometrii albo w podobieństwie) nie ma ani zniekształceń kątowych, ani redukcji kątowych.

b) Redukcje długości, kątów i pól.

Redukcje odwzorowawcze dotyczą metryki, możemy więc mieć redukcje długości, redukcje kątów (względnie kierunków) i redukcje pól.



Rys. 7

Przypuśćmy, że trójkąt geodezyjny ABC na powierzchni oryginału przetwarza się w trójkąt niegeodezyjny $A'B'C'$ na po-

wierzchni obrazu. Przyporządkujmy temu trójkątowi obrazowemu przynależny mu pomocniczy trójkąt geodezyjny. Możemy mieć trzy relacje tych trzech figur:

Relacja obrazu do oryginału, zwana skalą (łuku, pola) względnie zniekształceniem odwzorowawczym skończonym;

Relacja geodezyjnego quasi-obrazu do oryginału, zwana quasi-skala geodezyjną (łuku, pola), lub, jak to się przyjęło — redukcją odwzorowawczą;

Relacja geodezyjnego quasi-obrazu do obrazu, zwana quasi-skala obrazową, lub redukcją obrazową.

W odwzorowaniach geodezyjnych wszystkie redukcje obrazowe są równe zeru, a redukcje odwzorowawcze są równe zniekształceniom odwzorowawczym.

Oznaczmy przez:

s długość boku geodezyjnego na oryginale,

S długość odpowiadającego mu boku niegeodezyjnego na obrazie,

S_0 długość przynależnego do S boku geodezyjnego na obrazie,

A kąt na oryginale,

A' kąt odpowiadający mu na obrazie,

A_0' kąt trójkąta geodezyjnego na obrazie,

p pole trójkąta geodezyjnego na oryginale,

P pole odpowiadającego mu trójkąta niegeodezyjnego na obrazie,

P_0 pole przynależnego quasi-obrazowego trójkąta geodezyjnego.

Wielkość:

$\frac{S}{s}$	jest skalą boku S ,
$\frac{S}{s} - 1$, czyli $\frac{S-s}{s}$	„ zniekształceniem boku S ,
$\frac{S_0}{s}$	„ quasi-skala geodezyjną boku S_0 ,
$\frac{S_0}{s} - 1$, czyli $\frac{S_0-s}{s}$	„ redukcją boku S_0 ,
$\frac{S_0}{S}$	„ quasi-skala obrazową boku S_0 ,
$\frac{S_0}{S} - 1$, czyli $\frac{S_0-S}{S}$	„ redukcją obrazową boku S_0 ,
$A - A'$	„ zniekształceniem kąta A' ,
$A - A_0'$	„ redukcją kąta A_0' ,
$A' - A_0'$	„ redukcją obrazową kąta A_0' ,
$\frac{P}{p}$	„ skalą pola P ,

$$\begin{aligned} \frac{P}{p} - 1, \text{ czyli } \frac{P-p}{p} & \text{ jest zniekształceniem pola } P, \\ \frac{P_0}{p} & \text{ „ quasi-skala geodezyjną pola } P_0, \\ \frac{P_0}{p} - 1, \text{ czyli } \frac{P_0-p}{p} & \text{ „ redukcją pola } P_0, \\ \frac{P_0}{P} & \text{ „ quasi-skala obrazową pola } P_0, \\ \frac{P_0}{P} - 1, \text{ czyli } \frac{P_0-P}{P} & \text{ „ redukcją obrazową pola } P_0. \end{aligned}$$

W geodezji wyższej spotykamy nieco odmienną terminologię pojęciową: stosunki S_0/s , P_0/p nazywane są wprost redukcjami (długości i powierzchni, odpowiednio). Wydaje się jednak bardziej wskazane stosunki te nazywać *skalami*, zaś ich *odchyłki od jedności* — redukcjami. Będzie to zgodne z ogólnym systemem nomenklatury teorii zniekształceń. Tak zresztą ujmuję tę sprawę nowsze dzieło kartografii matematycznej L. Driencourt et J. Laborde, *Traité des Projections*, Paris, 1932, vols. 4.

Na podstawie powyższych oznaczeń i definicji możemy napisać:

$$1). \quad \frac{S_0}{s} = \frac{S_0}{S} \frac{S}{s}; \quad \frac{S_0-s}{s} = \frac{S_0-S}{s} + \frac{S-s}{s} = \frac{S_0-S}{S} \frac{S}{s} + \frac{S-s}{s},$$

quasi-skala geodezyjna boku S_0 jest równa iloczynowi quasi-skali obrazowej boku S_0 i skali boku S ; redukcja odwzorowawcza boku S_0 jest równa iloczynowi redukcji obrazowej boku S_0 i skali boku S , plus zniekształcenie boku S .

$$2). \quad A - A_0' = (A' - A_0') + (A - A'),$$

redukcja kąta A_0' jest równa sumie redukcji obrazowej kąta A_0' i zniekształcenia kąta A' .

$$3). \quad \frac{P_0}{p} = \frac{P_0}{P} \frac{P}{p}; \quad \frac{P_0-p}{p} = \frac{P_0-P}{p} + \frac{P-p}{p} = \frac{P_0-P}{P} \frac{P}{p} + \frac{P-p}{p},$$

quasi-skala geodezyjna pola P_0 jest równa iloczynowi quasi-skali obrazowej pola P_0 i skali pola P ; redukcja odwzorowawcza pola P_0 jest równa iloczynowi redukcji obrazowej pola P_0 i skali pola P , plus zniekształcenie pola P .

Teoria redukcji odwzorowawczych nie została dotychczas rozpracowana w ogólnej formie, analogicznie do ogólnej teorii zniekształceń odwzorowawczych. To też musimy poprzestać na powyższych definicjach i pojęciach. W zagadnieniach praktycznych sprawą redukcji odwzorowawczych zajmuje się geodezja wyższa, w przypadku odwzorowań płaskich elipsoidy obrotowej, lub kuli, dla kilku rozpowszechnionych w użyciu odwzorowań (mianowicie dla odwzorowania Cassiniego,

dla odwzorowania konforemnego Gaussa i odwzorowania konforemnego Lambertaj). Kartografia matematyczna przez długi okres swego rozwoju nie interesowała się sprawą redukcji odwzorowawczych. Dopiero wydane w r. 1932, wyżej wspomniane dzieło L. Driencourt i J. Laborde'a, w trzecim i czwartym tomie, włącza tę sprawę do teorii odwzorowań i podaje wyczerpującą teorię redukcji w odwzorowaniach płaskich elipsoidy obrotowej.

c) Pomijanie redukcji odwzorowawczych.

Zwrócić należy jeszcze uwagę na *wielkość* redukcji odwzorowawczych. Wielkość redukcji odwzorowawczych zależy od następujących czterech czynników:

- 1) natury powierzchni oryginału,
- 2) natury powierzchni obrazu,
- 3) rodzaju odwzorowania,
- 4) wielkości linii, kątów i pól rozważanej figury skończonej.

Pomińmy pierwsze trzy, zazwyczaj z góry ustalone, czynniki wpływające na wielkość redukcji i zważmy czynnik trzeci: wielkość rozważanej figury, bardziej podległy naszej dyspozycji. Im mniejszy będzie trójkąt oryginalny ABC , a tym samym i trójkąt obrazowy $A'B'C'$, tym mniejsze będą redukcje; wreszcie dla trójkąta o dostatecznie małym rozmiarze redukcje odwzorowawcze będą mogły być *praktycznie* uważane za równe zniekształceniom elementarnym, i mogą być tak małe, że leżą poza granicami osiągalnej, lub wymagalnej dokładności pomiarowej; wówczas, w większości mierniczych prac praktycznych, mogą być zupełnie pominięte.

W pracach pomiarowych mamy do czynienia, w znacznej przewadze, z pomiarami kątowymi. Redukcja kątowa (względnie kierunkowa) zależy od długości boków figury na powierzchni, i jeśli boki są dostatecznie małe, redukcja kątowa może być *praktycznie* uznana za równą zniekształceniu kątowemu. Jeśli nadto odwzorowanie jest równokątne, wtedy w ogóle można pominąć redukcję kątową. Również i redukcja długości dla dostatecznie małych boków może być, w odwzorowaniu równokątnym, w większości prac mierniczych *praktycznie* pominięta. Stąd wynika niezmierna ważność odwzorowań równokątnych dla celów geodezyjnych i mierniczych.

41. Znaczenie teorii zniekształceń odwzorowawczych

Problem zniekształceń metrycznych, wywołanych odwzorowaniem jednej powierzchni na drugą, możemy rozpatrywać z dwóch różnych punktów widzenia. Studium zniekształceń metrycznych elementarnych możemy użyć, albo jako *metody porównywania* ze sobą rozmaitych odwzorowań tych samych dwóch powierzchni na siebie, albo też z pomiarów dowolnej figury (przeważnie geodezyjnej) na

powierzchni obrazu, możemy poszukiwać wielkości metrycznych dla odpowiadającej (lub przyporządkowanej geodezyjnej) figury oryginału. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z teorią zniekształceń odwzorowawczych elementarnych i wymagamy rezultatów wyrażonych przeważnie w funkcji wielkości na powierzchni oryginału (np. możemy znaleźć zniekształcenie kąta, spowodowane odwzorowaniem, w funkcji kąta oryginalnego). W drugim przypadku, który możemy nazwać *obrazometrią*¹⁾ (w szczególności *kartometrią*), mamy do czynienia z teorią zniekształceń skończonych, oraz z teorią redukcji odwzorowawczych, i wymagamy rezultatów wyrażonych przeważnie w funkcji wielkości na powierzchni obrazu (np. poszukujemy kąta na powierzchni oryginału, któremu odpowiada pomierzony kąt na obrazie, w funkcji tegoż ostatniego kąta).

Dwa więc główne zastosowania ma teoria zniekształceń odwzorowawczych.

Tissot w swym dziele *Memoire sur la Representation des Surfaces et les Projections des Cartes Geographiques*, podał bardzo kompletne studium pierwszego zastosowania teorii. Pod tym względem teoria zniekształceń:

1. Daje środki badania, porównywania i oceny wartości odwzorowań pod względem ich własności metrycznych,
2. Daje możność przystosowania danego odwzorowania w sposób najkorzystniejszy do zainteresowanego obszaru,
3. Daje możność poszukiwania *najlepszego odwzorowania dla danego obszaru*, na podstawie specjalnych kryteriów dobroci odwzorowania; jedno z takich kryteriów podał Tissot i użył je jako metody rozwiązania problemu o najkorzystniejszym odwzorowaniu danego obszaru (Nr 54).

W drugim swym zastosowaniu — do obrazometrii, czyli do pomiarów skończonych na powierzchni obrazu, teoria zniekształceń metrycznych nie doznała, jak dotychczas, tak kompletnego i ogólnego studium, jak w pierwszym. Rozwinęła się tylko teoria redukcji dla odwzorowań *płaskich* elipsoidy obrotowej i kuli, oraz teoria odwzorowawcza dla trzech ważnych w praktyce linii: *loksodromy* , czyli linii stałego kierunku na powierzchni oryginału; *ortodromy* , czyli linii geodezyjnej na powierzchni oryginału; i „linii mapowej”, czyli linii geodezyjnej na powierzchni obrazu. Temat ten, jako zbyt szczególny, należy do zastosowań praktycznych ogólnej teorii odwzorowań, i tam winien być rozważony.

¹⁾ Czyli *ikonometrią*.

CZĘŚĆ TRZECIA

POSZUKIWANIE ODWZOROWAŃ SPEŁNIAJĄCYCH ROZMAITE WARUNKI OGÓLNE

(DRUGIE ZADANIE PODSTAWOWE TEORII ODWZOROWAŃ)

ROZDZIAŁ IX

WARUNKI OGÓLNE. ORTOGONALNOŚĆ

42. Charakter warunków

Drugie zadanie podstawowe teorii odwzorowań: poszukiwanie odwzorowania spełniającego pewne z góry obrane warunki, stanowi podstawę drugiej i bardziej istotnej części ogólnej teorii odwzorowań. Ta część teorii jest dość różnorodna, zależnie od charakteru stawianych warunków, i znacznie trudniejsza od części pierwszej. W głównych rysach naświetlono już krótko tę sprawę w Nr. 5; obecnie wnikiemy w nią głębiej.

Czym się kierować w wyborze warunków? Przede wszystkim powinny to być warunki o charakterze *ogólnym*, gdyż tylko one pozwalają na rozwinięcie *teorii* dla pewnych grup odwzorowań, obejmujących dużą różnorodność rozwiązań poszczególnych. Następnie, warunki są przeważnie nasuwane albo narzucane wymaganiami praktyki, w mniejszym zaś stopniu zainteresowaniami nauki; stąd przeważający wpływ mają warunki o charakterze *praktycznym*.

Ogólność i praktyczna użyteczność warunków stanowią dwie główne wytyczne, które kierowały i nadal kierują rozwojem tej części teorii odwzorowań. Nie znaczy to jednak, żeby warunki wyłaniane z praktyki nie miały wpływu na rozwój teorii naukowych; wprost przeciwnie: z nagromadzonych faktów rozwijały się teorie, drogą stopniowych uogólnień i abstrakcyj. W ten sposób teoria i praktyka wspierają się i uzupełniają wzajemnie, co, zwłaszcza w rozwoju nauk ścisłych, manifestuje się wyraźnie.

Różnorodność warunków, jakich możemy z góry żądać od odwzorowania, mając na uwadze ich ogólność i praktyczność, możemy rozklasyfikować pod względem charakteru na trzy grupy:

1. Warunki dotyczące *własności metrycznych odwzorowania*,
2. Warunki dotyczące *rodzaju (albo kształtu) linii przekształconych dla pewnych grup linii na powierzchnioryginału*,
3. Warunki dotyczące *sposobu odwzorowania*.

Powyższy podział warunków na trzy typy jest raczej orientacyjny do ułożenia planu rozwinięcia przedmiotu, ponieważ warunki wszystkich trzech grup mogą się różnić, całkowicie lub częściowo, łączyć i kombinować.

Najważniejszymi, zarówno dla teorii jak i dla praktyki, są warunki grupy pierwszej, dotyczące metryki obrazu; mogą one być dalej rozklasyfikowane na dwie podgrupy:

- a. Co do *zachowania własności metrycznych*,
- b. Co do *wielkości i rozkładu zniekształceń odwzorowawczych*.

Stosownie do powyższej klasyfikacji warunków, będą rozpatrzone w części trzeciej następujące zagadnienia:

W grupie pierwszej:

Ortogonalność obrazu siatki parametrowej (Nr 43).

Odwzorowanie konforemne (Nr 44 do 48).

Odwzorowanie równopowierzchniowe (Nr 49 do 53).

Warunki dotyczące zniekształceń odwzorowawczych (Nr 54 i 55).

Pierwsze trzy zagadnienia dotyczą podgrupy *a*, czwarte zaś podgrupy *b*.

W grupie drugiej:

Odwzorowanie geodezyjne (Nr 56).

Odwzorowanie płaskie prostoliniowe (Nr 58).

Odwzorowanie płaskie kołowe (Nr 59).

W grupie trzeciej:

Odwzorowanie sferyczne Gaussa (Nr 60).

Odwzorowanie rzutowe (Nr 61).

43. Ortogonalność obrazu siatki parametrowej

Rodzina linii $u = \text{const.}$ i rodzina linii $v = \text{const.}$ tworzą, jak wiadomo, siatkę parametrową na powierzchni oryginału. Podobnie rodziny linii $U = \text{const.}$ i $V = \text{const.}$ tworzą siatkę parametrową na powierzchni obrazu. Wielkości podstawowe 1. rzędu E, F, G dla powierzchni I, oraz $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ dla powierzchni II, są odpowiednio funkcjami zmiennych parametrowych u, v oraz U, V .

Wiadomo, że warunkiem koniecznym i wystarczającym ortogonalności siatki (u, v) na powierzchni I jest $F = 0$; oraz siatki (U, V) na powierzchni II jest: $\bar{F} = 0$. Naturalnie warunki te, każdy oddzielnie, albo oba równocześnie, nie muszą być spełnione; można rozważać każdą z powierzchni, albo obie naraz, w zmiennokątnych siatkach parametrowych, albo nawet izogonalnych, lecz nie ortogonalnych. W praktyce, przynajmniej dla powierzchni oryginału, mamy do czynienia przeważnie z siatką parametrową ortogonalną.

Obie powierzchnie nie są, jak dotychczas, niczym ze sobą związane. Ustanówmy relację punktową pomiędzy dwiema danymi powierzchniami za pomocą pary funkcji odwzorowawczych, to jest dwóch związków pomiędzy współrzędnymi krzywoliniowymi obu powierzchni:

$$\begin{aligned} U &= \phi_1(u, v), & J &= \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \neq 0. \\ V &= \phi_2(u, v), \end{aligned}$$

Otrzymamy wtedy jakieś odwzorowanie jednej powierzchni na drugą. Przez wprowadzenie zmiennych u, v zamiast zmiennych U, V do równań powierzchni obrazu, otrzymamy nowe równania tej powierzchni, wyrażone w tych samych zmiennych parametrowych co i powierzchnia oryginału. Siatki parametrowe obu powierzchni będą wówczas *odpowiadały sobie*. Wielkości podstawowe 1. rzędu E', F', G' dla nowych równań parametrowych powierzchni obrazu będą funkcjami zmiennych u, v (za pośrednictwem zmiennych U, V). Zachodzą wtedy następujące związki (patrz Nr 4 d):

$$\begin{aligned} E' &= \bar{E}U_u^2 + 2\bar{F}U_uV_u + \bar{G}V_u^2, \\ F' &= \bar{E}U_uV_u + \bar{F}(U_uV_v + U_vV_u) + \bar{G}V_uV_v, \\ G' &= \bar{E}U_v^2 + 2\bar{F}U_vV_v + \bar{G}V_v^2, \end{aligned} \tag{43.1}$$

$$E'G' - F'^2 = (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2) \cdot J, \text{ czyli } T' = \pm T \cdot J,$$

gdzie $T' = +\sqrt{E'G' - F'^2}$, $\bar{T} = +\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}$; małe litery dolne przy funkcjach U i V oznaczają pochodne cząstkowe tych funkcji względem odnośnej zmiennej, zaś J jest wyznacznikiem funkcyjnym dla funkcji odwzorowawczych.

Zažadajmy teraz ortogonalności obrazu siatki parametrowej (u, v) . Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest $F' = 0$, czyli

$$\bar{E}U_uU_v + \bar{F}(U_uV_v + U_vV_u) + \bar{G}V_uV_v = 0. \quad (43.2)$$

Jest to równanie różniczkowe 1. rzędu o dwóch funkcjach niewiadomych U i V : są to właśnie poszukiwane funkcje odwzorowawcze. Zadanie posiada jeden stopień swobody: jedna z funkcji może być obrana dowolnie, druga zaś — wyznaczona z równania różniczkowego. Jest więc nieskończenie wiele rozwiązań zadania; istnieje mnóstwo odwzorowań posiadających własność ortogonalnego odwzorowania siatki parametrowej powierzchni oryginału na powierzchnię obrazu, i to bez względu na to, czy siatka oryginału jest ortogonalna, czy też nie. Jeśli siatka parametrowa oryginału jest z założenia ortogonalna, z rozwiązania zadania uzyskuje się grupę odwzorowań, w których, w myśl 1. twierdzenia Tissota,
— albo siatka parametrowa będzie siatką krzywych głównych,
— albo mamy konforemność.

Szczególny przypadek zadania stanowi odwzorowanie dowolnej powierzchni na płaszczyznę. Najprostszą postacią równań parametrowych płaszczyzny są równania:

$$\begin{aligned} X &= U, \\ Y &= V, \\ Z &= 0. \end{aligned} \quad (43.3)$$

Siatka prostoliniowych współrzędnych prostokątnych X, Y jest wtedy siatką parametrową płaszczyzny. Wielkości podstawowe 1. rzędu dla powierzchni (43.3) są następujące:

$$\bar{E} = 1, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = 1.$$

Równanie (43.2), które rozwiązuje zadanie o ortogonalności obrazu siatki parametrowej (u, v) , uprości się w tym przypadku do postaci:

$$U_uU_v + V_uV_v = 0, \quad (43.4)$$

przy czym zamiast U i V możemy napisać X i Y .

ROZDZIAŁ X

ODWZOROWANIE KONFOREMNE

44. Ogólna teoria odwzorowania konforemnego

a) Wstęp.

Zasadnicze wiadomości o odwzorowaniu konforemnym: definicja, kryterium konforemności (proporcjonalność wielkości podstawowych 1. rzędu), badanie niezmienników — zostały już podane, w związku z klasyfikacją odwzorowań, w Nr. 18. Bez odpowiedzi pozostało jednak drugie zadanie podstawowe teorii odwzorowań: poszukiwanie odwzorowania konforemnego. Zadanie to stanowi treść teorii odwzorowania konforemnego jednej powierzchni na drugą. Rozważania, którymi obecnie się zajmujemy, mogą być uważane za ciąg dalszy Nr. 18.

b) Twierdzenie o liniach minimalnych.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym odwzorowania konforemnego jednej powierzchni na drugą jest wzajemna odpowiedniość linii minimalnych obu powierzchni ¹⁾.

W odwzorowaniu konforemnym linie minimalne na powierzchni I przechodzą w linie minimalne na powierzchni II. W rzeczy samej, załóżmy że odwzorowanie jest konforemne i rozpatrzmy zależność

$$dS^2 = m^2 ds^2,$$

w której skala m jest funkcją punktu powierzchni. Jeśli ds^2 znika wzdłuż krzywej na powierzchni oryginału, dS^2 będzie również zni-

¹⁾ Na rzeczywistej powierzchni linie minimalne, nazywane niekiedy liniami zerowymi, są utworami geometrycznymi urojonymi; mają one jednak ścisły związek z liniami izometrycznymi powierzchni, które są rzeczywistymi.

kać wzdłuż odpowiadającej krzywej na powierzchni obrazu: warunek odpowiedniości linii minimalnych obu powierzchni jest więc koniecznym następstwem konforemności.

Odwrotnie, jeśli w jakimś odwzorowaniu linie minimalne pierwszej powierzchni odpowiadają liniom minimalnym drugiej powierzchni, wówczas odwzorowanie jest konforemne. Aby dowieść tego twierdzenia, obierzmy linie minimalne, odpowiadające sobie (w myśl założenia) na obu powierzchniach, za linie parametrowe. Wówczas $E = G = 0$ i $E' = G' = 0$; stosunek elementów liniowych, odpowiadających sobie, przyjmie postać:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{2F' du dv}{2F du dv} = \frac{F'}{F},$$

i ma tę samą wartość dla wszystkich linii, przechodzących przez rozważany punkt powierzchni; jest więc niezależny od kierunku elementu liniowego: odwzorowanie jest konforemne. Warunek odpowiedniości linii minimalnych obu powierzchni w każdym punkcie jest więc wystarczający do konforemności odwzorowania.

Powyższe twierdzenie o liniach minimalnych gra ważną rolę w teorii odwzorowania konforemnego.

c) Zasadnicze twierdzenie teorii odwzorowania konforemnego.

Gdy p, q są parą współrzędnych izometrycznych¹⁾ na pierwszej powierzchni i P, Q parą współrzędnych izometrycznych na drugiej powierzchni, ogólne rozwiązanie zadania o konforemnym odwzorowaniu pierwszej powierzchni na drugą podaje związek:

$$P + iQ = f(p + iq), \quad (44.1)$$

(albo związek ogólniejszy $f(p + iq, P + iQ) = 0$), w którym f jest dowolną funkcją analityczną swego (swoich) argumentu (ów), i punktowowi (p, q) na pierwszej powierzchni odpowiada punkt (P, Q) na drugiej powierzchni.

¹⁾ Współrzędne izometryczne zwane są również parametrami izometrycznymi powierzchni; ich zespolone sprzężone liniowe kombinacje: $\xi = p + iq$, $\bar{\xi} = p - iq$, zwane są współrzędnymi (albo zmiennymi) symetrycznymi powierzchni, albo także parametrami linii minimalnych. Rola współrzędnych izometrycznych powierzchni w problemie odwzorowania konforemnego jest bardzo doniosła. Teorię współrzędnych izometrycznych powierzchni można znaleźć w dziełach poświęconych geometrii różniczkowej.

Dowód tego zasadniczego twierdzenia teorii konforemności dwóch powierzchni opiera się na teorii funkcji zmiennej zespolonej.

Gdy odwzorowanie ma czynić zadość pewnym warunkom, w danym przypadku konforemności, funkcje odwzorowawcze:

$$U = \phi_1(u, v),$$

$$V = \phi_2(u, v),$$

w których U, V i u, v są dowolnymi parametrami, odpowiednio dla powierzchni obrazu i oryginału, nie mogą być całkiem dowolne. Ponieważ funkcje X, Y, Z , dzięki funkcjom odwzorowawczym, stają się także funkcjami zmiennych u, v , funkcje te muszą, oprócz warunku przepisanego naturą drugiej powierzchni, spełniać jeszcze warunki przepisane odwzorowaniem.

Definicja konforemności wyraża się związkiem:

$$dS^2 = m^2 ds^2, \quad (44.2)$$

w którym skala m jest funkcją punktu powierzchni, nie wprowadzającą w żadnym razie elementów różniczkowych ds lub dS . Jest to równanie różniczkowe, a całka tego równania da poszukiwaną relację konforemną. Należy poznać jakie elementy ogólności, które mogą być do dyspozycji, całka ta zawiera.

Kwadrat elementu liniowego powierzchni, ds^2 , jest wielkością dodatnią; jest on formą kwadratową (czyli funkcją jednorodną drugiego stopnia) od du, dv . Równanie (44.2), napisane w pełni, jest następujące:

$$\bar{E} dU^2 + 2\bar{F} dU dV + \bar{G} dV^2 = m^2 (E du^2 + 2F du dv + G dv^2), \quad (44.3)$$

lub — po rozłożeniu formy kwadratowej, występującej po lewej i po prawej stronie równania, na zespolone sprzężone czynniki, liniowe względem odnośnych zmiennych parametrowych —

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\bar{E}} dU + \frac{\bar{F} + iT}{\sqrt{\bar{E}}} dV \right) \left(\sqrt{\bar{E}} dU + \frac{\bar{F} - iT}{\sqrt{\bar{E}}} dV \right) = \\ & = m^2 \left(\sqrt{E} du + \frac{F + iT}{\sqrt{E}} dv \right) \left(\sqrt{E} du + \frac{F - iT}{\sqrt{E}} dv \right), \end{aligned} \quad (44.4)$$

gdzie $\bar{T} = +\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}$, $T = +\sqrt{EG - F^2}$, $i = \sqrt{-1}$.

Linie izometryczne powierzchni pozostają, jak wiadomo, w ścisłym związku z liniami minimalnymi tejże powierzchni. Znajdziemy najpierw linie minimalne na każdej powierzchni z osobna, a potem linie te przyjmiemy za linie parametrowe.

Równanie różniczkowe linii minimalnych na powierzchni oryginalu:

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 = 0,$$

które mamy scałkować, dopuszczając dwie całki, które uzyskamy przez rozwiązanie dwóch równań różniczkowych:

$$E du + (F + iT) dv = 0,$$

$$E du + (F - iT) dv = 0.$$

Niechaj całką pierwszego z tych równań, liniowych względem dv/du , będzie

$$\xi = p + iq = \text{const.}$$

gdzie p, q są funkcjami rzeczywistymi zmiennych rzeczywistych u, v ; całką drugiego równania będzie wówczas:

$$\bar{\xi} = p - iq = \text{const.}$$

Linie $\xi = \text{const.}$, $\bar{\xi} = \text{const.}$ są poszukiwanymi liniami minimalnymi na pierwszej powierzchni, zmienne zespolone sprzężone $\xi, \bar{\xi}$ są parametrami linii minimalnych, lub parametrami symetrycznymi, zmienne zaś p, q są parametrami izometrycznymi powierzchni. Nie są to jedyne parametry linii minimalnych, ani jedyne parametry izometryczne powierzchni, jak to okażemy w punkcie d).

Następnie mamy:

$$d\xi = \mu_1 [E du + (F + iT) dv],$$

$$d\bar{\xi} = \bar{\mu}_1 [E du + (F - iT) dv],$$

przy czym $\mu_1, \bar{\mu}_1$ są zespolonymi sprzężonymi czynnikami całkującymi; są to funkcje niezależne od elementów różniczkowych; w szczególnych przypadkach mogą być wielkościami rzeczywistymi.

Podobne rozumowanie stosuje się również do powierzchni obrazu. Niechaj

$$\eta = P + iQ = \text{const.},$$

$$\bar{\eta} = P - iQ = \text{const.},$$

będą całkami równania różniczkowego $dS^2 = 0$, a tym samym równaniami linii minimalnych na tej powierzchni, w których P, Q są funkcjami rzeczywistymi zmiennych rzeczywistych U, V . $\eta, \bar{\eta}$ są zespolonymi sprzężonymi zmiennymi symetrycznymi, zaś P, Q rzeczywistymi parametrami izometrycznymi powierzchni obrazu. Będziemy mieli podobnie:

$$d\eta = \mu_2 [\bar{E} dU + (\bar{F} + i\bar{T}) dV],$$

$$d\bar{\eta} = \bar{\mu}_2 [\bar{E} dU + (\bar{F} - i\bar{T}) dV],$$

przy czym $\mu_2, \bar{\mu}_2$ są zespolonymi sprzężonymi czynnikami całkującymi.

Przyjmijmy teraz linie minimalne $\eta = \text{const.}$, $\bar{\eta} = \text{const.}$ na powierzchni obrazu; oraz linie minimalne $\xi = \text{const.}$, $\bar{\xi} = \text{const.}$ na powierzchni oryginału za linie parametrowe odnośnych powierzchni. Elementy liniowe dS^2 i ds^2 , a w związku z tym i równanie różniczkowe (44.4), znacznie się uproszczą:

$$\frac{d\eta}{\mu_2 \sqrt{E}} \frac{d\bar{\eta}}{\bar{\mu}_2 \sqrt{E}} = m^2 \frac{d\xi}{\mu_1 \sqrt{E}} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\mu}_1 \sqrt{E}};$$

po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\frac{1}{\mu_2 \bar{\mu}_2 E} = N, \quad \frac{1}{\mu_1 \bar{\mu}_1 E} = n, \quad m^2 \frac{n}{N} = \lambda, \quad (44.5)$$

równanie to napisać możemy w postaci:

$$d\eta d\bar{\eta} = \lambda d\xi d\bar{\xi},$$

czyli

$$(dP^2 + dQ^2) = \lambda (dp^2 + dq^2). \quad (44.6)$$

Przez wprowadzenie nowych zmiennych parametrowych p, q oraz P, Q na 1. i 2. powierzchni odpowiednio, za pomocą pewnych związków funkcyjnych rzeczywistych:

$$\begin{cases} u = \gamma_1(p, q), & U = \bar{\gamma}_1(P, Q), \\ v = \gamma_2(p, q), & V = \bar{\gamma}_2(P, Q), \end{cases}$$

określonych w wyżej podany sposób, elementy liniowe ds^2 i dS^2 mogą być sprowadzone do postaci izometrycznej, a równanie różniczkowe odwzorowania konforemnego—do postaci (44.6). Pierwsza

część problemu, polegająca na znalezieniu współrzędnych izometrycznych na każdej powierzchni z osobna i przyjęciu linii izometrycznych za linie parametrowe, została załatwiona.

Druga część problemu: rozwiązanie równania różniczkowego (44.6), będzie oparta na wykorzystaniu twierdzenia o liniach minimalnych, których zachowanie warunkuje konforemność odwzorowania.

Niechaj $d\eta$ znika; wówczas $d\xi \cdot d\bar{\xi}$ również znika, to jest znika albo $d\xi$, albo $d\bar{\xi}$. Przypuśćmy, że $d\eta$ i $d\xi$ znikają jednocześnie, wówczas η i ξ są jednocześnie wielkościami stałymi. Ale η jest funkcją dwóch zmiennych U, V , i ξ jest funkcją dwóch zmiennych u, v ; stąd η i ξ mogą być jednocześnie stałymi tylko wówczas, gdy między nimi istnieje jakaś funkcyjna relacja postaci

$$\eta = f(\xi), \quad \text{czyli} \quad P + iQ = f(p + iq), \quad (44.7)$$

w której f oznacza jakąkolwiek funkcję analityczną swego argumentu. Niechaj $f_1(\bar{\xi})$ oznacza funkcję sprzężoną względem $f(\xi)$, to jest powstałą z tej ostatniej przez zastąpienie w niej wielkości i przez $(-i)$ ¹⁾. Wtedy:

$$\bar{\eta} = f_1(\bar{\xi}), \quad \text{czyli} \quad P - iQ = f_1(p - iq), \quad (44.8)$$

co jest konsekwencją relacji (44.7) między zespolonymi zmiennymi η i ξ .

Jeślibyśmy wzięli $d\bar{\xi}$ zamiast $d\xi$, jako wielkość znikającą wraz z $d\eta$, mielibyśmy, rozumując podobnie, relację:

$$\eta = f(\bar{\xi}), \quad \text{czyli} \quad P + iQ = f(p - iq),$$

wraz ze sprzężoną konsekwencją:

$$\bar{\eta} = f_1(\xi), \quad \text{czyli} \quad P - iQ = f_1(p + iq).$$

Rezultatem tego założenia, dającego drugie rozwiązanie problemu, jest tylko zmiana znaku przy Q , czyli wzięcie odbicia zwierciadlanego konfiguracji względem osi P , proces który nie narusza konforemności. Cała różnica drugiego rozwiązania polega na

¹⁾ Jeśli w funkcji f wielkość urojona i wchodzi tylko pod postacią argumentu $(p + iq)$ i nie występuje w wielkościach stałych, figurujących w tej funkcji, wtedy musi być $f_1 = f$, aby rzeczywistym wartościom p, q odpowiadały rzeczywiste wartości P, Q .

tym, że podobieństwo cząsteczkowe jest *podobieństwem odwrotnym*, czyli *symetrią*, w stosunku do pierwszego rozwiązania. Jedno z rozwiązań daje więc t. zw. obraz prawy, drugie zaś — obraz lewy. Taka różnica obu rozwiązań nie jest istotna; gdy umówimy się rozróżniać na powierzchni obie jej strony: wierzch i spód, różnica ta znika, jeśli tę stronę powierzchni, którą pierwotnie uważaliśmy za wierzch, uczynimy spodem. Zwłaszcza gdy jedną z dwóch powierzchni jest płaszczyzna, rozróżnienie obu stron, wierzchniej (albo prawej) i spodniej (lub lewej) daje się zawsze zastosować. Możemy zatem ograniczyć się do jednego rozwiązania i uważać pierwszą relację, (44.7), za obejmującą oba przypadki.

Żadne restrykcje nie były poczynione co do funkcji analitycznej f .

Twierdzenie, które dowiedliśmy, możemy wypowiedzieć również w następującej formie:

Powierzchnia jest konforemnie odwzorowana na inną powierzchnię za pomocą relacji

$$\eta = f(\xi),$$

w której f jest jakąkolwiek funkcją analityczną, zaś η i ξ są parametrami linii minimalnych odnośnych powierzchni.

Podamy jeszcze dwie uwagi wiążące się z tym twierdzeniem.

1. *Odwzorowanie konforemne powierzchni na samą siebie.* Różne funkcje f dają różne konforemne odwzorowania jednej powierzchni na drugą. Wszystkie te odwzorowania na powierzchni drugiej są również konforemne wzajemnie jedno do drugiego, to znaczy różne funkcje f prowadzą do konforemnych odwzorowań powierzchni drugiej na samą siebie.

2. *Obiór dowolnej funkcji f .* W poszczególnych zadaniach odwzorowawczych jako funkcję f możemy obrać *a priori* jakąś prostą funkcję analityczną, albo też funkcja ta może być wyspecjalizowana przez nałożenie właściwych dalszych warunków, albo żądań, dodatkowych do zasadniczej cechy konforemności. Co do tej sprawy patrz Nr 44 f, Nr 45 e, 2, oraz Nr 48 c.

d) Wybór współrzędnych izometrycznych.

Współrzędne izometryczne p, q , albo związane z nimi współrzędne symetryczne $\xi, \bar{\xi}$, nie są jedynymi takimi współrzędnymi na rozważanej powierzchni. Weźmy jakąkolwiek funkcję, powiedzmy $f(\xi)$, czyli $f(p + iq)$, obu zmiennych p, q , danych jako

zmiennie izometryczne powierzchni. Rozłączmy następnie w funkcji $f(p+iq)$ obie jej, rzeczywistą i urojoną, części, tak że:

$$p' + iq' = f(p+iq), \text{ czyli } \xi' = f(\xi), \quad (44.9)$$

gdzie p', q' są rzeczywistymi funkcjami zmiennych p, q . Niechaj $f_1(\bar{\xi})$, czyli $f_1(p-iq)$, będzie funkcją sprzężoną z funkcją $f(p+iq)$; jeśli wszystkie współczynniki w funkcji f są rzeczywiste, to $f_1(\bar{\xi}) = f(\xi)$. Wtedy

$$p' - iq' = f_1(p-iq).$$

Stąd, przez różniczkowanie obu funkcyj, mamy:

$$dp' + idq' = f'(p+iq)(dp + idq),$$

$$dp' - idq' = f_1'(p-iq)(dp - idq);$$

i przeto:

$$ds^2 = n(dp^2 + dq^2)$$

$$= n'(dp'^2 + dq'^2),$$

gdzie:
$$n = n' \cdot f'(p+iq) \cdot f_1'(p-iq)$$

$$= n' |f'(p+iq)|^2,$$

tak, że n' jest wielkością rzeczywistą. Zatem nowe krzywe parametrowe $p' = \text{const.}$, $q' = \text{const.}$ są również krzywymi izometrycznymi powierzchni. Co więcej, p', q' stanowią agregat zmiennych izometrycznych powierzchni, gdy dla funkcji f dopuścimy kompletną rozmaitość formy — własność, której dowód znaleźć można w geometrii różniczkowej.

Jak już wspomniano w końcu punktu c) związek (44.9), który wytwarza agregat zmiennych izometrycznych powierzchni, wyraża konforemne odwzorowanie powierzchni na samą siebie.

$$\xi' = p' + iq' = \text{const. i } \bar{\xi}' = p' - iq' = \text{const.}$$

są bowiem, jak łatwo widzieć, również całkami równania różniczkowego $ds^2 = 0$.

W zupełnie podobny sposób, dowolna funkcja

$$P' + iQ' = F(P+iQ),$$

w której P', Q' są rzeczywistymi funkcjami rzeczywistych zmiennych izometrycznych P, Q na powierzchni obrazu, wytwarza agregat zmiennych izometrycznych P', Q' na tej powierzchni.

W rozwiązaniu ogólnym naszego zadania, podanym w twierdzeniu zasadniczym w punkcie c) możemy więc zastąpić zmienne izometryczne p, q nowymi zmiennymi izometrycznymi p', q' na pierwszej powierzchni, a także, i niezależnie od pierwszej zamiany, zmienne izometryczne P, Q zastąpić nowymi zmiennymi izometrycznymi P', Q' na drugiej powierzchni. Jakkolwiek ogólność rozwiązania zadania, przez taką zamianę jednych współrzędnych izometrycznych innymi współrzędnymi izometrycznymi, nic nie zyskuje, to jednak w zastosowaniach dogodniej jest użyć to jednej to drugiej formy.

e) Rozwiązanie zadania o konforemnym odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą.

Problem odwzorowania konforemnego powierzchni I na powierzchnię II może być rozłożony na następujące cztery etapy:

1. Obiór siatki izometrycznej i obiór współrzędnych izometrycznych p, q na powierzchni I. Linie tych współrzędnych rozkładają powierzchnię na nieskończenie małe poletka kwadratowe.

2. Obiór siatki izometrycznej i obiór współrzędnych izometrycznych P, Q na powierzchni II.

3. Obiór funkcji analitycznej f dla określenia odpowiedniości punktowej pomiędzy obu powierzchniami.

4. Wывód funkcji odwzorowawczych.

W sensie teoretycznym, pierwsze trzy etapy zostały już załatwione. Pozostała sprawa znalezienia funkcji odwzorowawczych, w zależności od dowolnych parametrów U, V i u, v na powierzchni obrazu i oryginału.

Z równań:

$$P + iQ = f(p + iq),$$

$$P - iQ = f_1(p - iq),$$

otrzymujemy:

$$P = \frac{1}{2}[f(p + iq) + f_1(p - iq)],$$

$$iQ = \frac{1}{2}[f(p + iq) - f_1(p - iq)],$$

lub, co na jedno wychodzi — po obraniu funkcji f dowolnie, nawet z wprowadzeniem w niej wielkości stałych urojonych — P jest równe części rzeczywistej, zaś iQ (przy drugim rozwiązaniu — iQ) jest równe części urojonej wyrażenia $f(p + iq)$. P i Q będą więc rzeczywistymi funkcjami zmiennych p, q ; będą to funkcje odwzorowawcze, wyrażone we współrzędnych izome-

trycznych dla obu powierzchni. Następnie, z tych funkcji, w drodze eliminacji, wyznaczmy pierwotne zmienne parametrowe U, V powierzchni obrazu, w funkcji pierwotnych zmiennych parametrowych u, v powierzchni oryginału. Będą to poszukiwane funkcje odwzorowawcze $U = \psi_1(u, v)$, $V = \psi_2(u, v)$, uskuteczniające odwzorowanie konforemne.

Rozwiązanie zadania, przy użyciu dowolnych współrzędnych krzywoliniowych u, v oraz U, V na powierzchni I oraz II odpowiednio, i znalezienie funkcji odwzorowawczych:

$$U = \psi_1(u, v),$$

$$V = \psi_2(u, v),$$

które by uskuteczniały konforemne odwzorowanie, można również uzyskać, wychodząc z ogólnego warunku konforemności:

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}.$$

Warunek ten, po podstawieniu zamiast wielkości E', F', G' ich wyrażeń (43.1), przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{E} U_u^2 + 2\overline{F} U_u V_u + \overline{G} V_u^2}{E} &= \frac{\overline{E} U_u U_v + \overline{F}(U_u V_v + U_v V_u) + \overline{G} V_u V_v}{F} = \\ &= \frac{\overline{E} U_v^2 + 2\overline{F} U_v V_v + \overline{G} V_v^2}{G}. \end{aligned} \quad (44.10)$$

Otrzymane związki dają dwa równania różniczkowe cząstkowe 1. rzędu, o dwóch funkcjach niewiadomych U i V : są to właśnie poszukiwane funkcje odwzorowawcze. Rozwiązanie tych równań stanowi główny problem zadania.

Metoda rozwiązania polega na sprowadzeniu tych równań do najprostszej formy, przez wprowadzenie odpowiednich nowych zmiennych. Znalezienie tych zmiennych jest w gruncie rzeczy najważniejszą i najtrudniejszą częścią całego zadania.

Zamiast dowolnych współrzędnych krzywoliniowych u, v na powierzchni oryginału należy wprowadzić dowolne współrzędne izometryczne p, q . Są one jakimiś funkcjami zmiennych u, v :

$$\begin{aligned} p &= \varphi_1(u, v), \\ q &= \varphi_2(u, v). \end{aligned} \quad (44.11)$$

Jak znaleźć takie funkcje, omówiono już wyżej w punkcie c). We współrzędnych izometrycznych p, q (z natury swej zawsze ortogonalnych), wielkości podstawowe 1. rzędu dla powierzchni oryginału mają upraszczające własności, a mianowicie:

$$E_{(p,q)} = G_{(p,q)}$$

$$F_{(p,q)} = 0.$$

Podobnie, zamiast dowolnych współrzędnych U, V na powierzchni obrazu, należy wprowadzić dowolne współrzędne izometryczne P, Q ; będą one jakimiś funkcjami zmiennych U, V :

$$P = \Phi_1(U, V),$$

$$Q = \Phi_2(U, V),$$

(44.12)

a wielkości podstawowe 1. rzędu dla powierzchni obrazu spełniać będą warunki:

$$E_{(P,Q)} = G_{(P,Q)},$$

$$F_{(P,Q)} = 0.$$

Wprowadzenie zamiast zmiennych u, v nowych zmiennych p, q , izometrycznych na powierzchni I, oraz zamiast U, V nowych zmiennych P, Q , izometrycznych na powierzchni II, upraszcza oba równania różniczkowe konforemności (44.10) do postaci:

$$P_p^2 + Q_p^2 = P_q^2 + Q_q^2,$$

(44.13)

$$P_p P_q + Q_p Q_q = 0.$$

Stąd, przez łatwe przekształcenie, osiągamy na koniec najprostszą ich postać:

$$\left. \begin{aligned} P_p &= Q_q, & Q_p &= -P_q, & (a) \\ P_p &= -Q_q, & Q_p &= P_q. & (b) \end{aligned} \right\} (44.14)$$

oraz

Równania różniczkowe cząstkowe, 1. rzędu, o dwóch funkcjach niewiadomych, podane pod (a) są to znane z teorii funkcji równania Cauchy-Riemanna. Rozwiązać je można piękną metodą za pomocą funkcji zmiennej zespolonej (patrz Nr 47). Równania podane pod (b) sprowadzają się do równań (a) przez zmianę znaku przy funkcji Q , to

znaczy przez wzięcie figury obrazowej, uzyskanej przez symetrię względem osi P .

W wyniku rozwiązania układu równań (a) otrzymamy związki:

$$\begin{aligned} P &= \Psi_1(p, q), \\ Q &= \Psi_2(p, q), \end{aligned} \quad (44.15)$$

dające funkcje odwzorowawcze, wyrażone w zmiennych izometrycznych, a stąd, powracając do pierwotnych zmiennych przez uwzględnienie (44.11) i (44.12), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Phi_1(U, V) &= \Psi_1(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)), \\ \Phi_2(U, V) &= \Psi_2(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)), \end{aligned}$$

albo w krótkiej formie (w przypuszczeniu, że powyższe równania dadzą się rozwiązać względem U i V):

$$\begin{aligned} U &= \psi_1(u, v), \\ V &= \psi_2(u, v). \end{aligned}$$

Teoretycznie, drugie zadanie podstawowe teorii odwzorowań w przypadku odwzorowania konforemnego, jest ogólnie w zupełności rozwiązane.

Z punktu widzenia czystej analizy matematycznej, podany rozkład problemu konforemności na cztery etapy ma stosunkowo małe znaczenie. Zamiana jednych współrzędnych izometrycznych na powierzchni innymi współrzędnymi izometrycznymi na tejże powierzchni polega w istocie na relacji analitycznej pomiędzy dwiema zmiennymi zespolonymi, podobnie jak i odwzorowanie konforemne powierzchni I na powierzchnię II . W rezultacie końcowym, odwzorowanie konforemne ustanawia pewną relację analityczną między dwiema zmiennymi zespolonymi: zmienną początkową z powierzchni I i zmienną końcową Z powierzchni II ; mało jest ważne, teoretycznie, czy pomiędzy zmienne z i Z włączono czy nie włączono jakieś zmienne zespolone pośredniczące, jeśli odpowiedniość punktowa ostateczna jest ta sama.

Można na przykład, nie tracąc nic na ogólności możliwych rozważań, przyjąć na każdej powierzchni współrzędne izometryczne najbardziej proste i zrobić jednorazowy, możliwie najprostszy, wybór funkcji f , wiążącej oba systemy współrzędnych.

Idąc po tej samej myśli, można także ograniczyć się do rozważenia jednego jakiegoś odwzorowania konforemnego powierzchni I na powierzchnię II, na przykład tego, którego definicja jest możliwie najprostsza, a następnie wystudiować odwzorowania konforemne powierzchni II na samą siebie; można uzyskać tą drogą dowolne odwzorowanie konforemne powierzchni I na powierzchnię II.

Jeśli jednak porzucimy czysto analityczny punkt widzenia, podany rozkład problemu konforemności na cztery etapy ma bardzo ważne znaczenie praktyczne. Gdy interesujemy się, z jednej strony, własnościami geometrycznymi odwzorowania, z drugiej strony wykonaniem praktycznym rachunków liczbowych, musimy wziąć pod uwagę przynajmniej relację funkcyjną między dwiema powierzchniami. Często okaże się korzystne rozłożenie w pewien sposób funkcji dowolnej, wiążącej współrzędne początkowe p, q powierzchni I ze współrzędnymi końcowymi P, Q powierzchni II, przez wprowadzenie na jednej albo na drugiej powierzchni, bądź na obu naraz, systemów współrzędnych izometrycznych pośredniczących, albo też włączenie powierzchni pomocniczej pomiędzy powierzchnię I i II. Do kompletnego studium analitycznego wszystkich odwzorowań konforemnych, interesujących geodezję i kartografię, wystarczają dwa następujące systemy współrzędnych izometrycznych:

— współrzędne izometryczne południkowe na powierzchni obrotowej,

— współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie.

f) Rozwiązania poszczególne.

Ogólne rozwiązanie zadania o konforemnym odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą zawiera *jedną funkcję dowolną*, jest więc rozwiązaniem typu A (patrz Nr 5). Wyznaczenie funkcji dowolnej stwarza problem typu B: uzyskanie *rozwiązań poszczególnych*.

Rozwiązania poszczególne mogą być inspirowane wieloma różnymi względami, można je jednak ująć w dwie grupy:

1. Wyznaczenie funkcji dowolnej, albo pewnych typów tych funkcji, przez swobodny ich obiór, a następnie wystudiowanie własności uzyskanego odwzorowania *a posteriori*. Jest to metoda par excellence, klasyczna, jej możliwości są nieograniczone, jak możliwości samej teorii funkcji analitycznych.

2. Wyznaczenie funkcji analitycznej z pewnych *a priori* żądanych, dodatkowych warunków lub własności odwzorowania: zbadanie, czy takie odwzorowanie w ogóle istnieje, i jeśli tak — znalezienie wyspecyfikowanej funkcji analitycznej, nadającej odwzorowaniu postulowane własności,

Drugą grupę rozwiązań poszczególnych możemy podzielić na podgrupy, zależnie od rodzaju stawianych warunków. Wyróżnimy trzy podgrupy, dwie z nich wynikają z praktycznego punktu widzenia, trzecia ma charakter teoretyczno-funkcyjny.

Podgrupa pierwsza, inspiracji raczej geometrycznej, polega na zainteresowaniu się figurą geometryczną krzywych przekształconych na powierzchni obrazu dla pewnych grup linii na powierzchnioryginału. Metoda ta, jak dotychczas, była zastosowana, jak się zdaje, tylko do poszukiwania odwzorowań płaskich, przekształcających południki i równoleżniki powierzchni obrotowej w krzywe płaskie przepisanej natury. Pierwszy zastosował tę metodę Lagrange do uzyskania płaskich konforemnych odwzorowań kołowych. Znaczenie tej metody jest przede wszystkim geometryczne, jej możliwe zastosowania mają jedynie cele kartograficzne na względzie.

Podgrupa druga ma szczególny wzgląd na użycie odwzorowań do celów geodezyjnych i topograficznych. Polega ona na całkowitym lub częściowym określeniu funkcji dowolnej, z warunków nałożonych a priori na skalę, albo na zniekształcenia odwzorowawcze; innymi słowy — na podporządkowaniu problemu zamiany współrzędnych problemowi zniekształceń. Pierwsze zastosowanie tej metody podał Lagrange, potem Gauss¹⁾, a następnie, i to niezależnie od sprawy konforemności, Tissot, który na tej drodze wyprowadził „la projection du minimum de deformation”. Systematyczne zastosowanie tej metody do konforemnych odwzorowań płaskich elipsoidy obrotowej spłaszczonej, albo kuli, podał Laborde, *Traite des projections*, fasc. IV, Paris, 1932.

Podgrupa trzecia polega na przyporządkowaniu sobie dwóch *obszarów zamkniętych*, ograniczonych zadanymi konturami. Ma ona duże znaczenie teoretyczne i należy do teorii funkcji analitycznych. (Patrz Nr 45 e, 2, oraz Nr 48 c).

g) Skala.

Ze związków:

$$\eta = f(\xi), \quad \bar{\eta} = f_1(\bar{\xi}),$$

czyli

$$P + iQ = f(p + iq), \quad P - iQ = f_1(p - iq),$$

¹⁾ Zarówno Lagrange, jak i Gauss stosowali tę metodę nie do ogólnego zadania wyznaczenia funkcji dowolnej, lecz tylko do wyznaczenia stałych dowolnych wchodzących w funkcje skądinąd znane.

wyrażających relację konforemną dwóch powierzchni, otrzymujemy przez różniczkowanie:

$$d\eta = f'(\xi) d\xi, \quad d\bar{\eta} = f_1'(\bar{\xi}) d\bar{\xi},$$

a przez porównanie z równaniem (44.6):

$$\lambda = m^2 \frac{n}{N} = f'(\xi) f_1'(\bar{\xi}).$$

Stąd

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{N}{n} \lambda = \frac{N}{n} f'(\xi) f_1'(\bar{\xi}), \\ &= \frac{N}{n} f'(p+iq) f_1'(p-iq), \end{aligned} \quad (44.16)$$

co daje skalę, skojarzoną z funkcją f . Skala m jest rzeczywistą funkcją punktu powierzchni, ponieważ f' i f_1' są funkcjami zespolonymi sprzężonymi; jeśli f jest funkcją rzeczywistą wówczas $f=f_1$.

Możemy też napisać:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{N}{n} \left| f'(p+iq) \right|^2 = \frac{N}{n} \left| f_1'(p-iq) \right|^2, \\ m &= \sqrt{\frac{N}{n}} \left| f'(p+iq) \right| = \sqrt{\frac{N}{n}} \left| f_1'(p-iq) \right|, \end{aligned}$$

przy czym kreski pionowe oznaczają moduł wielkości zespolonej, a więc wielkość zawsze rzeczywistą.

Wzór na skalę może być napisany w nieco innej formie. Mianowicie:

$$dS^2 = \bar{E} dU^2 + 2\bar{F} dU dV + \bar{G} dV^2 = d\eta d\bar{\eta} / \nu_2 \bar{\nu}_2 \bar{E} = N d\eta d\bar{\eta},$$

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = d\xi d\bar{\xi} / \nu_1 \bar{\nu}_1 E = n d\xi d\bar{\xi};$$

skąd

$$\frac{1}{\nu_2 \bar{\nu}_2 \bar{E}} = N = dS^2 / d\eta d\bar{\eta}; \quad \frac{1}{\nu_1 \bar{\nu}_1 E} = n = ds^2 / d\xi d\bar{\xi};$$

oraz:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{d\xi d\bar{\xi}}{ds^2} \frac{dS^2}{d\eta d\bar{\eta}} f'(\xi) f_1'(\bar{\xi}) \\ &= \frac{dp^2 + dq^2}{ds^2} \frac{dS^2}{dP^2 + dQ^2} f'(p+iq) f_1'(p-iq). \end{aligned}$$

N i n są skończonymi rzeczywistymi funkcjami zmiennych U, V i u, v odpowiednio, zaś dp i dq są rzeczywistymi liniowymi funkcjami zmiennych parametrowych du, dv .

h) Skala pól.

Widzieliśmy, że skala liniowa w każdym punkcie odwzorowania konforemnego

$$P + iQ = f(p + iq),$$

powierzchni (p, q) na powierzchnię (P, Q) , wyraża się wzorem:

$$m = \sqrt{\frac{N}{n}} |f'(p + iq)|,$$

w którym n i N są rzeczywistymi funkcjami punktu na powierzchni (p, q) i (P, Q) odpowiednio; (w przypadku dwóch płaszczyzn o współrzędnych izometrycznych prostoliniowych x, y i X, Y , n i N są równe jedności); p, q i P, Q są dowolnymi izometrycznymi parametrami odnośnych powierzchni.

Wykażemy, że w odwzorowaniu konforemnym skala pól f wyraża się wzorem:

$$f = \frac{N}{n} |f'(p + iq)|^2 = m^2,$$

czyli jest równa kwadratowi skali liniowej m .

Niechaj D oznacza dowolny obszar zamknięty na powierzchni (p, q) i D' odpowiadający mu obszar zamknięty na powierzchni (P, Q) . Pole obszaru D (które oznaczmy tą samą literą) na powierzchni (p, q) wyrazi się wzorem:

$$D = \iint_D n dp dq,$$

ponieważ element liniowy $ds^2 = n(dp^2 + dq^2)$, a element powierzchniowy $dD = \sqrt{EG - F^2} dp dq = n dp dq$ (gdyż: $E = G = n$, $F = 0$).

Podobnie na powierzchni (P, Q) :

$$D' = \iint_{D'} N dP dQ = \iint_D N \frac{\partial (P, Q)}{\partial (p, q)} dp dq,$$

na skutek znanego twierdzenia o zamianie zmiennych w całce podwójnej. Teraz obliczymy wyznacznik funkcyjny:

$$\frac{\partial (P, Q)}{\partial (p, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)^2,$$

na skutek równań Cauchy-Riemanna (patrz wzór (47.2)). Ale

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)^2 = \left| \frac{\partial P}{\partial p} + i \frac{\partial Q}{\partial p} \right|^2 = |f'(p + iq)|^2.$$

A więc

$$D' = \iint_D N |f'(p + iq)|^2 dp dq.$$

Stosunek pól dowolnych obszarów skończonych D' i D , odpowiadających sobie na powierzchni obrazu i oryginału w odwzorowaniu konforemnym jest następujący:

$$\frac{D'}{D} = \frac{\iint_D N |f'(p + iq)|^2 dp dq}{\iint_D n dp dq},$$

zaś skala pól f , czyli stosunek korespondujących elementów powierzchniowych, jest:

$$f = \frac{dD'}{dD} = \frac{N}{n} |f'(p + iq)|^2 = m^2. \quad (44.17)$$

45. Odwzorowania konforemne płaskie

a) Teoria ogólna.

Gdy powierzchnią obrazu jest *płaszczyzna*, konforemne odwzorowanie dowolnej powierzchni na płaszczyznę uzyskujemy za pomocą dowolnego związku funkcyjnego:

$$X + iY = f(p + iq), \quad (45.1)$$

lub $\eta = f(\xi)$; współrzędne prostokątne i prostoliniowe X, Y na płaszczyźnie są, jak wiadomo, współrzędnymi izometrycznymi płaszczyzny.

Nie są to jedyne współrzędne izometryczne płaszczyzny; nowe współrzędne prostokątne płaskie X', Y' (lecz niekoniecznie prostoliniowe), określone dowolną zależnością funkcyjną $X' + iY' = F(X + iY)$, są również współrzędnymi izometrycznymi płaszczyzny, a zależność ta wyraża konforemne odwzorowanie płaszczyzny na samą siebie.

Skala m w konforemnym odwzorowaniu płaskim dowolnej powierzchni wyraża się wzorem:

$$m^2 = \frac{1}{n} f'(p + iq) \overline{f'(p - iq)} = \frac{1}{n} |f'(p + iq)|^2,$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{n} |f'(p + iq)|^2}, \quad (45.2)$$

ponieważ dla płaszczyzny, w przypadku współrzędnych kartezjańskich, $N = 1$.

Nadmieniono już w Nr. 13., że gdy dwie powierzchnie są konforemnie odwzorowane jedna na drugą, i jedna z nich jest konforemnie odwzorowana na trzecią powierzchnię, to i pozostała jest także konforemnie zrelacjonowana z tą trzecią, ponieważ w korespondujących punktach trzy te powierzchnie są częściowo podobne do siebie. Stąd, aby skojarzyć ze sobą konforemnie jakiegokolwiek dwie powierzchnie, wystarczy każdą z nich odwzorować oddzielnie na pewną *standartową* trzecią powierzchnię. Im prostsza będzie ta ostatnia, tym prostsze będą równania konforemności. A zatem *płaszczyzna* jest najodpowiedniejszą powierzchnią, jaką należy przyjąć za powierzchnię standartową. Redukcję problemu odwzorowawczego możemy posunąć jeszcze dalej; ponieważ wszystkie odwzorowania konforemne dowolnej powierzchni na płaszczyznę, są również konforemne wzajemnie, jedno do drugiego, problem konforemnego odwzorowania jednej powierzchni na drugą redukuje się w końcu do jakiegoś *jednego*, możliwie najprostszego, odwzorowania konforemnego powierzchni na płaszczyznę i *wszystkich* konforemnych odwzorowań płaszczyzny na samą siebie.

b) Konforemne odwzorowanie powierzchni obrotowej na płaszczyznę.

1. Teoria ogólna.

Obszerną grupę ważnych przypadków, które faktycznie były podstawą badań Lagrange'a nad teorią map, dostarczają powierzchnie obrotowe.

Siatkę ortogonalną, utworzoną przez południki i równoleżniki powierzchni obrotowej nazywamy *siatką południkową*; jest to najbardziej naturalna siatka parametrowa powierzchni, związana jest bowiem z osią obrotu. Siatka południkowa składa się z dwóch rodzin linii: rodziny linii geodezyjnych (południki) i rodziny kół geodezyjnych (równoleżniki), które są zresztą kołami płaskimi. Wobec tego *siatka południkowa jest siatką linii izometrycznych*, należy tylko określić parametry izometryczne tej siatki.

Obierzmy oś powierzchni za oś z układu i oznaczmy literą r odległość dowolnego punktu powierzchni od osi obrotu. Równania parametrowe dowolnej powierzchni obrotowej mogą być wyrażone za pomocą związków:

$$x = r \cos \lambda, \quad y = r \sin \lambda, \quad z = f(r), \quad (45.3)$$

w których λ jest długością geograficzną względem jakiegoś ustalonego południka wyjściowego, zaś f — dowolną funkcją rzeczywistą, określającą krzywą tworzącą w płaszczyźnie (z, r) . Przy użyciu parametrów r, λ , kwadrat elementu liniowego powierzchni wyrazi się wzorem:

$$\begin{aligned} d s^2 &= d x^2 + d y^2 + d z^2 \\ &= r^2 \left(\frac{d \sigma^2}{r^2} + d \lambda^2 \right), \quad \text{patrz Przypis 7,} \end{aligned} \quad (45.4)$$

przy czym $d \sigma$ oznacza element łuku południka w rozważanym punkcie:

$$\begin{aligned} d \sigma^2 &= d r^2 + d z^2 \\ &= [1 + f'^2(r)] d r^2. \end{aligned} \quad (45.5)$$

Wielkości podstawowe 1. rzędu są więc:

$$E = 1 + f'^2(r), \quad F = 0, \quad G = r^2.$$

Krzywymi parametrowymi powierzchni są południki $\lambda = \text{const.}$ i równoleżniki $r = \text{const.}$ (albo $\sigma = \text{const.}$). Wielkości $r, z, d \sigma$ są funkcjami bieżącego parametru linii południkowej; najbardziej dla zastosowań naturalnym parametrem bieżącym południka powierzchni obrotowej jest szerokość geograficzna φ .

Jak widzimy z powyższych wzorów, parametry południkowe r, λ , albo także σ, λ , nie są parametrami izometrycznymi powierzchni obrotowej. Łatwo jednak z nich uzyskać takie parametry przez wprowadzenie jednej tylko nowej zmiennej ψ , określonej równaniem różniczkowym:

$$\begin{aligned} d \psi &= \frac{d \sigma}{r}, \\ \text{czyli } d \psi &= \frac{1}{r} \sqrt{1 + f'^2(r)} d r, \\ \text{skąd } \psi &= \int \frac{1}{r} \sqrt{1 + f'^2(r)} d r. \end{aligned} \quad (45.6)$$

Krzywe $\psi = \text{const.}$ są tymi samymi krzywymi, co i krzywe $r = \text{const.}$, a więc równoleżnikami; kwadrat elementu liniowego przyjmie wówczas postać izometryczną:

$$ds^2 = r^2 (d\psi^2 + d\lambda^2); \quad n = r^2. \quad (45.7)$$

Południki i równoleżniki są liniami izometrycznymi, zaś zmienne ψ, λ są *izometrycznymi parametrami południkowymi* powierzchni obrotowej. Nie są to jedyne parametry izometryczne tej powierzchni, lecz są najprostsze.

Współrzędne kartezjańskie X, Y są izometrycznymi parametrami płaszczyzny, ponieważ

$$dS^2 = dX^2 + dY^2; \quad N = 1.$$

W myśl zasadniczego twierdzenia o odwzorowaniu konforemnym jednej powierzchni na drugą, związek:

$$X + iY = f(\psi + i\lambda), \quad (45.8)$$

w którym f jest dowolną funkcją analityczną swego argumentu, ustanawia konforemne odwzorowanie powierzchni obrotowej na płaszczyznę, jako ogólne rozwiązanie zadania.

Skala m , stosunek elementu liniowego dS płaszczyzny do odpowiadającego mu elementu liniowego ds powierzchni, określi się za pomocą wzoru:

$$m^2 = \frac{1}{r^2} f'(\psi + i\lambda) f_1'(\psi - i\lambda), \quad (45.9)$$

$$m = \frac{1}{r} \left| f'(\psi + i\lambda) \right|,$$

w którym $f_1(\psi - i\lambda)$ oznacza funkcję sprzężoną z funkcją $f(\psi + i\lambda)$.

Gdybyśmy określili odwzorowanie konforemne za pomocą funkcji

$$\psi + i\lambda = F(X + iY),$$

skala wyrażałaby się wzorem:

$$\frac{1}{m^2} = r^2 F'(X + iY) \cdot F_1'(X - iY) = r^2 |F'(X + iY)|^2,$$

zaś ψ i λ wzorami:

$$\psi = \frac{1}{2} [F(X + iY) + F_1(X - iY)],$$

$$i\lambda = \frac{1}{2} [F(X + iY) - F_1(X - iY)].$$

Stąd wynika, że linie na płaszczyźnie, które są obrazami południków powierzchni, dane są za pomocą równania:

$$F(X + iY) + F_1(X - iY) = \text{const.};$$

zaś linie na płaszczyźnie, które odwzorują równoleżniki powierzchni, dane są za pomocą równania:

$$F(X + iY) - F_1(X - iY) = \text{const.}$$

Dwa szczególne przypadki obioru funkcji dowolnej f (grupa 1., Nr 44 f) mają specjalne znaczenie. Są one rozpatrzone poniżej.

2. *Konforemne odwzorowanie walcowe powierzchni obrotowej na płaszczyznę.*

Jednym z najprostszych przypadków obioru postaci funkcji dowolnej $f(\xi)$ jest postać liniowa: $f(\xi) = k\xi$, w której k jest dowolną stałą rzeczywistą. Otrzymujemy wówczas:

$$\left. \begin{aligned} X + iY &= k(\psi + i\lambda), \\ X &= k\psi, \quad Y = k\lambda; \end{aligned} \right\} \quad (45.10)$$

punktowi (ψ, λ) na powierzchni odpowiada, na mocy tego związku, punkt (X, Y) na płaszczyźnie. Odwzorowanie konforemne powierzchni obrotowej na płaszczyznę za pomocą funkcji liniowej (45.10) nazywa się odwzorowaniem *walcowym*.

Ze wzorów (45.10) widzimy, że rodzina równoleżników $\psi = \text{const.}$ i rodzina południków $\lambda = \text{const.}$ na powierzchni obrotowej, odwzorują się na płaszczyźnie w dwie rodziny równoległych linii prostych: $X = \text{const.}$ i $Y = \text{const.}$, odpowiednio. Te dwie rodziny prostych równoległych są prostopadłe do siebie, jak zresztą należało oczekiwać, wobec zachowania kątów. Południki o stałej różnicy długości geograficznej λ , stają się równoodległymi równoległymi do siebie prostymi $Y = \text{const.}$ na płaszczyźnie. Równoleżniki o stałej różnicy parametru izometrycznego południkowego ψ , stają się równoległymi do siebie prostymi $X = \text{const.}$, których wzajemne odstępstwa wzrastają dla malejących r (lub ku biegunom, jeśli powierzchnia obrotowa je posiada).

Funkcja f_1 sprzężona z funkcją f będzie:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{\xi}) &= f_1(\psi - i\lambda) \\ &= k(\psi - i\lambda). \end{aligned}$$

Stąd, na podstawie wzoru ogólnego (45.9) na skalę,

$$m = \frac{k}{r}, \quad (45.11)$$

ponieważ każda z pochodnych f' i f_r' jest równa stałej k . Tak więc skala jest jednakowa wzdłuż równoleżnika $r = \text{const.}$, i wzrasta wraz ze zmniejszaniem się odległości r punktu powierzchni od osi obrotu. Jeśli powierzchnia obrotowa posiada biegun, r maleje do zera w miarę zbliżania się po południku ku biegunowi, zaś skala m rośnie bardzo szybko i staje się nieskończenie wielka w biegunie $r = 0$.

Stała k pozostaje w naszej dyspozycji i może być wykorzystana do lepszego przystosowania obrazu pewnego obszaru do odpowiadającego mu oryginału. Nie ma ona żadnego wpływu na strukturę obrazu, lecz tylko na jego wielkość, dlatego można ją nazwać *stałą skali*. Stała skali k może być określona z jakiegoś dodatkowego warunku, na przykład, żeby na pewnym równoleżniku r_0 skala m była równa 1; (przy symetrii powierzchni obrotowej względem płaszczyzny (x, y) — na dwóch równoleżnikach, o tej samej wartości promienia r_0 , równoodległych od równika).

Jakakolwiek linia prosta $aX + bY + c = 0$ na płaszczyźnie obrazu, przecina linie $Y = \text{const.}$ pod stałym kątem $\alpha = \text{arc ctg}(-b/a)$. Dzięki konforemności, odpowiadająca jej linia $k(a\psi + b\lambda + c) = 0$ na powierzchni obrotowej przecina południk $\lambda = \text{const.}$ pod stałym kątem, równym poprzedniemu. Jest to równanie liniowe względem zmiennych izometrycznych południkowych ψ, λ . Taka linia na powierzchni obrotowej nazywa się *loksodromą*. Podstawiając wartość dla ψ , znajdziemy równanie loksodromy na powierzchni obrotowej:

$$a \int \frac{d\sigma}{r} + b\lambda = \text{const.}, \text{ czyli } a \int \frac{1}{r} \sqrt{1 + f'^2(r)} dr + b\lambda = \text{const.} \quad (45.12)$$

Trójkątowi prostoliniowemu na płaszczyźnie odpowiada trójkąt krzywoliniowy, którego boki są loksodromami, na powierzchni obrotowej. Ponieważ odpowiadające sobie kąty w obu figurach są sobie równe, dzięki konforemności odwzorowania, wynika stąd, że *suma kątów krzywoliniowego trójkąta loksodromicznego na powierzchni obrotowej jest równa dwóm kątom prostym*. Z konforemnego walcowego (normalnego) odwzorowania powierzchni obrotowej na płaszczyznę uzyskamy agregat odwzorowań *loksodromiczno-linearnych* (w których wszystkie loksodromy powierzchni obrotowej przekształcają się w linie proste płaszczyzny), przez przekształcenie rzutowe, czyli kolineację tej płaszczyzny. Tracą one jednak konforemność, z wyjątkiem przekształcenia przez podobieństwo ¹⁾.

¹⁾ Patrz Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme, 1/1935, 1/1936: Prof. dr Karl Simon, Neue Netzentwürfe für Kurskarten von Gebieten höherer Breite.

3. Konforemne odwzorowanie stożkowe powierzchni obrotowej na płaszczyznę.

Drugim prostym przypadkiem szczególnego obioru formy dla funkcji $f(\xi)$ jest funkcja wykładnicza: $f(\xi) = k e^{c\xi}$, w której k, c są dwiema dowolnymi stałymi rzeczywistymi, z zastrzeżeniem $0 \leq c \leq 1$. Otrzymujemy wówczas zależność konforemną między płaszczyzną i powierzchnią obrotową:

$$\left. \begin{aligned} X + iY &= k e^{c(\psi + i\lambda)} \\ &= k e^{c\psi} (\cos c\lambda + i \sin c\lambda), \\ \text{tak, że} \quad X &= k e^{c\psi} \cos c\lambda, \quad Y = k e^{c\psi} \sin c\lambda. \end{aligned} \right\} (45.13)$$

Odwzorowanie konforemne powierzchni obrotowej na płaszczyznę za pomocą funkcji wykładniczej (45.13) zwie się odwzorowaniem *stożkowym*.

Jeśli na płaszczyźnie (X, Y) , zamiast współrzędnych prostokątnych, użyjemy współrzędnych biegunowych, określonych zależnościami:

$$X = \rho \cos \alpha,$$

$$Y = \rho \sin \alpha,$$

w których ρ oznacza promień wodzący, zaś α amplitudę, wówczas wzory (45.13), dające relację konforemną, można przedstawić w postaci:

$$\rho = k e^{c\psi}, \quad \alpha = c\lambda.$$

Ze wzorów (45.13) otrzymujemy:

$$X = Y \operatorname{ctg} c\lambda, \quad X^2 + Y^2 = k^2 e^{2c\psi}.$$

Rodzina południków $\lambda = \text{const.}$ na powierzchni obrotowej odtwarza się na płaszczyźnie jako pęk prostych, przechodzących przez początek układu. Rodzina równoleżników $\psi = \text{const.}$ — jako rodzina łuków kół współśrodkowych, oczywiście ortogonalnych względem pęku prostych południkowych, ze środkiem kół w początku układu. Ortogonalna siatka południkowa powierzchni obrotowej przechodzi w ortogonalną siatkę współśrodkowych łuków kołowych i ich promieni na płaszczyźnie.

Obliczmy na koniec skalę m . Funkcja f_1 , sprzężona z funkcją f , będzie równa funkcji f ,

$$\begin{aligned} f_1(\bar{\xi}) &= k e^{c \bar{\xi}} \\ &= k e^{c(\psi - i\lambda)}. \end{aligned}$$

Pochodne $f'(\xi)$ i $f_1'(\bar{\xi})$ będą przeto:

$$f'(\xi) = k c e^{c \xi}, \quad f_1'(\bar{\xi}) = f'(\xi) = k c e^{c \bar{\xi}}.$$

Skala m^2 , według ogólnego wzoru (45.9), wyrazi się więc wzorem:

$$m^2 = \frac{1}{r^2} k c e^{c \xi} \cdot k c e^{c \bar{\xi}} = \frac{k^2 c^2}{r^2} e^{c(\xi + \bar{\xi})},$$

albo, zważywszy że $\xi = \psi + i\lambda$, $\bar{\xi} = \psi - i\lambda$:

$$m = \frac{k c}{r} e^{c \psi} = \frac{\rho c}{r}. \quad (45.14)$$

Jak widzimy skala jest funkcją jednej tylko zmiennej (gdyż ψ i r są funkcjami jednego tylko parametru bieżącego linii południkowej). Skala jest więc jednakowa wzdłuż równoleżnika $r = \text{const.}$

Funkcje odwzorowawcze (45.13) zawierają dwie stałe, którymi możemy dowolnie do pewnego stopnia zadysponować, i uzyskać rozmaite przystosowanie odwzorowania do interesującego nas obszaru. Stała k nie ma wpływu na strukturę obrazu, lecz tylko na jego wielkość; jest więc stałą skali. Stała c ma wpływ na strukturę obrazu, nie wpływa jednak na naturę linii przekształconej siatki parametrowej; nazywamy ją *stałą stożka*. Obie te stałe mogą być wyznaczone z rozmaitych dwóch dodatkowych warunków, stawianych odwzorowaniu.

Najczęściej żądanymi warunkami są:

Pierwsze warunki Lamberta (1772):

1. Na pewnym dowolnie obranym równoleżniku r_0 skala ma być minimum.

2. Na tymże równoleżniku skala ma się równać jedności.

W formie matematycznej warunki te wyrażają się jak następuje:

$$c = \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)_{r=r_0}, \quad \frac{k c}{r_0} e^{c \psi_0} = 1. \quad (45.15)$$

Otrzymujemy wówczas konforemne odwzorowanie stożkowe z *jednym głównym równoleżnikiem* r_0 .

Drugie warunki Lamberta (1772):

1. Na dwóch równoleżnikach r_1 i r_2 , obranych dowolnie, skale mają być jednakowe.

2. Na tychże równoleżnikach skala ma być równa jedności.

W formie matematycznej warunki te wyrażą się jak następuje:

$$\frac{kc}{r_1} e^{c\psi_1} = \frac{kc}{r_2} e^{c\psi_2} = 1. \quad (45.16)$$

Otrzymujemy wówczas konforemne odwzorowanie stożkowe z dwoma głównymi równoleżnikami, czyli t. zw. *drugie odwzorowanie Lamberta*.

Warunki Gaussa (1822, patrz Nr 46 d):

1. Na dwóch równoleżnikach r_1 i r_2 , obranych dowolnie, skale mają być jednakowe.

2. Na dowolnym równoleżniku r_0 , leżącym pomiędzy r_1 i r_2 skala ma być równa jedności (w szczególności na tym, dla którego skala osiąga minimum).

W formie matematycznej warunki te wyrażą się jak następuje:

$$\frac{kc}{r_1} e^{c\psi_1} = \frac{kc}{r_2} e^{c\psi_2}, \quad \frac{kc}{r_0} e^{c\psi_0} = 1. \quad (45.17)$$

Stąd otrzymujemy:

$$c = \frac{\log \operatorname{nat} r_1 - \log \operatorname{nat} r_2}{\psi_1 - \psi_2}, \quad k = \frac{r_0}{c e^{c\psi_0}}.$$

Szczególny przypadek konforemnego odwzorowania stożkowego, gdy stała stożka c jest równa *jedności* nazywa się konforemnym odwzorowaniem *azymutalnym* ($\alpha = \lambda$) powierzchni obrotowej na płaszczyznę. Pęk prostoliniowych promieni na płaszczyźnie pokrywa wówczas całą płaszczyznę, nie zaś tylko jej wycinek; oraz rodzina współśrodkowych kół zawiera całe okręgi kół, nie zaś tylko ich częściowe łuki, jako obrazy równoleżników. $c = 1$ jest jednym z granicznych przypadków konforemnego odwzorowania stożkowego, gdyż dla $c > 1$ tracimy jednoznaczność odpowiedniość punktową, co, z punktu widzenia praktyki, jest niedopuszczalne.

Drugim granicznym przypadkiem odwzorowania stożkowego jest $c = 0$. Dla uzyskania wzoru nie możemy wprost podstawić $c = 0$ do (45.13), gdyż zależność ta staje się wówczas iluzoryczna. Musimy wykonać przejście do granicy, gdy $c \rightarrow 0$. Rozwińmy na szereg potęgowy funkcję wykładniczą we wzorze:

$$X + iY = k e^{c(\psi + i\lambda)}.$$

Otrzymamy:

$$X + iY = k \left\{ 1 + \frac{c(\psi + i\lambda)}{1!} + \frac{[c(\psi + i\lambda)]^2}{2!} + \frac{[c(\psi + i\lambda)]^3}{3!} + \dots \right\},$$

$$X + iY - k = kc \{(\psi + i\lambda) + (1/c) \cdot W(c^2)\},$$

gdzie $W(c^2)$ oznacza wyrazy zawierające c^2 jako najniższą potęgę c . Przejdźmy teraz do granicy, po obu stronach równania, przy $c \rightarrow 0$. Otrzymamy:

$$\lim_{c \rightarrow 0} (X - k + iY) = \lim_{c \rightarrow 0} kc(\psi + i\lambda),$$

ponieważ $\lim_{c \rightarrow 0} W(c^2)/c$ jest zerem. Gdy $c \rightarrow 0$ wyrażenia $X - k$ i kc muszą dążyć do pewnych skończonych wartości $\bar{X}$ i $\bar{k}$, o ile chcemy uzyskać zależność odwzorowawczą; k musi więc dążyć do nieskończoności, gdy c dąży do zera. Ostatecznie, drugi graniczny przypadek, $c = 0$, odwzorowania stożkowego (45.13) jest odwzorowaniem walcowym:

$$\bar{X} + iY = \bar{k}(\psi + i\lambda).$$

Zakres wartości stałej stożka c jest więc, w użytecznych przypadkach, ograniczony przedziałem zamkniętym:

$$0 \leq c \leq 1;$$

dla granicznej wartości $c = 0$ odwzorowanie stożkowe przechodzi w walcowe, zaś dla granicznej wartości $c = 1$ — w odwzorowanie azymutalne.

Jeszcze jedna kwestia w związku z odwzorowaniem stożkowym: dla jakiej wartości bieżącego parametru południkowego skala osiąga ekstremum? W tym celu należy przyrównać do zera pierwszą pochodną skali, względem tego parametru, i rozwiązać uzyskane równanie. Będziemy mieli:

$$m' = \frac{kce^c\psi \cdot c\psi' \cdot r - r' \cdot kce^c\psi}{r^2} = \frac{kce^c\psi (cr\psi' - r')}{r^2} = 0,$$

stąd

$$cr\psi' - r' = 0,$$

$$c = \frac{r'}{r\psi'} = \frac{dr}{d\sigma}, \quad \text{czyli} \quad c = \frac{d(\nu \cos \varphi)}{\rho d\varphi}; \quad (45.18)$$

znaczkę górne liter oznaczają pochodne odnośnych funkcji względem bieżącego parametru południkowego, ρ i ν oznaczają główne

promienie krzywizny powierzchni obrotowej w rozważanym punkcie, zaś φ szerokość geograficzną. Nie trudno dowieść, że dla tej wartości stałej c , druga pochodna, w użytecznych przypadkach, jest dodatnia, a więc skala m osiąga *minimum* dla wartości φ i c związanych równaniem (45.18).

c) Konforemne odwzorowanie kuli na płaszczyznę.

1. Teoria ogólna.

Obierzmy siatkę południkową za siatkę parametrową kuli, a długość i szerokość geograficzną, λ i φ , za parametry; równanie kuli o promieniu R wyrazi się wtedy związkami:

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = R \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = R \sin \varphi.$$

Element liniowy kuli będzie:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (R d\varphi)^2 + (R \cos \varphi d\lambda)^2 \\ &= d\sigma^2 + r^2 d\lambda^2. \end{aligned}$$

ponieważ $d\sigma = R d\varphi$, $r = R \cos \varphi$.

Parametry λ, φ nie są współrzędnymi izometrycznymi kuli. Dla znalezienia takich współrzędnych należy zastosować metodę, podaną w ogólnym przypadku powierzchni obrotowej. Trzeba więc określić nowy parametr φ_{ik} z równania różniczkowego:

$$d\varphi_{ik} = \frac{d\sigma}{r} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Przez całkowanie otrzymamy (Przypis 8):

$$\varphi_{ik} = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \pm \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) + \operatorname{const.},$$

przy czym uwzględniamy jednocześnie albo znaki górne, albo znaki dolne. Zwykle zakłada się, że dla $\varphi = 0$ chcemy mieć również $\varphi_{ik} = 0$, albo, co na jedno wychodzi, bierze się całkę w granicach od 0 do φ ; wówczas stała całkowania jest równa zero i

$$\varphi_{ik} = \pm \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) = \pm \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \frac{1 \pm \sin \varphi}{1 \mp \sin \varphi}. \quad (45.19)$$

Parametry φ_{ik}, λ są *izometrycznymi współrzędnymi południkowymi dla kuli* (zwanymi niekiedy współrzędnymi Mercatora); φ_{ik} zowie się *szerokością izometryczną kuli* (nazywana także szerokością wzrastającą kuli, lub funkcją Mercatora).

Wszystkie odwzorowania konforemne kuli na płaszczyznę zawiera związek:

$$X + iY = f(\varphi_{ik} + i\lambda),$$

czyli

$$X + iY = f \left[\pm \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) + i\lambda \right], \quad (45.20)$$

w którym f jest dowolną funkcją analityczną swego zespolonego argumentu.

Skala wyrazi się wzorem:

$$m^2 = \frac{1}{r^2} f'(\varphi_{ik} + i\lambda) \cdot f_1'(\varphi_{ik} - i\lambda),$$

$$m = \frac{1}{R \cos \varphi} |f'(\varphi_{ik} - i\lambda)|,$$

w którym f_1 oznacza funkcję zespoloną, sprzężoną z funkcją f , znaczki górne oznaczają pochodne funkcji względem odnośnych zespolonych zmiennych, zaś $|\dots|$ oznacza moduł wielkości zespolonej.

Rozwiązanie ogólne (45.20) zadania o konforemnym odwzorowaniu kuli na płaszczyznę może być również ujęte w inny wzór, który, dzięki swej pięknej formie, zasługuje na podanie. Okażemy że: jeśli x, y, z oznaczają współrzędne prostokątne punktu bieżącego na powierzchni kuli o promieniu R , każde konforemne odwzorowanie kuli na płaszczyznę ($X Y$) zawiera związek:

$$X + iY = f \left(\frac{x + iy}{R + z} \right)$$

dla rozmaitych form funkcji f .

Istotnie, wskutek dowolnego wyboru współrzędnych izometrycznych na powierzchni (patrz Nr 44 d), możemy zamiast współrzędnych izometrycznych południkowych φ_{ik}, λ wprowadzić nowe współrzędne izometryczne p', q' , na mocy związku:

$$p' + iq' = F(\varphi_{ik} - i\lambda).$$

Obierzmy funkcję wykładniczą $e^{-(\varphi_{ik} - i\lambda)}$ jako funkcję dowolną w powyższym równaniu. Otrzymamy wówczas:

$$p' + iq' = e^{-(\varphi_{ik} - i\lambda)} = e^{-\varphi_{ik}} \cdot e^{i\lambda}$$

$$= e^{-\log \operatorname{nat} \operatorname{tg} (\pi/4 - \varphi/2)} \cdot e^{i\lambda} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi \right) (\cos \lambda + i \sin \lambda),$$

a przez przyrównanie do siebie oddzielnie części rzeczywistych i oddzielnie części urojonych po obu stronach tego równania:

$$p' = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi \right) \cos \lambda, \quad q' = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \varphi \right) \sin \lambda.$$

Konforemne odwzorowanie kuli na płaszczyznę będzie więc:

$$\begin{aligned} X + iY &= f(p' + iq') \\ &= f \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi \right) (\cos \lambda + i \sin \lambda) \right]. \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasach możemy przekształcić jak następuje:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (\cos \lambda - i \sin \lambda) &= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)} (\cos \lambda + i \sin \lambda) \\ &= \frac{\cos \varphi \cos \lambda + i \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi} \cdot \frac{R}{R} = \frac{x + iy}{R + z}. \end{aligned}$$

A więc:

$$X + iY = f \left(\frac{x + iy}{R + z} \right),$$

$$X - iY = f_1 \left(\frac{x - iy}{R + z} \right),$$

gdzie f_1 oznacza funkcję sprzężoną z funkcją f .

Zamiast $f \{(x + iy)/(R + z)\}$, można, jak łatwo widzieć, wziąć również dowolną funkcję od $(y + iz)/(R + x)$, albo od $(z + ix)/(R + y)$.

Czy funkcja f może być określona tak, ażeby wszystkie koła wielkie kuli stawały się liniami prostymi na płaszczyźnie; czyli, żeby odwzorowanie konforemne kuli na płaszczyznę było zarazem odwzorowaniem geodezyjnym? Nie, nie ma takiej funkcji, aby to miało miejsce. Weźmy bowiem najprostszą funkcję $f(\xi) = \xi$, to znaczy:

$$X + iY = \frac{x + iy}{R + z}.$$

Wtedy:

$$X = \frac{x}{R + z}, \quad Y = \frac{y}{R + z}.$$

Weźmy linię prostą $aX + bY + c = 0$ na płaszczyźnie obrazu. Oryginalną linią na kuli dla tej prostej będzie:

$$\frac{ax}{R+z} + \frac{by}{R+z} + c = 0,$$

czyli

$$ax + by + cz + cR = 0;$$

jest to pewna płaszczyzna, która wraz z kulą:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

da w przecięciu koło, będące oryginałem dla rozważanej prostej. Koło to nie jest kołem wielkim: gdyż jego płaszczyzna nie przechodzi przez środek kuli, chyba że $c = 0$, co daje pęk płaszczyzn południkowych. Zatem nawet najprostsza postać funkcji nie może spełniać warunku, żeby wszystkie koła wielkie kuli odtwarzały się w odwzorowaniu konforemnym jako linie proste płaszczyzny.

2. *Konforemne odwzorowanie walcowe kuli na płaszczyznę, czyli odwzorowanie Mercatora.*

Obierzmy za funkcję dowolną f , funkcję liniową:

$$X + iY = k(\varphi_{ik} + i\lambda),$$

wyrażającą proporcjonalność zmiennych zespolonych płaszczyzny i kuli.

Mamy wówczas:

$$X = k\varphi_{ik} = \pm k \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) = \pm \frac{1}{2} k \log \operatorname{nat} \frac{1 \pm \sin \varphi}{1 \mp \sin \varphi},$$

$$Y = k\lambda,$$

oraz skala:

$$m = \frac{k}{r} = \frac{k}{R \cos \varphi}.$$

Odwzorowanie to zwie się krótko odwzorowaniem *Mercatora*.

Gerhard Kremer, bardziej znany pod zlatynizowanym nazwiskiem jako *Mercator* (1512 — 1594), sporządził w roku 1569 swą mapę świata, w której uzyskał lokalną poprawność kształtów w małych obszarach, rezygnując z osiągnięcia poprawności mapy pod innymi względami. Sposób konstrukcji mapy był krótko, lecz niewystarczająco, opisany w legendzie oryginału mapy, faktycznie jednak mapa Mercatora była przybliżonym rezultatem zamierzonego osiągnięcia. Prawdziwa jej zasada, to jest metoda obliczenia i konstrukcji siatki geograficznej, była ogłoszona dopiero po upływie 30. lat od chwili pojawienia się mapy; w roku 1599 *Edward Wright*, matematyk z Cambridge, zbadał teorię odwzorowania w pełniejszym stopniu

i podał zasadę matematyczną mapy tego typu. Rezultaty swe opublikował w pracy *Certain Errors in Navigation Detected and Corrected*. Wright obliczył ulepszoną tablicę, podającą łuki południka w postaci, jak obecnie mówimy, szerokości izometrycznej albo wzrastającej; poznał on dla kuli zależność $ds:du = \sec \varphi$, na podstawie której obliczył swoją tablicę przez kolejne dodawanie wartości secansa dla 1', 2', 3', etc., ponieważ rachunek całkowy nie był jeszcze znany w tym czasie. Była to przybliżona teoria odwzorowania. Dopiero około roku 1645 Henry Bond zauważył, że tablica obliczona przez Wright'a podaje logarytmy tangensów, podczas gdy wywód całki:

$$\int_0^{\varphi} \sec \varphi d\varphi = \pm \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right)$$

podał pierwszy James Gregory (1638 — 1675), matematyk szkocki, w roku 1668. W ten sposób upłynęło prawie stulecie od pierwszej mapy Mercatora, zanim równanie $X = \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi/2)$ dla rzędnej na płaszczyźnie w funkcji szerokości było ostatecznie wykazane.

3. Konforemne odwzorowanie stożkowe kuli na płaszczyznę.

Obierzmy funkcję wykładniczą za funkcję f związku konforemnego:

$$X + iY = k e^{c(\varphi_{ik} + i\lambda)}.$$

Mamy wówczas:

$$X = k e^{c\varphi_{ik}} \cos c\lambda, \quad Y = k e^{c\varphi_{ik}} \sin c\lambda,$$

albo, ponieważ $e^{c\varphi_{ik}} = \operatorname{tg}^c (\pi/4 + \varphi/2)$,

$$X = k \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \cos c\lambda, \quad Y = k \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \sin c\lambda. \quad (45.22)$$

Równanie płaskiego obrazu dla rodziny południków $\lambda = \text{const.}$ kuli, uzyskamy przez eliminację φ z obu równań (45.22):

$$X = Y \operatorname{ctg} c\lambda.$$

Podobnie, równanie płaskiego obrazu rodziny równoleżników $\varphi = \text{const.}$ kuli, uzyskamy przez eliminację λ z obu równań (45.22):

$$X^2 + Y^2 = k^2 \operatorname{tg}^{2c} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) = k^2 \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^c.$$

Skala m wyrazi się jak następuje:

$$\begin{aligned} m &= \frac{kc}{r} e^{c\varphi_{ik}} = \frac{kc}{R \cos \varphi} \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \\ &= \frac{kc}{R} \frac{(1 + \sin \varphi)^{1/2(c-1)}}{(1 - \sin \varphi)^{1/2(c-1)}}. \quad (\text{Przypis 9}). \end{aligned}$$

W rozważanym odwzorowaniu mamy do dyspozycji dwie stałe dowolne: stałą stożka c i stałą skali k . Można uzyskać

rozmaite konforemne odwzorowania stożkowe kuli na płaszczyznę z rozmaitych dwóch dodatkowych warunków. Najczęściej żądanymi są:

Pierwsze warunki Lamberta:

Na pewnym dowolnie obranym równoleżniku φ_0 skala ma być minimum i ma się równać jedności:

$$c = \sin \varphi_0, \quad m(\varphi_0) = 1.$$

Otrzymujemy wówczas konforemne odwzorowanie stożkowe z *jednym głównym równoleżnikiem*.

Drugie warunki Lamberta:

Na dwóch równoleżnikach φ_1, φ_2 , obranych dowolnie, skale mają być jednakowe i równe jedności:

$$\frac{kc}{r_1} e^{c\varphi_{1i}k} = \frac{kc}{r_2} e^{c\varphi_{2i}k} = 1,$$

skąd:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\log \operatorname{nat} r_1 - \log \operatorname{nat} r_2}{\varphi_{1i} - \varphi_{2i}} = \\ &= \frac{\log \operatorname{nat} \cos \varphi_1 - \log \operatorname{nat} \cos \varphi_2}{\log \operatorname{nat} \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi_1/2) - \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi_2/2)}, \\ k &= \frac{r_1}{c \operatorname{tg}^c (\pi/4 + \varphi_1/2)} = \frac{r_2}{c \operatorname{tg}^c (\pi/4 + \varphi_2/2)}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy wówczas *drugie* odwzorowanie Lamberta, czyli konforemne odwzorowanie stożkowe z *dwoma głównymi równoleżnikami*.

Warunki Gaussa (1822):

Pewien równoleżnik φ_0 ma się odtwarzać wiernie, a na dwóch równoleżnikach φ_1 i φ_2 , obranych dowolnie po przeciwnych stronach równoleżnika φ_0 , skale mają być jednakowe:

$$\begin{aligned} \frac{kc}{r_0} \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi_0 \right) &= 1, \\ \frac{kc}{r_1} \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi_1 \right) &= \frac{kc}{r_2} \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi_2 \right); \end{aligned}$$

stąd dla stałej stożka c otrzymujemy tę samą wartość jak i w drugim odwzorowaniu Lamberta, zaś

$$k = \frac{r_0}{c \operatorname{tg}^c (\pi/4 + \varphi_0/2)} = \frac{r_1}{c \operatorname{tg}^c (\pi/4 + \varphi_1/2)} = \frac{r_2}{c \operatorname{tg}^c (\pi/4 + \varphi_2/2)}.$$

Oba graniczne przypadki konforemnego odwzorowania stożkowego kuli na płaszczyznę uzyskuje się, kładąc $c = 1$, albo $c = 0$.

W pierwszym przypadku otrzymuje się konforemne odwzorowanie azymutalne kuli na płaszczyznę, znane pod nazwą odwzorowania *stereograficznego*:

$$X = k \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \cos \lambda, \quad Y = k \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \sin \lambda,$$

$$X = Y \operatorname{ctg} \lambda, \quad X^2 + Y^2 = k^2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi},$$

$$m = \frac{k}{r} e^{\varphi_{ik}} = \frac{k}{R} \frac{1}{1 - \sin \varphi}.$$

Dla kuli odwzorowanie to może być uzyskane na innej drodze, *perspektywą* kuli z punktu leżącego na jej powierzchni na płaszczyznę prostopadłą do osi, przechodzącej przez środek perspektywy i środek kuli. Odwzorowanie stereograficzne kuli jest więc zarazem *odwzorowaniem rzutowym*, czyli *rzutem*. W rozwoju historycznym nauki o odwzorowaniach było ono poznane, na tej prostszej geometrycznej drodze, już w starożytności (przez Hipparcha, 130 przed Chr.).

W drugim przypadku należy przejść do granicy przy $c \rightarrow 0$. Postępując podobnie jak w Nr. 45, b, 3, uzyskamy:

$$\bar{X} + iY = \bar{k}(\varphi_{ik} + i\lambda).$$

Jest to odwzorowanie Mercatora, zbadane już poprzednio.

Odwzorowanie konforemne stożkowe dla kuli, a również i dla elipsoidy obrotowej spłaszczonej, podał pierwszy Lambert. Bliższe dane o pracy Lamberta i jego roli w rozwoju teorii odwzorowań podano w Notatce historycznej w Nr. 48.

d) Konforemne odwzorowanie elipsoidy obrotowej spłaszczonej na płaszczyznę.

1. Teoria ogólna.

Niechaj będzie dana elipsoidal obrotowa o półosi dużej a i półosi małej b , mimośród elipsoidy $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$. Równania parametrowe elipsoidy, przy obraniu długości λ i szerokości φ za parametry, są następujące:

$$x = \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = \frac{b}{W} \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = \frac{b^2}{aW} \sin \varphi = \frac{a^2(1 - e^2)}{W} \sin \varphi,$$

gdzie $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$.

Element liniowy elipsoidy (po obliczeniu wielkości podstawowych 1. rzędu: $E = M^2$, $F = 0$, $G = (N \cos \varphi)^2$), jest:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (M d\varphi)^2 + (N \cos \varphi d\lambda)^2 \\ &= d\sigma^2 + r^2 d\lambda^2, \end{aligned}$$

ponieważ $d\sigma = M d\varphi$, $r = N \cos \varphi$.

M i N oznaczają główne promienie krzywizny elipsoidy i wyrażają się wzorami:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad N = \frac{a}{W} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Siatka parametrowa południkowa $\varphi = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$ jest siatką izometryczną, parametry λ , φ nie są jednak parametrami izometrycznymi elipsoidy. Aby uzyskać takie parametry wystarczy określić nowy parametr φ_{ie} z równania różniczkowego:

$$d\varphi_{ie} = \frac{d\sigma}{r} = \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Przez scałkowanie w granicach od 0 do φ (albo, co na jedno wychodzi, przez obrócenie stałej całkowania tak, aby φ i φ_{ie} zniknęły jednocześnie), otrzymamy, (Przypis 10):

$$\varphi_{ie} = \pm \log \text{nat} \left\{ \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \cdot \left[\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right]^{e/2} \right\}, \quad (45.23)$$

przy czym uwzględniamy jednocześnie albo znaki górne, albo też znaki dolne. Parametry φ_{ie} i λ są *izometrycznymi współrzędnymi południkowymi dla elipsoidy obrotowej spłaszczonej*; φ_{ie} zwie się *szerokością izometryczną elipsoidy*. (Dla $e = 0$ otrzymujemy φ_{ik}).

Wzór (45.23) podał Lambert w roku 1772, w § 117 swej pracy, patrz Nr 48.

Dziesięciocyfrowe tablice liczbowe dla wszystkich szerokości co jeden stopień, do obliczania szerokości izometrycznej dla międzynarodowej elipsoidy odniesienia, podał profesor Politechniki Lwowskiej dr Antoni Łomnicki: *Sur le choix de la projection pour la Carte du Monde au millionième, Matériaux pour la discussion, Wiadomości Służby Geograficznej*, zeszyt 3/4, Warszawa, 1928, str. 172.

Dziesięciocyfrowe tablice liczbowe w interwałach jednodominutowych, do obliczania szerokości izometrycznej dla elipsoidy Bessela, w granicach od 40° do 60° szerokości geograficznej, zostały niedawno podane, głównie dla celów geodezyjnych, przez profesora Politechniki Lwowskiej dr. Lucjana Grabowskiego: *Tafel zur Berechnung der isometrischen Breite, Zeitschrift für Vermessungswesen*, LVIII, 1929. Hefte 1, 2, str. 1 — 9, 33 — 44.

Wszystkie odwzorowania konforemne elipsoidy obrotowej spłaszczonej na płaszczyznę zawiera relacja:

$$X + iY = f(\varphi_{ie} + i\lambda),$$

czyli

$$X + iY = f\left\{\pm \log \operatorname{nat} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \cdot \left(\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right] + i\lambda \right\}, \quad (45.24)$$

w której f jest dowolną funkcją analityczną swego zespolonego argumentu.

Skala wyrazi się wzorem:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{r^2} f'(\varphi_{ie} + i\lambda) \cdot f_1'(\varphi_{ie} - i\lambda) \\ &= \frac{1}{(N \cos \varphi)^2} |f'(\varphi_{ie} + i\lambda)|^2. \end{aligned}$$

W przypadku gdy funkcja dowolna f jest rzeczywista, wówczas $f_1 = f$.

2. Konforemne odwzorowanie walcowe elipsoidy na płaszczyznę:

Gdy obierzemy funkcję liniową $X + iY = k(\varphi_{ie} + i\lambda)$ jako związek konforemny, wyrażający proporcjonalność zmiennych zespolonych płaszczyzny i elipsoidy, otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} X &= k \varphi_{ie} = \pm k \log \operatorname{nat} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right], \\ Y &= k \lambda, \\ m &= \frac{k}{r} = \frac{k}{N \cos \varphi} = \frac{k(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (45.25)$$

Odwzorowanie to wywiódł Lambert w § 117 swej pracy; może ono być uważane za pewne uogólnienie odwzorowania Mercatora na przypadek elipsoidy, i często nazywane jest również odwzorowaniem Mercatora dla elipsoidy. Lepiej jednak nie uogólniać terminologii personalnej, związanej pierwotnie z kulą, na inne powierzchnie obrotowe, a raczej stosować terminologię genetyczną, ogólną i bardziej poprawną. Dla $e = 0$ odwzorowanie to przechodzi w odwzorowanie Mercatora.

3. Konforemne odwzorowanie stożkowe elipsoidy obrotowej spłaszczonej na płaszczyznę.

Gdy funkcję wykładniczą $X + iY = k e^{c(\varphi_i + i\lambda)}$ przyjmujemy za związek konforemny płaszczyzny i elipsoidy, wówczas:

$$\left. \begin{aligned} X &= k e^{c\varphi_i} \cos c\lambda = k \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{ce/2} \cos c\lambda, \\ Y &= k e^{c\varphi_i} \sin c\lambda = k \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{ce/2} \sin c\lambda, \\ X &= Y \operatorname{ctg} c\lambda, \quad X^2 + Y^2 = \rho^2 = k^2 \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^c \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{ce}, \\ m &= \frac{kc}{r} e^{c\varphi_i} = \frac{kc}{N \cos \varphi} \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{ce/2} \\ &= \frac{kc}{a} \frac{(1 + \sin \varphi)^{1/2(c-1)}}{(1 - \sin \varphi)^{1/2(c+1)}} \frac{(1 - e \sin \varphi)^{1/2(ce+1)}}{(1 + e \sin \varphi)^{1/2(ce-1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (45.26)$$

W odwzorowaniu tym są do dyspozycji dwie stałe dowolne: stała stożka c i stała skali k . Obiór tych stałych można uwarunkować różnymi dodatkowymi żądaniami, zwłaszcza warunkami Lamberta, lub też warunkami Gaussa, podobnie jak to miało miejsce w przypadku kuli. Odnośne wzory będą bardziej skomplikowane, wobec uwzględnienia mimośrodu elipsoidy. Dla $e = 0$ wzory powyższe przechodzą we wzory sferyczne, poprzednio podane.

Oba graniczne przypadki konforemnego odwzorowania stożkowego elipsoidy obrotowej spłaszczonej na płaszczyznę uzyskamy, kładąc $c = 1$, bądź też przechodząc do granicy przy $c \rightarrow 0$.

W pierwszym granicznym przypadku, $c = 1$, uzyskamy bezpośrednio:

$$\left. \begin{aligned} X &= k e^{\varphi_i} \cos \lambda = k \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \cos \lambda, \\ Y &= k e^{\varphi_i} \sin \lambda = k \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \sin \lambda, \\ X &= Y \operatorname{ctg} \lambda, \quad X^2 + Y^2 = \rho^2 = k^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^e, \\ m &= \frac{k}{r} e^{\varphi_i} = \frac{k}{N \cos \varphi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \\ &= \frac{k}{a} \frac{1}{1 - \sin \varphi} \frac{(1 - e \sin \varphi)^{1/2(e+1)}}{(1 + e \sin \varphi)^{1/2(e-1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (45.27)$$

Jest to konforemne odwzorowanie azymutalne ($\alpha = \lambda$) elipsoidy na płaszczyznę. Nie może ono być uzyskane, jak to było dla kuli, na drodze rzutowej, przez perspektywę elipsoidy na płaszczyznę. W ogóle żadna perspektywa elipsoidy nie może dać odwzorowania konforemnego; jedyną powierzchnią krzywą, której perspektywa jest konforemną, jest powierzchnia kuli, rzutowana stereograficznie. Dlatego nazwy: odwzorowanie stereograficzne elipsoidy, często używanej dla tego odwzorowania, należy raczej unikać, jako wprowadzającej pewien zamęt w terminologii¹⁾. Niekiedy używana jest nazwa: odwzorowanie quasi-stereograficzne, dla uniknięcia nieporozumień. Najwłaściwszą nazwą, związaną z genezą tego odwzorowania, i podlegającą uogólnieniu na wszelką powierzchnię obrotową, jest: konforemne odwzorowanie azymutalne.

W drugim granicznym przypadku należy wykonać rachunek limesowy dla $c \rightarrow 0$. Po rozwinięciu funkcji wykładniczej na szereg potęgowy

$$X + iY = k \left\{ 1 + \frac{c(\varphi_i + i\lambda)}{1!} + \frac{[c(\varphi_i + i\lambda)]^2}{2!} + \dots \right\},$$

$$(X - k) + iY = kc\{(\varphi_i + i\lambda) + (1/c) \cdot W(c^2)\},$$

i przejściu do granicy po obu stronach równości, zważając że $\lim (X - k)$ i $\lim (kc)$ muszą dążyć do skończonych wartości, $\bar{X}$ i $\bar{k}$ odpowiednio, uzyskamy:

$$\bar{X} + iY = \bar{k}(\varphi_i + i\lambda),$$

ponieważ $\lim (1/c) \cdot W(c^2) = 0$. Jest to konforemne odwzorowanie walcowe elipsoidy na płaszczyznę, rozpatrzone już w punkcie 2.

e) Konforemne odwzorowanie płaszczyzny na płaszczyznę.

1. Teoria ogólna.

Najprostsza, pod względem analitycznym, grupa przypadków powstaje wtedy, gdy powierzchnia, która ma być odwzorowana konforemnie na płaszczyznę, jest sama płaszczyzną.

Niechaj będą dane dwie płaszczyzny, określone za pomocą najprostszych równań parametrycznych:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 0; \quad X = U, \quad Y = V, \quad Z = 0.$$

¹⁾ W literaturze naukowej istnieje pięć różnych określeń pojęcia „odwzorowanie stereograficzne elipsoidy”, a wspólną ich cechą jest to, że dla $e = 0$ każde z nich przechodzi w odwzorowanie stereograficzne kuli.

Poszukujemy pary funkcji odwzorowawczych:

$$\begin{cases} U = \psi_1(u, v) \\ V = \psi_2(u, v) \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} X = \psi_1(x, y) \\ Y = \psi_2(x, y) \end{cases}$$

które by uskuteczniały konforemne odwzorowanie jednej płaszczyzny na drugą. Będzie to zastosowanie ogólnej teorii do najprostszych dwóch powierzchni.

Współrzędne kartezjańskie są, jak wiadomo, izometrycznymi współrzędnymi prostoliniowymi na płaszczyźnie; ich liniowe zespolone sprzężone kombinacje są współrzędnymi symetrycznymi płaszczyzny. Sprawa więc jest bardzo uproszczona; można wprost użyć tych współrzędnych do zastosowania zasadniczego twierdzenia o konforemnym odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą.

Oznaczmy literą $z = x + iy$ zmienną zespoloną płaszczyzny oryginału, oraz literą $Z = X + iY$ zmienną zespoloną płaszczyzny obrazu. Relacja konforemna pomiędzy obu płaszczyznami wyrazi się wzorem:

$$Z = f(z), \quad \text{czyli} \quad X + iY = f(x + iy), \quad (45.28)$$

lub też, ponieważ f jest jakąkolwiek funkcją analityczną zmiennej zespolonej z , relacja ta może być wzięta w formie ogólniejszej:

$$F(Z, z) = 0, \quad (45.29)$$

w której F jest dowolną funkcją niejawną swoich dwóch zespolonych argumentów.

Obydwa ogólne rozwiązania zadania o równokątnym odwzorowaniu jednej płaszczyzny na drugą, są więc:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & X + iY = f(x + iy), \quad X - iY = f_1(x - iy); \\ \text{II} & X - iY = f(x + iy), \quad X + iY = f_1(x - iy), \end{array}$$

w których f_1 oznacza funkcję zespoloną, sprzężoną z funkcją f . Gdy f jest funkcją rzeczywistą zmiennej zespolonej, wówczas $f_1 = f$. Pierwsze rozwiązanie daje odwzorowanie konforemne, a więc zachowuje nie tylko wielkość, lecz także i zwrot kątów. Drugie rozwiązanie różni się od pierwszego jedynie tylko zmianą znaku przy Y , daje więc obraz symetryczny względem osi X , co nie narusza równokątności, lecz zmienia zwrot kątów, (odbicie zwierciadlane, jedno z rozwiązań daje „obraz prawy”, drugie „obraz lewy”).

Powyższy rezultat można także wypowiedzieć jak następuje: Gdy f oznacza dowolną funkcję analityczną, należy rzeczywistą część wyrażenia $f(x+iy)$ przyjąć za X , i urojoną część tego wyrażenia, z pominięciem czynnika i , przyjąć albo za Y , albo za $-Y$. W ten sposób X i Y będą rzeczywistymi funkcjami zmiennych rzeczywistych x, y ; para funkcji odwzorowawczych została więc teoretycznie znaleziona.

Skala wyrazi się wzorem:

$$m^2 = f'(x+iy) \cdot \overline{f'(x+iy)} = |f'(x+iy)|^2,$$

ponieważ funkcje N i n są, w tym przypadku, obie równe jedności; górny znaczek przy funkcjach oznacza pochodną każdej z tych funkcji, względem swej zmiennej zespolonej.

Wobec tego, że problem odwzorowania konforemnego jednej dowolnej powierzchni na drugą zredukować można do *jednego* (możliwie najprostszego) odwzorowania konforemnego danej powierzchni na płaszczyznę i *wszystkich* konforemnych odwzorowań płaszczyzny na samą siebie, zadanie o odwzorowaniu płaszczyzny na płaszczyznę nabiera ważnego znaczenia w teorii odwzorowań w ogóle.

2. Rozwiązania poszczególne (patrz Nr 44 f).

Wspomniano już w Nr. 5., że przy rozwiązywaniu drugiego podstawowego zadania teorii odwzorowań, w wielu przypadkach, wypadnie rozróżnić dwa problemy, A i B . Problem A polega na określeniu takich analitycznych funkcji współrzędnych, przez które osiągamy przepisane przyporządkowanie punktowe obu powierzchni. Jeśli ogólne rozwiązanie problemu A zawiera jedną, lub więcej funkcji dowolnych, wówczas powstaje problem B , który polega na punktowym przyporządkowaniu sobie (*nie* całych powierzchni, lecz *tylko*) odcinków powierzchni I i II, to znaczy dwóch obszarów *zamkniętych* (to jest łącznie z ich granicami), ograniczonych przez dwa zadane kontury, (c) i (C), odpowiednio na pierwszej i na drugiej powierzchni; (podgrupa 3, Nr 44 f). Problem B tej podgrupy jest, z natury swej, problemem funkcyjno-teoretycznym.

Przy poszukiwaniu odwzorowania konforemnego, ustanawiającego odpowiedniość punktową pomiędzy takimi dwoma obszarami, zakłada się na ogół, że obie powierzchnie są płaszczyznami, a więc oba obszary są polami płaskimi, najczęściej jednospójnymi; i że jeden z konturów, np. (C) jest kołem o promieniu 1; drugi kontur, (c), może być ograniczony lub nieograniczony, utworzony przez jakąś krzywą, posiadającą styczną zmieniającą się wzdłuż krzywej w spo-

sób ciągły, albo przez jakąś linię wielobokową, o bokach prostoliniowych lub krzywoliniowych. Teoria funkcji analitycznych podaje dowód, że rozwiązanie tego problemu jest określone przez *małą ilość warunków*, np. następujących. Zakłada się odpowiedniość jakiegoś punktu, danego wewnątrz konturu (c) na płaszczyźnie oryginału, ze środkiem koła (C) na powierzchni obrazu, i jakiegoś punktu, danego na konturze (c), z punktem danym na obwodzie (C).

W zastosowaniach praktycznych mamy zwykle założoną nieskończoną ilość warunków, np. odpowiedniość punktową określoną na całej rozciągłości dwóch krzywych, obrazu i oryginału. Nasz problem nie zakłada jednoznacznej odpowiedniości punktowej między dwoma obszarami *wyznaczonymi a priori*; krzywe (c) i (C) nie są dla nas granicami, i mogą być krzywymi zamkniętymi albo otwartymi. W geodezji i kartografii matematycznej bardziej naturalne jest ustalenie danych, określających odwzorowanie, na pewnej linii osiowej, o prostej formie, niż ustalenie danych na konturze peryferyjnym, którego forma rzeczywista usuwa się spod wszelkiej definicji matematycznej. Nadto metoda ogólnie stosowana w geodezji (podgrupa 2, Nr 44 f), polegająca na podporządkowaniu zadania pewnym z góry przyjętym (i tak daleko idącym, jak to jest możliwe) warunkom co do zniekształceń, prowadzi łatwo do znajomości odpowiedniości punktowej między dwiema krzywymi (c) i (C). Stanowisko powyższe jest więc wystarczająco usprawiedliwione przez użyteczność praktyczną, niezależnie od łączności z teoriami bardziej wyższymi, o których tylko co wspomniano.

Równość (45.29), a zwłaszcza specjalizacja funkcji F dla uczynienia zadość tym czy innym szczególnym warunkom, dała powód do obszernych badań, należących do teorii funkcji zmiennej zespolonej. Liczne własności takiej funkcji znajdują swe wyjaśnienie w konforemnym odwzorowaniu płaszczyzn z i Z . Ponieważ badania te w istocie należą do teorii funkcji, i tylko pobocznie do teorii odwzorowań (która jest częścią geometrii różniczkowej), wypada je tu pominąć. (Patrz także Notatka historyczna, Nr 48, punkt c).

46. Konforemne odwzorowanie powierzchni obrotowej na kulę

a) Teoria ogólna.

Bardzo częstą praktyką, stosowaną w geodezji i kartografii matematycznej, jest odwzorowanie *pośrednie* elipsoidy obrotowej na płaszczyznę, za pośrednictwem *kuli*, to znaczy *odwzorowanie podwójne*. To nasuwa problem odwzorowania powierzchni obrotowej na kulę, w naszym temacie uwarunkowany konforemnością.

Niechaj będzie dana powierzchnia obrotowa:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \lambda, \quad y = r \sin \lambda, \quad z = f(r), \\ \text{oraz kula:} \\ X &= r_k \cos \lambda_k, \quad Y = r_k \sin \lambda_k, \quad Z = \pm \sqrt{R^2 - r_k^2}, \end{aligned} \right\} (46.1)$$

przy czym r i r_k oznaczają odpowiednio odległość dowolnego punktu powierzchni obrotowej, oraz powierzchni kuli, od przynależnej osi obrotu; λ i λ_k oznaczają odpowiednio długość geograficzną na powierzchni obrotowej oraz na kuli, względem jakiegoś, ustalonego na każdej z tych dwóch powierzchni, południka wyjściowego; f jest dowolną funkcją rzeczywistą, określającą w płaszczyźnie (z, r) krzywą tworzącą powierzchnię obrotową; R jest promieniem kuli.

Krzywymi parametrowymi powierzchni są południki $\lambda = \text{const.}$ i równoleżniki $r = \text{const.}$, stanowiące siatkę południkową powierzchni obrotowej; jest to, jak wiadomo, siatka izometryczna, parametry południkowe λ , r nie są jednak izometrycznymi parametrami powierzchni obrotowej.

Podobnie, krzywymi parametrowymi kuli są południki $\lambda_k = \text{const.}$ i równoleżniki $r_k = \text{const.}$, stanowiące siatkę południkową kuli; jest to siatka izometryczna kuli, parametry południkowe λ_k , r_k nie są jednak izometrycznymi parametrami powierzchni kuli.

Kwadrat elementu liniowego powierzchni obrotowej jest:

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 \left\{ \frac{1 + [f'(r)]^2}{r^2} dr^2 + d\lambda^2 \right\} \\ &= r^2 \left\{ \frac{d\sigma^2}{r^2} + d\lambda^2 \right\}, \end{aligned} \quad (46.2)$$

gdzie $d\sigma$ oznacza element łuku południka na powierzchni obrotowej w rozważanym punkcie, $d\sigma^2 = \{1 + [f'(r)]^2\} dr^2$. Wielkości z , r , $d\sigma$ są funkcjami bieżącego parametru południkowego.

Kwadrat elementu liniowego kuli jest:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= r_k^2 \left\{ \frac{d\sigma_k^2}{r_k^2} + d\lambda_k^2 \right\}, \quad \text{Przypis 11,} \end{aligned} \quad (46.3)$$

gdzie $d\sigma_k$ oznacza element łuku południka na kuli, w rozważanym punkcie, oraz:

$$\begin{aligned} d\sigma_k^2 &= [1 + (R^2 - r_k^2)^{-1} r_k^2] dr_k^2 \\ &= \frac{R^2}{R^2 - r_k^2} dr_k^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi_k} (-R \sin \varphi_k d\varphi_k)^2 = R^2 d\varphi_k^2, \end{aligned}$$

ponieważ $r_k = R \cos \varphi_k$.

Izometryczne współrzędne południkowe uzyskamy łatwo przez wprowadzenie nowych zmiennych południkowych ψ i ψ_k na powierzchni obrotowej i kuli, odpowiednio, określonych za pomocą równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{d\sigma}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{1 + [f'(r)]^2} dr, \\ d\psi_k &= \frac{d\sigma_k}{r_k} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r_k^2}} dr_k, \end{aligned} \quad (46.4)$$

przy czym krzywe $\psi = \text{const.}$ są tymi samymi krzywymi, co i krzywe $r = \text{const.}$, a więc równoleżnikami powierzchni obrotowej; zaś krzywe $\psi_k = \text{const.}$ są tymi samymi, co i $r_k = \text{const.}$, a więc równoleżnikami kuli.

Kwadrat elementu liniowego powierzchni, oraz kwadrat elementu liniowego kuli wyrażają się wówczas:

$$\begin{aligned} dS^2 &= r^2 (d\psi^2 + d\lambda^2), & n &= r^2, \\ dS^2 &= r_k^2 (d\psi_k^2 + d\lambda_k^2). & N &= r_k^2. \end{aligned} \quad (46.5)$$

Parametry ψ, r są izometrycznymi parametrami południkowymi na powierzchni obrotowej; parametry ψ_k, λ_k są izometrycznymi parametrami południkowymi na powierzchni kuli.

W myśl zasadniczego twierdzenia o odwzorowaniu konforemnym jednej powierzchni na drugą, związek:

$$\psi_k + i\lambda_k = f(\psi + i\lambda), \quad (46.6)$$

w którym f oznacza dowolną funkcję analityczną swego argumentu, określa konforemne odwzorowanie powierzchni obrotowej na kulę, jako ogólne rozwiązanie zadania.

Kwadrat skali, m^2 , według ogólnego wzoru (44.16), będzie:

$$m^2 = \frac{r_k^2}{r^2} f'(\psi + i\lambda) \overline{f'(\psi + i\lambda)} = \frac{r_k^2}{r^2} |f'(\psi + i\lambda)|^2, \quad (46.7)$$

przy czym $f_1(\psi - i\lambda)$ oznacza funkcję sprzężoną z funkcją $f(\psi + i\lambda)$, zaś znaczki górne oznaczają pochodne odnośnych funkcji, względem ich zespolonych argumentów.

Dwa szczególne przypadki obioru funkcji dowolnej f mają ważne znaczenie.

1. *Konforemne odwzorowanie Lagrange'a powierzchni obrotowej na kulę.*

Najprostszym przypadkiem obioru funkcji f , będącej w naszej dyspozycji, jest $f(\xi) = \xi$, czyli:

$$\left. \begin{aligned} \psi_k + i\lambda_k &= \psi + i\lambda, \\ \psi_k &= \psi, \quad \lambda_k = \lambda. \end{aligned} \right\} (46.8)$$

Najprostsze odwzorowanie konforemne powierzchni obrotowej na kulę uzyskuje się, jeśli współrzędne izometryczne południkowe ψ_k, λ_k kuli przyrówna się, odpowiednio, do współrzędnych izometrycznych południkowych ψ, λ powierzchni obrotowej. Jest to *konforemne odwzorowanie sferyczne Lagrange'a*.

Skala wyrazi się prostym wzorem:

$$m = \frac{r_k}{r}, \quad (46.9)$$

ponieważ obie pochodne są równe jedności.

2. *Konforemne odwzorowanie sferyczne Gaussa.*

Inny przypadek obioru funkcji dowolnej $f(\xi)$ będzie, gdy wyspecjalizujemy ją w nieco ogólniejszy niż poprzednio, chociaż dość prosty, sposób:

$$f(\xi) = \alpha \xi - k, \quad (46.10)$$

gdzie α, k są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Odwzorowanie konforemne powierzchni obrotowej na kulę przyjmie wówczas następującą formę:

$$\left. \begin{aligned} \psi_k + i\lambda_k &= \alpha(\psi + i\lambda) - k, \\ \psi_k &= \alpha\psi - k, \\ \lambda_k &= \alpha\lambda. \end{aligned} \right\} (46.11)$$

Jest to *konforemne odwzorowanie Gaussa* powierzchni obrotowej na kulę.

Skala wyrazi się wzorem:

$$m = \alpha \cdot (r_k/r), \quad (46.12)$$

ponieważ $f_1 = f$, a pochodne $f'(\xi)$ i $f'_1(\bar{\xi}) = f'(\bar{\xi})$ względem odnośnych zmiennych symetrycznych, są równe tej samej stałej α .

Stałe dowolne α, k pozostają do dyspozycji; przez stosowny ich obiór, można uzyskać lepsze przystosowanie obrazu sferycznego do obszaru odwzorowywanego, niż w odwzorowaniu Lagrange'a. Nadto, za stałą dowolną można również uważać promień kuli, który ma wpływ jedynie tylko na skalę; obiór różnych wartości na promień kuli nie zmienia struktury obrazu sferycznego, lecz tylko go proporcjonalnie powiększa lub zmniejsza. Sposób, w jaki Gauss określa te trzy stałe, będzie podany w punkcie d).

b) Konforemne odwzorowanie elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę — teoria ogólna.

Zastosujemy poprzednie rozważania do przypadku, gdy powierzchnią obrotową jest elipsoida spłaszczona.

Równania parametrowe elipsoidy i kuli są następujące:

$x = r \cos \lambda = N \cos \varphi \cos \lambda =$ $= \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda,$	$X = r_k \cos \lambda_k = R \cos \varphi_k \cos \lambda_k,$
$y = r \sin \lambda = N \cos \varphi \sin \lambda =$ $= \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \lambda,$	$Y = r_k \sin \lambda_k = R \cos \varphi_k \sin \lambda_k,$
$z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2} =$ $= \frac{b^2}{aW} \sin \varphi = \frac{a(1 - e^2)}{W} \sin \varphi;$	$Z = \pm \sqrt{R^2 - r_k^2} = R \sin \varphi_k;$
$E = M^2, F = 0, G = (N \cos \varphi)^2 = r^2;$	$\bar{E} = R^2, \bar{F} = 0, \bar{G} = (R \cos \varphi_k)^2 = r_k^2,$
$r = N \cos \varphi =$ $= \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi = \frac{a}{W} \cos \varphi;$	$r_k = R \cos \varphi_k.$

Ponieważ znane są już współrzędne południkowe izometryczne φ_{ie}, λ dla elipsoidy obrotowej, oraz współrzędne południkowe izometryczne φ_{ik}, λ_k dla kuli, z poprzednich odpowiednio wzorów (45.23) i (45.19), więc, na mocy zasadniczego twierdzenia teorii konforemności:

Wszystkie odwzorowania konforemne elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę zawiera relacja:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ik} + i\lambda_k &= f(\varphi_{ie} + i\lambda), \\ \pm \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi_k \right) + i\lambda_k &= \\ = f \left[\pm \log \operatorname{nat} \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right\} + i\lambda \right], \end{aligned} \right\} \quad (46.13)$$

w której f jest dowolną funkcją analityczną swego zespolonego argumentu.

Skala, według ogólnego wzoru (46.7), będzie:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{r_k^2}{r^2} f'(\varphi_{ie} + i\lambda) f_1'(\varphi_{ie} - i\lambda) \\ &= \left(\frac{R \cos \varphi_k}{N \cos \varphi} \right)^2 \left| f'(\varphi_{ie} + i\lambda) \right|^2. \end{aligned} \quad (46.14)$$

Dwa szczególne przypadki obioru funkcji f są podane w następnych punktach, c) i d).

c) Konforemne odwzorowanie Lagrange'a elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę.

Najprostszy przypadek konforemnego odwzorowania elipsoidy na kulę uzyskuje się wówczas, gdy za dowolną funkcję f , będącą do dyspozycji, obierze się najprostszą funkcję, to jest $f(\xi) = \xi$, czyli:

$$\varphi_{ik} + i\lambda_k = \varphi_{ie} + i\lambda, \quad (46.15)$$

skąd, przez zrównanie oddzielnie części rzeczywistych i oddzielnie części urojonych obu stron równości, będzie:

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} &= \varphi_{ie}, \\ \lambda_k &= \lambda. \end{aligned} \quad (46.16)$$

Najprostsze odwzorowanie otrzymuje się więc, jeśli szerokość izometryczną kulistą przyrównać do szerokości izometrycznej elipsoidalnej i długość geograficzną kulistą przyrównać do długości geograficznej elipsoidalnej. Zależność $\varphi_{ik} = \varphi_{ie}$ wypisana wyraźnie, jest:

$$\pm \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi_k \right) = \pm \log \operatorname{nat} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right],$$

czyli:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi_k \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right)^{e/2}. \quad (46.17)$$

Szerokość geograficzną φ_k , określoną za pomocą powyższego wzoru z dowolnie danej szerokości elipsoidalnej φ , można nazwać *sferyczną szerokością konforemną*; jest to w gruncie rzeczy nic innego, jak szerokość geograficzna kulista, odpowiadająca, w konforemnym odwzorowaniu Lagrange'a, szerokości geograficznej elipsoidalnej.

Skala m , wielkość zawsze dodatnia, na podstawie wzoru (46.14) wyrazi się, w tym szczególnym przypadku, jak następuje:

$$m = \frac{r^k}{r} = \frac{R \cos \varphi_k}{N \cos \varphi} = \frac{R \cos \varphi_k \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a \cos \varphi}, \quad (46.18)$$

ponieważ obie pochodne f' i f_1' są równe jedności. Skala może być też obliczona prościej za pomocą wzoru $m = \sqrt{E'/E}$, czyli:

$$m = \frac{R}{M} = \frac{R (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a (1 - e^2)}. \quad (46.19)$$

Jako promień kuli obiera się najczęściej promień równikowy elipsoidy obrotowej, $R = a$.

Odwzorowanie konforemne Lagrange'a elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę bardzo nieznacznie się różni od środkowego rzutu elipsoidy na kulę, przy czym środki obu powierzchni są w jednym punkcie. Tym samym szerokość geocentryczna i szerokość konforemna różnią się od siebie bardzo nieznacznie.

Odwzorowanie to wykrył matematyk francuski J. L. de Lagrange i ogłosił w roku 1779, w klasycznej dla teorii odwzorowań pracy, p. t. *Sur la construction des cartes géographiques* (patrz Notatka historyczna, Nr 48).

Lagrange posiłkował się wielkością $(\pi/2 - \varphi_k)$, określoną wzorem (46.17), jako „odległością biegunową, poprawioną na spłaszczenie ziemi”, oraz podał rozwinięcie różnicy $(\pi/2 - \varphi_k) - (\pi/2 - \varphi)$, czyli $\varphi - \varphi_k$, na szybko zbieżny szereg nieskończony:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_k\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - 2\theta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{2\theta^2}{2} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{2\theta^3}{3} \sin 3\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \dots,$$

w którym

$$\theta = \frac{(1 - e \sin \varphi)^{e/2} - (1 + e \sin \varphi)^{e/2}}{(1 - e \sin \varphi)^{e/2} + (1 + e \sin \varphi)^{e/2}}.$$

W sposób wyraźny, jako odwzorowanie konforemne elipsoidy na kulę, wzory (46.14) i wzór (46.17) podał, w r. 1807, Carl Mollweide (1774 — 1825), profesor w Halle, a następnie w Lipsku: *Einige Projections-Arten der sphäroidischen Erde*, *Zach's Monatliche Correspondenz*, Bd. XVI (1807), pp. 197 — 210. Stąd można niekiedy spotkać nazwę: Konforemne odwzorowanie Mollweide'go elipsoidy na kulę.

Oscar S. Adams, w pracy p. t. *Latitude Developments Connected with Geodesy and Cartography*, U. S. Coast and Geodetic Survey Special Publication Nr 67, Washington, 1921, podał tablicę liczbową wielkości $\varphi - \chi$ (w naszych oznaczeniach $\varphi - \varphi_k$), zarówno według argumentu φ , jak i według argumentu χ , dla szerokości od 0° do 90° , co $1/2^\circ$, z dokładnością do $0''001$, dla sferoidy Clarke'a 1866. Dla różnicy $\varphi - \chi$ jako funkcji φ , Adams podał szereg nieskończony, wyprowadzony sześcioma różnymi metodami; zaś dla tejże różnicy jako funkcji χ — inny szereg nieskończony, wyprowadzony siedmioma różnymi metodami.

Należy nadmienić, że w pracach Adamsa, Hinksa i Łomnickiego wielkość φ_k nazywana jest szerokością izometryczną. Jak wynika z definicji, podanych w Nr 45 c i d, nie jest to poprawne, na co zwrócił już uwagę prof. dr L. Grabowski, *Wiadomości Matematyczne*, 1928, w recenzji książki Łomnickiego (*Kartografia matematyczna*, 1927). Dlatego wielkość φ_k nazwaliśmy, w ślad za Driencourt i Laborde, *sferyczną szerokością konforemną*.

d) Konforemne odwzorowanie Gaussa elipsoidy na kulę.

Inny szczególny przypadek konforemnego odwzorowania elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę uzyska się, gdy dowolną funkcję $f(\xi)$ wyspecjalizuje się w nieco ogólniejszy niż poprzednio, chociaż dość prosty, sposób:

$$f(\xi) = \alpha \xi - \log \operatorname{nat} k, \quad (46.20)$$

gdzie α, k są dwiema dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Relacja konforemna (46.13) pomiędzy elipsoidą i kulą przyjmie, w tym przypadku, następującą formę:

$$\varphi_{ik} + i \lambda_k = \alpha (\varphi_{ie} + i \lambda) - \log \operatorname{nat} k,$$

lub, przyrównując do siebie oddzielnie części rzeczywiste i oddzielnie części urojone po obu stronach równości:

$$\begin{cases} \lambda_k = \alpha \lambda, \\ \varphi_{ik} = \alpha \varphi_{ie} - \log \operatorname{nat} k. \end{cases} \quad (46.21)$$

Zależność powyższa, wypisana wyraźnie, przez wprowadzenie wyrażeń na szerokość izometryczną φ_{ik} dla kuli i szerokość izometryczną φ_{ie} dla elipsoidy, będzie:

$$\lambda_k = \alpha \lambda,$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi_k \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg}^\alpha \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \left(\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right)^{\alpha e/2}. \quad (46.22)$$

Skala, na podstawie ogólnego wzoru (46.14), wyrazi się jak następuje:

$$m^2 = \left(\frac{R \cos \varphi_k}{N \cos \varphi} \right)^2 \alpha^2.$$

Ponieważ m uważa się zawsze za wielkość dodatnią, więc:

$$m = \alpha R \cos \varphi_k / N \cos \varphi = \alpha R \cos \varphi_k \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} / a \cos \varphi, \quad (46.23)$$

gdzie R oznacza promień kuli, zaś a promień równika elipsoidy.

Stałe dowolne α , k , R określił Gauss z dodatkowych warunków. Mianowicie zażądał, aby w pobliżu pewnego równoleżnika, o danej szerokości geograficznej φ' na elipsoidzie, dla dostatecznie wąskiego pasa w otoczeniu tego równoleżnika, skala jak najmniej się różniła od jedności; lub, co na jedno wychodzi, aby zniekształcenia liniowe elementarne w tym pasie były możliwie małe. W matematycznym sformułowaniu, warunki te wyrażają się następującymi żądaniem:

$$m(\varphi') = 1, \quad m'(\varphi') = 0, \quad m''(\varphi') = 0, \quad (46.24)$$

w których m' i m'' oznaczają pierwszą i drugą pochodną skali względem zmiennej φ , zaś $m'(\varphi')$ i $m''(\varphi')$ oznaczają wartości tych pochodnych dla $\varphi = \varphi'$.

Oznaczmy przez φ_k' szerokość geograficzną na kuli, odpowiadającą szerokości φ' na elipsoidzie; wtedy warunki (46.24) dadzą:

$$R = \frac{a \cos \varphi'}{\alpha \cos \varphi_k' \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}, \quad \alpha \sin \varphi_k' = \sin \varphi',$$

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 \varphi'}{1 - e^2}, \quad k = \frac{\operatorname{tg}^\alpha \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi' \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi_k' \right)} \left(\frac{1 - e \sin \varphi'}{1 + e \sin \varphi'} \right)^{ae/2}.$$

Z powyższych trzech równań, drogą eliminacji α i φ_k' , otrzyma się:

$$R = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'} = \sqrt{MN};$$

to znaczy promień kuli jest średnią geometryczną z głównych promieni krzywizny elipsoidy w szerokości φ' , czyli jest średnim promieniem krzywizny dla tej szerokości.

Przez obiór stałych α , k , R w powyższy sposób, wzór na skalę, rozwinięty na szereg potęgowy, będzie miał postać:

$$m(\varphi) = 1 + c_1(\varphi - \varphi')^3 + c_2(\varphi - \varphi')^4 + \dots$$

Widzimy więc, że zniekształcenie $(m - 1)$ jest wielkością trzeciego rzędu względem $(\varphi - \varphi')$; dla małych odległości od średniego rów-

noleżnika φ' , czyli dla małych wartości $(\varphi - \varphi')$, skala jest bardzo mało różna od jedności. Gdy weźmiemy pod uwagę elipsoidalny pas równoleżnikowy, o niewielkiej rozciągłości od średniego równoleżnika φ' , i oznaczmy przez s odległość najdalszego punktu, leżącego w pasie, od tego równoleżnika, wówczas łuki elipsoidalne tego pasa mogą być uważane, z błędem względnym rzędu $e^2 s^3/a^3$, za równe odpowiadającym łukom kulistym. Z tym przybliżeniem trójkąty elipsoidalne mogą być rozwiązywane jako sferyczne; tą drogą Gauss sprowadził problemy trygonometrii elipsoidalnej do prostszych problemów trygonometrii sferycznej. Przez obiór stałych α, k, R , według warunków (46.24), odwzorowanie elipsoidy na kulę doskonale nadaje się do przedstawiania pasów rozciągających się wzdłuż równoleżników.

Odwzorowanie to podał matematyk niemiecki C. F. Gauss w roku 1843 i ogłosił w pracy p. t. *Untersuchungen über einige Gegenstände der höheren Geodäsie Göttinger Abhandl. 2, 1844*. Praca ta jest również zamieszczona w tomie 4. w zbiorowym, 9. tomowym, wydaniu dzieł Gaussa przez Towarzystwo Naukowe w Getyndze: *Gauss' Werke, Göttingen, 1863 — 1903*, a także w *Ostwalds Klassiker Nr. 177*.

Szczególny przypadek, gdy $\alpha = 1$, funkcja odwzorowania konforemnego przyjmuje postać $f(\xi) = \xi - \log \operatorname{nat} k = (\varphi_{ie} + i\lambda) - \log \operatorname{nat} k$, był rozpatrzony również przez Gaussa, lecz wcześniej, w roku 1822, w klasycznej jego rozprawie o odwzorowaniu konforemnym (patrz Notatka historyczna Nr 48). W pracy tej Gauss określił stałą rzeczywistą k z dodatkowego warunku, aby skala m , dla zewnętrznych skrajnych szerokości, uzyskiwała jednakowe wartości, a tym samym dla średniej szerokości była bardzo bliska swej ekstremalnej (w danym przypadku minimalnej) wartości, którą, przez stosowny obiór promienia kuli, można uczynić równą jedności.

Bardziej szczególny przypadek odwzorowania Gaussa, gdy $\alpha = 1$ i $k = 1$, funkcja relacji konforemnej między elipsoidą i kulą przyjmuje postać $f(\xi) = \xi$, był również przytoczony przez Gaussa w jego pracy z roku 1822. Wcześniej jednak, w roku 1807, odwzorowanie to zbadał Mollweide, a jeszcze wcześniej, w r. 1779, zależność (46.17) odkrył Lagrange. Stąd też słusznie przypadek ten można nazwać konforemnym odwzorowaniem Lagrange'a elipsoidy na kulę.

47. Funkcja zmiennej zespolonej i jej rola w teorii odwzorowań konforemnych

a) Definicja i zasadnicze twierdzenia.

Weźmy pod uwagę dowolną funkcję $Z = f(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$. Oddzielmy w tej funkcji osobno wszystkie składniki rzeczywiste, a osobno urojone. Nazwijmy część rzeczywistą P ; zależy ona od x i od y . Tak samo część urojona: iQ jest funkcją zmiennych x, y . Można więc funkcję $f(z)$ przedstawić w postaci:

$$Z = f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y), \quad (47.1)$$

przy czym P, Q są rzeczywistymi funkcjami dwóch zmiennych rzeczywistych x, y , zaś $i = \sqrt{-1}$.

Funkcja $f(z)$, określona w powyższy sposób, może być zupełnie dowolna, nawet nieciągła i nieróżniczkowalna. Taka definicja, podobna do definicji funkcji zmiennej rzeczywistej, jest całkiem uprawniona, lecz jest mało celowa i nieużyteczna, ponieważ jest zbyt obszerna. Według tej definicji funkcja zmiennej zespolonej z byłaby dokładnie tym samym, co zespolona funkcja: $P(x, y) + iQ(x, y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych x, y .

Dla funkcyj zdefiniowanych w ten sposób, definicja ciągłości jest zupełnie taka sama, jak definicja ciągłości dla funkcji zmiennej rzeczywistej. Można dowieść, że definicja ta jest równoważna twierdzeniu: funkcja ciągła zmiennej zespolonej z jest *niczym innym*, jak tylko ciągłą zespoloną funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych x i y ; i odwrotnie: jeśli $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągłymi funkcjami rzeczywistymi zmiennych rzeczywistych x i y , $f(z)$ jest funkcją ciągłą zmiennej zespolonej z .

Jedyną klasą funkcyj zmiennej zespolonej z , która może mieć jakiś praktyczny użytek, jest ta klasa, do której może być zastosowany proces różniczkowania.

Zažadamy więc, aby funkcja $f(z)$ była w jakimś obszarze *różniczkowalna*, to jest, aby posiadała pochodną ściśle określoną, *niezależną od kierunku* w jakim zmienna zespolona z posuwa się po płaszczyźnie liczbowej (xy). Funkcje zmiennej zespolonej z , jednoznacznościowe i różniczkowalne w każdym punkcie jakiegoś obszaru nazywamy *funkcjami analitycznymi*.

Definicja. Funkcja $Z = f(z)$ zmiennej zespolonej z zwie się *funkcją analityczną*, jeśli w pewnym obszarze zmiennej zespolonej funkcja ta jest jednoznacznościowa i stosunek $\Delta Z / \Delta z$ dąży do *tej samej granicy*, w *jakikolwiek by sposób* Δx i Δy dążyły do zera. Ta granica zwie się *pochodną* funkcji względem zmiennej zespolonej z i oznacza się $f'(z)$.

Funkcja może być różniczkowalna w obszarze określoności, z wyjątkiem pewnej *skończonej* liczby punktów; punkty te nazywamy *miejscami osobliwymi* funkcji $f(z)$.

Nadmienimy wreszcie, że ciągłość funkcji zmiennej zespolonej, podobnie jak to ma miejsce dla funkcji zmiennej rzeczywistej, nie pociąga za sobą różniczkowalności.

Funkcje analityczne są najważniejszą grupą funkcyj, zarówno w matematyce czystej, jak i stosowanej. A zwłaszcza tak zwane funkcje analityczne *elementarne*, jakimi są wszystkie funkcje, znane

z matematyki elementarnej: funkcje wymierne (całkowite, czyli wielomiany, i ułamkowe), funkcje niewymierne (czyli pierwiastki), funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje kołowe, czyli trygonometryczne, funkcje hiperboliczne — po wyłączeniu pewnych wyjątkowych wartości zmiennej zespolonej z , lub inaczej, pewnych wyjątkowych punktów płaszczyzny liczbowej.

Zajmiemy się teraz dyskusją warunków koniecznych i wystarczających, aby funkcja $f(z)$ zmiennej zespolonej z była funkcją analityczną.

Twierdzenie 1. *Ciągła i jednowartościowa funkcja $f(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$ jest funkcją analityczną w pewnym obszarze D , jeśli cztery pochodne cząstkowe P_x, Q_x, P_y, Q_y istnieją, są ciągłe i spełniają związki:*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (47.2)$$

dla każdego punktu obszaru D ; P jest częścią rzeczywistą, zaś iQ częścią urojoną funkcji $f(z)$.

Dowód tego twierdzenia należy wprowadzić do teorii funkcji zmiennej zespolonej, podamy go jednak tutaj¹⁾, by nie zmuszać czytelnika do studiowania specjalnych dzieł z tej teorii.

Chcemy zbadać, pod jakimi warunkami pochodna $f'(z)$ funkcji (47.1) istnieje i ma wartość *niezależną od kierunku* posuwania się po płaszczyźnie liczbowej z . Trzeba więc zbadać granicę:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z}, \quad \text{czyli} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta(P + iQ)}{\Delta(x + iy)}.$$

Zbadajmy tę granicę najpierw dla pewnych specjalnych kierunków, a mianowicie, najpierw niech zmienia się tylko x przy stałym y , a potem — przeciwnie. Otóż, gdy y jest stałe, to $\Delta y = 0$ i otrzymujemy:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(P + iQ)}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x},$$

przy założeniu, że pochodne cząstkowe 1. rzędu P_x i Q_x , dla funkcji rzeczywistych P i Q , istnieją. Gdy x jest stałe, a zmienia się tylko y , to $\Delta x = 0$ i zostaje:

¹⁾ Według: A. Łomnicki, Kartografia matematyczna, Lwów 1927.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta(P + iQ)}{i \cdot \Delta y} = -i \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \left(\frac{1}{i} = -i \right)$$

przy założeniu, że pochodne cząstkowe 1. rzędu P_y i Q_y , dla funkcji rzeczywistych P i Q , istnieją.

Założmy, że funkcja $f(z)$ jest funkcją analityczną, a więc posiada pochodną, której wartość nie zależy od sposobu dążenia do zera. Wtedy obie powyższe pochodne w tych dwóch kierunkach (t. j. wzdłuż osi x i wzdłuż osi y) mają być równe. Musi więc spełniać się równanie:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}.$$

To zaś jest tylko wtedy możliwe, gdy (jak wiadomo z nauki o liczbach zespolonych) osobno części rzeczywiste są sobie równe, a osobno urojone. Otrzymujemy więc następujące *warunki konieczne*:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (47.2)$$

Te dwa związki nazywamy *równaniami różniczkowymi Cauchy-Riemanna*; są to równania różniczkowe cząstkowe 1. rzędu; grają one dużą rolę w teorii funkcji i w teorii potencjału.

Dowiedliśmy więc, że, aby funkcja $f(z)$ była różniczkowalna w punkcie z , konieczne jest, żeby cztery pochodne cząstkowe P_x , Q_x , P_y , Q_y istniały i spełniały równania różniczkowe Cauchy-Riemanna.

Widzimy, że konkluzje założenia różniczkowalności są znacznie dalej idące, niż konkluzje założenia ciągłości. Funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ nie tylko muszą posiadać pochodne cząstkowe 1. rzędu, lecz pochodne te muszą być ze sobą związane równaniami różniczkowymi (47.2); funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ nie są więc całkiem dowolne.

Warunki (47.2) nie są na ogół wystarczające; jednak, gdy dołączymy jeszcze warunek *ciągłości* dla czterech pochodnych cząstkowych 1. rzędu funkcji P i Q , to warunki te są także i *wystarczające* do różniczkowalności funkcji $f(z)$.

W tym celu trzeba zbadać, czy przy spełnianiu się tych warunków, także i pochodna w dowolnym innym kierunku ma tę samą wartość, co obliczona już pochodna w kierunku osi x -ów i y -ów. Obierzmy zatem dowolny inny kierunek, np. posuwajmy się po linii mającej równanie $y = g(x)$, a leżącej na płaszczyźnie liczbowej z . Bierzemy pod uwagę oczywiście linię regularną, a więc pochodna

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \operatorname{tg} \alpha$$

istnieje. Utwórzmy teraz żadaną pochodną w kierunku stycznym do tej linii:

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta(P + iQ)}{\Delta(x + iy)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(P + iQ)}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Funkcja P zawiera teraz zmienną x nie tylko wprost, lecz także za pośrednictwem funkcji $y = g(x)$, na co musimy uważać przy obliczaniu pochodnej. Podobnie ma się sprawa i z funkcją Q . Otrzymamy więc:

$$f'(z) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} y' + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' \right)}{1 + i y'}.$$

Podstawiając tu za pochodne $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial y$ wartości z równań Cauchy-Riemanna, otrzymujemy:

$$f'(z) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} (1 + i y') + i \frac{\partial Q}{\partial x} (1 + i y')}{1 + i y'},$$

czyli, po uproszczeniu przez czynnik $(1 + i y')$:

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Otrzymaliśmy więc dla dowolnego kierunku tę samą wartość pochodnej, co dla kierunku osi x -ów. To dowodzi, że warunki (47.2), przy założeniu ciągłości pochodnych, są istotnie nie tylko konieczne, ale zarazem i wystarczające, aby funkcja $f(z)$ była analityczna.

Twierdzenie 2. *Każda funkcja zmiennej zespolonej z , określona jako suma szeregu potęgowego $\sum_0^{\infty} a_n z^n$, w którym współczynniki a_n mogą być zespolone, jest funkcją analityczną w każdym punkcie wewnątrz koła zbieżności szeregu.*

Jest to ważne twierdzenie teorii funkcji zmiennej zespolonej, którego dowód można znaleźć w dziełach matematycznych, poświęconych tej teorii.

Z twierdzeniem tym wiążą się dalsze wnioski:

1. Szereg potęgowy może być różniczkowany wyraz po wyrazie, tyle razy, ile tylko chcemy, w każdym punkcie wewnątrz koła zbieżności szeregu.

2. Każda funkcja analityczna $f(z)$ może być rozwinięta na szereg potęgowy Taylora w każdym punkcie obszaru zbieżności tego szeregu.

3. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja $f(z)$ mogła być rozwinięta na szereg potęgowy jest to, żeby funkcja ta była analityczna w rozważanym obszarze.

Powyższe własności były punktem wyjścia w rozwoju *Weierstrassowskiej* teorii funkcji zmiennej zespolonej. Weierstrass *definiuje* funkcję analityczną jako funkcję rozwijalną na szereg potęgowy.

Równania różniczkowe Cauchy-Riemanna dla funkcji analitycznej, określonej w sensie Weierstrassa, można wywieść z rozwinięcia tej funkcji na szereg Taylora:

$$\begin{aligned} P + iQ = f(x + iy) &= f(x) + iy f'(x) + \frac{(iy)^2}{2!} f''(x) + \frac{(iy)^3}{3!} f'''(x) + \dots, \\ &= f(x) + iy f'(x) - \frac{y^2}{2!} f''(x) - \frac{iy^3}{3!} f'''(x) + \dots \end{aligned}$$

Przyrównując oddzielnie części rzeczywiste i oddzielnie części urojone, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= f(x) - \frac{y^2}{2!} f''(x) + \frac{y^4}{4!} f^{IV}(x) - \frac{y^6}{6!} f^{VI}(x) + \dots, \\ Q(x, y) &= y f'(x) - \frac{y^3}{3!} f'''(x) + \frac{y^5}{5!} f^{V}(x) - \frac{y^7}{7!} f^{VII}(x) + \dots \end{aligned}$$

Różniczkując pierwszy szereg względem x i drugi szereg względem y , a następnie pierwszy względem y i drugi względem x , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} &= f'(x) - \frac{y^2}{2!} f'''(x) + \frac{y^4}{4!} f^{V}(x) - \frac{y^6}{6!} f^{VII}(x) + \dots, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} &= y f''(x) - \frac{y^3}{3!} f^{IV}(x) - \frac{y^5}{5!} f^{VI}(x) - \frac{y^7}{7!} f^{VIII}(x) + \dots \end{aligned}$$

b) Funkcje sprzężone.

Dwie rzeczywiste funkcje P i Q dwóch rzeczywistych zmiennych niezależnych x, y nazywamy *funkcjami sprzężonymi*, jeśli są one określone za pomocą funkcji analitycznej zmiennej zespolonej:

$$P(x, y) + iQ(x, y) = f(x + iy).$$

Nie każde dwie funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych x i y są sprzężone, lecz tylko takie, które spełniają równania różniczkowe Cauchy-Riemanna:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

w założeniu, że pochodne te istnieją i są ciągłe.

Dwa te równania można ująć w jedno. Dla wyeliminowania, np. funkcji Q z dwóch równań Cauchy-Riemanna, wystarczy zróżniczkować względem zmiennej x obie strony pierwszego równania, i względem zmiennej y obie strony drugiego równania, następnie dodać stronami otrzymane równości. Wtedy:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

Jeśli założymy, że $Q_{xy} = Q_{yx}$, to jest że druga pochodna mieszana funkcji Q nie zależy od kolejności różniczkowania, wtedy:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0; \text{ i analogicznie } \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0. \quad (47.3)$$

Powyższe równanie różniczkowe cząstkowe 2. rzędu zwie się *równaniem Laplace'a* dla dwóch wymiarów. Równanie to często występuje w fizyce matematycznej, np. jest ono spełnione przez potencjał dla punktu niematerialnego w polu grawitacyjnym dwuwymiarowym. Równanie Laplace'a jest równaniem funkcji harmoniczych walcowych. Jak wiadomo, ma ono następującą całkę:

$$P(x, y) = f(x + iy) + f_1(x - iy),$$

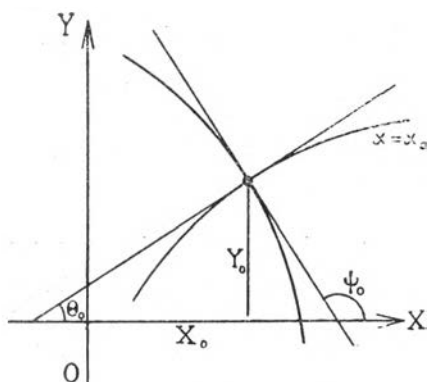
w której f i f_1 są dwiema dowolnymi funkcjami analitycznymi. Dla funkcji $Q(x, y)$ otrzymamy, w podobny sposób, analogiczne wyrażenie. Ale funkcje, które ono zawiera, są związane z funkcjami f i f_1 za pomocą równań Cauchy-Riemanna. Widzimy łatwo, że wyrażenie dla Q , które trzeba dołączyć do wyrażenia przyjętego dla funkcji P , aby równania Cauchy-Riemanna były spełnione, jest następujące:

$$Q(x, y) = \frac{1}{i} [f(x + iy) - f_1(x - iy)].$$

Funkcje P i Q mają być jednak funkcjami rzeczywistymi. Wskutek tego funkcja f_1 nie może być wzięta dowolnie, skoro funkcja dowolna f została raz obrana. Jeśli wybierzemy jako f funkcję rzeczywistą zmiennej zespolonej, trzeba żeby f_1 była tą samą funkcją; jeśli wybierzemy jako f funkcję zespoloną zmiennej zespolonej, trzeba żeby f_1 była funkcją zespoloną sprzężoną z funkcją f .

Przez odosobnienie w jakiejkolwiek funkcji analitycznej $f(z)$ jej rzeczywistej i urojonej części, uzyskujemy bezpośrednio dwa rozwiązania równania Laplace'a. Wynika stąd, że teoria funkcji zmiennej zespolonej ma ważne zastosowanie do rozwiązywania dwuwymiarowych problemów fizyki matematycznej.

Własności funkcji sprzężonych, które nadają tym funkcjom szczególną użyteczność w teorii odwzorowania konforemnego, są dwie.



Rys. 8

Twierdzenie 1. Każda krzywa rodziny, określonej za pomocą równania $x = \text{const.}$ przy zmiennym y , przecina ortogonalnie każdą krzywą rodziny $y = \text{const.}$ przy zmiennym x .

Istotnie, $X = P(x, y)$ i $Y = Q(x, y)$ są obie funkcjami zmiennych x i y ; rozważmy na płaszczyźnie (X, Y) krzywą, określoną związkami między X i Y , daną za pomocą równania $x = x_0$. Wyrażenia $X = P(x_0, y)$ i $Y = Q(x_0, y)$ są wtedy funk-

cjami jednej tylko zmiennej y ; jeśli θ_0 oznacza kąt, utworzony przez styczną do tej krzywej w punkcie $y = y_0$, z osią X , wówczas:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{dY}{dX} \text{ w punkcie } (x_0, y_0) \text{ na krzywej } x = x_0.$$

Teraz, na podstawie równań różniczkowych Cauchy-Riemanna, możemy napisać:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{dy}{dX} = -\frac{\partial X}{\partial x} \frac{dx}{dY} = -\frac{dX}{dY} \text{ dla krzywej } y = y_0;$$

przeto:

$$\operatorname{tg} \Theta_0 = - \frac{dX}{dY} \text{ w punkcie } (x_0, y_0) \text{ na krzywej } y = y_0,$$

czyli:

$$\operatorname{tg} \Theta_0 = - \operatorname{ctg} \psi_0,$$

gdzie ψ_0 oznacza kąt utworzony z osią X przez styczną do krzywej $y = y_0$ w punkcie (x_0, y_0) ; stąd:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Theta_0 &= - \operatorname{ctg} \psi_0 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \psi_0 \right), \\ \Theta &= \frac{\pi}{2} + \psi_0, \end{aligned}$$

to znaczy obie krzywe $x = x_0$ i $y = y_0$ przecinają się pod kątem prostym.

Wynika to także z równań Cauchy-Riemanna. Mianowicie mnożąc je stronami przez siebie, otrzymamy:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (\text{a})$$

Geometryczna interpretacja tego związku oznacza, że rodziny krzywych na płaszczyźnie (x, y) , odpowiadające stałym wartościom na P i Q , przecinają się pod kątem prostym we wszystkich ich punktach przecięcia. W rzeczy samej, jeśli $P(x, y) = c_1$, wówczas $dP = 0$, oraz:

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy = 0. \quad (\text{b})$$

Podobnie, jeśli $Q(x, y) = c_2$, mamy:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy = 0. \quad (\text{c})$$

Warunek, aby te dwie rodziny krzywych przecinały się pod kątem prostym, jest następujący:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)_2 + 1 = 0, \quad (\text{d})$$

gdzie wskaźniki 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do rodziny P i Q . Używając (b) i (c), łatwo widzieć, że (d) redukuje się do (a).

Rozważmy na płaszczyźnie punkt bieżący M , określony za pomocą niezależnej zmiennej zespolonej z , oraz odpowiadający mu punkt N , określony odpowiadającą wartością zmiennej zespolonej $Z = f(z)$.

Jeśli punkt M opisuje szereg jakichkolwiek krzywych $C_1, C_2, C_3, \dots$ na płaszczyźnie, punkt N będzie opisywał szereg odpowiadających krzywych $C_1', C_2', C_3', \dots$, takich, że styczne do

dwóch odpowiadających sobie krzywych, w odpowiadających sobie punktach M i N , tworzą zawsze ten sam kąt α , który zależy tylko od pochodnej dZ/dz .

Przez obrót o kąt równy kątowi α , określone powyżej, można zawsze osiągnąć równoległość korespondujących stycznych obu krzywych. Wskutek tego *krzywe przebiegane odpowiednio przez punkty M i N przecinają się pod równymi kątami.*

Jeśli, w szczególności, punkt M opisuje kolejno dwie rodziny krzywych ortogonalnych, punkt N będzie opisywał dwie inne rodziny krzywych również ortogonalnych.

Twierdzenie 2. *Stosunek elementu liniowego $dS^2 = dX^2 + dY^2$ do odpowiadającego mu elementu liniowego $ds^2 = dx^2 + dy^2$ jest stały naokoło każdego pojedynczego punktu.*

Jeśli

$$X + iY = P(x, y) + iQ(x, y) = f(x + iy),$$

wówczas:

$$X - iY = P(x, y) - iQ(x, y) = f(x - iy).$$

Różniczkując oba równania, mamy:

$$dX + i dY = f'(x + iy) (dx + i dy),$$

$$dX - i dY = f'(x - iy) (dx - i dy),$$

a mnożąc to przez siebie stronami:

$$dX^2 + dY^2 = f'(x + iy) \cdot f'(x - iy) \cdot (dx^2 + dy^2).$$

Niechaj:

$$f'(x + iy) = r + is,$$

$$f'(x - iy) = r - is;$$

wtedy:

$$f'(x_0 + iy_0) \cdot f'(x_0 - iy_0) = r_0^2 - s_0^2 = m_0^2,$$

i jest wielkością rzeczywistą. Stąd:

$$dX^2 + dY^2 = m_0^2 (dx^2 + dy^2), \text{ czyli } dS^2 = m_0^2 ds^2,$$

gdzie m_0 jest wielkością stałą dla danego punktu (x_0, y_0) i nie zależy od dx i dy .

c) Związek teorii funkcji analitycznych z teorią odwzorowań konforemnych.

Powróćmy do tematu odwzorowania konforemnego płaszczyzny (x, y) na płaszczyznę (X, Y) .

Równania parametrowe pierwszej płaszczyzny, po przyjęciu współrzędnych kartezjańskich za parametry, są: $x = x, y = y, z = 0$.

Podobnie, równania parametrowe drugiej płaszczyzny są: $X = X, Y = Y, Z = 0$.

Odwzorujemy płaszczyznę (xy) na płaszczyznę (XY) za pomocą pary regularnych funkcji odwzorowawczych:

$$X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y). \quad (47.4)$$

Związki (47.4), w powyższych założeniach, przedstawiają również równanie płaszczyzny (XY) przy użyciu wspólnych parametrów x, y .

Zažadajmy, żeby funkcje odwzorowawcze P i Q były tak określone, aby odwzorowanie jednej płaszczyzny na drugą było konforemne. Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest proporcjonalność wielkości podstawowych 1. rzędu obu płaszczyzn:

$$E' : E = F' : F = G' : G.$$

Wielkości podstawowe dla płaszczyzny oryginału są $E = 1, F = 0, G = 1$; zaś dla płaszczyzny obrazu są następujące:

$$E' = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2, \quad F' = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad G' = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2.$$

Warunki konforemności mają więc teraz postać: $E' = G', F' = 0$, czyli:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Te dwa warunki możemy przekształcić na prostsze. Obliczając z tych równań raz $\partial P / \partial x$ za pomocą pozostałych funkcji, drugi raz $\partial Q / \partial x$ za pomocą pozostałych funkcji, otrzymamy następujące warunki, które muszą spełniać funkcje odwzorowawcze P, Q , aby odwzorowanie było *izogonalne*, czyli *równokątne*:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (a)$$

oraz:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (b)$$

Równania różniczkowe cząstkowe 1. rzędu, o dwóch funkcjach niewiadomych, podane pod (a) są to znane z teorii funkcji równania Cauchy - Riemanna. Mówią one, że *funkcje odwzorowawcze P i Q muszą być funkcjami sprzężonymi, lub też, że muszą one być równe odpowiednio rzeczywistej i urojonej części dowolnej funkcji analitycznej zmiennej zespolonej*:

$$P(x, y) + iQ(x, y) = f(x + iy).$$

Równania (b) redukują się do równań (a) przez zmianę znaków przy funkcji Q , to znaczy przez wzięcie figury obrazowej uzyskanej przez symetrię względem osi rzeczywistej na płaszczyźnie (XY) . Stąd przypadek (b) odpowiada odwzorowaniu *izogonalnemu, lecz nie konforemnemu*, i jedyne konforemne odwzorowania płaszczyzny z na płaszczyznę Z są formy $Z = f(z)$, gdzie f jest dowolną funkcją analityczną.

Odwzorowania w których zachowana jest tylko wielkość kątów bez względu na ich zwrot, nazywamy *izogonalnymi*. A więc (a) i (b) są odwzorowaniami izogonalnymi. Jeśli zachowane są zarówno wielkość jak i zwrot (sens obrotu lub znak) odpowiadających sobie kątów, odwzorowanie izogonalne zowie się konforemnym. Często jednak nie odróżnia się tych dwóch pojęć: izogonalności i konforemności odwzorowania, lecz definiuje się konforemność jako zachowanie wielkości kątów bez względu na ich zwrot.

Widzimy jak ścisły związek zachodzi między teorią funkcji analitycznych a tak odległą na pozór teorią odwzorowań konforemnych. Każda funkcja analityczna zmiennej zespolonej, utworzonej ze współrzędnych izometrycznych powierzchni oryginału, przyrównana do zmiennej zespolonej, utworzonej ze współrzędnych izometrycznych powierzchni obrazu, określa jakieś odwzorowanie konforemne jednej powierzchni na drugą. Ale i odwrotnie każde odwzorowanie konforemne podaje parę funkcji rzeczywistych sprzężonych, czyli część rzeczywistą i część urojoną jakiejś funkcji analitycznej. Korzysta się z tego zarówno w matematyce czystej, aby trudne związki funkcyjne rozpatrywać na przejrzystym obrazie geometrycznym, jak i w matematyce stosowanej, aby ująć zawile konstrukcje geometryczne w liczbowe związki funkcyjne.

d) Zastosowanie funkcji analitycznych do konforemnego odwzorowania elipsoidy obrotowej spłaszczonej na płaszczyznę.

Obierzmy na elipsoidzie izometryczne współrzędne południkowe φ_{ie} , λ za parametry powierzchniowe, oraz na płaszczyźnie izometryczne współrzędne prostoliniowe X , Y za parametry płaskie.

Wszystkie konforemne odwzorowania płaskie elipsoidy obrotowej zawiera związek ogólny:

$$X + iY = f(\varphi_{ie} + i\lambda), \quad (47.5)$$

z jedynym warunkiem, że funkcja dowolna f ma być funkcją analityczną.

Według definicji funkcji analitycznej, część rzeczywista i część urojona takiej funkcji ma spełniać równania różniczkowe Cauchy-Riemanna:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial X}{\partial \lambda}. \quad (47.6)$$

Wzory te można uzyskać z warunku izogonalności odwzorowania:

$$E' : E = F' : F = G' : G.$$

Jeśli zamiast współrzędnych izometrycznych φ_i , λ użyjemy, jak zwykle, współrzędnych geograficznych φ , λ równania te przyjmą następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= -\frac{N \cos \varphi}{M} \frac{\partial Y}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= \frac{N \cos \varphi}{M} \frac{\partial X}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (47.7)$$

Są to klasyczne równania różniczkowe odwzorowań konforemnych płaskich elipsoidy obrotowej spłaszczonej.

Równania (47.7) uzyskujemy z równań (47.6) przez zamianę zmiennych φ_i , λ zmiennymi φ , λ na mocy związku:

$$d\varphi_i = \frac{d\sigma}{r} = \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi},$$

w którym σ oznacza długość łuku południka, r promień równoleżnika, M i N główne promienie krzywizny elipsoidy w punkcie.

Jeśli zamiast współrzędnych φ , λ w równaniach (47.7), użyjemy, do określenia położenia punktów na elipsoidzie, współrzędnych s , u , z których $s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi$ oznacza długość łuku południka od szerokości φ_0 punktu centralnego do szerokości φ równoleżnika punktu rozważanego (dodatnia gdy $\varphi > \varphi_0$), zaś $u = r(\lambda - \lambda_0) = N \cos \varphi (\lambda - \lambda_0)$ oznacza długość łuku tego równoleżnika, od południka centralnego do punktu rozważanego (dodatnia, gdy punkt rozważany znajduje się na wschód od centralnego południka) — wówczas równania różniczkowe Cauchy-Riemanna, wyrażone w parametrach s i u , będą następujące:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial s} &= +u \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \frac{\partial Y}{\partial u}, \\ \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial s} &= -u \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \frac{\partial X}{\partial u}.\end{aligned}\quad (47.8)$$

Ponieważ X i Y są funkcjami dwóch zmiennych s i u , wobec tego równania różniczkowe Cauchy-Riemanna dla elipsoidy możemy napisać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} &= -\frac{N \cos \varphi}{M} \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} &= \frac{N \cos \varphi}{M} \left(\frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right);\end{aligned}$$

zważywszy, że:

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = N \cos \varphi; \quad \frac{\partial s}{\partial \varphi} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\lambda M \sin \varphi = -u \frac{M}{N \cos \varphi} \sin \varphi,$$

łatwo otrzymujemy wyżej podane równania różniczkowe (47.8). (Przypis 12).

Równania (47.8) były podstawą rozpracowania, w latach 1928 — 1932, odwzorowania *quasi-stereograficznego* *Wojskowego Instytutu Geograficznego* w Warszawie, używanego do map topograficznych i ich siatek kilometrowych:

Franciszek Biernacki, kpt. korp. geogr. i *Józef Słomczyński*, por. korp. geogr.: *Odwzorowanie quasistereograficzne Wojskowego Instytutu Geograficznego*, Warszawa 1932. Biblioteka Służby Geograficznej, tom 9. Stronic XXXV + 139 (tablice liczbowe podające współrzędne prostokątne płaskie odwzorowania quasi-stereograficznego dla obszaru w granicach od 47° do 57° równoleżnika i od 14° do 30° południka na wschód od Greenwich — dla 11858 punktów przecięć siatki geograficznej, w odstępach co 5' dla szerokości i co 10' długości geograficznej).

Ta sama praca również w języku francuskim: *Projection quasi-stéréographique de l'Institut Géographique Militaire de Pologne par F. Biernacki et J. Słomczyński. Travaux de l'Association de Géodésie de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale. Rapports Généraux établis à l'occasion de la cinquième Assemblée Generale; Lisbonne, 17 — 25 Septembre 1933. Tome 12, Paris, 1933.*

Funkcje X i Y , których poszukujemy, muszą spełniać równania (47.6), lub inne im równoważne. W szczególności równania Cauchy-Riemanna są spełnione, jeśli funkcja f może być określona jako suma jakiegoś szeregu całkowicie zespolonego. Stosując rozwinięcie funkcji $f(z)$ zmiennej zespolonej $z = \varphi_i + i\lambda$ na szereg Taylora, możemy napisać:

$$X + iY = f(\varphi_i + i\lambda) = f(\varphi_i) + i\lambda \frac{df}{d\varphi_i} + \frac{(i\lambda)^2}{2!} \frac{d^2f}{d\varphi_i^2} + \frac{(i\lambda)^3}{3!} \frac{d^3f}{d\varphi_i^3} + \dots,$$

lub, przyrównując do siebie oddzielnie części rzeczywiste i oddzielnie części urojone obu stron równości, i pamiętając, że $i^2 = -1$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 X &= f(\varphi_i) - \frac{\lambda^2}{2!} \frac{d^2 f}{d\varphi_i^2} + \frac{\lambda^4}{4!} \frac{d^4 f}{d\varphi_i^4} - \frac{\lambda^6}{6!} \frac{d^6 f}{d\varphi_i^6} + \dots, \\
 Y &= \lambda \frac{df}{d\varphi_i} - \frac{\lambda^3}{3!} \frac{d^3 f}{d\varphi_i^3} + \frac{\lambda^5}{5!} \frac{d^5 f}{d\varphi_i^5} - \frac{\lambda^7}{7!} \frac{d^7 f}{d\varphi_i^7} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{47.9}$$

Przy zastosowaniu praktycznym wzorów szeregowych (47.9), dla uzyskania odwzorowań konforemnych, wystarczy skutecznie obiór funkcji $f(\varphi_i)$ według pewnych *warunków początkowych*, albo pewnych własności geometrycznych, jakie chcemy uzyskać dla odwzorowania.

48. Notatka historyczna o teorii konforemności

a) Okres pierwszy: badanie pojedynczych problemów praktycznych (Hipparch, Ptolemeusz, Mercator).

Teoria odwzorowania konforemnego, lub ogólniej: izogonalnego, jednej powierzchni na drugą rozwinęła się z praktycznego problemu konstrukcji map. Pomijając banalny przypadek przekształcenia przez podobieństwo, można powiedzieć, że najstarszą znaną mapą konforemną jest rzut stereograficzny¹⁾ kuli na płaszczyznę, przypisywany *Hipparchowi*, około roku 130 przed Chr. Dopiero *Ptolemeusz*, w pierwszej połowie II stulecia, użył tego rzutu do przedstawienia sfery nieba. Własność konforemności, jak i inne cenne własności tego rzutu były poznane znacznie później. Własność, że wszystkie koła kuli rzutują się również jako koła płaszczyzny była odkryta przez Ptolemeusza, około roku 130 po Chr., i opisana w jego pracy p. t. *Sphaerae a planetis projectio in planum*, która doszła do nas tylko w arabskim przekładzie, z którego *Commandino*, w r. 1558, zrobił łaciński przekład i uzupełnił komentarzem. Ale własność równokątności, która stanowi istotną cechę rzutu stereograficznego, nie była, jak się zdaje, zauważona przez Ptolemeusza.

W r. 1569 *Mercator* sporządził morską mapę świata (patrz Nr 45, c, 2), w której zamierzał osiągnąć to, ażeby różne kierunki wiatrów mogły być wszędzie na mapie przedstawione za pomocą linii prostych, które by tworzyły ze sobą takie same kąty, jak odpowiednie kierunki na kompasie. Warunek ten wymagał przede wszystkim przedstawienia południków kuli na mapie, w postaci

¹⁾ Nazwa użyta po raz pierwszy w roku 1613 przez belgijskiego matematyka *Aguillona* lub *Aguilloniusa* (1566 — 1617).

prostych równoległych, zaś równoleżników kuli w postaci prostych prostopadłych do południków; następnie — zachowania na mapie tych samych stosunków stopni długości do stopni szerokości, jakie mają one na kuli. Stąd, przy stałej wartości 1^0 długości geograficznej na mapie, stopnie szerokości muszą wzrastać w stosunku *secansa* szerokości. Matematyczne prawo tego odwzorowania było jednak podane, w formie szeregu nieskończonego, dopiero w roku 1599 przez *Edwarda Wright'a*, a w formie skończonej — przez scałkowanie funkcji $\int_0^\varphi d\varphi/\cos \varphi$ — dopiero w r. 1668 przez *James'a Gregory'ego*.

b) Okres drugi: ogólne postawienie problemu konforemności (Lambert, Euler, Lagrange, Gauss).

Duże znaczenie w rozwoju historycznym teorii odwzorowań w ogóle ma klasyczna praca *J. H. Lamberta*, filozofa i matematyka niemieckiego, p. t. *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*, ogłoszona w r. 1772 jako szósta (z dziewięciu) rozprawa trzeciego tomu jego *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen*; również przedrukowana przez *A. Wangerina* w *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Nr. 54, Leipzig 1894*, i zaopatrzona w komentarz, z którego zaczerpnięto niektóre z niniejszych uwag.

Johann Heinrich Lambert (1728 — 1777), urodzony w Mulhouse w Alzacji, pochodził ze skromnej rodziny i tylko swym własnym wysiłkiem zawdzięczał wykształcenie. W roku 1764, po kilku latach podróžowania, przeniósł się do Berlina, gdzie doznał wielu zaszczytów i względów od Fryderyka Wielkiego. Był wybrany na członka Królewskiej Akademii Nauk w Berlinie. W r. 1774 ogłosił swe *Ephemerydy*. Miał dar łatwości i zdolności stosowania nauk matematycznych do kwestyj praktycznych. Zawdzięczamy mu wprowadzenie funkcji hiperbolicznych do trygonometrii; jego odkrycia w geometrii mają duże znaczenie, zarówno jak i badania na polu fizyki i astronomii. Jest on autorem wielu godnych uwagi twierdzeń o przecięciach stożkowych.

Znaczenie pracy Lamberta na polu teorii odwzorowań polega głównie na tym, że był on pierwszy który poczynił *ogólne* badania o projekcjach map. Gdy jego poprzednicy ograniczali się do badania pojedynczych metod odwzorowawczych, zwłaszcza perspektyw, Lambert traktuje zadanie odtworzenia kuli na płaszczyźnie z wyższego punktu widzenia i stawia najpierw pewne ogólne warunki, które ma spełniać odwzorowanie; najważniejszymi z nich są: żądanie

równokątności, oraz żądanie (z poprzednim wspólnie nieosiągalne) równopowierzchniowości. Choć Lambert nie rozwinął w pełni obu teorii dla tych odwzorowań, z których pierwsza dla czystej matematyki, a obie dla kartografii matematycznej zyskały pierwszorzędne znaczenie, to jednak pierwszy wypowiedział jasno ideę obu tych teorii. Słusznie więc od pracy Lamberta można datować początek nowej epoki w nauce o odwzorowaniach. Ale nie tylko dzięki ogólności jego poglądów „Anmerkungen und Zusätze” nawet i dziś może budzić zainteresowanie, lecz także ze względu na rezultaty do których Lambert dochodzi. Przypadło mu w udziale odkrycie wielu nowych, nieznanych przed nim, sposobów odwzorowań, które dziś są w powszechnym użyciu przy sporządzaniu map. W końcu także i sposób w jaki Lambert ujmując swoje problemy i przeprowadza je, jest bardzo pouczający. Jest nieco dziwne, że to pojętne studium z r. 1772, i praktyczne zastosowanie rozwiniętych przez Lamberta metod, pozostawało przez wiele lat w zapomnieniu, a raczej niezrozumieniu. Praca Lamberta jest napisana bardzo jasno i przystępnie, nie straciła ona do dnia dzisiejszego nic ze swej wartości.

W rozdziale VI swej pracy, w § 73, Lambert podaje po raz pierwszy do wiadomości wzmiankę o ogólnych wzorach konforemnego odwzorowania kuli na płaszczyznę; nadmieniam przy tym, że samo rozwiązanie pochodzi od Lagrange’a, któremu zakomunikował rezultaty swoich badań. Lambert poprzestał na ustanowieniu równania różniczkowego od którego zależy konforemne odwzorowanie kuli na płaszczyznę, i z tego równania, nie rozwiązując go ogólnie, wyprowadził, obok uprzednio już znanych odwzorowań: stereograficznego i Mercatora, kilka nowych równokątnych odwzorowań. Podał mianowicie dwa uogólnienia odwzorowania stereograficznego: *stożkowe równokątne* (w §§ 47 — 57 jego pracy) i *kołowe równokątne* (w §§ 58 — 64 jego pracy), oraz *walcowe równokątne poprzeczne* odwzorowanie kuli na płaszczyznę, nazywane niekiedy *pierwszym* odwzorowaniem Lamberta (w § 85 jego pracy). Wyczerpujące badanie konforemnych odwzorowań kołowych przeprowadził dopiero Lagrange, wywody Lamberta o siatkach kołowych nie mają należytej ścisłości i ogólności. Również nie wnika on wcale w sprawę zniekształceń odwzorowawczych.

Lambert nie rozwiązał ogólnego problemu o konforemnym odwzorowaniu powierzchni. Tę lukę zapełnił pierwszy Lagrange, który pokazał ogólną metodę rozwiązania oraz możliwości jej wykorzystania; ścisłą analizę zawdzięczamy dopiero Gaussowi.

Leonhard Euler (1707 — 1783), matematyk szwajcarski, jeden z najwybitniejszych swego stulecia (opublikował 865 rozpraw naukowych i dzieł), nie pominął w swych badaniach problemu map i teorii odwzorowań. Jego trzy prace o projekcjach map ukazały się w *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro anno 1777, Pars I*, pod tytułami:

1. *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, pp. 107 — 132.
2. *De projectione geographica superficiei sphaericae*, pp. 133 — 142.
3. *De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usitata*, pp. 143 — 153.

Wszystkie wyżej wymienione prace Eulera zostały wydane w przekładzie z oryginału łacińskiego na język niemiecki i zaopatrzone w komentarz przez A. Wangerina w *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften*, Nr 93, Leipzig 1898: *Drei Abhandlungen über Kartenprojectionen von Leonhard Euler (1777)*, skąd czerpiemy niektóre z niniejszych uwag. Do czasu pojawienia się tego przekładu, prace Eulera na temat odwzorowań były (oprócz w Rosji) mało znane i nie w tym stopniu jak na to zasługiwały, a to wskutek zamieszczenia ich w trudno dostępnym wydawnictwie rosyjskim.

Co do czasu, prace Eulera pojawiają się w tym samym okresie, co prace Lamberta i Lagrange'a. Euler, w teorii odwzorowania kuli na płaszczyznę, pod wieloma względami idzie dalej niż Lambert. Obaj ujmują pojęcie „odwzorowania” w ogólniejszym sensie odpowiedniości punktowej, nie zaś tylko rzutu, czy perspektywy geometrycznej, jak to miało miejsce przedtem. Ale gdy Lambert, wychodząc ze szczególnych odwzorowań, w końcu dopiero dochodzi do uogólnień, Euler stawia ogólne pojęcia na samym początku; dlatego podejście jego do tematu jest a priori ogólniejsze. Obaj autorzy ustanawiają ważne zasady równokątności oraz równopowierzchniowości; obaj rozwijają, z pierwszej z tych zasad, ogólne równanie różniczkowe dla konformnego odwzorowania kuli na płaszczyznę. Ale gdy Lambert nie skłania się do rozpoczęcia od tych ogólnych wzorów, a tylko (dla poszczególnych rodzajów odwzorowania) używa specjalnych zasad i metod, Euler wyprowadza z ogólnych wzorów szczególne rezultaty dla rozmaitych rodzajów projekcji stereograficznej. Również i w traktowaniu odwzorowań równopowierzchniowych Euler idzie, zarówno co do podstaw jak i rezultatów, dalej niż Lambert. Dodajmy do tego piękną formę analitycznych rozwinięć, to poznamy, że prace Eulera, które zresztą nie zawierają żadnych odniesień do wcześniejszej

literatury przedmiotu, wykazują istotny krok naprzód w stosunku do prac Lamberta.

Lagrange poszedł w zadaniu odwzorowawczym dalej niż Euler. Z jednej strony rozważył i rozwiązał zadanie o konforemnym odwzorowaniu *dowolnej powierzchni obrotowej na płaszczyznę*, z drugiej — wyprowadził najogólniejsze konforemne odwzorowanie, w którym południki i równoleżniki takiej powierzchni przekształcają się w koła na płaszczyźnie. W sam problem konforemnego odwzorowania Lagrange na ogół głębiej nie wnika. Tym niemniej prace Eulera są ważnym przyczynkiem do prac Lagrange'a, a w rozwoju teorii odwzorowań mają wydatne znaczenie. Euler pierwszy podał dowód analityczny nierozwijalności kuli na płaszczyznę (patrz Nr 22, oraz Przypis 2), co dowodzi wnikliwości jego rozważań.

W opisanym powyżej przedstawieniu stosunku prac Eulera do prac Lamberta i Lagrange'a zawarta jest sumaryczna treść pierwszych dwóch rozpraw Eulera. Innego typu jest jego trzecia rozprawa; rozwija ona praktyczne zagadnienia, które się nasunęły przy sporządzaniu mapy Rosji w projekcji de Lisle'a ¹⁾, i wykazuje, jak można błędy mapy tego rodzaju możliwie zmniejszyć. Trzecia rozprawa Eulera będzie bardziej interesować geografów i kartografów, którzy mają na widoku praktyczne zastosowania; dwie pierwsze zaś jego rozprawy mają ważne znaczenia głównie dla matematyków.

Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813), matematyk i astronom francuski, już w 19. roku życia był nauczycielem w szkole artyleryjskiej w swym rodzinnym mieście Turin, w którym przebywał do roku 1766. W latach 1766 — 1787 był dyrektorem wydziału matematyczno-fizycznego Akademii w Berlinie. Od r. 1787 przebywał w Paryżu, gdzie zmarł 10 kwietnia 1813 roku. Jego liczne rozprawy naukowe ukazały się przeważnie w rocznikach Akademii trzech wyżej wymienionych miast; niektóre późniejsze zaś w *Journal de l'Ecole polytechnique*. Lagrange jest autorem klasycznych dzieł następujących:

1. *Mecanique analytique*. Paris 1788; 2. wydanie 1811—1815;
3. wydanie, dokonane przez *Bertranda*, Paris 1853 — 1855.

¹⁾ Słuszniej: Mercatora, który użył podobnej konstrukcji stożkowej w swej mapie „*Galliae, Belgii inferioris et Germaniae Tabulae*, Duysburgi, 1585”.

Joseph Nicolas De Lisle (również pisany de l'Isle), 1688 — 1768, astronom i geograf francuski. Za Katarzyny I, w r. 1726, był zaproszony z Paryża do Petersburga dla założenia szkoły astronomicznej. Plan stworzenia mapy Rosji powziął już podczas pierwszych lat swej działalności w Rosji.

2. *Theorie des fonctions analytiques*. Paris 1797; 2. wydanie 1813; przekład niemiecki Grösona ukazał się w Berlinie w r. 1798.

3. *Traite de la resolution des equations numeriques de tous les degres*. Paris 1798; 2. wydanie Paris 1808.

4. *Lecons sur le calcul des fonctions*. Paris 1806.

Zbiorowe wydanie dzieł Lagrange'a, *Oeuvres de Lagrange*, Paris 1867—1892, w 14. tomach, opracował Serret i Darboux.

Rozprawa *Sur la construction des cartes geographiques, premier et second memoir* była najpierw ogłoszona w *Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, Année 1779, pp. 161 — 210 (Berlin 1781); potem przedrukowana w *Oeuvres de Lagrange*, T. IV, pp. 635 — 692. Przekład niemiecki wraz z komentarzem wydał A. Wangerin, *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften*, Nr 55: *Über Kartenprojection, Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauss (1822)*, Leipzig 1894; z przekładu tego zaczerpnięto niniejszą notatkę.

Praca Lagrange'a w teorii odwzorowania konforemnego jest podstawowa. Lagrange znał prace Lamberta i Eulera, które torowały drogę teorii odwzorowań, nie nadawały jej jednak pełnej rozciągłości. Lagrange podejmuje najpierw problem równokątności, rozważany przez Lamberta i Eulera, i rozwiązuje ogólnie sprawę konforemnego odwzorowania powierzchni obrotowej na płaszczyźnie, metodą dowolnej *funkcji zmiennej zespolonej*. Podaje również ogólny wzór na skalę tego odwzorowania. Następnie przechodzi do odwzorowania szczególnego: konforemnych odwzorowań *kołowych* powierzchni obrotowej na płaszczyznę. Uzyskane rezultaty stosuje następnie do przypadku kuli oraz elipsoidy obrotowej spłaszczonej. Jest to bardzo ważna klasyczna praca w teorii konforemności dwóch powierzchni, która niewątpliwie miała przemożny i decydujący wpływ na pracę Gaussa.

Lagrange dowiódł również, że zadanie o konforemnym odwzorowaniu powierzchni obrotowej na płaszczyznę jest w zupełności określone, gdy obraz *jednego* południka ma punktowo przepisany obraz na płaszczyźnie, (Pierwsze rozwiązanie problemu B, *Oeuvres*, IV, p. 647).

Carl Friedrich Gauss (1777 — 1855), matematyk niemiecki, urodził się w Braunschweig, tam uczęszczał do gimnazjum i do Collegium Carolinum aż do roku 1795. Następnie w latach 1795 — 1798 studiował w Getyndze (Gottingen). W roku 1807 został profesorem i dyrektorem obserwatorium astronomicznego w Getyndze i na tym stanowisku pozostawał aż do śmierci. Obok licznych

rozpraw matematycznych, astronomicznych i fizycznych, o fundamentalnym znaczeniu w rozwoju tych nauk, rozpraw, z których ważniejsze ukazały się w wydawnictwach Towarzystwa Naukowego w Getyndze, Gauss jest autorem następujących klasycznych dzieł:

1. *Inaugural-Dissertation über den Fundamentalsatz der Algebra*. Helmstedt 1799; również: *Ostwalds Klassiker* Nr 14.

2. *Disquisitiones arithmeticae*. Leipzig 1801.

3. *Theoria motus corporum coelestium*. Hamburg 1809.

Zbiorowe wydanie dzieł Gaussa, w 9. tomach, zostało opracowane przez Towarzystwo Naukowe w Getyndze i wydane, w latach 1863 — 1903, p. t. *Gauss' Werke*.

Rozprawa *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* — była najpierw ogłoszona w *Astronomischen Abhandlungen, herausgegeben von H. C. Schumacher, Heft 3, Altona 1825*, pp. 5 — 30, a następnie przedrukowana dwukrotnie: *Gauss' Werke, Bd. IV, Göttingen 1873*, pp. 189 — 216, oraz *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Nr 55: Über Kartenprojection, Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauss (1822), herausgegeben von A. Wangerin, Leipzig 1894*, pp. 57 — 81.

Królewskie Towarzystwo Naukowe w Kopenhadze ustanowiło konkurs na rok 1822 na rozwiązanie zadania o odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą z zachowaniem podobieństwa cząsteczkowego. Rozprawa Gaussa, podana do publicznej wiadomości w r. 1822, a ogłoszona drukiem w r. 1825, była odpowiedzią na ten konkurs i zdobyła nagrodę; temat był jednak prawdopodobnie rozważany przez Gaussa wcześniej, już w roku 1816, jak można wnioskować z przedmowy Gaussa do tej rozprawy.

Gauss idzie dalej, niż Lagrange: ustanawia równanie różniczkowe dla konforemnego odwzorowania dowolnych dwóch powierzchni na siebie, i poznaje, że problem zależy tylko od proporcjonalności wielkości podstawowych 1. rzędu teorii powierzchni. Następnie zwraca uwagę na różnicę pomiędzy dwoma rozwiązaniami zadania: podobieństwem cząsteczkowym prostym i odwrotnym, o czym Lagrange wcale nie wspomina. W końcu stosuje wzory ogólne do kilku prostych przykładów, używanych w geodezji, dając ilustrację teorii. Gdy Lagrange ma głównie na widoku cele praktyczne, Gauss wychodzi raczej z czysto matematycznego punktu widzenia. Praca Gaussa wyróżnia się nadto bardzo piękną formą opra-

cowania tematu, nie podaje jednak żadnych wzmianek historycznych, ani odniesień do wcześniejszej literatury problemu. Gaussowi zawdzięczamy także wprowadzenie terminu „konforemność”, którego użył w roku 1843 w *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, i który w nowszych czasach zyskał ogólną aprobatę i powszechne użycie. W ostatnich czasach (około 1930 r.) wprowadzono również rozróżnienie terminologiczne i większą ścisłość w pojęciach: równokątność (czyli izogonalność) i konforemność; równokątność — to zachowanie wielkości kątów bez względu na zwrot kąta, konforemność — to szczególny przypadek równokątności, gdy nie tylko wielkości, lecz także i zwroty kątów są zachowane.

Rozprawa Gaussa o odwzorowaniu konforemnym rozwiązuje problem w zupełności; jest pracą klasyczną, i kończy drugi okres w rozwoju teorii konforemności.

c) Okres trzeci: rozwiązania poszczególne.

Praca Gaussa dała ogólne rozwiązanie problemu, zawierające dowolną funkcję analityczną. Ale pozostawiła bez odpowiedzi bardziej trudniejszy, dalszy problem, typu B (patrz Nr 5): czy, i w jaki sposób, dany skończony obszar powierzchni może być odwzorowany konforemnie na pewien dany skończony obszar innej powierzchni (najczęściej płaszczyzny)? Innymi słowy chodzi nie o odwzorowanie powierzchni w całości, lecz pewnych z góry wyznaczonych obszarów skończonych na obu powierzchniach, z których każdy jest ograniczony zadany konturem. Tę sprawę podniósł pierwszy Bernard Riemann (1826 — 1866), matematyk niemiecki, którego dysertacja inauguracyjna z roku 1851 stanowi dalszy punkt zwrotny w historii problemu konforemności, i decydujący o całym jego późniejszym rozwoju. Pełny tytuł pracy jest następujący: *B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse (Diss. Göttingen, 1851)*; także *Bernard Riemann's Gesammelte Werke*, 2. wydanie, str. 3—41. Riemann nie tylko wyprowadził wszystkie idee, które leżą u podstaw wszystkich dalszych badań teorii odwzorowania konforemnego, lecz także pokazał, że sam problem ma fundamentalne znaczenie dla teorii funkcji.

Wśród innych rezultatów Riemann podał twierdzenie, że każdy jednospójny obszar, który nie zawiera całej płaszczyzny, może być jedno-jednoznacznie odwzorowany konforemnie na wnętrze koła płaskiego, a następnie dowiódł, że to odwzorowanie ma miejsce w jeden tylko sposób, jeśli dowolnemu punktowi leżącemu wewnątrz obszaru ma odpowiadać środek koła i dowolnemu punktowi brze-

wemu obszarowi—pewien dowolny punkt brzegowy koła. W dowodzie tego twierdzenia, które stanowi fundament całej teorii, przyjmuje on za oczywiste, że pewien problem rachunku wariacyjnego posiada rozwiązanie; założenie to, jak pierwszy zwrócił uwagę *Weierstrass* (1815 — 1897), stanowi słaby punkt dowodu. W rachunku wariacyjnym są obecnie znane całkiem proste, analityczne, i pod każdym względem regularne problemy, które nie zawsze posiadają rozwiązania. Wszelako, około 50 lat po pojawieniu się pracy *Riemanna*, *Hilbert* dowiódł ściśle, że szczególny problem, który wypłynął z prac *Riemanna*, posiada rozwiązanie. To twierdzenie znane jest pod nazwą *zasady Dirichleta* (*D. Hilbert, Das Dirichletsche Prinzip, Göttinger Festschrift, 1901*).

W międzyczasie prawdziwość konkluzji *Riemanna* była dowiedziona w sposób ścisły przez *C. Neumanna*, a w szczególności przez *H. A. Schwarza*. Teoria, którą dla tego celu stworzył *Schwarz*, jest szczególnie piękna i pouczająca; jest ona jednak nieco zawiła i stosuje pewną liczbę twierdzeń z teorii potencjału logarytmicznego, których dowody muszą być włączone w każdy kompletny traktat tej metody. W ciągu ostatnich trzech dziesięcioleci praca kilku matematyków stworzyła nowe metody, które umożliwiają bardziej proste ujęcie rozważanego problemu.

Badanie rozwiązań poszczególnych, związanych z pewnymi z góry określonymi konturami, oraz z istnieniem i wyznaczeniem funkcji analitycznej, wykracza poza dziedzinę geometrii różniczkowej. Toteż rezultaty badań trzeciego okresu przeszły całkowicie do teorii funkcji analitycznych (patrz Nr 44, f oraz Nr 45, e, 2).

ROZDZIAŁ XI

ODWZOROWANIE RÓWNOPOWIERZCHNIOWE¹⁾

49. Ogólna teoria odwzorowań równopowierzchniowych

a) Sformułowanie zadania.

W Nr. 19. i 20. podano zasadnicze pojęcia dotyczące odwzorowania równopowierzchniowego. Bez odpowiedzi pozostało drugie zadanie podstawowe teorii odwzorowań: poszukiwanie odwzorowania równopowierzchniowego. Rozważania obecne mogą być uważane za ciąg dalszy Nr. 19. i 20.

Warunek równopowierzchniowości $ab=1$ daje podstawę do wyprowadzania związku, jakiemu muszą podlegać funkcje odwzorowawcze. Prościej jednak uzyskamy ten związek na drodze bezpośredniej.

Niechaj będą dane dwie powierzchnie regularne:

$$\text{I} \quad x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

$$\text{II} \quad X = F_1(U, V), \quad Y = F_2(U, V), \quad Z = F_3(U, V);$$

ich wielkości podstawowe 1. rzędu niech będą odpowiednio E, F, G , oraz $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$.

¹⁾ *Słownik polskich wyrazów technicznych, Dział 11, Matematyka*, Wydawnictwo Akademii Nauk Technicznych, Warszawa 1936, ustalił nazwę: *odwzorowanie równopolowe* (str. 614. Słownika), zamiast *odwzorowanie równopowierzchniowe*. Nazwa ustalona przez Słownik jest lepsza, dobitniej i ściślej wyraża pojęcie zachowania równości pól w odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą. Wobec zaawansowania druku książki wprowadzenie nazwy *równopolowość* zamiast *równopowierzchniowość* musiało być zaniechane.

Ustalona natomiast przez Słownik (str. 321) nazwa *odwzorowanie wierne*, zamiast *konforemne*, wydaje się mniej odpowiednia. Termin *konforemność* uzyskał powszechne użycie w kartografii matematycznej i stał się terminem międzynarodowym.

Poszukujemy *wszystkich* par regularnych funkcji odwzorowawczych:

$$U = \phi_1(u, v), \quad V = \phi_2(u, v),$$

uskućeczniających odwzorowanie jednej powierzchni na drugą z zachowaniem *pól wszelkich* odpowiadających sobie *obszarów*.

Według definicji, podanej w Nr. 19., dwie powierzchnie są odwzorowane na siebie *wiernopowierzchniowo*, gdy *wszędzie* korespondujące *elementy* powierzchniowe, a tym samym i *wszelkie* korespondujące *pola* obszarów skończonych, są w stałym do siebie stosunku:

$$k T d u d v = T' d u d v,$$

czyli

$$k T = T',$$

przy czym $T = +\sqrt{EG - F^2}$, $T' = +\sqrt{E'G' - F'^2}$ są funkcjami na ogół dwóch zmiennych u, v .

W niczym nie ograniczymy problemu, gdy stosunek ten przyjmiemy za równy jedności: $k = 1$; przekształcenie przez podobieństwo, czyli zastosowanie skali głównej $\sqrt{1/k}$, zrównuje bowiem korespondujące pola: mamy wtedy odwzorowanie *równopowierzchniowe*.

Należy określić parametry U i V powierzchni obrazu w funkcji parametrów u, v powierzchni oryginału w taki sposób, aby spełnić warunek:

$$T = T', \quad (a)$$

w każdej parze korespondujących punktów. W równanie to należy wprowadzić poszukiwane funkcje odwzorowawcze. Wielkość T' dla powierzchni obrazu jest funkcją zmiennych u, v ; wprowadźmy teraz nowe zmienne U, V na tej powierzchni. Wielkość T' jest, jak wiadomo z teorii powierzchni, niezmiennikiem względnym powierzchni:

$$T' = \pm \bar{T} J, \quad (\text{Przypis 13}),$$

gdzie $\bar{T} = +\sqrt{E'G' - F'^2}$ jest funkcją nowych zmiennych U, V , zaś $J = \partial(U, V)/\partial(u, v)$ jest wyznacznikiem funkcyjnym, czyli jakobianem, poszukiwanych funkcji odwzorowawczych. Równanie równopowierzchniowości (a) przyjmie więc następującą postać:

$$T = \pm \bar{T} J,$$

czyli:

$$\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial u} = \pm \frac{T}{\bar{T}}. \quad (49.1)$$

Jest to zasadnicze równanie różniczkowe teorii równopowierzchniowości. Zadanie o poszukiwaniu wszystkich par funkcji odwzorowawczych, skuteczniających równopowierzchniowe odwzorowanie powierzchni I na powierzchnię II, polega na rozwiązaniu powyższego równania. Jest to równanie różniczkowe cząstkowe 1. rzędu, o dwóch funkcjach niewiadomych U i V .

b) Redukcja zadania.

Podobnie jak w teorii odwzorowania konforemnego, zadanie o poszukiwaniu *wszystkich* odwzorowań równopowierzchniowych dla dwóch *dowolnych* powierzchni na siebie, może być zredukowane do *dwóch* prostszych zadań:

— *jednego* (możliwie najprostszego) równopowierzchniowego odwzorowania powierzchni na płaszczyznę (XY) ,

— *wszystkich* równopowierzchniowych odwzorowań płaszczyzny (XY) na drugą płaszczyznę, o współrzędnych prostokątnych u, v (albo wszystkich takich odwzorowań płaszczyzny na samą siebie).

W formie matematycznej zadanie sprowadza się do:

— *po pierwsze*, znalezienia *jednej* dowolnej pary funkcji X i Y , zmiennych u i v , spełniającej równanie:

$$\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = \pm T, \quad (49.2)$$

(ponieważ dla płaszczyzny (XY) , o współrzędnych prostokątnych $X=U$, $Y=V$, $Z=0$, przyjętych za parametry, $T=1$) i

— *po drugie*, znalezienie *wszystkich* równopowierzchniowych odwzorowań płaszczyzny (uv) na płaszczyznę (XY) , za pomocą równania:

$$\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = \pm 1, \quad (49.3)$$

(ponieważ dla płaszczyzny (uv) , o współrzędnych prostokątnych $x=u$, $y=v$, $z=0$, przyjętych za parametry, $T=1$).

Rozwiązanie równania różniczkowego (49.2) związane jest na ogół z dużymi trudnościami; w prostszy sposób rozwiązuje się ono w przypadku takich powierzchni, dla których T ma formę $\Phi_1(u) \cdot \Phi_2(v)$, lub też jest funkcją jednej tylko zmiennej.

c) Rozwiązanie zadania.

Zadanie polega na ogólnym rozwiązaniu jednego równania (49.1); albo na *szczególnym* rozwiązaniu równania (49.2) i *ogólnym* rozwiązaniu równania (49.3). Każde z nich jest równaniem różnicz-

kowym cząstkowym pierwszego rzędu o dwóch funkcjach niewiadomych. Ponieważ z *jednego* równania należy wyznaczyć dwie funkcje, rozwiązanie zadania jest wieloznaczne; można bowiem jedną z funkcji przyjąć dowolnie, a drugą wyznaczyć z równania.

Przypuśćmy, że w równaniu (49.2), warunkującym równopowierzchniowość odwzorowania powierzchni I na płaszczyznę (XY) , na X przyjęto dowolną funkcję: $X = \phi_1(u, v)$, dwóch zmiennych niezależnych u i v . Wtedy rozwiązanie równania różniczkowego (49.2) względem Y da wartość drugiej funkcji odwzorowawczej.

Oznaczmy dla krótkości znane pochodne cząstkowe funkcji X za pomocą liter p i q :

$$\frac{\partial X}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = q;$$

uzyska się wówczas równanie różniczkowe cząstkowe:

$$p \frac{\partial Y}{\partial v} - q \frac{\partial Y}{\partial u} = \pm T$$

dla znalezienia funkcji Y .

Według metody Lagrange'a całkowanie tego równania prowadzi do rozwiązania dwóch równań różniczkowych *jednoczesnych*:

$$\frac{dv}{p} = - \frac{du}{q} = \pm \frac{dY}{T}.$$

Z równań tych jedno rozwiązanie uzyska się przez scałkowanie równania:

$$p du + q dv = 0,$$

skąd $\phi_1(u, v) = C$, gdzie C jest stałą dowolną. Następnie uzyskujemy:

$$dY = \pm \frac{T}{q} du,$$

równanie, w którym zmienne u i v mogą być rozdzielone. Istotnie, jeśli założyć, że równanie $\phi_1(u, v) = C$ jest rozwiązane względem v i podstawić tę wartość w wyrażenia T i q — otrzyma się, powiedzmy, $T_{(u, C)}$ i $q_{(u, C)}$ — to wielkości te nie są już funkcjami zmiennej v ; *teoretycznie* będzie więc możliwe znalezienie całki powyższego równania. Można przeto napisać:

$$Y = C' \pm \int \frac{T_{(u, C)}}{q_{(u, C)}} du.$$

Całkę ogólną równania różniczkowego cząstkowego (49.2) uzyskuje się wówczas przez ustanowienie dowolnego związku pomiędzy stałymi C i C' ; lecz skoro $X = \psi_1(u, v)$, rozwiązanie będzie:

$$X = \psi_1(u, v) \quad (49.4)$$

$$Y = f(X) \pm \int \frac{T_{(u, C)}}{(\partial X / \partial v)_{(u, C)}} du,$$

gdzie $\psi_1(u, v)$ jest dowolną funkcją zmiennych u, v ; $f(X)$ jest dowolną funkcją zmiennej X (która to funkcja może ew. być stałą albo zerem); zaś X w wyrażeniu $\partial X / \partial v$ ma być podczas całkowania uważane za wielkość stałą.

W ten sposób związku (49.4) rozwiązują zadanie o równopowierzchniowym odwzorowaniu dowolnej powierzchni na płaszczyznę. We wzory te wchodzi dwie funkcje dowolne ψ_1 i f ; możemy je wykorzystać do nałożenia dalszych dodatkowych warunków na odwzorowanie równopowierzchniowe: daje to powód do rozwiązań poszczególnych (patrz Nr 52).

Szczególny i prostszy przypadek uzyskuje się, gdy za X , albo za Y , przyjąć funkcję jednej tylko zmiennej u , albo v . Niech $X = \psi_1(u)$, tak że $\partial X / \partial u = dX/du = p$; i $\partial X / \partial v = q = 0$; p jest oczywiście również funkcją jednej tylko zmiennej u . Rodzinie linii $u = \text{const.}$ odpowiada rodzina prostych równoległych $X = \text{const.}$ Całką równania $p du + q dv = 0$, czyli $p du = 0$, jest $\psi_1(u) = C$; następnie całkę równania $dY = \pm T dv/p$ uzyska się przez rozdzielenie zmiennych u i v w wyrażeniu po prawej stronie. Rozwiązując $\psi_1(u) = C$ względem u uzyskuje się u jako funkcję C ; podstawiając zamiast u uzyskaną wartość, otrzymuje się:

$$dY = \pm \frac{T_{(v, C)}}{p} dv, \quad Y = C' \pm \int \frac{T_{(v, C)}}{p} dv.$$

Całkę ogólną równania różniczkowego uzyska się przez ustanowienie dowolnej relacji pomiędzy stałymi C i C' ; lecz skoro $X = \psi_1(u)$, rozwiązanie ogólne będzie:

$$X = \psi_1(u),$$

$$Y = f(X) \pm \int \frac{T_{(v, C)}}{p} dv. \quad (49.5)$$

W podobny sposób łatwo uzyskać rezultat, w przypadku gdy $X = \psi_1(v)$.

50. Odwzorowania równopowierzchniowe płaskie dla płaszczyzny i elipsoidy obrotowej spłaszczonej

a) Odwzorowanie równopowierzchniowe płaszczyzny na płaszczyznę.

Niechaj będą dane dwie płaszczyzny:

$$\text{I} \quad x = u, \quad y = v, \quad z = 0,$$

$$\text{II} \quad X = U, \quad Y = V, \quad Z = 0.$$

Poszukujemy wszystkich par funkcji odwzorowawczych:

$$U = \phi_1(u, v)$$

$$V = \phi_2(u, v),$$

które by skuteczniały równopowierzchniowe odwzorowanie płaszczyzny I na płaszczyznę II.

Ponieważ, w tym przypadku, $T = 1$ i $\bar{T} = 1$, przeto równanie różniczkowe równopowierzchniowości obu płaszczyzn będzie:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \pm 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \pm 1. \quad (50.1)$$

Rozwiązując to równanie metodą wskazaną w Nr. 49, c, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} X &= \phi_1(u, v) = \phi_1(x, y), \\ Y &= f(X) \pm \int \frac{du}{(\partial X / \partial v)_{(u, c)}}. \end{aligned} \quad (50.2)$$

W szczególnym przypadku, gdy $X = \phi_1(u)$, i rodzinie prostych równoległych $x = \text{const.}$ odpowiada rodzina prostych równoległych $X = \text{const.}$, rozwiązanie będzie prostsze:

$$\begin{aligned} X &= \phi_1(x), \\ Y &= f(X) \pm \int \frac{dy}{(\partial X / \partial x)} = f(X) \pm y / (dX/dx), \end{aligned} \quad (50.3)$$

gdzie ϕ_1, f są dwiema dowolnymi funkcjami jednej zmiennej $x = u$.

Według D. A. Grave (Sur la construction des cartes géographiques, J. de Math. (5) 1 (1896), str. 317) całkę równania różniczkowego (50.1) uzyskujemy również przez rozwiązanie względem X i Y relacji:

$$y = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial X},$$

w których Ω jest dowolną funkcją zmiennych x, X , dla której $\partial^2 \Omega / \partial x \partial X$ nie jest zerem. Dla $\partial^2 \Omega / \partial x \partial X = 0$, Ω jest funkcją jednej tylko zmiennej, x albo X , i uzyskuje się przypadek szczególny: prostym $x = \text{const.}$ odpowiadają proste $X = \text{const.}$

b) Odwzorowanie równopowierzchniowe elipsoidy obrotowej spłaszczonej na płaszczyznę.

1. Teoria ogólna.

Niechaj będą dane dwie powierzchnie:

$$\text{I elipsoida: } x = \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = \frac{a(1-e^2)}{W} \sin \varphi,$$

$$\text{II płaszczyzna: } X = X, \quad Y = Y, \quad Z = 0.$$

Wielkości podstawowe 1. rzędu dla elipsoidy są, jak wiadomo, następujące: $E = M^2$, $F = 0$, $G = r^2 = (N \cos \varphi)^2$; zaś dla płaszczyzny $\bar{E} = 1$, $\bar{F} = 0$, $\bar{G} = 1$. Stąd $T = +\sqrt{EG - F^2} = Mr = MN \cos \varphi$; $\bar{T} = +\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = 1$. Wielkości M i N oznaczają główne promienie krzywizny elipsoidy; $W = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$.

Równanie różniczkowe cząstkowe wszystkich równopowierzchniowych odwzorowań elipsoidy obrotowej spłaszczonej na płaszczyznę jest więc następujące:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \pm MN \cos \varphi, \quad (50.4)$$

a ogólne rozwiązanie zadania o równopowierzchniowości elipsoidy i płaszczyzny ma postać:

$$X = \phi_1(\varphi, \lambda)$$

$$Y = f(X) \pm \int \frac{MN \cos \varphi}{(\partial X / \partial \lambda)_{(\varphi, X)}} d\varphi, \quad (50.5)$$

gdzie ϕ_1 i f są dwiema dowolnymi funkcjami, a w wyrażeniu $\partial X / \partial \lambda$ wielkość X ma być uważana za stałą podczas całkowania.

W przypadku kuli w powyższych wzorach należy podstawić $a = R$, $e = 0$, $W = 1$, $M = N = R$.

2. Równopowierzchniowe odwzorowania stożkowe, azymutalne i walcowe elipsoidy na płaszczyznę.

Każde odwzorowanie stożkowe elipsoidy na płaszczyznę określa się wzorami:

$$\begin{aligned} \rho &= f(\varphi), & X &= \rho \cos \gamma = f(\varphi) \cos n\lambda, \\ \gamma &= n\lambda, & Y &= \rho \sin \gamma = f(\varphi) \sin n\lambda, \end{aligned} \quad (50.6)$$

w których ρ, γ oznaczają współrzędne biegunowe płaskie, f dowolną funkcję szerokości geograficznej φ , n stałą stożka, X, Y współrzędne prostokątne płaszczyzny. Każda z funkcji odwzorowawczych, wyrażonych we współrzędnych ρ, γ , jest funkcją jednej zmiennej: jedna jest funkcją φ , na razie nieokreśloną, druga jest funkcją λ , prawie w zupełności określoną.

Należy znaleźć funkcję f w taki sposób, aby uzyskać równopowierzchniowość odwzorowania. Trzeba więc na funkcje odwzorowawcze nałożyć warunek równopowierzchniowości między elipsoidą i płaszczyzną, podany we wzorze (50.4). Różniczkując cząstkowo funkcje X i Y , podane we wzorach (50.6), względem zmiennych φ i λ , uzyskuje się następujące równanie równopowierzchniowości:

$$n f'(\varphi) f(\varphi) = -MN \cos \varphi,$$

przy czym dla dogodności uwzględniono znak minus po prawej stronie równania [$f(\varphi)$ maleje, gdy φ wzrasta]. Przez całkowanie mamy:

$$\begin{aligned} \int n f(\varphi) f'(\varphi) d\varphi &= - \int MN \cos \varphi d\varphi, \\ \frac{n [f(\varphi)]^2}{2} &= C_1 - \left[\frac{a^2(1-e)^2}{2} \left(\frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \log \text{nat} \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right) \right], \\ &= C_1 - R^2 \sin \beta(\varphi), \end{aligned}$$

gdzie C_1 jest stałą dowolną całkowania, R jest promieniem kuli o powierzchni równej powierzchni elipsoidy, zaś $\beta(\varphi)$ jest szerokością równopowierzchniową (patrz Nr 51).

Na koniec uzyskuje się następujące wzory dla wszystkich stożkowych odwzorowań równopowierzchniowych elipsoidy na płaszczyznę:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{C^2 - \frac{2R^2}{n} \sin \beta(\varphi)} \\ \gamma &= n \lambda, \end{aligned} \tag{50.7}$$

gdzie stała $C^2 = 2C_1/n$.

We wzory te wchodzi dwie stałe do pewnego stopnia dowolne: stała stożka $0 \leq n \leq 1$ i stała C , która oznacza promień łuku koła, przedstawiającego równik na płaszczyźnie (gdyż dla $\varphi = 0$ jest również $\beta(\varphi) = 0$, a wówczas $\rho = C$). Obie te stałe można wyznaczyć przez nałożenie rozmaitych dwóch dodatkowych warunków, dotyczących zwłaszcza rozkładu zniekształceń; otrzymuje się w ten sposób nieskończenie wiele rozmaitych równopowierzchniowych odwzorowań stożkowych.

Przejdźmy teraz do dwóch granicznych przypadków odwzorowania stożkowego: $n=1$ i $n=0$, to jest odpowiednio do odwzorowania *azymutalnego* i *walcowego* elipsoidy na płaszczyznę.

Dla $n=1$ uzyskuje się bezpośrednio odwzorowanie równopowierzchniowe azymutalne:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{C^2 - 2R^2 \sin^2 \beta(\varphi)} \\ \gamma &= \lambda.\end{aligned}\tag{50.8}$$

Dla *azymutalności* należy nadto wprowadzić żądanie, żeby biegun był przedstawiony na płaszczyźnie jako punkt, nie zaś jako łuk koła: musi być $\rho=0$ dla $\varphi=\pi/2$ (a tym samym i dla $\beta(\varphi)=\pi/2$); znajdziemy wówczas $C^2=2R^2$, i funkcje odwzorowawcze będą:

$$\begin{aligned}\rho &= R\sqrt{2[1 - \sin^2 \beta(\varphi)]} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta(\varphi)}{2}\right), \\ \gamma &= \lambda.\end{aligned}\tag{50.9}$$

Gdyby stałą C we wzorach (50.8) nadać jakąkolwiek inną wartość, odwzorowanie nie byłoby azymutalne, lecz *zenitalne*, to znaczy, że punkty mające równe odległości od stałego punktu na elipsoidzie (tutaj bieguna) mają i na płaszczyźnie równe odległości od stałego punktu na obrazie (nie będącego jednak obrazem bieguna). Obrazem bieguna byłby wtedy łuk koła o promieniu $\sqrt{C^2 - 2R^2}$.

W drugim przypadku nie można wprost podstawić $n=0$ do wzorów (50.7) i obliczać wartości funkcji dla $n=0$. Widać bowiem, że ρ staje się nieskończenie wielkie, $\gamma=0$, X staje się też nieskończenie wielkie, zaś Y staje się nieokreślone. *Wartości funkcji* nie dają rezultatów i trzeba obliczyć *granice funkcji* przy $n \rightarrow 0$.

Mamy: $X/\rho = \cos n\lambda$, czyli $\sqrt{n} X = \sqrt{2C_1 - 2R^2 \sin^2 \beta(\varphi)} \cdot \cos n\lambda$; biorąc granice po obu stronach równania otrzymuje się:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{n} \cdot X = \sqrt{2C_1 - 2R^2 \sin^2 \beta(\varphi)} \cdot \lim_{n \rightarrow 0} \cos n\lambda.$$

Gdy $n \rightarrow 0$ to $X \rightarrow -\infty$, lecz iloczyn $\sqrt{n} \cdot X$ musi dążyć do pewnej skończonej wielkości, o ile chcemy uzyskać określone odwzorowanie; nazwijmy ją $\sqrt{-2kX'}$. Po prawej stronie równania $\lim_{n \rightarrow 0} \cos n\lambda = 1$. Otrzymuje się więc:

$$-2kX' = 2C_1 - 2R^2 \sin^2 \beta(\varphi), \text{ czyli } X' = \frac{1}{k} R^2 \sin^2 \beta(\varphi) - C'.$$

Następnie $Y/\rho = \sin n\lambda$; rozwijając funkcję sinus na szereg Taylora, otrzymuje się:

$$Y/\rho = n\lambda - \frac{1}{3!}(n\lambda)^3 + \frac{1}{5!}(n\lambda)^5 - \dots,$$

dzieląc zaś obie strony równania przez n :

$$\frac{Y}{n\rho} = \lambda + W(n^2),$$

gdzie $W(n^2)$ oznacza wyrazy zawierające czynnik n w potęgach drugiej, lub wyższej. Przechodząc do granicy przy $n \rightarrow 0$ po obu stronach równania, otrzymuje się:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{Y}{n\rho} = \lim_{n \rightarrow 0} [\lambda + W(n^2)].$$

Gdy $n \rightarrow 0$ to $\rho \rightarrow \infty$, ale iloczyn $n\rho$ musi dążyć do pewnej skończonej wielkości, gdy chcemy uzyskać odwzorowanie; nazwijmy ją k' . Następnie $\lim_{n \rightarrow 0} W(n^2) = 0$. Otrzyma się więc $Y = k'\lambda$. Ze względu na równopowierzchniowość łatwo sprawdzić, że k' musi być równe k .

Funkcje odwzorowawcze dla walcowych odwzorowań równopowierzchniowych elipsoidy na płaszczyznę są więc następujące:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{k} R^2 \sin \beta(\varphi) + C' \\ Y &= k\lambda. \end{aligned} \tag{50.10}$$

Powyższe wzory można uzyskać prościej i bezpośrednio, wychodząc z ogólnych funkcji odwzorowawczych dla odwzorowań walcowych:

$$X = \psi_1(\varphi)$$

$$Y = \psi_2(\lambda),$$

i z ogólnego, dla tych odwzorowań, warunku równopowierzchniowości elipsoidy i płaszczyzny:

$$\frac{dX}{d\varphi} \frac{dY}{d\lambda} = MN \cos \varphi.$$

W ten sposób musi być:

$$dY/d\lambda = k, \quad Y = k\lambda + C_1,$$

$$dX/d\varphi = MN \cos \varphi/k, \quad X = R^2 \sin \beta(\varphi)/k + C_2;$$

przyjmując układ współrzędnych na równiku i pierwszym południku, będzie $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$.

51. Odwzorowanie równopowierzchniowe elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę o równej powierzchni

Niechaj będą dane dwie powierzchnie:

I elipsoida:

$$x = a \cos \varphi \cos \lambda/W, \quad y = a \cos \varphi \sin \lambda/W, \quad z = a(1-e^2) \sin \varphi/W,$$

II kula:

$$X = R \cos \varphi_k \cos \lambda_k, \quad Y = R \cos \varphi_k \sin \lambda_k, \quad Z = R \sin \varphi_k,$$

dla których wielkości podstawowe 1. rzędu są odpowiednio: $E = M^2$, $F = 0$, $G = r^2 = (N \cos \varphi)^2$, $T = MN \cos \varphi$; $\bar{E} = R^2$, $\bar{F} = 0$, $\bar{G} = r_k^2 = (R \cos \varphi_k)^2$, $\bar{T} = R^2 \cos \varphi_k$.

Równanie różniczkowe dla znalezienia *wszystkich* funkcji odwzorowawczych: $\varphi_k = \psi_1(\varphi, \lambda)$, $\lambda_k = \psi_2(\varphi, \lambda)$, spełniających warunek równopowierzchniowości, będzie:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda_k}{\partial \varphi} = \pm \frac{MN \cos \varphi}{R^2 \cos \varphi_k}. \quad (51.1)$$

Ze wszystkich do pomyślenia sposobów odwzorowania elipsoidy na kulę mają zastosowanie w geodezji i katografii tylko te, w których południki elipsoidy przechodzą w południki kuli i równoleżniki elipsoidy przechodzą w równoleżniki kuli. Matematycznie wyraża się to za pomocą następujących funkcji odwzorowawczych:

$$\varphi_k = \psi_1(\varphi),$$

$$\lambda_k = \psi_2(\lambda).$$

Obie siatki parametrowe, odpowiadające sobie, są siatkami ortogonalnymi na elipsoidzie i na kuli; zatem, według twierdzenia Tissota, są one zarazem krzywymi głównymi odwzorowania.

W zastosowaniach praktycznych, powyższe funkcje odwzorowawcze okazują się jednak zbyt ogólne; i zwykle ogranicza się drugą z nich żądając, aby długości geograficzne elipsoidalne i kuliste były *proporcjonalne*. W ten sposób, założenia węższe co do funkcji odwzorowawczych są następujące:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \psi_1(\varphi), \\ \lambda_k &= a \lambda, \end{aligned} \quad (51.2)$$

gdzie a jest wielkością stałą.

Równanie różniczkowe (51.1) uprości się wówczas do postaci:

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi} \alpha = \pm \frac{MN \cos \varphi}{R^2 \cos \varphi_k},$$

w której zmienne są rozdzielone i całkowanie równania nie przedstawia trudności. Mamy:

$$\int \alpha R^2 \cos \varphi_k d\varphi_k = \pm \int MN \cos \varphi d\varphi,$$

skąd (Przypis 14):

$$\alpha R^2 \sin \varphi_k = \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left[\frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \log \operatorname{nat} \left(\frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right) \right] + C. \quad (51.3)$$

Funkcje odwzorowawcze:

$$\varphi_k = \arcsin \left\{ \frac{a^2(1-e^2)}{2\alpha R^2} \left[\frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \log \operatorname{nat} \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right] + C \right\},$$

$$\lambda_k = \alpha \lambda,$$

rozwiązują w ogólnej postaci zadanie o odwzorowaniu równopowierzchniowym (51.2) elipsoidy na kulę. Zawierają one trzy stałe dowolne: α , C i R , którymi można zadysponować, nakładając dalsze dodatkowe warunki. Mogą to być warunki różnego rodzaju, lecz najużyteczniejsze z nich są trzy następujące:

1. Sferyczne długości mają być równe elipsoidalnym: $\lambda_k = \lambda$, tym samym $\alpha = 1$;
2. Równikowi elipsoidy ma odpowiadać równik kuli: $\psi_1(0) = 0$;
3. Biegunom elipsoidy mają odpowiadać bieguny kuli:

$$\psi_1(\pm \pi/2) = \pm \pi/2.$$

Warunek drugi określa stałą całkowania C ; podstawiając $\varphi_k = 0$ i $\varphi = 0$ do wzoru (51.3), uzyskuje się $C = 0$. Trzeci warunek określa promień kuli; podstawiając odpowiednio $\varphi_k = \pm \pi/2$ i $\varphi = \pm \pi/2$ do tegoż wzoru, uzyskuje się:

$$R^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left[\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} \log \operatorname{nat} \frac{1+e}{1-e} \right]. \quad (51.4)$$

Jest to kula o powierzchni równej powierzchni elipsoidy, co zresztą wynika z warunków 1 — 3.

Na $\sin \varphi_k$ otrzymuje się wówczas wyrażenie:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_k &= \frac{a^2 (1 - e^2)}{2 R^2} \left[\frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \log \operatorname{nat} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right] \\ &= \frac{\frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \log \operatorname{nat} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}}{\frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{2e} \log \operatorname{nat} \frac{1 + e}{1 - e}},\end{aligned}$$

czyli:

$$\sin \varphi_k = \sin \beta(\varphi) = \sin \varphi \left(\frac{1 + \frac{2e^2}{3} \sin^2 \varphi + \frac{3e^4}{5} \sin^4 \varphi + \frac{4e^6}{7} \sin^6 \varphi + \dots}{1 + \frac{2e^2}{3} + \frac{3e^4}{5} + \frac{4e^6}{7} + \dots} \right). \quad (51.5)$$

Szerokość geograficzna φ_k , którą oznaczać będziemy za pomocą litery $\beta(\varphi)$, określona wzorem (51.5), nazywa się *sferyczną szerokością równopowierzchniową* (niekiedy ekwiwalentną, lub też autaliczną). We wszelkich odwzorowaniach równopowierzchniowych elipsoidy na płaszczyznę, najpierw można odwzorować elipsoidę na kulę o równej powierzchni, za pomocą funkcji odwzorowawczych:

$$\varphi_k = \psi_1(\varphi) = \beta(\varphi) = \arcsin \left[\sin \varphi \left(\frac{1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 \varphi + \dots}{1 + \frac{2}{3} e^2 + \dots} \right) \right], \quad (51.6)$$

$$\lambda_k = \lambda,$$

a następnie tę kulę odwzorować na płaszczyznę. Ta redukcja zadania odwzorowawczego elipsoidy i płaszczyzny do zadania sferycznego, jest w zasadzie podobna do redukcji zastosowanej w odwzorowaniu konforemnym elipsoidy, przez użycie szerokości konforemnej. Znaczenie takiej redukcji, prócz ułatwienia obliczeń, polega na tym, że tą drogą można obliczać odwzorowania płaskie *poprzeczne* i *ukośne* dla elipsoidy obrotowej, posługując się, dla przejścia od normalnych, trygonometrią sferyczną, a jednocześnie uwzględniając spłaszczenie elipsoidy. Przypominamy przy tym, że konforemność, a także i równopowierzchniowość są własnościami przechodnimi, zatem stosowanie odwzorowań pośrednich jest cenną metodą redukcji problemów trudniejszych do problemów prostszych.

Powyższe odwzorowanie równopowierzchniowe elipsoidy obrotowej na kulę o tej samej powierzchni podał C. Mollweide, w r. 1807, w pracy cytowanej w Nr. 46, c.

Oscar A. Adams, Latitude Developments, etc., U. S. Coast and Geodetic Survey Special Publication Nr 67, Washington, 1921, podał szereg na rozwinięcie różnicy $\varphi - \varphi_k$ w funkcji φ (wyprowadzony pięcioma różnymi metodami), oraz inny szereg na tę różnicę w funkcji φ_k (wyprowadzony sześcioma różnymi metodami):

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_k &= \left(\frac{e^2}{3} + \frac{31 e^4}{180} + \frac{59 e^6}{560} + \dots \right) \sin 2 \varphi - \left(\frac{17 e^4}{360} + \frac{61 e^6}{1260} + \dots \right) \sin 4 \varphi + \\ &\quad + \left(\frac{383 e^6}{45360} + \dots \right) \sin 6 \varphi + \dots \\ &= \left(\frac{e^2}{3} + \frac{31 e^4}{180} + \frac{517 e^6}{5040} + \dots \right) \sin 2 \varphi_k + \left(\frac{23 e^4}{360} + \frac{251 e^6}{3780} + \dots \right) \sin 4 \varphi_k + \\ &\quad + \left(\frac{761 e^6}{45360} + \dots \right) \sin 6 \varphi_k + \dots\end{aligned}$$

W pracy tej znajduje się też tablica liczbową różnicy $\varphi - \varphi_k$ dla elipsoidy Clarka 1866.

Prof. dr Antoni Łomnicki, w pracy z r. 1928, cytowanej w Nr. 45, d, 1, podał dziesięciocyfrowe tablice liczbowe funkcji $\log [R^2 \sin^2 \beta(\varphi)]$ dla wszystkich szerokości co 1° , dla elipsoidy międzynarodowej (Hayforda). Promień kuli o powierzchni równej powierzchni elipsoidy międzynarodowej jest $R = 6\,371\,227,711$ m.

52. Rozwiązania poszczególne

a) Pogląd ogólny.

Drugie zadanie podstawowe teorii odwzorowań, odnośnie odwzorowania równopowierzchniowego dwóch powierzchni, jest rozwiązane za pomocą funkcji odwzorowawczych (49.4). To ogólne rozwiązanie zawiera dwie funkcje dowolne: ψ_1 i f ; jest więc rozwiązaniem A (patrz Nr 5). Wyznaczenie funkcji dowolnych stwarza problem typu B: uzyskiwanie rozwiązań poszczególnych.

Rozwiązania poszczególne dzielą się, jak wiadomo, na dwie grupy:

1. Obiór funkcji dowolnych, lub pewnych grup tych funkcji, i wystudiowanie własności odwzorowania *a posteriori*; jest to klasyczna metoda postępowania, mająca raczej charakter analityczny, często stosowana w praktyce.

2. Obiór pewnych warunków lub własności odwzorowania *a priori* i zbadanie, czy odwzorowanie takie jest w ogóle możliwe; jeśli tak—to znalezienie szczególnych funkcji, nadających odwzorowaniu postulowane własności.

Drugą grupę rozwiązań poszczególnych można podzielić, z punktu widzenia praktycznego, na trzy podgrupy, zależnie od rodzaju stawianych warunków. Pierwsza podgrupa, inspiracji raczej geometrycznej, polega na zainteresowaniu się figurą geometryczną krzywych przekształconych na powierzchni obrazu, dla pewnych grup linii na powierzchni oryginału; warunki stawiane odwzorowaniu dotyczą natury pewnych linii przekształconych. Druga podgrupa ma bardziej wzgląd na użycie odwzorowań do celów geodezyjnych; warunki stawiane dotyczą skali, albo zniekształceń odwzorowawczych. Trzecia podgrupa ma charakter teoretyczno-funkcyjny; warunki stawiane dotyczą możliwości i uzyskania odwzorowania dla obszarów skończonych, ograniczonych z góry zadanymi konturami.

Podobnie było z rozwiązaniami poszczególnymi w teorii odwzorowań konforemnych (patrz Nr 44, f, Nr 45, e, 2 i Nr 48, c).

Największe zastosowanie w kartografii matematycznej znalazły, jak dotychczas, podgrupy pierwsza i druga. Z podgrupy pierwszej podamy, idąc za Tissotem¹⁾, dwie metody, b) i c), poszukiwania odwzorowań równopowierzchniowych poszczególnych, na mocy dwóch różnych dodatkowych warunków.

Z podgrupy drugiej podamy, w punkcie d), problem Tissota odwzorowań równopowierzchniowych prostokątnych.

b) Przypadek gdy istnieje grupa odwzorowań równopowierzchniowych, w których siatka parametrowa powierzchni oryginału przekształca się w dwie rodziny krzywych, wyznaczone z góry.

Niechaj na powierzchni obrazu $F(U, V, p) = 0$, $F_1(U, V, q) = 0$ będą odpowiednio równaniami przekształconych krzywych $u = \text{const.}$, i $v = \text{const.}$ z powierzchni oryginału; p jest jakąś funkcją u , zaś q jest jakąś funkcją v , obie na razie nieokreślone. Traktując U i V jako funkcje dwóch zmiennych p i q , i różniczkując cząstkowo funkcje F i F_1 względem zmiennej p , a następnie względem zmiennej q , otrzymuje się cztery równania:

$$\frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial F_1}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial F_1}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0.$$

¹⁾ N. A. Tissot, Mémoire sur la représentation des surfaces, Paris 1881 §§ 148, 149.

Z pierwszego i trzeciego równania można wyznaczyć $\partial U/\partial p$ i $\partial V/\partial p$; zaś z drugiego i czwartego — wielkości $\partial U/\partial q$ i $\partial V/\partial q$. W ten sposób, jeśli oznaczyć literą $T_{p,q}$ wyrażenie:

$$T_{p,q} = \frac{\partial(U, V)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} U_p & U_q \\ V_p & V_q \end{vmatrix} = \frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} \frac{\partial V}{\partial p},$$

wielkość $T_{p,q}$ będzie wyrażona w funkcji wielkości U, V, p, q , a tym samym również — w funkcji tylko wielkości p, q .

Warunek (49.1) zachowania pól, może być napisany w postaci:

$$\frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial v} \cdot \frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial u} = \pm \frac{T}{T},$$

skąd:

$$T_{p,q} \cdot \frac{T}{T} \cdot \frac{dp}{du} \frac{dq}{dv} = \pm 1.$$

Aby było możliwe uczynić zadość temu równaniu, *trzeba aby wielkość $T_{p,q} \cdot T/T$ była iloczynem funkcji zmiennej p przez funkcję zmiennej q .*

Przypuśćmy, że to ma miejsce, i nazwijmy odpowiednio literami P i Q obie te funkcje; warunek staje się wówczas:

$$P \frac{dp}{du} \cdot Q \frac{dq}{dv} = \pm 1.$$

Aby go spełnić, trzeba położyć $P dp/du = n$, $Q dq/dv = 1/n$, gdzie n oznacza dowolną stałą. Mamy wtedy grupę odwzorowań równopowierzchniowych, określonych równaniami:

$$n(u - u_0) = \int_{p_0}^p P dp, \quad v - v_0 = n \int_{q_0}^q Q dq,$$

w którym p_0 i q_0 są dwiema stałymi dowolnymi, charakteryzującymi krzywe $F(U, V, p_0) = 0$, $F_1(U, V, q_0) = 0$, w które przekształcają się odpowiednio krzywa parametrowa $u = u_0$ i krzywa parametrowa $v = v_0$.

Powyższa teoria stosuje się również do przypadku, gdy poszukuje się, jeśli to jest w ogóle możliwe, systemów równopowierzchniowych o wyznaczonych z góry *siatkach prostokątnych*, przyjmując dane krzywe za krzywe przekształcone rodziny linii parametrowych $u = \text{const.}$, albo rodziny $v = \text{const.}$; gdyż wtedy z dwóch równań $F = 0$ i $F_1 = 0$ jedno jest równaniem danych krzywych, a drugie

jest równaniem ich ortogonalnych trajektorij. W szczególności możemy zażądać, aby siatce krzywych głównych Tissota na powierzchni oryginału odpowiadała siatka ortogonalna przepisane go charakteru na powierzchni obrazu (patrz punkt d).

c) Poszukiwanie grupy odwzorowań równopowierzchniowych, w których jedna z dwóch rodzin linii parametrowych przekształconych jest w zupełności dana.

Przypuśćmy, że nie wyszczególniono wcale jednej z dwóch rodzin siatki parametrowej przekształconej, natomiast druga rodzina, na przykład krzywych przekształconych dla $u = \text{const.}$, niech będzie całkowicie dana i określona za pomocą równania $F(U, V, u) = 0$. Równanie to nie zawiera już funkcji pośredniczącej p zmiennej u ; nie tylko znamy krzywe przekształcone dla rodziny $u = \text{const.}$, ale wiemy też, której krzywej na powierzchni oryginału każda z nich odpowiada.

Zamiast uważać powierzchnię oryginału za odwzorowywaną na powierzchnię obrazu, można zrobić założenie odwrotne, co prowadzi do następującego warunku zachowania pól:

$$\frac{\partial u}{\partial U} \frac{\partial v}{\partial V} - \frac{\partial u}{\partial V} \frac{\partial v}{\partial U} = \pm \frac{\bar{T}}{T}.$$

Ponieważ z równania $F = 0$ mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial U} + \frac{\partial F}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial V} = 0,$$

zatem warunek równopowierzchniowości sprowadza się do równania:

$$\frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial v}{\partial U} - \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial v}{\partial V} = \pm \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\bar{T}}{T}.$$

Jeśli założyć, że T jest funkcją tylko zmiennej u , a następnie w całym równaniu zastąpić u przez jego wartość w funkcji U, V , uzyska się równanie między zmiennymi U, V i pochodnymi zmiennej v względem tych zmiennych, skąd wynika dla v wyrażenie o postaci:

określona funkcja zmiennych U, V plus dowolna funkcja od funkcji określonej zmiennych U, V .

Można obrać tę funkcję dowolną w ten sposób, żeby jedna z krzywych rodziny $v = \text{const.}$, np. $v = v_0$, miała za obraz jakąś krzywą daną.

d) Problem Tissota: odwzorowania równopowierzchniowe prostokątne¹⁾.

Pewna grupa problemów powstaje przez połączenie równopowierzchniowości z twierdzeniem Tissota o siatkach ortogonalnych. Można np. zażądać, aby systemowi krzywych głównych Tissota na pierwszej płaszczyźnie odpowiadał ortogonalny system przepisanego charakteru na drugiej płaszczyźnie. W szczególności, gdy ten ostatni utworzony jest z linii prostych, równoległych do osi prostokątnego układu X, Y , wówczas mamy układ dwóch równań różniczkowych:

$$\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = 1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} = 0,$$

to jest *problem Tissota odwzorowań prostokątnych*. Do określenia zmiennej Y otrzymuje się — jeśli przez p, q, r, s, t oznaczyć, jak zwykle, pochodne cząstkowe 1. i 2. rzędu funkcji Y względem zmiennych u, v i wyeliminować zmienną X — równanie:

$$(p^2 - q^2)(r - t) + 4pq s = 0,$$

które przez przekształcenie stycznościowe może być zredukowane²⁾ do równania *Laplace'a*³⁾:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = z.$$

W zupełnie podobny sposób *Darboux*⁴⁾, posilując się parametrem różniczkowym, podaje równania różniczkowe cząstkowe, za pomocą których dowolna dana powierzchnia odwzoruje się równopowierzchniowo na płaszczyznę, w sposób tylko co podany.

¹⁾ Według *A. Voss*, *Abbildung und Abwicklung zweier Flächen auf einander*, (1903); *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. III, Dritter Teil D 6 a.

²⁾ *E. Holländer*, *Über flächentreue Abbildung*, Diss. Halle 1891, p. 14; do tego samego równania doszedł też *A. Korkine*, *Sur les cartes géographiques*, *Math. Ann.* 35 (1889).

³⁾ *P. G. Laplace*, *Paris Hist.*, année 1773, p. 341.

⁴⁾ *G. Darboux*, *Leçon sur la théorie générale des surfaces*, Paris, 4 tomy (1887 — 1896); odnośny problem — w tomie 3., p. 206. Szczególny przypadek odwzorowania kuli na płaszczyznę zbadał *L. Bianchi*, *Sopra una classe di rappresentazioni equivalenti della sfera sul piano*, *Roma Lincei Rend.* (4) 6 (1890), p. 226.

53. Notatka historyczna o teorii równopowierzchniowości

a) Okres pierwszy: pojedyncze problemy praktyczne; Ptolemeusz, Bonne, Werner, Sanson.

Teoria odwzorowania powierzchni rozwinęła się głównie z praktycznego problemu konstrukcji map geograficznych. Już w starożytności *Claudius Ptolemaeus*, około roku 130 naszej ery, podał w swej *Geografii* dwa odwzorowania dla mapy świata. Pierwsze z nich może być uważane za stożkowe zwykłe, to jest z prostoliniowymi wiernymi południkami i kołowymi współśrodkowymi równoleżnikami; lub za pewną modyfikację stożkowego zwykłego; prawidłowa relacja w długości stopni szerokości i stopni długości została przy tym zachowana na skrajnym północnym równoleżniku Thule (przypuszczalnie wyspy brytyjskie Szetlandy) i na równiku.

Drugie odwzorowanie Ptolemeusza jest pewną odmianą pierwszego; może być uważane za najdawniejsze odwzorowanie w przybliżeniu równopowierzchniowe; było ono podstawą innej bardzo rozpowszechnionej metody konstrukcji map geograficznych i topograficznych, zwanej, znacznie później, odwzorowaniem Bonne'a. Zamiast zachowania długości wszystkich prostoliniowych południków, Ptolemeusz wybrał tylko jeden z nich, południk centralny oznaczony $90^{\circ 1)}$, przechodzący (na mapie Ptolemeusza) przez Susiana, zatokę perską i wschodni kraniec Arabii (*Syagros extrema*), podzielił ten południk wiernie, to jest z zachowaniem długości, a następnie przez punkty podziału przeprowadził szereg równoległych łuków kołowych współśrodkowych, podobnie jak w zwykłym odwzorowaniu stożkowym. Kilka²⁾ spośród tych kół równoleżnikowych podzielił on wiernie i uzyskał inne południki przez połączenie odpowiednich punktów podziału na tych równoleżnikach liniami krzywymi, zresztą dowolnymi.

¹⁾ Pierwszy południk Ptolemeusz wykreślił przez *Insulae Beatorum* (Wyspy Szczęśliwe, Kanaryjskie).

²⁾ Brak zgodności w różnych źródłach, co do ilości tych równoleżników.

Encyclopaedia Britannica (13. wydanie, 1926, tom 17; w artykule o mapach, autorstwa Ernesta George'a Ravensteina) podaje 5 równoleżników, a mianowicie: skrajny południowy równoleżnik, przechodzący przez obszar Agisymba (w centralnej Afryce na szerokości około -20°), równik, oraz równoleżniki przechodzące przez Meroe (pomiędzy 5. i 6. kataraktą Nilu), Syene i Thule. Tamże, na str. 636, fig. 3, znajduje się facsimile omawianej mapy Ptolemeusza.

A. Tissot, *Mémoire sur la représentation des surfaces*, Paris, 1881, podaje 4 równoleżniki, a mianowicie: Thule, Syene, równik i antyrównoleżnik do Meroe (co odpowiada obszarowi Agisymba).

R. K. Melluish, *An Introduction to the Mathematics of Map Projections*, Cambridge, 1931, podaje 3 równoleżniki: Thule, Syene i równik. Nadto Melluish podaje, że południk centralny mapy Ptolemeusza przechodzi przez Meroe; nie znajduje to potwierdzenia ani u Tissota, ani w *Enc. Britannica*.

Powyższe dwa sposoby konstruowania map świata były używane przez Arabów, około roku 800 naszej ery; wiąże się to z najazdem Barbarów i upadkiem nauk na zachodzie w wiekach średnich, natomiast rozkwitem nauk na wschodzie, u Arabów, którzy przełożyli wiele prac greckich, w szczególności Ptolemeusza.

Drugie odwzorowanie Ptolemeusza wydobyte zostało z głębokiego zapomnienia dopiero w epoce odrodzenia. W roku 1511 *Bernhardus Silvanus*, a w czasie 1520 — 1566 astronom *Petrus Benewitz* lub *Apianus* (1495 — 1552) i geograf *Guillaume Le Testu*, używali tego odwzorowania, przy czym ten ostatni wpadł na szczęśliwy pomysł ulepszenia mapy, dzieląc wiernie wszystkie równoleżniki (a nie tylko kilka), zakańczając w ten sposób rozwój idei Ptolemeusza.

Według niektórych autorów, między innymi prof. dr. A. Łomnickiego (Kart. mat., Lwów-Warszawa, 1927), *Mercator* miał, w r. 1584, również użyć omawianego odwzorowania. Na wielu zresztą mapach *Mercatora* można poznać silny wpływ Ptolemeusza.

W roku 1752, *Rigobert Bonne* (1727 — 1795), francuski inżynier-hydrograf, użył i rozpowszechnił użycie omawianego odwzorowania, wykazując jego duże zalety. Nieco później tegoż odwzorowania użył astronom francuski *Joseph Nicolas De Lisli* (1688 — 1768) i wybitny francuski geograf i kartograf *Jean Baptiste Bourguignon d'Anville* (1697 — 1782). Od tych, jak się zdaje, czasów przyjęła się też powszechnie nazwa odwzorowanie *Bonne'a*, które *Tissot* zaklasyfikował do grupy odwzorowań pseudostożkowych (*projections mericoniques*, według oryginalnej nomenklatury *Tissota*).

Odwzorowanie *Bonne'a* było podstawą konstrukcyjną wielu map geograficznych i topograficznych w różnych państwach, a przede wszystkim we Francji. Propozycje wykonania nowej mapy topograficznej Francji, dla zastąpienia sławnej, lecz przestarzałej, mapy *Cassiniego* z lat 1744 — 1793, były poczynione najpierw w r. 1802, a następnie ponowione przez pułkownika *Bonne'a* w r. 1808; lecz wskutek ówczesnych wojen, dewastujących Europę, dopiero w roku 1817 przedsięwzięto kroki wstępne. W roku 1821 specjalna komisja pod przewodnictwem *Laplace'a* przyjęła odwzorowanie *Bonne'a* za podstawę konstrukcyjną nowej mapy Francji, „*Carte d'Etat-Major*”, w skali 1:80 000, w 274. arkuszach, rozpoczętej w r. 1818 a ukończonej w r. 1866. W roku 1845 Rosja przyjęła odwzorowanie *Bonne'a* do sporządzenia trzywiorstowej mapy topograficznej Rosji Europejskiej, w skali 1:126 000 w 725. arkuszach; idea i technika wykonania tej mapy jest polskiego pochodzenia: pierwsze 27 arkuszy („*Mapa topograficzna Królestwa Polskiego*”, wydana przez Rosjan w r. 1843,

z datą 1839 r.), wykonało Kwatermistrzostwo Wojsk Polskich w latach 1822—1831¹⁾; po powstaniu listopadowym 1830 r., prace były wykończone przez Rosję i zużytkowane w szerokim planie skartowania obszaru Rosji Europejskiej. Odwzorowanie Bonne'a było też podstawą *Übersichtskarte von Mittel-Europa*, w skali 1:750 000, wydanej przez wiedeński wojskowy instytut geograficzny w latach 1882—1886, w 45. arkuszach; w czasie wojny 1914—18 rozszerzonej do 54. arkuszy; była ona podstawą Mapy Rzeczypospolitej Polskiej, wydanej przez Wojsk. Inst. Geogr. w Warszawie, w latach 1924—1934, w 10. arkuszach²⁾).

Szczególne przypadki odwzorowania Bonne'a.

Dwa *graniczne* przypadki odwzorowania Bonne'a były uzyskane wcześniej i niezależnie od tego odwzorowania.

Joh. Stabius w roku 1502 i jego uczeń *Johannes Werner* (1468—1528) w roku 1514³⁾, wykonali trzy mapy kształtu sercowatego, z których jedna, zresztą bez uprzedniego zamiaru, okazała się równopowierzchniowa, i niekiedy uważana jest za pierwszą taką mapę w ogóle. Powstaje ona z odwzorowania Bonne'a, gdy główny równoleżnik jest w *biegunie* geograficznym. (Geometrycznie, chociaż niezbyt właściwie, można to interpretować tak: stożek staje się płaszczyzną styczną w biegunie kuli). Odwzorowanie to zwie się *odwzorowaniem Stab-Wernera*. Południk centralny jest linią prostą, podzieloną wiernie; równoleżniki są niepełnymi kołami współśrodkowymi, z biegunem jako środkiem, i podzielone są wiernie; inne południki są liniami krzywymi.

Drugi geograficzny przypadek odwzorowania Bonne'a uzyskuje się, gdy *równik* zostanie obrany za główny równoleżnik mapy. (Geometrycznie można to interpretować, tak: stożek przechodzi w walec). Południk centralny jest linią prostą, podzieloną wiernie; równoleżniki są rodziną prostych równoległych, zachowujących długości, w wiernych odstępach od siebie, i prostopadłych do południka centralnego; południki, uzyskane przez połączenie liniami krzywymi punktów podziałowych na równoleżnikach, są sinusoidami. Stąd odwzorowanie samo nazywane bywa *sinusoidalnym*⁴⁾. Zostało ono

¹⁾ *Bolesław Olszewicz*, Polska kartografia wojskowa (Zarys historyczny). Warszawa 1921. Wojsk. Inst. Naukowo-Wydawniczy.

²⁾ *Fr. Biernacki*, kpt. Korp. Geogr., Mapa Rzeczypospolitej Polskiej 1:750 000. Wiadomości Służby Geograficznej, zeszyt 3/4, 1935.

³⁾ *Annotationes Joan. Vernerii*, Nuremberg, 1514.

⁴⁾ *M. A. P. d'Avezac*, Coup d'oeil historique sur la projection des cartes géographiques. Bull. Soc. Géogr. Paris (5) 5, (1863), p. 257—438.

zaklasyfikowane przez Tissota do grupy odwzorowań pseudowalcowych (projections mericylindriques). Znajduje się już ono w atlasie Mercatora (1606), zastosowane do mapy Ameryki Południowej¹⁾. *Nicolas Sanson (d'Abbeville)* (1600 — 1667), francuski kartograf i założyciel sławnego zakładu kartograficznego (w r. 1627), począwszy od r. 1650 zaczął używać systematycznie omawianego odwzorowania do map części świata i krajów w swym pierwszym obszernym atlasie ziemskim. Potem *John Flamsteed* (1646 — 1719), astronom angielski, użył tejże metody odwzorowawczej do sporządzenia map nieba w swoim *Atlas coelestis*, rozpoczętym w r. 1700 i ukończonym w r. 1729. Następujące nazwy są spotykane w literaturze naukowej: odwzorowanie Mercatora-Sansona, odwzorowanie sinusoidalne Sansona, odwzorowanie Sansona-Flamsteeda, lecz najwłaściwszą wydaje się nazwa druga.

b) Okres drugi: ogólne postawienie problemu równopowierzchniowości; Lambert, Albers, Mollweide.

Lambert, w swej pracy z r. 1772, pierwszy poczynił ogólniejsze badania w dziedzinie odwzorowań kartograficznych. Znaczenie jego klasycznej pracy zostało omówione w Nr. 48, w notatce historycznej o odwzorowaniu konforemnym. Uzupełnimy teraz tamtą notatkę w odniesieniu do odwzorowania równopowierzchniowego. Chociaż Lambert nie rozwinął w pełni teorii odwzorowania równopowierzchniowego i nie wniknął głębiej w ogólny problem, to jednak pierwszy zdefiniował i jasno wypowiedział ideę równopowierzchniowości z matematycznego punktu widzenia. Następnie rozważył kilka pojedynczych, praktycznie ważnych, przypadków szczególnych równopowierzchniowego odwzorowania kuli na płaszczyznę. Jest on autorem następujących odwzorowań równopowierzchniowych, noszących jego nazwisko:

Równopowierzchniowe walcowe odwzorowanie Lamberta: normalne, z równodługościowym równikiem, zwane też krótko *trzecim* odwzorowaniem Lamberta, podane § 101 jego pracy; oraz *poprzeczne*, z równodługościowym południkiem, zwane *czwartym* odwzorowaniem Lamberta, podane w § 102.

Równopowierzchniowe azymutalne odwzorowanie Lamberta, zwane *szóstym* odwzorowaniem Lamberta: *normalne*, z obrazem bieguna w postaci punktu, podane w § 103 i 104; oraz *poprzeczne* (w dwóch półkulach, zachodniej i wschodniej), podane w § 105, 106 i 107.

¹⁾ Według: *Kartographie* von R. Bourgeois und Ph. Furtwängler, 1909, Encyclopédie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. VI, 1, 4.

Równopowierzchniowe stożkowe odwzorowanie Lamberta, zwane *piątym* odwzorowaniem Lamberta: normalne, z obrazem bieguna w postaci punktu (stała $C_1 = R^2$ w ogólnym wzorze (50.7)) — podane w § 108, 109 i 110 jego pracy.

Euler w rozprawie z roku 1777: *De representatione superficiei sphaericae super plano*, postawił ogólniejsze zadanie: znaleźć wszystkie równopowierzchniowe odwzorowania kuli na płaszczyznę z ortogonalnie przecinającymi się obrazami południków i równoleżników. W § 52 swej pracy uzyskał on następujące równania różniczkowe dla ogólnego rozwiązania tego problemu:

$$dx = p du + \frac{r dt \cos u}{p^2 + r^2}, \quad dy = r du - \frac{p dt \cos u}{p^2 + r^2};$$

rozwiązanie tych równań polega na znalezieniu takich dwóch funkcji p i r , zmiennych u i t (szerokości i długości geograficznej), aby oba powyższe wyrażenia były różniczkami zupełnymi. Prowadzi to do równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (1/z)}{\partial v^2} = 0,$$

w którym $v = \sin u$, $z = (p^2 + r^2)/\cos^2 u$. Ogólne rozwiązanie tego równania nie da się przedstawić w zwartej postaci. Euler, w §§ 54 do 59, rezygnując z rozwiązania ogólnego, poszukuje *rozwiązań poszczególnych*, i podaje trzy takie rozwiązania, a wśród nich, w § 59., ogólne równania *wszystkich* równopowierzchniowych odwzorowań stożkowych:

$$x = \sqrt{2\alpha(v+c)} \cos(t/\alpha), \quad y = -\sqrt{2\alpha(v+c)} \sin(t/\alpha),$$

w które wchodzi dwie stałe dowolne: α i c . Euler, jak sam wspomina w § 60. omawianej pracy, zważał bardziej na stronę teoretyczną zagadnienia, niż na użyteczność praktyczną. Nie pokazał on praktycznego znaczenia otrzymanego rozwiązania i racjonalnego sposobu obioru obu stałych. Dlatego na to rozwiązanie nie zwrócono należytej uwagi, a literatura naukowa, jak się zdaje nieco niesłusznie, uważa Albersa za autora równopowierzchniowego odwzorowania stożkowego z obrazem bieguna w postaci łuku koła. Jest to zresztą uogólnienie piątego odwzorowania Lamberta.

H. C. Albers¹⁾, w ciągu roku 1805, ogłosił kilka rozpraw na temat odwzorowań kartograficznych w *Zach's Monatliche Correspondenz*.

¹⁾ Rodem z Lüneburga w Niemczech; bardzo mało o nim wiemy; tytuł „doktor” użyty został przy jego nazwisku przez Germaina, w r. 1865.

W jednej z nich ¹⁾ podał równopowierzchniowe odwzorowanie stożkowe z dwoma głównymi równoleżnikami, nazwane *odwzorowaniem Albersa*. W gruncie rzeczy jest to tylko szczególny obiór obu stałych wchodzących we wzory Eulera, a ideę takiego obioru podał już wcześniej (w r. 1772), Lambert w odniesieniu do odwzorowania stożkowego konforemnego. Odwzorowanie Albersa było zastosowane do przeglądowej mapy Europy, wydanej przez Reinchara w Norymberdze, w roku 1817; w roku 1898 zastosowano je do 40. arkuszowej Neue Übersichtskarte von Mitteleuropa 1:750 000, wydawanej przez wiedeński wojskowy instytut geograficzny; po wojnie 1914—18 znalazło ono duże zastosowanie w Stanach Zjednoczonych Ameryki.

Bardzo wyczerpujące studium p. t. „Studien über flächentreue Kegelprojectionen” podał pułkownik *Heinrich Hartl* w *Mitteilungen des K. u. K. Militär-Geographischen Instituts*, Bd. 15, str. 203 — 249, Wien, 1895/96.

Carl B. Mollweide (1774 — 1825), matematyk niemiecki, podał w r. 1805 ²⁾ równopowierzchniowe odwzorowanie pseudowalcowe kuli na płaszczyznę, w którym równoleżniki są rodziną prostych równoległych, zaś południki są na ogół rodziną elips. Odwzorowanie Mollweide’go zostało zastosowane w r. 1857 do sporządzenia atlasu geograficznego, pod nazwą odwzorowania homalograficznego J. Babineta. Jest ono podobne w wyglądzie do odwzorowania Sansona, lecz równoleżniki nie są w równych odstępach. W roku 1807, w pracy cytowanej w Nr. 46 c, Mollweide podał równopowierzchniowe odwzorowanie elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę o tej samej powierzchni, dając podstawę do definicji pojęcia szerokości równopowierzchniowej $\beta(\varphi)$. Ta pośrednia droga (odwzorowań podwójnych) zezwala na łatwe uwzględnianie eliptyczności figury ziemi, a także na uzyskiwanie odwzorowań poprzecznych i ukośnych dla elipsoidy.

c) Okres trzeci: odwzorowania równopowierzchniowe poszczególne.

Ogólne rozwiązanie zadania o równopowierzchniowym odwzorowaniu jednej powierzchni na drugą, polega na rozwiązaniu równania różniczkowego cząstkowego 1. rzędu o dwóch funkcjach niewiado-

¹⁾ „Beschreibung einer neuen Kegelprojection von H. C. Albers”, *Zach’s Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde*, 12, pp. 450—459, Gotha, November 1805.

²⁾ *Zach’s Monatliche Corr.*, 12 (1805), p. 152.

mych¹⁾; ma więc zbyt dużo dowolności. Zastosowania mogą znaleźć jedynie *rozwiązania poszczególne*, związane z dodatkowymi warunkami lub żądaniami. Zależnie od rodzaju tych warunków mamy trzy typy zadań, omówione już w Nr. 52 a.

1. Gdy chodzi o warunki związane z *rodzajem krzywych przekształconych* na powierzchni obrazu, (podgrupa pierwsza, Nr 52 b, c), zostały, jak dotychczas, zbadane odwzorowania płaskie (zarówno konforemne, jak i równopowierzchniowe):

prostoliniowe, w których siatka linii (najczęściej parametrycznych) na powierzchni oryginału przekształca się w siatkę prostoliniową na płaszczyźnie; oraz

kołowe, w których siatka powierzchni oryginału przekształca się w siatkę złożoną z łuków kołowych na płaszczyźnie. Odwzorowanie prostoliniowe może być zresztą uważane za szczególny przypadek odwzorowania kołowego.

W r. 1865 *Edouard Collignon* wystudiował prostoliniowe równopowierzchniowe odwzorowania płaskie²⁾ i podał równania szczególnego odwzorowania prostoliniowego, mianowicie *trapezowego*, w którym równoleżniki są rodziną prostych równoległych, a południki rodziną prostych *zbiegających się* w jednym punkcie. Siatka trapezowa pojawiała się często we wczesnych atlasach (w XIV, XV, XVI i XVII stuleciu), lecz, według Tissota, Collignon był pierwszy, który podał równania takiej siatki dla przypadku równopowierzchniowego.

W analogii do badań Lagrange'a o konforemnych odwzorowaniach kołowych, *D. A. Grave*, matematyk rosyjski, zbadał w r. 1896 *równopowierzchniowe odwzorowania kołowe*³⁾ i określił wszystkie równopowierzchniowe odwzorowania w których prostokątna i prostoliniowa siatka współrzędnych na płaszczyźnie oryginału przechodzi w *siatkę kół* (w szczególnym przypadku: linii

¹⁾ Nowsze prace dotyczące tego tematu: *Fr. Schellhammer*, Zeitschrift für Math. Physik 23 (1878), p. 68. *A. Korkine*, Sur les cartes géographiques, Math. Ann. 35 (1889), p. 588; rozważył on zadanie znalezienia *wszystkich* równopowierzchniowych odwzorowań kuli na płaszczyznę, w których dwie dane rodziny krzywych ortogonalnych na kuli, przechodzą w dwie rodziny krzywych ortogonalnych na płaszczyźnie. *E. Holländer*, Über flächentreue Abbildung, Diss. Halle 1891. *D. A. Grave*, prace cytowane poniżej.

²⁾ *E. Collignon*, Recherches sur la représentation plane de la surface du globe terrestre, J. éc. Polyt. 24 (1865), p. 73.

³⁾ *D. A. Grave*, Ob osnovnykh zadaczakh matematičeskoj tieorii postrojenija kart, S. Pietierburg, 1896.

D. A. Grave, Ob izobraženii szaria na płoskosti s sochranenijem płoszczadiej Izv. Russk. Ast. O-wa, wyp. IV, 1895, pp. 56 — 59 (z 11. planszami).

prostych) na płaszczyźnie obrazu; uzyskał przy tym 11, istotnych jednak tylko 6, różnych typów¹⁾.

2. Gdy chodzi o warunki związane ze *zniekształceniami* odwzorowawczymi, (podgrupa druga, Nr 52 a), największe zastosowanie jak dotąd, znalazły dwa typy żądań: *równodługościowości* dla pewnej rodziny krzywych (najczęściej równoleżników), albo żądanie *prostokątności* dla pewnej siatki (najczęściej południków i równoleżników).

Z połączenia równopowierzchniowości odwzorowania z równodługościowością pewnej rodziny linii, wypływa bardzo duża liczba odwzorowań kartograficznych, których genetyczna nomenklatura, pomimo systematycznych określeń Tissota i nowszych kartografów, jak Hammera i Zöppritza, nadal jeszcze nie wydaje się jednolita, względnie przejrzyste ustalona.

Z połączenia równopowierzchniowości odwzorowania z prostokątnością pewnej siatki wypływa problem Tissota: odwzorowań prostokątnych, rozważony pokrótce w Nr. 52 d.

3. Gdy chodzi o warunki związane z możliwością i uzyskaniem odwzorowania równopowierzchniowego dla *obszarów skończonych*, ograniczonych z góry wyznaczonymi konturami na obu powierzchniach, (podgrupa trzecia, Nr 52 a), to mają one raczej charakter teoretyczno-funkcyjny. Badania tego rodzaju można znaleźć już u Schellhammera²⁾: odwzorowanie płaskiego wielokąta na trójkąt, a także obszaru płaskiego, o dowolnym konturze zamkniętym, na koło.

¹⁾ D. A. Grave, Sur la construction des cartes géographiques, J. de Math, (5) 1 (1896), p. 317.

²⁾ W pracy przytoczonej w odnośniku na str. 267.

ROZDZIAŁ XII

WARUNKI DOTYCZĄCE ZNIEKSZTAŁCEN ODWZOROWAWCZYCH

54. Poszukiwanie odwzorowania płaskiego, najkorzystniejszego dla danego obszaru

(Teoria Tissota)

Głównym celem teorii zniekształceń odwzorowawczych jest użycie jej, w sensie pierwszego podstawowego zadania teorii odwzorowań, do porównania ze sobą dwóch odwzorowań tego samego obszaru. Dalszym celem jest użycie teorii zniekształceń w sensie drugiego podstawowego zadania: poszukiwanie odwzorowania o zniekształceniach spełniających pewne z góry ustalone, lub żądane, warunki.

Poniżej będzie podana, w ogólnym ujęciu i z pewnymi rozszerzeniami, teoria Tissota, oparta na żądaniu, *aby zniekształcenia odwzorowawcze w obszarze kraju były tak małe, jak to jest możliwe*.

Pierwszą wzmiankę o tym odwzorowaniu podał Tissot w roku 1860, w *Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences*, Vol. LI, w notatce p. t. „*Trouver le meilleur mode de projection pour chaque contree particuliere*”. Jest to jednak tylko krótka wzmianka, w której funkcje odwzorowawcze, w formie szeregów potęgowych, podano bez wywodu. Dopiero później, w r. 1878, w *Nouvelles Annales de Mathematique* (2-e serie), vol. XVII, Tissot podał zwięźle teorię tego odwzorowania, która, w r. 1881, przedrukowana została w *Memoire sur la representation des surfaces*, w rozdziale II, p. t. *Recherche du systeme de projection le mieux approprie à la representation d'une contree particuliere*. Rozdział ten, z pewnymi uzupełnieniami, został przedrukowany również w nowszym dziele L. Driencourt et J. Laborde, *Traite des projections des cartes geographiques*, 2-ème fascicule, Paris, 1932.

W literaturze polskiej wzmiankę o odwzorowaniu kompensatywnym Tissota (dla szczególnego przypadku odwzorowania stożkowego pośredniego) poczynił *prof. dr A. Łomnicki*, *Kart. matem.*, 1927. Wkrótce potem, krótki zarys teorii i jej zastosowanie do przypadku stożkowego podał *dr J. Szailarski*, *Rzut pośredni Tissota*, *Wiadomości Służby Geograficznej*, Warszawa, zeszyt 5, 1931 r. Opracowanie niniejsze jest w literaturze polskiej pierwszym pełnym i wyczerpującym przedstawieniem teorii kompensatywnego odwzorowania Tissota.

a) Powierzchnie i parametry.

Nie czyniąc z góry określonej hipotezy co do formy powierzchni ziemi, założmy ogólnie, że jest ona nierozwijalną na płaszczyźnie powierzchnią obrotową naokoło linii biegunów. Wewnątrz obszaru, który ma być odwzorowany na płaszczyznę, obierzmy pewien punkt, zwany *punktem środkowym*, o współrzędnych geograficznych (φ_0, λ_0) ; południk i równoleżnik tego punktu będą nazywane odpowiednio: *południk środkowy* i *równoleżnik środkowy*.

Równania parametrowe powierzchni obrotowej można przyjąć w formie:

$$x = r \cos \lambda, \quad y = r \sin \lambda, \quad z = f(r), \quad (54.1)$$

parametry r, λ oznaczają odpowiednio odległość punktu powierzchni od osi obrotu, czyli promień równoleżnika tego punktu, oraz długość geograficzną, liczoną od płaszczyzny (xz) ; f oznacza dowolną funkcję zmiennej r . Wielkości podstawowe 1. rzędu dla powierzchni (54.1) są następujące:

$$E(r, \lambda) = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 = 1 + f'^2,$$

$$F(r, \lambda) = x_r x_\lambda + y_r y_\lambda + z_r z_\lambda = 0,$$

$$G(r, \lambda) = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2 = r^2.$$

Tissot zamiast parametrów r, λ , albo parametrów φ, λ , przyjął inne parametry: s, t ; s oznacza długość łuku południka, zawartego pomiędzy dowolnym równoleżnikiem i równoleżnikiem środkowym, (dodatnią, gdy odcinek południka skierowany jest ku północy od równoleżnika środkowego, i ujemną w kierunku przeciwnym); zaś t oznacza długość łuku równoleżnika środkowego, zawartego pomiędzy dowolnym południkiem i południkiem środkowym (dodatnią, gdy odcinek równoleżnika skierowany jest na wschód od południka środkowego, i ujemną w kierunku przeciwnym).

Siatka parametrowa $dr d\lambda = 0$, siatka parametrowa $d\varphi d\lambda = 0$, i siatka parametrowa $ds dt = 0$ są wszystkie trzy tą samą siatką

ortogonalną południków i równoleżników na powierzchni obrotowej, zamianie uległy tylko parametry, które się zmieniają wzdłuż tych samych krzywych parametrycznych. Przekształcenie parametrów:

$$r = \gamma_1(s), \quad \lambda = \gamma_2(t),$$

w którym γ_1, γ_2 oznaczają dowolne funkcje od zaznaczonych zmiennych, nie zmienia, jak wiadomo, siatki parametrycznej na powierzchni. Wielkości podstawowe E, F, G mogą być wyrażone w nowych parametrach s, t , bez potrzeby znajomości równań powierzchni w nowych parametrach; wystarczą, gdy pochodne nowych parametrów względem odnośnych starych, lub odwrotnie, są znane. Jest bowiem:

$$\begin{aligned} E(s, t) = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 &= (x_r r_s)^2 + (y_r r_s)^2 + (z_r r_s)^2 = E(r, \lambda) \cdot r_s^2 \\ &= (1 + f'^2) r_s^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(s, t) = x_r r_s \cdot x_\lambda \lambda_t + y_r r_s \cdot y_\lambda \lambda_t + z_r r_s \cdot z_\lambda \lambda_t &= F(r, \lambda) \cdot r_s \lambda_t \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(s, t) = x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 &= (x_\lambda \lambda_t)^2 + (y_\lambda \lambda_t)^2 + (z_\lambda \lambda_t)^2 = G(r, \lambda) \cdot \lambda_t^2 \\ &= r^2 \lambda_t^2. \end{aligned}$$

Pochodną r_s^2 łatwo obliczyć z równań (54.1), zaś pochodną λ_t — z warunków obioru układu współrzędnych na powierzchni. Mianowicie, kwadrat elementu łuku południka w płaszczyźnie (zr) będzie:

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 = dr^2 + f'^2 dr^2 = (1 + f'^2) dr^2,$$

$$\text{skąd} \quad \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = r_s^2 = \frac{1}{(1 + f'^2)}. \quad \text{Następnie} \quad t = \pm r_0 (\lambda - \lambda_0),$$

gdzie r_0 oznacza promień równoleżnika środkowego; stąd:

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \lambda_t^2 = \frac{1}{r_0^2}.$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} E(s, t) &= (1 + f'^2) r_s^2 = 1, \\ F(s, t) &= 0, \\ G(s, t) &= r^2 \lambda_t^2 = r^2 / r_0^2. \end{aligned} \tag{54.2}$$

b) Sformułowanie zadania odwzorowawczego.

Dane są dwie powierzchnie:

I, powierzchnia obrotowa, oryginał:	II, płaszczyzna, obraz:
$x = r \cos \lambda,$	$X = X,$
$y = r \sin \lambda,$	$Y = Y,$
$z = f(r),$	$Z = 0.$

Poszukujemy pary funkcji odwzorowawczych:

$$X = \phi_1(s, t),$$

$$Y = \phi_2(s, t),$$

które by powodowały zniekształcenia liniowe elementarne tak małe, jak to jest możliwe (lub inaczej, co na jedno wychodzi — redukowały największe co do bezwzględnej wartości zniekształcenie liniowe do minimum).

Wielkości podstawowe 1. rzędu dla powierzchni obrotowej podane już zostały we wzorach (54.2); dla płaszczyzny będą one następujące:

$$E' = X_s^2 + Y_s^2, \quad F' = X_s X_t + Y_s Y_t, \quad G' = X_t^2 + Y_t^2. \quad (54.3)$$

Założmy, że obszar, który ma być odwzorowany, nie jest zbyt duży, np. jest obszarem państwa o średniej wielkości. Wtedy wartości zmiennych s, t są zawsze, w obrębie takiego obszaru, stosunkowo dość małe, co najwyżej około $1/12$, *jeśli przyjąć promień równika za jednostkę*. Wówczas każda ze współrzędnych X, Y może być wyrażona w postaci zbieżnego szeregu, powstającego z rozwinięcia funkcji odwzorowawczych według potęg obu zmiennych s i t :

$$X = A_1 + (B_1 s + B_1' t) + (C_1 s^2 + C_1' s t + C_1'' t^2) + (D_1 s^3 + D_1' s^2 t + D_1'' s t^2 + D_1''' t^3) + \dots,$$

$$Y = A_2 + (B_2 s + B_2' t) + (C_2 s^2 + C_2' s t + C_2'' t^2) + (D_2 s^3 + D_2' s^2 t + D_2'' s t^2 + D_2''' t^3) + \dots$$

Należy określić współczynniki w tych szeregach w ten sposób, aby zniekształcenia odwzorowawcze były tak małe, jak to jest możliwe.

c) Warunki obioru układu $X Y$ na płaszczyźnie.

Aby w szeregach dla X i Y pozbyć się wyrazów niższych stopni, w możliwie najdalej idącej mierze, możemy poczynić następujące założenia:

1. Początek układu (XY) na płaszczyźnie ma odpowiadać początkowi układu (st) na powierzchni, to znaczy dla $s = t = 0$ ma być także $X = Y = 0$. Stąd musi być:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0,$$

i wyrazy wolne w obu szeregach odpadają.

2. Kierunek osi X układu na płaszczyźnie ma być styczny do obrazu południka środkowego w początku układu. Równanie południka środkowego na powierzchni obrotowej jest $t = 0$, zaś równania parametrowe obrazu tego południka na płaszczyźnie są:

$$X = B_1 s + C_1 s^2 + D_1 s^3 + \dots,$$

$$Y = B_2 s + C_2 s^2 + D_2 s^3 + \dots$$

Oś X układu ma być prostą styczną do tej krzywej w punkcie $s = 0$, co daje warunek:

$$\left(\frac{dY}{dX} \right)_{s=0} = 0, \text{ czyli } \left(\frac{B_2 + 2C_2 s + 3D_2 s^2 + \dots}{B_1 + 2C_1 s + 3D_1 s^2 + \dots} \right)_{s=0} = 0.$$

Stąd musi być:

$$\frac{B_2}{B_1} = 0, \text{ a więc } B_2 = 0, \quad B_1 \neq 0.$$

W szeregu dla Y nie będzie wyrazu pierwszego stopnia, zawierającego s , zaś w szeregu dla X jest taki wyraz.

3. Kąt przecięcia się obrazu południka środkowego i obrazu równoleżnika środkowego ma być kątem prostym; a więc oś Y ma być prostą styczną do obrazu równoleżnika środkowego w początku układu. Równanie tego równoleżnika na powierzchni obrotowej jest $s = 0$, zaś równania parametrowe jego obrazu na płaszczyźnie są:

$$X = B_1' t + C_1'' t^2 + D_1''' t^3 + \dots,$$

$$Y = B_2' t + C_2'' t^2 + D_2''' t^3 + \dots$$

Oś Y układu ma być prostą styczną do tej krzywej w punkcie $t = 0$, co daje warunek:

$$\left(\frac{dX}{dY} \right)_{t=0} = 0, \text{ czyli } \left(\frac{B_1' + 2C_1'' t + 3D_1''' t^2 + \dots}{B_2' + 2C_2'' t + 3D_2''' t^2 + \dots} \right)_{t=0} = 0.$$

Stąd musi być:

$$\frac{B_1'}{B_2'} = 0, \text{ a więc } B_1' = 0, \quad B_2' \neq 0.$$

W szeregu dla X nie będzie wyrazu pierwszego stopnia zawierającego t , zaś w szeregu dla Y jest taki wyraz.

Na mocy powyższych trzech warunków co do obioru układu (X, Y) na płaszczyźnie, szeregi potęgowe upraszczają się do postaci następującej:

$$X = B_1 s + (C_1 s^2 + C_1' s t + C_1'' t^2) + \text{wyrazy wyższych stopni},$$

$$Y = B_2' t + (C_2 s^2 + C_2' s t + C_2'' t^2) + \text{wyrazy wyższych stopni}.$$

d) Warunki na redukcję zniekształceń odwzorowawczych.

Najbardziej istotnym warunkiem odwzorowania dla celów geodezyjnych i topograficznych jest zachowanie kątów. Nie jest konieczne ściśle ich zachowanie (cecha którą posiadają odwzorowania konforemne), wystarcza często ograniczenie zniekształceń kątowych do wielkości tak małych, że będą one bez praktycznego znaczenia¹⁾. Zniekształcenia liniowe są nieuniknione, wobec założonego braku izometrii pomiędzy rozważaną powierzchnią obrotową i płaszczyzną, i należy dążyć by były one tak małe, jak to jest możliwe, redukując do minimum maksymalne zniekształcenie liniowe.

Ogólna teoria zniekształceń podaje następujące wzory na skale parametrowe m_s , m_t i na kąt parametrowy Θ' na obrazie:

$$m_s = \sqrt{\frac{E'}{E}} = (X_s^2 + Y_s^2)^{1/2} \quad \text{dla południka } t = \text{const.},$$

$$m_t = \sqrt{\frac{G'}{G}} = \frac{r_0}{r} (X_t^2 + Y_t^2)^{1/2} \quad \text{dla równoleżnika } s = \text{const.},$$

$$\cos \Theta' = \sin I = \frac{F'}{\sqrt{E' G'}} = \frac{r_0}{r m_s m_t} (X_s X_t + Y_s Y_t),$$

¹⁾ Stosowaniu do celów geodezyjnych i topograficznych odwzorowań ograniczonych do wyrazów trzeciego rzędu w rozwinięciach szeregowych dla współrzędnych, poświęcony jest tom trzeci dzieła *Traité des projections...*, par L. Driencourt et J. Laborde, Paris, 1932.

przy czym I oznacza zniekształcenie kąta parametrowego, a w danym przypadku kątem który się zniekształca jest kąt prosty:

$$\Theta' = 90^\circ - I.$$

Metoda Tissota wyznaczania współczynników w szeregach potęgowych dla X i Y polega na rozważaniu oddzielnie wyrazów różnych stopni.

1. *Redukcja zniekształcenia I kąta parametrowego Θ' i zniekształceń parametrowych $|m_t - 1|$, $|m_s - 1|$ do wyrazów pierwszego stopnia.*

Przyjmijmy najpierw w szeregach potęgowych dla X i Y tylko wyrazy 1. i 2. stopnia, i obliczmy skale parametrowe m_s i m_t oraz zniekształcenie I kąta parametrowego Θ' :

$$m_s = [(B_1 + 2 C_1 s + C_1' t + \dots)^2 + (2 C_2 s + C_2' t + \dots)^2]^{1/2},$$

$$m_t = \frac{r_0}{r} [(C_1' s + 2 C_1'' t + \dots)^2 + (B_2' + C_2' s + 2 C_2'' t + \dots)^2]^{1/2},$$

$$\sin I = \frac{r_0}{r m_s m_t} [(B_1 + 2 C_1 s + C_1' t + \dots) (C_1' s + 2 C_1'' t + \dots) + (2 C_2 s + C_2' t + \dots) (B_2' + C_2' s + 2 C_2'' t + \dots)].$$

Jeśli wypiszemy tylko wyrazy zerowego i pierwszego stopnia względem s i t w powyższych wyrażeniach na zniekształcenia, to otrzymamy:

$$m_s = B_1 + 2 C_1 s + C_1' t + \dots,$$

$$m_t = \frac{r_0}{r} (B_2' + C_2' s + 2 C_2'' t + \dots).$$

Aby zniekształcenia skal parametrowych $|m_s - 1|$ i $|m_t - 1|$ uczynić wielkościami 1. stopnia i stopni wyższych, trzeba założyć:

$$B_1 = 1,$$

$$\frac{r_0}{r} B_2' = 1, \quad \text{czyli} \quad B_2' = \frac{r}{r_0}.$$

Kąt I , jak widać z wyrażenia dla $\sin I$, nie zawiera wyrazu wolnego, jest więc wielkością 1. stopnia i stopni wyższych.

2. Redukcja zniekształceń I , $|m_s - 1|$, $|m_t - 1|$ do wielkości drugiego stopnia.

Aby zniekształcenia parametrowe uczynić wielkościami 2. stopnia, trzeba założyć:

$$C_1 = C_1' = C_2' = C_2'' = 0,$$

tak, żeby wyrazy 1. stopnia w rozwinięciach dla m_s , m_t zniknęły. Szeregi dla X i Y upraszczają się wtedy do postaci:

$$X = s + C_1'' t^2 + \text{wyrazy trzeciego stopnia} + \dots,$$

$$Y = \frac{r}{r_0} t + C_2 s^2 + \text{wyrazy trzeciego stopnia} + \dots$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \sin I &= \frac{r_0}{r m_s m_t} \left[2 C_1'' t + \left(\frac{t}{r_0} \frac{dr}{ds} + 2 C_2 s \right) \cdot \frac{r}{r_0} + \dots \right] \\ &= \left(\frac{2 r_0 C_1''}{r} + \frac{1}{r_0} \frac{dr}{ds} \right) t + 2 C_2 s + \dots \end{aligned}$$

Aby zmniejszyć zniekształcenia kątowe usuwamy wyrazy 1. stopnia przez założenia:

$$\frac{2 r_0 C_1''}{r} + \frac{1}{r_0} \frac{dr}{ds} = 0, \quad C_2 = 0.$$

Stąd:

$$C_1'' = - \frac{r}{2 r_0^2} \frac{dr}{ds} = - \frac{r}{2 r_0^2} (-\sin \varphi) = \frac{r \sin \varphi}{2 r_0^2}.$$

Przy obliczaniu współczynników przy wyrazach 2. stopnia, można zamiast $\sin \varphi$ i r przyjąć $\sin \varphi_0$ i r_0 ; przez to nie zmieniamy prawie ich wartości, gdyż różnią się one od poprzednich tylko o wielkości 1. stopnia. A więc:

$$C_1'' = \frac{r_0 \sin \varphi_0}{2 r_0^2} = \frac{\sin \varphi_0}{2 r_0}.$$

W rezultacie dochodzimy do przyjęcia następujących szeregów:

$$X = s + \frac{\sin \varphi_0}{2 r_0} t^2 + \text{wyrazy trzeciego stopnia} + \dots,$$

$$Y = \frac{r}{r_0} t + \text{wyrazy trzeciego stopnia} + \dots$$

3. Poszukiwanie współczynników wyrazów trzeciego stopnia.

Wprowadźmy teraz wyrazy trzeciego stopnia w szeregiach dla X i Y :

$$X = s + \frac{\sin \varphi_0}{2r_0} t^2 + \frac{A_1}{3} s^3 - B_1 s^2 t + C_1 s t^2 + \frac{D_1}{3} t^3 + \dots,$$

$$Y = \frac{r}{r_0} t + \frac{A_2}{3} s^3 + B_2 s^2 t - C_2 s t^2 + \frac{D_2}{3} t^3 + \dots,$$

w których dla dogodności wprowadzono oznaczenia według kolejnych liter alfabetu, i odpowiednie liczbowe czynniki i znaki.

Obliczmy skale parametrowe, a tym samym i zniekształcenia odwzorowawcze:

$$m_s = \left[\left(1 + A_1 s^2 - 2B_1 s t + C_1 t^2 + \dots \right)^2 + \left(\frac{t}{r_0} \frac{dr}{ds} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 s^2 + 2B_2 s t - C_2 t^2 + \dots \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$m_t = \frac{r_0}{r} \left[\left(\frac{\sin \varphi_0}{2r_0} \cdot 2t - B_1 s^2 + 2C_1 s t + D_1 t^2 + \dots \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{r}{r_0} + B_2 s^2 - 2C_2 s t + D_2 t^2 + \dots \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\sin I = \frac{r_0}{r m_s m_t} \left[\left(1 + A_1 s^2 - 2B_1 s t + C_1 t^2 + \dots \right) \left(\frac{\sin \varphi_0}{2r_0} \cdot 2t - B_1 s^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2C_1 s t + D_1 t^2 + \dots \right) + \left(\frac{t}{r_0} \frac{dr}{ds} + A_2 s^2 + B_2 s t - C_2 t^2 + \dots \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{r}{r_0} + B_2 s^2 - 2C_2 s t + D_2 t^2 + \dots \right) \right];$$

pisząc tylko wyrazy drugiego stopnia, otrzymamy:

$$m_s = 1 + A_1 s^2 - 2B_1 s t + \left[C_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} \frac{dr}{ds} \right)^2 \right] t^2 + \dots,$$

$$m_t = 1 + \frac{r_0}{r} \left\{ B_2 s^2 - 2C_2 s t + \left[D_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \varphi_0}{r_0^2} \right)^2 \frac{r_0}{r} \right] t^2 \right\} + \dots,$$

czyli:

$$m_s = 1 + A_1 s^2 - 2 B_1 s t + \left(C_1 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{2 r_0^2} \right) t^2 + \dots,$$

$$m_t = 1 + \frac{r_0}{r} \left[B_2 s^2 - 2 C_2 s t + \left(D_2 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{2 r r_0} \right) t^2 + \dots \right],$$

$$\sin I = \frac{1}{r m_s m_t} \left[\left(\sin \varphi_0 - \frac{r}{r_0} \sin \varphi \right) t + \left(A_2 r - B_1 r_0 \right) s^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(B_2 r + C_1 r_0 \right) s t + \left(D_1 r_0 - C_2 r \right) t^2 + \dots \right].$$

Bez zmiany stopnia aproksymacji można zastąpić φ przez φ_0 i r przez r_0 we współczynnikach wyrazów drugiego stopnia, w rozwinięciach dla m_s , m_t i $\sin I$. W wyrazie 1. stopnia w $\sin I$ wchodzi $r \sin \varphi$; zastąpimy to przez rozwinięcie na szereg Maclaurina, z ograniczeniem do dwóch wyrazów:

$$r \sin \varphi = r_0 \sin \varphi_0 + \left(\frac{d(r \sin \varphi)}{ds} \right) \cdot s + \dots \\ = r_0 \sin \varphi_0 + \left(r \frac{d \sin \varphi}{ds} + \sin \varphi \frac{dr}{ds} \right) \cdot s + \dots \\ = r_0 \sin \varphi_0 + \left(\frac{r_0}{\rho_0} \cos \varphi - \sin^2 \varphi_0 \right) \cdot s + \dots$$

Dotychczas uwzględniano spłaszczenie ziemi, lecz jest to bezużyteczne w wyrazach drugiego stopnia; można więc zastąpić w tych wyrazach ρ_0 przez 1 i r_0 przez $\cos \varphi_0$. Wówczas otrzymamy:

$$m_s = 1 + A_1 s^2 - 2 B_1 s t + \left(C_1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \right) t^2 + \dots,$$

$$m_t = 1 + B_2 s^2 - 2 C_2 s t + \left(D_2 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \right) t^2 + \dots,$$

$$\sin I = (A_2 - B_1) s^2 + 2 \left(B_2 + C_1 - \frac{\cos 2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0} \right) s t + (D_1 - C_2) t^2 + \dots$$

Jednoczesne zanulowanie wyrazów drugiego stopnia w wielkościach $(m_s - 1)$, $(m_t - 1)$ i $\sin I$ nie jest możliwe; ale można to osiągnąć dla $(m_s - m_t)$ i $\sin I$, i uczynić je wielkościami za-

leżnymi od wyrazów nie niższych, jak stopnia trzeciego. Tym samym osiągamy odwzorowanie w dużym przybliżeniu konforemne, ponieważ skala jest prawie ta sama we wszystkich kierunkach w otoczeniu pojedynczego punktu, i kąty są prawie zachowane. Wystarczy w tym celu założyć:

$$A_1 = B_2, \quad B_1 = C_2, \quad C_1 = D_2,$$

$$A_2 - B_1 = 0, \quad B_2 + C_1 - \frac{\cos 2\varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0} = 0, \quad D_1 - C_2 = 0;$$

skąd otrzymujemy:

$$A_2 = C_2 = D_1 = B_1, \quad B_2 = A_1, \quad D_2 = C_1, \quad A_1 + C_1 = \frac{\cos 2\varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0}.$$

Wzory z teorii zniekształceń¹⁾:

$$(a - b)^2 = (m_s - m_t)^2 \cos^2 \frac{I}{2} + (m_s + m_t)^2 \sin^2 \frac{I}{2},$$

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b},$$

wskazują, że $(a - b)$ i ω będą również wielkościami trzeciego rzędu.

Uzyskaliśmy więc następujący ogólny rezultat, który sformułujemy w postaci twierdzenia:

Twierdzenie. Jeśli A i C są związane zależnością:

$$2(A + C) \cdot \cos^2 \varphi_0 = \cos 2\varphi_0, \quad (54.4)$$

wszystkie odwzorowania płaskie powierzchni obrotowej, określone wzorami:

$$\begin{aligned} X &= s + \frac{\sin \varphi_0}{2r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^3 - B s^2 t + C s t^2 + \frac{B}{3} t^3 + \dots, \\ Y &= \frac{r}{r_0} t + \frac{B}{3} s^3 + A s^2 t - B s t^2 + \frac{C}{3} t^3 + \dots, \end{aligned} \quad (54.5)$$

posiadają, z wyłączeniem innych odwzorowań, tę własność, że powodują zniekształcenia liniowe drugiego rzędu.

¹⁾ Z których pierwszy wynika ze związków:

$$a^2 + b^2 = m_s^2 + m_t^2,$$

$$a b = m_s m_t \cos I.$$

W otoczeniu pojedynczego punktu, zniekształcenia liniowe elementarne są prawie te same we wszystkich kierunkach; jeśli oznaczmy je literą ε , mamy:

$$\varepsilon = A s^2 - 2 B s t + \left(\frac{1}{2} - A\right) t^2 + \dots^1) \quad (54.6)$$

Niemożliwe jest dalsze obniżenie rozwinięcia dla ε do wielkości trzeciego rzędu, ponieważ w tym ostatnim wyrażeniu współczynniki przy s^3 i przy t^3 nie mogą być zerami jednocześnie.

4. Uzyskanie minimum zniekształcenia liniowego.

Należy teraz przystosować odwzorowanie do obszaru, to jest zadysponować odpowiednio współczynnikami A, B, C , z których dwa tylko są niezależne, oraz obiozem punktu środkowego odwzorowania. Tissot stosuje tu kryterium, ażeby największa wartość bezwzględna, jaką ε może osiągnąć w całym obszarze mapy, była tak mała jak to jest możliwe (czyli, aby zniekształcenie liniowe na granicy mapy było możliwie jak najmniejsze). To zniekształcenie jest w przybliżeniu jednakowe w otoczeniu punktu, i może być wyrażone wzorem:

$$\varepsilon = A X^2 - 2 B X Y + \left(\frac{1}{2} - A\right) Y^2 + \dots,$$

przez założenie $X = s$, $Y = t$. Równanie to pokazuje, że linią równego zniekształcenia jest albo elipsa, albo hiperbola, której osie są nachylone do osi współrzędnych pod kątem α , określonym wzorem:

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = - \frac{B}{A - 1/4},$$

i której równanie, odniesione do osi krzywej stożkowej jest:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} [(1 - p) X'^2 + (1 + p) Y'^2], \quad (\text{Przypis 15}),$$

¹⁾ $C = \frac{\cos 2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0} - A; \quad C + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{\cos 2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0} - A + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_0$

$$= \frac{1}{2} - A.$$

gdzie $p = 4B \operatorname{cosec} 2\alpha = -4(A - 1/4) \sec 2\alpha$. Dla $-1 \leq p \leq +1$ krzywa jest elipsą, i jeśli stosunek dłuższej osi elipsy do krótszej oznaczmy literą k , to:

$$p = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}.$$

Założmy, że krzywa jest elipsą i oznaczmy literą R promień tej elipsy, nachylony pod kątem 45° ; ponieważ R nie zależy od k , zniekształcenie:

$$\varepsilon = \frac{R^2}{4};$$

należy przeto wyszukać *elipsę graniczną*, która otacza obszar odwzorowywany i pasuje do jego kształtu możliwie najlepiej, taką, aby promień R , a tym samym i ε były minimum. Na koniec ta ostatnia wielkość może być dalej zredukowana do połowy przez wprowadzenie odpowiedniej *stałej skali*, to jest czynnika $(1 - a)$, określonego za pomocą równania:

$$(1 - a) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{4}.$$

Zniekształcenie ε jest zerem dla punktu środkowego i wzrasta w miarę oddalania się od niego, osiągając swą największą wartość na granicy obszaru. Wprowadzenie powyższej stałej (skali) powoduje obustronny rozkład zniekształceń liniowych: w punkcie środkowym jest ono równe, co do wartości bezwzględnej, zniekształceniu na granicy obszaru, lecz ma znak przeciwny.

Metoda Tissota polega na graficznym wyznaczeniu elipsy, drogą prób. Na arkuszu kalki należy wykreślić kilka podobnych współśrodkowych elips, zmieniając stosunek osi elipsy co $1/10$, od 0 do 1, na oddzielnych arkuszach kalki. Następnie sporządzić szkicową mapę zarysu obszaru, w dość małej skali, posilkując się przybliżonymi wzorami odwzorowawczymi $X = s$, $Y = t$; i drogą prób, przez nakładanie i obracanie kalki, znaleźć najmniejszą elipsę najlepiej pasującą do danego obszaru. Wtedy zmierzyć kąt kierunkowy α pomiędzy osią X układu i dużą osią elipsy, w jej najlepszym położeniu, oraz odczytać położenie punktu środkowego. W ten sposób można znaleźć najlepsze wartości dla p i α , a stąd dla A i B , co, łącznie z wartościami φ_0 , λ_0 , całkowicie określa szereg i Tissota, podające funkcje odwzorowawcze.

Podobna konstrukcja ma zastosowanie gdy $p > 1$, albo gdy $p < -1$, co prowadzi do wykreślenia dwóch rodzin hiperbol sprzężonych, i do wyszukania, w podobny jak wyżej sposób, dwóch hiperbol granicznych.

Metoda Tissota określenia najlepszego odwzorowania płaskiego dla danego obszaru, na podstawie kryterium jak najmniejszego, co do wartości bezwzględnej, zniekształcenia liniowego w obszarze mapy, nasuwa dwie sprawy, wymagające uwagi. Pierwsza — to fakt, że Tissot, metodą niezależną, przez operowanie kolejno każdym z wyrazów rozwinięcia, doszedł do wyniku, który jest słuszny dla wszystkich odwzorowań konforemnych, i że metoda ta może być użyta do określania stałych dla takich odwzorowań. Druga sprawa — to zastąpienie graficznej metody poszukiwania (za pomocą kalki) najlepszej elipsy, otaczającej obszar, metodą analityczną. Obie te sprawy będą rozważone w następnych punktach.

e) Szereg potęgowy na zniekształcenie liniowe w odwzorowaniu konforemnym powierzchni obrotowej na płaszczyznę.

C. F. Gauss w swej klasycznej rozprawie *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827, *Göttinger Comm.* (1828), w Art. 7, 9, 10 i 11, podał cztery różne analityczne wyrażenia na krzywiznę powierzchni. Najbardziej zawile z tych wyrażeń J. Liouville (*Paris, Comptes rendus* 32, (1851), p. 533; również *Journal de math.* (1) 16 (1851), p. 130) sprowadził do następującej niesymetrycznej, lecz prostej formy:

$$K = -\frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{T} \left(G_u + \frac{F}{G} G_v - 2F_v \right) \right\} - \frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{T} \left(E_v - \frac{F}{G} G_u \right) \right\},$$

gdzie $T = (EG - F^2)^{1/2}$.

W szczególnym przypadku, gdy siatka parametrowa jest izometryczna oraz parametry p, q wzdłuż linii tej siatki są też izometryczne, element liniowy powierzchni wyraża się w postaci:

$$ds^2 = \lambda^2 (dp^2 + dq^2),$$

gdzie λ oznacza funkcję na ogół dwóch zmiennych p, q . Krzywizna Gaussowska powierzchni może być wtedy wyrażona wzorem:

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[\frac{\partial^2 (\log \lambda^2)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 (\log \lambda^2)}{\partial q^2} \right].$$

Wzór powyższy był nieco wcześniej podany również przez Liouville'a (*Journal de math.*, tome XII, 1847), lecz przypisuje on ten wzór Gaussowi, który pierwszy częściowo opublikował ten rezultat w r. 1822. Ogólny wzór Liouville'a redukuje się do tej prostej formy, gdy uwzględnimy założenia izometryczności parametrów:

$$E = G = T = \lambda^2, \quad F = 0.$$

Funkcja λ spełnia przy tym równanie różniczkowe Beltrami'ego¹⁾:

$$\Delta_2 (\log \lambda) = -K,$$

w którym $\Delta_2 (\varphi)$ oznacza drugi parametr różniczkowy funkcji $\varphi(u, v)$, czyli drugi niezmiennik różniczkowy Beltrami'ego:

$$\Delta_2 (\varphi) = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{E \varphi_v - F \varphi_u}{T} \right)_v + \left(\frac{G \varphi_u - F \varphi_v}{T} \right)_u \right];$$

wyrażenie to jest niezmiennikiem bezwzględny wszelkiego analitycznego przekształcenia parametrów powierzchni.

Jeśli dowolne parametry u, v powierzchni zamienić na parametry izometryczne p, q , za pomocą odpowiedniego przekształcenia:

$$u = f_1(p, q),$$

$$v = f_2(p, q),$$

tak, że:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \lambda^2 (dp^2 + dq^2),$$

$$E(p, q) = G(p, q) = T(p, q) = \lambda^2, \quad F(p, q) = 0,$$

to wówczas:

$$\Delta_2 (\varphi) = \frac{1}{\lambda^2} (\varphi_{pp} + \varphi_{qq}).$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \Delta_2 (\log \lambda) &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log \lambda + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \log \lambda \right] \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log \lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \log \lambda^2 \right] \\ &= -K. \end{aligned}$$

Jeśli powierzchnia jest obrotowa, odniesiona do izometrycznych współrzędnych południkowych, to λ jest funkcją jednej tylko zmiennej, mianowicie zmiennej południkowej p . Wtedy wzór na krzywiznę powierzchni redukuje się do postaci:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\lambda^2} \frac{d^2}{dp^2} \log \lambda^2 \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \frac{d \log \lambda}{dp}. \end{aligned}$$

Rozważmy związek pomiędzy krzywiznami dwóch powierzchni, odwzorowanych na siebie konforemnie.

¹⁾ E. Beltrami, Giorn. di mat. 2, (1864).

Niechaj będą dane dwie powierzchnie regularne, o współrzędnych izometrycznych p, q i P, Q odpowiednio, tak że:

$$ds^2 = \lambda_1^2 (dp^2 + dq^2),$$

$$dS^2 = \lambda_2^2 (dP^2 + dQ^2).$$

Ustanówmy odwzorowanie konforemne powierzchni I na powierzchnię II za pomocą dowolnej funkcji analitycznej, wiążącej zmienne zespolone obu powierzchni:

$$P + iQ = f(p + iq).$$

Funkcja ta określa dwie rzeczywiste funkcje sprzężone, jako funkcje odwzorowawcze:

$$P = \psi_1(p, q),$$

$$Q = \psi_2(p, q).$$

Jakobian tych funkcji, z założenia na ogół różny od zera, jest następujący:

$$J = \begin{vmatrix} P_p & P_q \\ Q_p & Q_q \end{vmatrix} = P_p Q_q - P_q Q_p;$$

na mocy równań różniczkowych Cauchy-Riemanna:

$$P_p = Q_q, \quad P_q = -Q_p,$$

jakobian ten może być wyrażony jako:

$$J = P_p^2 + Q_p^2 = P_q^2 + Q_q^2 = P_p^2 + P_q^2 = Q_p^2 + Q_q^2 = f'(p + iq) \cdot$$

$$\cdot f'(p - iq) = |f'(p + iq)|^2 = |f'(p - iq)|^2.$$

Kwadrat skali wyrazi się wzorem:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \frac{dP + i dQ}{dp + i dq} \frac{dP - i dQ}{dp - i dq} \\ &= \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} f'(p + iq) \cdot f'(p - iq) \\ &= \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} |f'(p + iq)|^2 \\ &= \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \cdot J. \end{aligned}$$

Wzory na krzywiznę K_1 i K_2 , dla powierzchni oryginału i obrazu odpowiednio, będą:

$$K_1 = -\frac{1}{2\lambda_1^2} \left[\frac{\partial^2 \log \lambda_1^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda_1^2}{\partial q^2} \right],$$

$$K_2 = -\frac{1}{2\lambda_2^2} \left[\frac{\partial^2 \log \lambda_2^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda_2^2}{\partial Q^2} \right].$$

Obliczmy teraz wyrażenie:

$$-\frac{1}{2m^{-2}} \left[\frac{\partial^2 \log m^{-2}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \log m^{-2}}{\partial Q^2} \right].$$

Podstawiając $m^{-2} = (\lambda_1^2/\lambda_2^2) J$, otrzymamy:

$$= -\frac{\lambda_2^2 J}{2\lambda_1^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \right) (\log \lambda_1^2 - \log \lambda_2^2 - \log J) \right],$$

a uwzględniając, że:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \right) \log \lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \log \lambda_{1,2}^2,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \right) \log J = 0, \quad (\text{Przypis 16}),$$

uzyskamy następującą zależność pomiędzy krzywiznami K_1 , K_2 i skalą m :

$$-\frac{1}{2m^{-2}} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log m^{-2} + \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \log m^{-2} \right] = \lambda_2^2 (K_1 - m_2 K_2).$$

Wprowadźmy teraz założenie, że powierzchnia obrazu jest płaszczyzną, o izometrycznych parametrach X, Y . Wtedy $\lambda_2^2 = 1$, $K_2 = 0$. Dla przypadku konforemnego odwzorowania powierzchni na płaszczyznę uzyskuje się więc następujący wzór:

$$-\frac{1}{2m^{-2}} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \log m^{-2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \log m^{-2} \right] = K_1,$$

który, gdy zamiast m napisać $(1 + \varepsilon)$, gdzie ε oznacza zniekształcenie liniowe, czyli błąd skali, przyjmie postać następującą:

$$(1 + \varepsilon) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y^2} \right) - \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right)^2 \right] = K_1. \quad (54.7)$$

Powyższe równanie różniczkowe dla konforemnego odwzorowania powierzchni obrotowej na płaszczyznę podał Laborde¹⁾. Swój wywód oparł on na dwóch równaniach (które wywiódł z klasycznych równań Gaussa na krzywiznę powierzchni) dla różnicy krzywizn oryginału i jego konforemnego obrazu, wyrażonej w funkcji skali i jej pochodnych cząstkowych względem ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych na powierzchni oryginału. Następnie doszedł on do równania (54.7) jako do pewnego nowego rezultatu w teorii konforemnego odwzorowania.

Jak wynika z podanego wywodu, rezultat ten nie jest w istocie nowy; jest on prostą konsekwencją wzoru Liouville'a na krzywiznę powierzchni we współrzędnych izometrycznych, na co zwrócił już uwagę A. E. Young, *Geographical Journal*, October, 1930.

Równanie różniczkowe (54.7) może być rozwiązane przez szereg, który, jeśli współrzędne są odniesione do punktu w którym skala jest wierna, a także jest minimum, ma następującą postać dla wyrazów początkowych²⁾:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} K_0 \{ (1 - p) X^2 + (1 + p) Y^2 \} + C(Y^3 - 3 Y X^2) + \quad (54.8)$$

$$+ \frac{1}{12} K_0^2 \sin \varphi_0 (r_0 - \rho_0 \cos \varphi_0) \{ (1 - q) X^3 + 3(1 + q) Y^2 X \} + \dots;$$

K_0 , r_0 , ρ_0 oznaczają odpowiednio krzywiznę powierzchni obrotowej, promień równoleżnika i promień krzywizny południka dla punktu środkowego odwzorowania.

Rozważmy pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia dla zniekształcenia liniowego ε . Jest to, jak widać, rezultat teorii Tissota, i, jak poprzednio, stosując kryterium możliwie najmniejszego zniekształcenia w obszarze mapy, uzyska się najlepszą wartość dla p przez koincydencję linii równego zniekształcenia z elipsą (wzgl. hiperbolą) najlepiej pasującą do obszaru kraju. To daje:

$$p = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1},$$

gdzie k oznacza stosunek osi elipsy. Na koniec redukuje się jeszcze błąd skali do połowy przez zastosowanie odpowiedniej stałej skali, to jest czynnika $(1 - a)$.

¹⁾ La nouvelle projection du Service Géographique de Madagascar, Cahiers du Service Géogr. de Madagascar, No. 1, Tananarive, Avril, 1928.

W szerszym rozwinięciu przedmiotu, powtórzone również w 4. tomie, *Traité des Projections* par L. Driencourt et J. Laborde, Paris 1932.

²⁾ Według R. K. Melluish, M. A. *An Introduction to the Mathematics of Map Projections*, Cambridge 1931, p. 139.

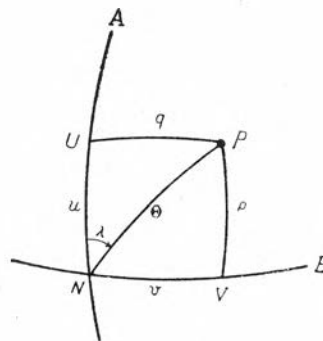
Szeregi odwzorowawcze Tissota, podane we wzorach na X i Y w twierdzeniu Tissota, są identyczne dla wszystkich odwzorowań konforemnych, aż do wyrazów 2. rzędu włącznie. Forma jaką szeregi te przyjmują aż do tych wyrazów, zależy tylko od obioru obu układów współrzędnych, tutaj s, t dla powierzchni oryginału, i X, Y dla płaszczyzny obrazu. Różne odwzorowania konforemne, jakie można rozważać, oddziałują w rozwinięciach szeregowych Tissota dla X i Y , dopiero począwszy od wyrazów trzeciego rzędu.

Jeśli obszar ma jednakową rozległość w obu kierunkach, przyjmujemy $k=1$ i $p=0$, co prowadzi do odwzorowania stereograficznego, ograniczonego do wyrazów trzeciego rzędu. Jeśli obszar ma dużą rozciągłość w kierunku osi Y , przyjmujemy $k=0$ i $p=-1$, co prowadzi do odwzorowania Mercatora, ograniczonego do wyrazów 3. rzędu. Jeśli obszar ma dużą rozciągłość w kierunku osi X , przyjmujemy $k \rightarrow \infty$, $p=1$, co prowadzi do transversalnego odwzorowania Mercatora, czyli konforemnego odwzorowania Gaussa, ograniczonego do wyrazów 3. rzędu.

f) Analityczna metoda określenia współczynników w szeregach Tissota ¹⁾.

Dla zastąpienia graficznej metody Tissota określania współczynników w szeregach dla X i Y , metodą analityczną, założmy że powierzchnia ziemi jest kulą i wprowadźmy prostokątne współrzędne u, v dla punktu na kuli, zamiast współrzędnych λ i θ .

Niech N będzie biegunem, albo początkiem układu, NA południkiem zerowym i NB kołem wielkim, prostopadłym do południka. Te dwie linie na kuli przyjmujemy za osie układu. Dla dowolnego punktu P na powierzchni kuli poprowadźmy koła wielkie PU i PV , prostopadłe odpowiednio do osi NA i NB . Wtedy punkt P jest określony przez długości łuków $NU = u$ i $NV = v$, które są współrzędnymi prostokątnymi tego punktu na kuli. Okaże się, że w wielu wzorach tangensy tych współrzędnych mają analogię do zwykłych współrzędnych prostokątnych płaskich i prostoliniowych.



Rys. 9

¹⁾ Według R. K. Melliish, M. A. An Introduction to the Mathematics of Map Projections, Cambridge 1931, p. 139.

Zanim ustanowimy rezultaty, podkreślmy fakt, że własności prostych równoległych na płaszczyźnie, nie posiadają ścisłego odpowiednika w teorii kół wielkich na kuli. Na przykład, kąty przy N, U, V są kątami prostymi, lecz kąt przy P nie jest kątem prostym; ani też nie jest NV równe PU , ani NU równe PV . Należy więc użyć osobnych oznaczeń p i q dla PV i PU . Wielkości te można nazwać „wstecznymi współrzędnymi” punktu P , lecz należy pamiętać, że nie są one prostokątnymi współrzędnymi punktu N , odniesionymi do osi przez punkt P .

Ze zwykłych wzorów trygonometrii sferycznej mamy następujące zależności:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u &= \operatorname{tg} \Theta \cos \lambda, & \sin p &= \sin \Theta \cos \lambda = \sin u \cos q, \\ \operatorname{tg} v &= \operatorname{tg} \Theta \sin \lambda, & \sin q &= \sin \Theta \sin \lambda = \sin v \cos p, \\ \operatorname{ctg} \lambda &= \operatorname{ctg} q \sin u, & \operatorname{tg} p &= \operatorname{tg} u \cos v, \\ \operatorname{tg} \lambda &= \operatorname{ctg} p \sin v, & \operatorname{tg} q &= \operatorname{tg} v \cos u. \end{aligned}$$

Równanie koła wielkiego, przechodzącego przez dwa punkty, (λ_1, Θ_1) i (λ_2, Θ_2) , na kuli jest:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \Theta_1 \sin \Theta_2 \sin (\lambda_2 - \lambda) + \sin \Theta_1 \cos \Theta_2 \sin (\lambda - \lambda_1)},$$

gdzie λ, Θ oznacza punkt bieżący tego koła. Przekształcając to równanie ze współrzędnych sferycznych biegunowych na sferyczne prostokątne, otrzymamy:

$$\frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} u_1}{\operatorname{tg} u_2 - \operatorname{tg} u_1} = \frac{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} v_1}{\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1},$$

z wyjątkiem gdy u , albo v jest równe $\pi/2$; w równaniu tym (u_1, v_1) i (u_2, v_2) są współrzędnymi prostokątnymi punktów (λ_1, Θ_1) i (λ_2, Θ_2) odpowiednio, zaś (u, v) — współrzędnymi punktu bieżącego tego koła. Wynik ten dowodzi, że wszelkie równanie pierwszego stopnia względem $\operatorname{tg} u$ i $\operatorname{tg} v$ przedstawia koło wielkie, i odwrotnie.

Jest teraz oczywiste, że najprostsza krzywa, inna niż koło wielkie, ma równanie drugiego stopnia względem $\operatorname{tg} u$ i $\operatorname{tg} v$, ponieważ koło wielkie będzie przecinało tę krzywą w dwóch tylko punktach. Ogólne równanie drugiego stopnia ma pięć stałych niezależnych, i krzywa taka jest przeto określona przez pięć punktów. Przypuśćmy więc, że wybrano pięć punktów na kresach

danego obszaru, i że ich współrzędne geograficzne, a przez to biegunowe oraz prostokątne, są znane. Możemy wtedy znaleźć równanie drugiego stopnia dla krzywej przechodzącej przez te pięć punktów na kuli.

$$a \operatorname{tg}^2 u + 2h \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v + b \operatorname{tg}^2 v + 2g \operatorname{tg} u + 2f \operatorname{tg} v + c = 0. \quad (54.9)$$

Następnie musimy znaleźć środek tej krzywej: (λ_0, Θ_0) w biegunowych, albo (u_0, v_0) w prostokątnych współrzędnych. $\operatorname{tg} u_0$ i $\operatorname{tg} v_0$ znajdziemy z następujących równań:

$$a \operatorname{tg} u_0 + h \operatorname{tg} v_0 + g - \operatorname{tg} u_0 (g \operatorname{tg} u_0 + f \operatorname{tg} v_0 + c) = 0,$$

$$h \operatorname{tg} u_0 + b \operatorname{tg} v_0 + f - \operatorname{tg} v_0 (g \operatorname{tg} u_0 + f \operatorname{tg} v_0 + c) = 0.$$

Wynikają one stąd, że, podobnie jak dla płaskiej stożkowej, biegunową punktu (u_0, v_0) względem krzywej jest:

$$(a \operatorname{tg} u_0 + h \operatorname{tg} v_0 + g) \operatorname{tg} u + (h \operatorname{tg} u_0 + b \operatorname{tg} v_0 + f) \operatorname{tg} v + \\ + g \operatorname{tg} u_0 + f \operatorname{tg} v_0 + c = 0,$$

oraz jeśli (u_0, v_0) jest środkiem, to biegunowa tego punktu względem krzywej jest jego biegunową (albo równikiem):

$$\operatorname{tg} u_0 \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v_0 \operatorname{tg} v + 1 = 0.$$

Porównanie tych dwóch równań prowadzi do pary równań wyżej podanej, z których można otrzymać równanie trzeciego stopnia względem $\operatorname{tg} u_0$ i $\operatorname{tg} v_0$. Pierwiastki tego równania dają u_0 i v_0 , a przeto i λ_0 i Θ_0 .

Teraz skróćmy osie o kąt $(\pi/2 - \lambda_0)$ w kierunku ujemnym, za pomocą związków:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} u' \sin \lambda_0 + \operatorname{tg} v' \cos \lambda_0,$$

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} u' \cos \lambda_0 - \operatorname{tg} v' \sin \lambda_0,$$

gdzie u' , v' są nowymi bieżącymi współrzędnymi. To powoduje, że nowa oś v' przechodzi przez środek, i gdy przeniesiemy początek do środka za pomocą związków:

$$\operatorname{tg} u' = \frac{\operatorname{tg} u'' \sec \Theta_0}{1 - \operatorname{tg} v'' \operatorname{tg} \Theta_0}, \quad \operatorname{tg} v' = \frac{\operatorname{tg} v'' + \operatorname{tg} \Theta_0}{1 - \operatorname{tg} v'' \operatorname{tg} \Theta_0},$$

uzyskamy równanie krzywej w następującej formie:

$$P \operatorname{tg}^2 u + 2Q \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v + R \operatorname{tg}^2 v = 1. \quad (54.10)$$

Współczynniki P , Q i R są znane, ponieważ można je wyrazić w funkcji znanych pierwotnych współczynników w ogólnym równaniu (54.9) krzywej stożkowej, a tym samym w funkcji pięciu wybranych punktów. Wystarczą więc one do uzyskania wartości stałych A i B w rozwinięciach szeregowych (54.5), w funkcji tychże pięciu punktów. Mianowicie, z równania linii jednakowego zniekształcenia mamy:

$$\frac{A}{\varepsilon} X^2 - \frac{2B}{\varepsilon} XY + \frac{(1/2 - A)}{\varepsilon} Y^2 + \dots = 1. \quad (54.11)$$

Ponieważ metoda Tissota polega na uzyskaniu najlepszej wartości dla p przez koincydencję linii równego zniekształcenia z elipsą (wzgl. hiperbolą) najlepiej pasującą do obszaru kraju, obie krzywe (54.10) i (54.11) powinny być identyczne. Z porównania odpowiednich współczynników obu tych równań, łatwo uzyskamy poszukiwane stałe A i B dla szeregów odwzorowawczych Tissota (54.5):

$$A = \frac{R}{2(P+Q)}, \quad B = -\frac{Q}{2(P+R)}.$$

Stałą C uzyskamy ze związku (54.4), jako zależną od A .

Ciekawe uproszczenie odwzorowania Tissota ma miejsce, gdy elipsa staje się kołem; wówczas $Q=0$ i $P=R$, co daje $A=1/4$ i $B=0$; szeregi odwzorowawcze (54.5) upraszczają się do postaci:

$$X = s + \frac{\sin \varphi_0}{2r_0} t^2 + \frac{1}{12} s^3 + C s t^2 + \dots,$$

$$Y = \frac{r}{r_0} t + \frac{C}{3} t^3 + \dots;$$

$$2 \left(\frac{1}{4} + C \right) \cos^2 \varphi_0 = \cos 2\varphi_0,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} s^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) t^2 + \dots$$

Rozwinięcia te są zgodne z teorią ukośnego odwzorowania stereograficznego. To umacnia nas w przypuszczeniu, że to odwzorowanie, stereograficzne, jest najlepsze dla kraju o jednakowej rozległości w szerokości i w długości geograficznej.

Interesujące badanie porównawcze, potwierdzające powyższą ocenę dobroci odwzorowania stereograficznego podał dr ing. A. Fasching, profesor politechniki w Agram, Jugosławia, w artykule p. t. *Die stereografische Projektion ist für kreisförmige Gebiete bis ca. 600 km Durchmesser zugleich die Abbildung der überhaupt möglichen kleinsten Verzerrungen*, ogłoszonym w *Zeitschrift für Vermessungswesen*, LIV Band, Heft 3 u. 4, 1925.

Z badania tego wynika, że wśród nieskończenie wielu odwzorowań, jakie można pomyśleć, w zastosowaniu do obszaru okrągłego o średnicy około 600 km, nie może na ogół istnieć odwzorowanie, które by taki obszar odtworzało na płaszczyźnie z mniejszymi zniekształceniami, aniżeli w odwzorowaniu stereograficznym. Odwzorowanie kompensatywne Tissota daje nieco mniejsze, praktycznie jednak te same, zniekształcenia liniowe, jak odwzorowanie stereograficzne. Przy porównaniu konforemnego odwzorowania walcowego (Gaussa-Krügera) z odwzorowaniem stereograficznym dla rozważanego obszaru, pierwsze daje zniekształcenia dwukrotnie większe w stosunku do drugiego; ta sama relacja porównawcza ma miejsce także i dla redukcji odwzorowawczych długościowych i kątowych.

55. Miary zniekształcenia i kryteria oceny dobroci odwzorowania

Teoria zniekształceń odwzorowawczych całkowicie rozwiązuje pierwsze zadanie podstawowe teorii odwzorowań: zbadanie własności metrycznych określonego odwzorowania jednej powierzchni na drugą. Można jednak odwrócić problem: poszukiwać funkcji odwzorowawczych, które czyniłyby zadość pewnym z góry wymaganym warunkom co do rozkładu, wielkości i zmienności zniekształceń.

W zastosowaniach praktycznych zadanie tego typu, które należy do zakresu drugiego podstawowego zadania teorii odwzorowań, ograniczone jest z góry pewnymi innymi jeszcze warunkami ogólnymi, np. konforemnością, albo równopowierzchniowością, stożkowością, itd. Toteż poszukiwanie odwzorowań, spełniających żądane warunki rozkładu zniekształceń, redukuje się w praktyce do pewnych grup odwzorowań, dla których funkcje odwzorowawcze są już częściowo w większym lub w mniejszym stopniu znane, mają jednak pewien stopień dowolności. Najczęściej zawierają one jedną lub więcej stałych dowolnych, którymi należy odpowiednio rozporządzić, kierując się pewnymi kryteriami oceny dobroci odwzorowania.

Kryteria oceny wymagają przede wszystkim bardziej wnikliwego, niż dotychczas, zajęcia się sprawą definicji miary zniekształcenia.

a) Miary zniekształcenia odwzorowawczego.

Do oceny dobroci odwzorowania z punktu widzenia jego własności metrycznych, i do uściślenia sformułowań o ocenie i wyrażania jej w języku analizy matematycznej, należy zdefiniować *trzy* miary zniekształcenia:

— miarę zniekształcenia liniowego (czyli błędu skali) w *danym punkcie i w danym kierunku*, przy tym definicja winna być taka, aby zniekształcenia odpowiadające dodatnim i ujemnym wartościom tej miary, równym co do wartości bezwzględnej, można było uważać za równowarte, to znaczy za jednakowo szkodliwe;

— miarę zniekształcenia liniowego w *danym punkcie we wszystkich kierunkach* (błąd skali w danym punkcie);

— miarę zniekształcenia liniowego *dla wszystkich punktów obszaru* odwzorowania, czyli miarę całkowitego błędu odwzorowania.

1. *Miara zniekształcenia liniowego w danym punkcie i w danym kierunku.*

Definicja tej miary jest dobrze znana z teorii zniekształceń odwzorowawczych, powtórzmy ją tutaj dla kompletności zestawienia. Załóżmy, że skala w danym punkcie (u, v) , i w określonym kierunku α , jest równa m (często dla wyraźnego zaznaczenia zależności od miejsca i kierunku piszemy $m(u, v, \alpha)$, albo, gdy chodzi o badanie skali w pojedynczym punkcie, piszemy m_α); skala główna niech będzie $m_0 (= 1/N)$; wtedy wielkość:

$$\left(\frac{m}{m_0} - 1 \right) \quad (55.1)$$

nazywamy (względny) zniekształceniem liniowym, a stosunek

$$\frac{m}{m_0}, \text{ czyli } \frac{dS}{ds} : \frac{1}{N} \quad (55.2)$$

nazywamy *powiększeniem* w danym punkcie i w danym kierunku.

Jeżeli skala główna $m_0 = 1$, wówczas zniekształcenie liniowe jest równe $(m - 1)$, zaś powiększenie jest równe skali m .

Wielkość $(m/m_0 - 1)$ najczęściej przyjmuje się za miarę zniekształcenia liniowego w danym punkcie i w danym kierunku.

Pafnutij Lwowicz Czebyszew (1821 — 1894), znakomity matematyk rosyjski, zdefiniował w r. 1856 (mając na uwadze odwzorowanie konforemne) miarę zniekształcenia liniowego jako

$$\ln(m/m_0), \text{ czyli } (\ln m - \ln m_0), \quad (55.3)$$

co w przypadku $m_0 = 1$ redukuje się do $\ln m$.

2. Ogólna miara zniekształcenia liniowego w danym punkcie.

W pojedynczym punkcie w kierunkach głównych mamy maksymalną a i minimalną b skalę liniową, skalę pól $f = ab$, maksymalne, czyli graniczne, zniekształcenie kąta kierunkowego:

$$\sin \omega_{\max} = \frac{a-b}{a+b}, \text{ lub w przybliżeniu } \omega_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - 1 \right).$$

Wielkości a , b , przy warunku $m_0 = 1$, będą wyrażały powiększenia liniowe w kierunkach głównych, f — powiększenie pól, $(a-1)$, $(b-1)$ — zniekształcenia liniowe w kierunkach głównych, $(f-1)$ — zniekształcenie pól.

G. B. Airy, astronom i matematyk angielski, zaproponował w r. 1861, jako miarę zniekształcenia liniowego w danym punkcie dwie wielkości:

$$\begin{aligned} & (a/b - 1)^2 + (ab - 1)^2, \\ \text{albo} \quad & (a - 1)^2 + (b - 1)^2. \end{aligned} \quad (55.4)$$

Użył on kwadratów odchyłek, a nie samych różnic, aby się nie znosiły odchylenia dodatnie z ujemnymi — założenie tak płodne w metodzie najmniejszych kwadratów; nadto wielkość $(a/b - 1)$ charakteryzuje zniekształcenie kąta, jako licznik wyrażenia:

$$\sin \omega_{\max} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{a/b - 1}{a/b + 1};$$

zaś wielkość $(ab - 1)$ jest zniekształceniem pola w rozważanym punkcie.

Dla porównawczej oceny różnych odwzorowań tego samego obszaru można zdefiniować wielkość:

$$\varepsilon_1 = \pm \sqrt{1/2 [(a-1)^2 + (b-1)^2]}, \quad (55.5)$$

i nazwać ε_1 *średnim kwadratowym zniekształceniem liniowym w danym punkcie w kierunkach głównych*.

Jeśli za miarę zniekształcenia liniowego w danym punkcie i w danym kierunku wziąć wielkość $(m_\alpha - 1)$, to *średnie kwadratowe zniekształcenie liniowe w danym punkcie we wszystkich kierunkach* wyrazi się wzorem:

$$\varepsilon_2 = \pm \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} (m_\alpha - 1)^2 d\alpha}{\int_0^{2\pi} d\alpha}}$$

$$\pm = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (m_\alpha - 1)^2 d\alpha}. \quad (55.6)$$

Jeśli za miarę zniekształcenia liniowego w danym punkcie wziąć logarytm powiększenia, to dla średniego kwadratowego zniekształcenia liniowego w danym punkcie w kierunkach głównych, albo we wszystkich kierunkach, otrzymamy odpowiednio dwa następujące wyrażenia:

$$\varepsilon_1'' = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (\ln^2 a + \ln^2 b)},$$

$$\varepsilon_2'' = \pm \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 m_\alpha \cdot d\alpha}. \quad (55.7)$$

3. Miara całkowitego zniekształcenia obszaru.

Charakterystykę odwzorowania w jego całości, z punktu widzenia zniekształceń miarowych, przyjęto przeprowadzać dwiema drogami:

- drogą obliczenia maksymalnych i minimalnych zniekształceń liniowych w granicach odwzorowanego obszaru;
- drogą wyliczenia średniej arytmetycznej z bezwzględnych wartości zniekształceń liniowych, albo średniej kwadratowej z wielkości zniekształceń liniowych, dla wszystkich punktów przecięcia się siatki parametrowej, w granicach odwzorowanego obszaru.

Dla określenia miary zniekształcenia dla całego zobrazowanego obszaru, należy w myśli podzielić ten obszar na granicznie małe poletka (np. za pomocą siatki parametrowej), i następnie znaleźć dla każdego poletka jedną z wielkości ε_1 , ε_1'' , ε_2 , ε_2'' ; potem trzeba utworzyć np. średnią arytmetyczną, która będzie miarą średniego zniekształcenia obszaru odwzorowanego.

Jeśli przyjąć za miarę zniekształcenia w danym punkcie wielkość ε_1 , to dla średniego kwadratowego zniekształcenia linio-

wego E_1 w obrębie całego obszaru odtworzonego (całkowite zniekształcenie obszaru, czyli średni kwadratowy całkowity błąd mapy), otrzymamy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} E_1 &= \pm \sqrt{\frac{1}{F} \int_F \varepsilon_1^2 dF} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{2F} \int_F [(a-1)^2 + (b-1)^2] \cdot dF}, \end{aligned} \quad (55.8)$$

gdzie F oznacza pole danego obszaru; litera F przy całce wskazuje, że należy całkować po przez powierzchnię całego obszaru.

Przy mierze ε_1'' dla punktowego zniekształcenia liniowego, będziemy mieli jako miernik zniekształcenia dla danego obszaru:

$$\begin{aligned} E_1'' &= \pm \sqrt{\frac{1}{F} \int_F \varepsilon_1''^2 dF} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{2F} \int_F (\ln^2 a + \ln^2 b) dF}. \end{aligned} \quad (55.9)$$

Przy mierze ε_2 , albo ε_2'' , otrzymamy jako mierniki całkowitego zniekształcenia obszaru odpowiednio wielkości E_2 i E_2'' , zdefiniowane wzorami:

$$\begin{aligned} E_2 &= \pm \sqrt{\frac{1}{F} \int_F \varepsilon_2^2 \cdot dF} = \pm \sqrt{\frac{1}{F} \int_F \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (m_\alpha - 1)^2 \cdot d\alpha \cdot dF}, \\ E_2'' &= \pm \sqrt{\frac{1}{F} \int_F \varepsilon_2''^2 dF} = \pm \sqrt{\frac{1}{F} \int_F \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 m_\alpha \cdot d\alpha \cdot dF}, \end{aligned} \quad (55.10)$$

Wielkość E można nazwać średnim kwadratowym *całkowitym błędem odwzorowawczym obszaru* (mapy); przy czym E_1 i E_1'' są całkowitymi błędami *typu Airy*, zaś E_2 i E_2'' — całkowitymi błędami *typu Jordana*¹⁾. Błąd typu Airy uwzględnia tylko kierunki główne; błąd typu Jordana uwzględnia wszystkie kierunki w ogóle.

¹⁾ Dr W. Jordan, Zur Vergleichung der Soldner'schen rechtwinkligen sphärischen Coordinaten mit der Gauss'schen conformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene. Zeitschrift für Vermessungswesen, IV. Bd., 1875.

b) Kryteria oceny dobroci odwzorowania.

1. Rodzaje i stosowanie kryteriów.

Istnieją, jak dotychczas, dwa ogólne i główne kryteria oceny dobroci odwzorowania: *kryterium Tissota* z r. 1860, i *kryterium Airy* z r. 1861 (wraz z jego uogólnieniem — *kryterium Jordana*). Oprócz tych dwóch kryteriów ogólnych, istnieje sporo kryteriów szczególnych, odnoszących się do pewnych grup odwzorowań, stosowanych w praktyce kartograficznej; zwłaszcza do odwzorowań stożkowych i obu ich granicznych przypadków: odwzorowań walcowych i odwzorowań azymutalnych. Kryteria szczególne mogą zresztą być uważane za szczególne przypadki kryteriów ogólnych.

Wszystkie kryteria oceny dobroci odwzorowania, zarówno ogólne jak i szczególne, są oczywiście stosowane w sensie drugiego podstawowego zadania teorii odwzorowań: poszukiwanie funkcji odwzorowawczych (całkowicie, lub częściowo nieznanych) z żądanych warunków co do wielkości i rozkładu zniekształceń liniowych w obrębie całego odtwarzanego obszaru.

Kryteria ogólne mogą być stosowane w dwojaki sposób: 1) albo do poszukiwania jednej lub więcej *stałych dowolnych*, wchodzących w funkcje odwzorowawcze, znane z innych ogólnych warunków (np. konforemności, albo równopowierzchniowości, itp.); 2) albo do poszukiwania samych funkcji odwzorowawczych zupełnie nieznanych i nieograniczonych innymi zbyt wiążącymi warunkami.

Kryteria szczególne są przeważnie stosowane w pierwszym znaczeniu — do wyznaczania stałych dowolnych, a więc są na ogół znacznie węższe, lecz praktycznie ważniejsze.

2. Kryterium Tissota.

Odwzorowanie danego obszaru jest najlepsze, gdy w obrębie tego obszaru maksymalne dodatnie zniekształcenie liniowe jest równe maksymalnemu ujemnemu zniekształceniu liniowemu; czyli inaczej — gdy maksymalne zniekształcenie liniowe jest tak małe, jak to jest możliwe:

$$|m - 1| = \text{minimum w obrębie całego obszaru odtwarzanego.}$$

A. Tissot (1824 — 1897), francuski matematyk, podał to kryterium w *Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences*, vol. LI, 1860, i na tym kryterium oparł swą ogólną teorię poszukiwania najkorzystniejszego odwzorowania płaskiego dla danego kraju. Teoria ta, z pewnym rozwinięciem i uogólnieniem, została szczegółowo podana w Nr. 54.

3. Kryterium Airy.

Odwzorowanie danego obszaru jest najlepsze, gdy średni kwadratowy całkowity błąd odwzorowawczy dla odtwarzanego obszaru jest minimum:

$$E_1 = \text{minimum.}$$

Odwzorowania oparte na kryterium Airy można nazywać *odwzorowaniami minimum błędu*.

Poszukiwanie funkcji odwzorowawczych, albo nieznanych funkcji $a(u, v)$ i $b(u, v)$, na podstawie kryterium Airy jest dość trudnym zagadnieniem z punktu widzenia analizy matematycznej. Chodzi bowiem o wyznaczenie funkcji z warunku, aby całka wyrażająca E_1 , brana po pewnym oznaczonym obszarze na powierzchni oryginału, dawała minimum, w porównaniu z takimiż całkami obliczonymi dla innych funkcji a i b . Zagadnienia takie badano zwłaszcza, gdy zarówno a jak i b jest funkcją jednej tylko zmiennej. W rozwiązywaniu tych zagadnień potrzebna jest znajomość rachunku wariacyjnego, nie wystarczają zaś zwykłe reguły rachunku różniczkowego obliczania maksimów i minimów.

Sir George Biddell Airy (1801 — 1892), astronom angielski i swego czasu dyrektor obserwatorium astronomicznego w Greenwich, powziął ideę odwzorowania, które byłoby pewnego rodzaju kompromisem pomiędzy odwzorowaniem konforemnym i odwzorowaniem równopowierzchniowym. (W jego oryginalnej pracy chodziło o szczególny problem, dotyczący odwzorowania płaskiego *zenitalnego*). Rozprawa Airy została ogłoszona w *Philosophical Magazine*, IV. Ser., vol. XXII, str. 409 — 421, 1861, pt. *Explanation of a Projection by Balance of Errors*.

Geodeta angielski, pułkownik *Alexander Ross Clarke*, R. E., zastosował kryterium Airy do odwzorowań perspektywicznych kuli na płaszczyznę; rezultaty badań Clarke'a są ogłoszone w *Encyclopaedia Britannica (Ninth Edition)*, Edinburgh, 1879, vol. X. str. 204, artykuł *Mathematical Geography*, by Colonel A. R. Clarke.

M. Fiorini, *Le Projezioni delle Carte Geografiche*, Bologna, 1881 zastosował kryterium Airy formy:

$$V = \iint_{(F)} \left[(ab - 1)^2 + \left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 \right] dF$$

do zbadania wielu odwzorowań. Ten miernik błędu mapy, oznaczony literą V , jest jednak w bardzo bliskim związku z błędem E_1 , nie zasługuje więc na osobne badanie. (Por. M. Fiorini, l. c., str. 24 i nast.).

Alfred Ernest Young, Some Investigations in the Theory of Map Projections, London, 1920, Royal Geographical Society Technical series, No. 1, poświęcił obszerne studium badaniu odwzorowań o minimum błędu E_1 w obszarze mapy, przy tym wyjaśnił dobrze znaczenie kryterium Airy. Trudno jest wymyślić — pisze — bardziej racjonalne kryterium (jeśli nie chodzi o konforemność, albo o równopowierzchniowość) niż kryterium Airy do znalezienia najlepszego odwzorowania. Pomimo to odwzorowanie Airy „by balance of errors” nie znalazło szerszego użycia, i zdaje się bardziej zwróciło uwagę geodetów i kartografów na kontynencie, niż w Anglii. Powodem tego jest zapewne złożoność wzorów matematycznych tego odwzorowania, ale także, jak sądzi Young, i to, że natura odwzorowania Airy nie była przez długi czas zrozumiana i wyjaśniona przez podręczniki i dzieła poświęcone teorii odwzorowań; tym bardziej że i sam Airy popełnił pewien błąd w swym rozwiązaniu, który spowodował pewną dyskwalifikację tego odwzorowania. Chociaż błąd ten był wkrótce wykryty i sprostowany przez Clarke’a w *Philosophical Magazine*, 1862, błędne tablice liczbowe Airy przeszły niefortunnie do późniejszych publikacji i podręczników. Również niektórzy autorzy jak się zdaje sądzą, że odwzorowanie Airy jest właśnie odwzorowaniem minimum błędu, podczas gdy jest ono tylko *zenitalnym* odwzorowaniem minimum błędu, które jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólniejszej klasy odwzorowań stożkowych. A. E. Young zastosował z powodzeniem kryterium Airy do tej bardziej ogólnej klasy, i rezultaty swych badań ogłosił w wyżej przytoczonej pracy.

4. *Kryterium Jordana* stanowi uogólnienie kryterium Airy i polega na warunku minimum dla średniego kwadratowego całkowitego błędu (typu Jordana) dla odtwarzanego obszaru:

$$E_2 = \text{minimum.}$$

Kryterium to, jak dotychczas, było bardzo mało stosowane. Zwróćmy uwagę, że kryteria Airy i Jordana opierają się na zasadzie najmniejszych kwadratów.

c) Kryteria szczególne.

Ze względu na sporą ich ilość, i związek z rozwojem historycznym kartografii, będą one podane w kolejności chronologicznej. Są to przeważnie przypadki szczególne kryterium Tissota, przy zastosowaniu tego kryterium do zagadnień spotykanych w praktyce kartograficznej. Większość z nich była zresztą wprowadzona niezależnie przed Tissotem.

1. *Kryterium Ptolemeusza* (87 — 165) było podane w związku z odkryciem prostego odwzorowania stożkowego, znanego obecnie pod jego nazwiskiem¹⁾.

W sformułowaniu ścisłym kryterium Ptolemeusza jest następujące:

1. Na pewnym dowolnie obranym równoleżniku skala ma być minimum.

2. Na tymże równoleżniku skala ma być równa jedności.

2. *Kryterium De l'Isli, Joseph Nicolas* (1688 — 1768).

Astronom francuski, kierujący kartografią rosyjską w I połowie XVIII stulecia; zastosował w r. 1745, przy sporządzaniu mapy Rosji, odwzorowanie stożkowe równoodległościowe z dwoma głównymi równoleżnikami, rozmieszczonymi symetrycznie względem skrajnych i środkowego równoleżników obszaru. Nie należy sądzić, że jest to odwzorowanie na stożek sieczny w czysto geometrycznym sensie, gdyż w takim odwzorowaniu skala wzdłuż południków, w pasie pomiędzy równoleżnikami sieczności, nie może być równa jedności, ponieważ łuk jest zawsze większy od cięciwy.

W sformułowaniu ścisłym kryterium De l'Isli jest następujące²⁾:

Stałe w funkcjach odwzorowawczych należy określić z warunków:

1. Na dwóch równoleżnikach, obranych dowolnie, skale mają być jednakowe.

2. Na tychże równoleżnikach, zwanych głównymi, skala ma być równa jedności.

Uwaga. Kryteria Ptolemeusza i De l'Isli zastosował J. H. Lambert w r. 1772 do równokątnych odwzorowań stożkowych, i sformował je w klasycznej rozprawie *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*, w § 51 str. 138 i w § 53 str. 140.

¹⁾ Ptolemeuszowi przypisują też ulepszenie tego odwzorowania, znane pod nazwą Bonne'a. Ptolemeusz pozostawił znaczną liczbę map, wydawanych w czasach późniejszych kilkakrotnie w różnych opracowaniach, między innymi w r. 1890 przez szwedzkiego podróżnika i zbieracza starych map *Adolfa Ericha Nordenskjöld'a* (1832 — 1901).

²⁾ Tissot przypisuje to kryterium i samo odwzorowanie Mercatorowi.

3. Kryterium Murdocha.

Stałe w funkcjach odwzorowawczych należy określić z warunku, aby pole całości mapy, to jest całego obszaru odwzorowanego, było zachowane.

Kryterium to prawdopodobnie pierwszy wprowadził Rev. Patrick Murdoch, F. R. S., szkocki duchowny, który opublikował w r. 1758 w *Philosophical Transactions of the Royal Society* opis kilku, znanych obecnie pod jego nazwiskiem, odwzorowań stożkowych, dla których wyznaczył stałe z warunku zachowania pola dla całości mapy.

Należy zwrócić uwagę, że przez ten warunek odwzorowanie nie musi być, i zazwyczaj nie jest, równopowierzchniowe. Z integralnej równości pól skończonych nie wynika cząsteczkowa (lokalna) równość pól.

4. Kryterium Eulera (1707 — 1783).

Dowolny wybór równoleżników głównych, zaproponowany przez De l'Isli, nie miał żadnego naukowego uzasadnienia, i powodował nierównomierny rozkład zniekształceń liniowych: odchyłki skali od skali głównej wzdłuż równoleżników, położonych w pasie pomiędzy równoleżnikami głównymi, są znacznie mniejsze od odchyłek na równoleżnikach położonych na zewnątrz równoleżników głównych.

Znakomity matematyk szwajcarski Leonhard Euler w Zapiskach S. Petersburskiej Akademii Nauk za r. 1777¹⁾ zaproponował wyznaczyć równoleżniki główne z warunku, aby *różnice pomiędzy długościami łuków równoleżnikowych na odwzorowaniu płaskim i na kuli były, na dwóch skrajnych równoleżnikach kraju, jednakowe, i przy tym równe różnicy łuków równoleżnikowych na kuli i na odwzorowaniu dla równoleżnika o średniej szerokości*. Analitycznie warunek ten prowadzi do dwóch równań, z których można określić stałe, wchodzące w funkcje odwzorowawcze, a mianowicie stałą stożka i stałą całkowania. Na tej podstawie można znaleźć skalę równoleżnikową, i, jeśli trzeba, poszukiwać dwóch równoleżników o skali równej jedności, t. j. nieznanym głównym równoleżników.

¹⁾ De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usitata; Acta Acad. Scient. Imperial. Petropolitanae pro anno MDCCCLXXVII, T. I., p. 143 — 153; kryterium Eulera podane jest w § 18 wymienionej pracy. W przekładzie niemieckim: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr 93: *Drei Abhandlungen über Kartenprojection von Leonhard Euler, Leipzig 1898*.

Euler w swoim kryterium postawił także żądanie nieco lepsze, niż sformułowane powyżej, a mianowicie, aby owe jednakowe różnice w długości łuków dla skrajnych równoleżników obszaru, były równe ujemnej różnicy w długości łuków dla *tego* równoleżnika dla którego ta różnica osiąga największą wartość. Ten równoleżnik nie musi już wypadać dokładnie w środku pomiędzy skrajnymi równoleżnikami.

Odchyłki skali od 1 w odwzorowaniu stożkowym Eulera są mniejsze od odchyłek w odwzorowaniu Ptolemeusza, a także w odwzorowaniu De l'Isli. Niemniej jednak są one dość znaczne i rozłożone nierównomiernie: na północnym skrajnym równoleżniku są nieco więcej niż dwukrotnie większe, niż na południowym. Zaszło to dlatego, że Euler zawarunkował nie równość odchyłek skali od 1 na granicznych równoleżnikach obszaru, lecz równość różnic długości łuków na odwzorowaniu i na kuli. Euler sam zwrócił uwagę na tę okoliczność, lecz zadowolił się wzmianką, że północne obszary Rosji są mało znane, wobec czego zniekształcenia na tym obszarze nie mają praktycznego znaczenia.

5. *Ulepszone kryterium Eulera.*

Chociaż wyraźnie nie podał on tego kryterium, jednak wiąże się ono i wynika z zasadniczego założenia Eulera.

Kryterium możemy sformułować w następujący sposób:

1. Na dwóch skrajnych, zadanych, równoleżnikach obszaru skale (a tym samym i zniekształcenia) mają być jednakowe.

2. Na środkowym równoleżniku zniekształcenie liniowe ma być równe zniekształceniu liniowemu na równoleżnikach skrajnych, wziętemu ze znakiem przeciwnym.

Zamiast warunku drugiego można też postawić żądanie nieco lepsze, aby owe równe co do bezwzględnej wartości zniekształcenia miały miejsce nie dla równoleżnika środkowego, lecz dla równoleżnika z *najmniejszą skalą*. Kryterium to było zastosowane w r. 1881 przez A. Tissota do stożkowego odwzorowania równopowierzchniowego Albersa. Następnie było zastosowane przez *Matteo Fiorini* (1827 — 1901), prof. geodezji w Bolognii, do odwzorowania stożkowego równoodległościowego. Ten dodatkowy warunek niewiele jednak polepsza rozkład zniekształceń, ponieważ skala na równoleżniku o minimum skali jest niewiele różna od skali na równoleżniku środkowym. To samo kryterium, i również do odwzorowania stożkowego równoodległościowego, lecz z użyciem równoleżnika środkowego, zastosował także W. Witkowski (Wygodniejsza rawnopromieźutoczna konicze-

skaja projekcja, Izwestija Russkogo Gieograficznego Obszczestwa, tom XXXVI, 1900; a także jego *Kartografija*, St. Peters., 1907, str. 200 — 202).

6. Kryterium Lagrange'a (1736 — 1813).

W odwzorowaniu Lagrange'a¹⁾, czyli w konforemnym odwzorowaniu kołowym kuli, albo elipsoidy obrotowej spłaszczonej, na płaszczyznę, do funkcji odwzorowawczych wchodzi trzy stałe: α , β i k . Z nich stała k jest stałą skali, nie ma więc ona wpływu na obraz, lecz tylko na jego wielkość. Stała całkowania β wyznacza szerokość równoleżnika, który odtwarza się prostoliniowo. Stała α , zwana przez Lagrange'a „wykładnikiem odwzorowania” ma wpływ na wszystkie głównejsze własności odwzorowania.

Stalymi α , β i k rozporządził Lagrange w bardzo bystry i wnikliwy sposób: ażeby na środkowym prostoliniowym obrazie południka przy długości $\lambda_0 = 0$, w pewnym punkcie o szerokości φ_0 , skala równała się jedności, zaś pierwsza i druga pochodna skali (lub logarytmu skali) stawała się zerem:

$$m_0 = 1, \quad \left(\frac{dm}{d\varphi} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_0 = 0.$$

Przy takim określeniu stałych, zmiany skali są bardzo wolne na dość znacznej rozległości od punktu środkowego [są one proporcjonalne do $(\varphi - \varphi_0)^3$], co jest bardzo cenną własnością odwzorowania Lagrange'a. Zniekształcenie liniowe elementarne jest wówczas wielkością trzeciego rzędu. Jeśli obszar kraju nie jest nadmiernie duży, odwzorowanie Lagrange'a daje obraz bliższy do rzeczywistości, niż odwzorowanie tego kraju w jakimkolwiek innym zobrazowaniu.

W r. 1843 Gauss zastosował kryterium Lagrange'a do konforemnego odwzorowania elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę²⁾.

7. Kryterium Gaussa (1777 — 1855).

W klasycznej ogólnej teorii odwzorowania konforemnego jednej powierzchni na drugą, z roku 1822, Gauss podał następujące kryterium, zarówno przy stożkowym odwzorowaniu kuli na płasz-

¹⁾ Joseph Louis Lagrange, *Sur la construction des cartes géographiques*, *Nouveaux Mémoires de l'Acad. Royal de Berlin*, Année 1779, § 35 str. 202, i § 38 str. 204. Także w przekładzie niemieckim, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr 55: *Über Kartenprojection*, Leipzig, 1884.

²⁾ C. F. Gauss, *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* Abhandl. d. Götting. Ges. d. Wiss. Bd. II, 1844; Bd. III, 1847. Również Gauss' Werke Bd. IV, str. 259 i nast.; oraz Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Nr 177, Leipzig 1910, w wydaniu J. Frischaufer.

czyzną (w § 10, str. 16), jak i przy odwzorowaniu elipsoidy obrotowej na kulę (w § 13, str. 22):

1. Na dwóch skrajnych równoleżnikach obszaru skale mają być jednakowe.

2. Na dowolnym równoleżniku pomiędzy równoleżnikami skrajnymi, skala ma być równa jedności (w szczególności na tym, dla którego skala osiąga minimum).

Prof. M. D. Sołowjew, Kartograficzskie projekcji, Moskwa 1937 r., str. 101, przypisuje Gaussowi pięć sposobów obliczania stałych dowolnych w odwzorowaniu stożkowym. Jest to, jak się wydaje, zbyt wiele. Oryginalne prace Gaussa potwierdzają tylko dwa z wymienionych sposobów, pozostałe należy raczej przypisać Ptolemeuszowi, De l'Isli i Eulerowi. Rzecz ciekawa, że W. Witkowski, Kartografija, 1907 r., a za nim W. W. Kawrajskij, Matematyczeskaja Kartografija, 1934, wymienając te pięć sposobów, nic nie wspominają, jakoby one miały pochodzić od Gaussa.

8. Kryterium Czebyszewa¹⁾ (1821 — 1894).

Na podstawie swej miary zniekształcenia liniowego (Nr 55, a, 1), Czebyszew podał kryterium logarytmiczne, które można sformułować jak następuje.

Mapa jest najlepsza gdy w obrębie jej granic:

1. logarytm skali ma możliwie najmniejszą oscylację;
2. logarytm skali maksymalnej oraz logarytm skali minimalnej różnią się możliwie najmniej od logarytmu skali głównej:

$$\ln m_{\max} - \ln m_{\min} = \text{minimum},$$

$$\ln m_{\max} + \ln m_{\min} = 2 \ln m_0.$$

(Skala główna m_0 najczęściej jest $= 1$, i $\ln m_0 = 0$).

Oba warunki kryterium Czebyszewa można także napisać w formie następującej:

$$\frac{m_{\max}}{m_{\min}} = \text{minimum},$$

$$m_{\max} \cdot m_{\min} = m_0^2.$$

Drugi warunek może być także napisany w formie proporcji:

$$m_{\max} : m_0 = m_0 : m_{\min}.$$

Zauważmy, że stosunek $m_{\max} : m_{\min}$ wyraża zmienność skali w granicach odtwarzanego obszaru.

Czebyszew, stosując pierwszy warunek swego kryterium (do odwzorowania konforemnego) znalazł następujące, godne uwagi

¹⁾ P. L. Czebyszew, 1) Sur la construction des cartes géographiques. Bull. de la classe physiq.-math. de l'Ac. des S., St. Petersburg, t. XIV, 1856, str. 257 — 261.
2) Czerczenije gieograficzskich kart, 1856; Soczinienija t. I, str. 240.

twierdzenie, którego szczegółowy dowód podał D. A. Grawe¹⁾: „Najdogodniejsze odwzorowanie dla jakiegobądź części powierzchni ziemi na mapie jest to, w którym na granicy odwzorowania skala zachowuje jedną i tę samą wielkość”. Innymi słowy, obszar ograniczony izoskalą w jakimobądź danym odwzorowaniu konforemnym, przedstawi się we wszelkim innym konforemnym odwzorowaniu z większym wahaniami logarytmu skali, a wskutek tego i z większą wartością stosunku $m_{\max} : m_{\min}$ (t. j. mniej korzystnie), niż w danym odwzorowaniu. Tym się tłumaczy, dlaczego odwzorowania stożkowe, zachowujące (przez stosowny obiór stałej stożka) równość skal na dwóch skrajnych równoleżnikach obszaru (zasada Eulera), są tak korzystne pod względem rozkładu zniekształceń. W tym przypadku skrajne wartości skali, $m_{\max}$ i $m_{\min}$ (albo ich logarytmy) będą się odchyłać od skali głównej m_0 (albo od logarytmu m_0) mniej, niż w innym odwzorowaniu stożkowym tego samego obszaru. Wreszcie, przez stosowny obiór drugiej stałej (t. zw. stałej skali), osiągamy zrównanie tych odchyłek dla $(m_{\max} - 1)$ i $(1 - m_{\min})$, albo też zrównanie logarytmów dla obu skal ekstremalnych z logarytmem skali głównej.

Dla porównania zestawimy oba kryteria, Eulera i Czebyszewa:

Euler:

$$m_1 = m_2 (= m_{\max})$$

$$m_{\max} - 1 = 1 - m_{\min}.$$

Skale m_1 i m_2 na dwóch zadanych skrajnych równoleżnikach obszaru mają być sobie równe, i największa skala ma być o *tyle* większa od skali głównej, o *ile* najmniejsza skala jest mniejsza od skali głównej.

Drugi warunek daje równanie:

$$1/2 (m_{\max} + m_{\min}) = 1$$

do wyznaczenia stałej skali.

Czebyszew

$$m_1 = m_2 (= m_{\max})$$

$$m_{\max} : 1 = 1 : m_{\min}.$$

Skale m_1 i m_2 na dwóch zadanych skrajnych równoleżnikach obszaru mają być sobie równe, i największa skala ma być *tyle razy* większa od skali głównej, *ile razy* najmniejsza skala jest mniejsza od skali głównej.

Drugi warunek daje równanie:

$$m_{\max} \cdot m_{\min} = 1,$$

a także $\sqrt{m_{\max} \cdot m_{\min}} = 1$, do wyznaczenia stałej skali.

¹⁾ D. A. Grawe, Ob osnovnykh zadachakh matematicheskoi teorii postroeniia geograficheskikh kart, Spb. 1896, str. 177 — 183; resumé — w jego przyczynku: Ob izobraženii szaria na ploskosti s sohranieniem ploszczadij, Izv. Russ. Astron. O-wa, wyp. IV, 1895, str. 56 — 59.

Przy mało różniących się od siebie $m_{\max}$ i $m_{\min}$, średnia arytmetyczna z tych wielkości niewiele się różni od średniej geometrycznej z tychże wielkości; dlatego oba odwzorowania są wówczas prawie takie same; różnią się one, w każdym razie, tylko rozmiarem (stałą skali), a nie postacią (stałą stożka) odwzorowania. Przy znaczniejszej różnicy pomiędzy $m_{\max}$ i $m_{\min}$ lepiej wziąć dla stałej skali nie średnią arytmetyczną, $\frac{1}{2}(m_{\max} + m_{\min})$, lecz średnią geometryczną, $\sqrt{m_{\max} \cdot m_{\min}}$, ponieważ średnia geometryczna jest zawsze nie większa od średniej arytmetycznej.

9. Kryterium H. Webera¹⁾.

W r. 1867 Weber zdefiniował (dla odwzorowania konforemno) miarę zniekształcenia liniowego w punkcie powierzchni zupełnie tak samo, jak już przed nim zrobił to Czebyszew, jako wielkość:

$$\ln \left(\frac{m}{m_0} \right),$$

którą nazwał *błędem miejsca* na obrazie.

Następnie zdefiniował *błąd całkowity mapy*, F , za pomocą równania:

$$F \int d\omega = \int d\omega \cdot \ln \left(\frac{m}{m_0} \right)^2,$$

w którym $d\omega$ oznacza element powierzchniowy.

Kryterium Webera ma ogólniejszy charakter i polega na warunku:

$$F = \text{minimum}.$$

Odwzorowanie konforemne jest jednoznacznie określone, gdy F ma być minimum, i gdy obrazy dwóch punktów są dane. Problem prowadzi do rozwiązania liniowego równania różniczkowego cząstkowego 4. rzędu.

10. Kryterium A. Eisenlohra²⁾.

W roku 1876 A. Eisenlohr za miarę błędu w punkcie powierzchni obrazu przyjął maksymalną wartość krzywizny geodezyjnej dla obrazu linii geodezyjnej powierzchni. Następnie wpro-

¹⁾ H. Weber, Über ein Prinzip der Abbildung der Teile der Erdoberfläche J. f. Math. 67 (1867), str. 229.

²⁾ A. Eisenlohr, J. f. Math. 72 (1876), str. 143; patrz także: Über Kartenprojectionen, Ztschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde zu Berlin, Bd. 10 (1875), str. 305—334.

wadził kryterium, aby (skonstruowana analogicznie jak u Webera) całka dla błędu całkowitego była minimum.

To kryterium, zastosowane do odwzorowania konforemnego, prowadzi do zwykłego problemu minimum, którego bezpośrednie zastosowanie do celów praktycznych, jak dotychczas, nie jest zdaje się zbadane.

11. Kryteria F. N. Krasowskiego ¹⁾.

W r. 1922 geodeta rosyjski F. N. Krasowski podał dla odwzorowania stożkowego równoodległościowego dwa następujące kryteria:

Kryterium pierwsze.

1. Na zadanych dwóch skrajnych równoleżnikach φ_1 i φ_2 obszaru, skale mają być jednakowe: $m_1 = m_2$.

2. Bezwzględne wartości zniekształceń liniowych ekstremalnych dla obszaru odtwarzanego mają być sobie równe:

$$|m_{\max} - 1| = |m_{\min} - 1|.$$

3. Pole pasa, zawartego pomiędzy φ_1 i φ_2 , ma być zachowane.

Pierwszy i drugi warunek są takie same, jak w kryterium Eulera, i w zupełności określają obie stałe odwzorowania stożkowego. Trzeci warunek jest warunkiem Murdocha. Aby spełnić ten warunek należy mieć do rozporządzenia jeszcze trzecią stałą dowolną. Otóż, jako taka może służyć skala południkowa, która nie będzie już równa jedności, lecz innej wartości stałej. Warunek trzeci osiąga się więc kosztem dopuszczenia *stałego* zniekształcenia długości wzdłuż południków, co nie narusza równoodległościowości.

Kryterium drugie.

1. Na dwóch skrajnych, lecz nieznanach, równoleżnikach obszaru skale mają być jednakowe: $m_1 = m_2$.

2. Pole pasa, zawartego pomiędzy tymi skrajnymi równoleżnikami, ma być zachowane.

3. Suma kwadratów zniekształceń liniowych wzdłuż równoleżników ma być minimum dla odtwarzanego obszaru.

Cztery wielkości są nieznanne: stała stożka, stała skali, oraz dwa skrajne równoleżniki φ_1 i φ_2 . Skala południkowa nie będzie równa jedności, lecz innej wartości stałej, nieco mniejszej od jedności.

¹⁾ F. N. Krasowskij, Nowyje kartograficzieskije projekcii, 1922. Oraz: Wycislenije koniczeskoj rawnopromieżutocznoj projekcii, naituczszje prispособlennoj dla izobrażenija dannoj strany, Geodezist Nr 5—6, 1925.

ROZDZIAŁ XIII

WARUNKI DOTYCZĄCE RODZAJU, ALBO KSZTAŁTU LINIJ PRZEKSZTAŁCONYCH

56. Odwzorowanie geodezyjne, czyli ortodromiczne

Główna własność odwzorowania konforemnego: podobieństwo cząsteczkowe powierzchni oryginału i obrazu w każdym punkcie (choć podobieństwo w zwykłym znaczeniu nie może być zachowane dla żadnego obszaru skończonego wskutek zmienności skali), albo też główna własność odwzorowania równopowierzchniowego: zachowanie pól — nie są jedynymi korzystnymi zaletami, jakich możemy żądać (dysjunktywnie) przy porównywaniu dwóch powierzchni. Czy to dla teorii map, czy dla teorii deformacji powierzchni, czy w końcu dla innych celów odwzorowania powierzchni, pożądanym jest poznać możliwość zszeregowania punktowego dwóch powierzchni w taki sposób, *aby liniom geodezyjnym (czyli ortodromom) jednej powierzchni odpowiadały linie geodezyjne drugiej powierzchni*. Przy tym odpowiedniość ta ma mieć miejsce w *ogóle*, a nie tylko dla pewnej pojedynczej rodziny linii geodezyjnych. Okaże się w następstwie, że nie każde dwie powierzchnie dadzą się odwzorować geodezyjnie na siebie. Najprostszym przykładem odwzorowania geodezyjnego jest rzut środkowy kuli na płaszczyznę; koła wielkie, które są liniami geodezyjnymi kuli, rzutują się jako linie proste, które są liniami geodezyjnymi płaszczyzny, własność, która jest bardzo cenna przy sporządzaniu map nawigacyjnych (morskich i lotniczych) i map nieba.

Zajmiemy się pokrótce omówieniem problemu odwzorowania geodezyjnego jednej powierzchni na drugą.

Najprostszą formą tego problemu jest poszukiwanie wszystkich powierzchni, które dadzą się geodezyjnie odwzorować na *płaszczyznę*, a więc tak, żeby wszystkie linie geodezyjne powierzchni przechodziły w linie geodezyjne płaszczyzny, czyli w *linie proste*. W tej *ograniczonej* (do odwzorowań płaskich) formie problem był postawiony i rozwiązany przez *Beltrami*'ego, w roku 1866¹⁾. Wykazał on, że *jedynymi powierzchniami, które mogą być geodezyjnie odwzorowane na płaszczyźnie, są powierzchnie o stałej krzywiznie*. Z jednego takiego odwzorowania dla danej powierzchni wynikają, według *A. F. Möbiusa*, wszystkie inne przez kolineację płaszczyzny.

Dowód twierdzenia *Beltrami*'ego znaleźć można w podręcznikach geometrii różniczkowej.

Ważny jest dla geodezji wniosek, że *elipsoida*, jako powierzchnia o zmiennej krzywiznie, *nie daje się odwzorować geodezyjnie na płaszczyźnie*; odwzorowanie ortodromiczne elipsoidy na płaszczyznę nie istnieje. Natomiast kula, stożek, walec, płaszczyzna mogą być, oczywiście, odwzorowane ortodromicznie na płaszczyznę.

Okazuje się więc, że ilość typów powierzchni, które mogą być odwzorowane geodezyjnie na płaszczyźnie jest poważnie ograniczona, i całkiem naturalnie nasuwa się problem ogólniejszy: jakie powierzchnie mogą być odwzorowane geodezyjnie na siebie, bez czynienia ograniczeń co do natury powierzchni obrazu? Ten problem był postawiony także przez *Beltrami*'ego, w jego wyżej przytoczonej pracy. *U. Dini* w roku 1869²⁾, opierając się na twierdzeniu *Tissota* o siatkach ortogonalnych, pierwszy podał rozwiązanie tego problemu dla rzeczywistych odwzorowań i rzeczywistych powierzchni. Uzupełnienie tego rozwiązania, bez ograniczania problemu do wielkości rzeczywistych, podał *S. Lie* w roku 1882³⁾. Wreszcie inne rozwiązanie podał *G. Darboux*⁴⁾.

Rezultat rozwiązywania zadania o poszukiwaniu powierzchni, które dadzą się odwzorować geodezyjnie na siebie jest następujący:

¹⁾ *E. Beltrami*, Riportare i punti una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Ann. di Mat.* (1), vol. VII, 1866, p. 185.

²⁾ *U. Dini*, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche, *Ann. di Mat.*, 2. Ser., vol III, 1869, p. 269.

³⁾ *S. Lie*, *Math. Ann.*, XX, 1882, p. 421.

⁴⁾ *G. Darboux*, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, 4 vols, 1887 — 1896; w tomie 3, p. 40 — 65.

Dwie powierzchnie pozostają ze sobą w relacji Dini'ego tylko wtedy, gdy ich elementy liniowe mają formę Liouville'a:

$$ds^2 = (U - V) (\bar{U}^2 du^2 + \bar{V}^2 dv^2),$$

$$dS^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U} \right) \left(\frac{\bar{U}^3}{V} du^2 + \frac{\bar{V}^3}{V} dv^2 \right),$$

gdzie U i $\bar{U}$ są funkcjami tylko zmiennej u , zaś V i $\bar{V}$ są funkcjami tylko zmiennej v . Obie formy dla elementów liniowych ds^2 i dS^2 , odpowiadających sobie na powierzchniach, mogą również być izometryczne.

Do każdej powierzchni oryginału, której element liniowy ds^2 ma wyżej podaną formę, należy nieskończona ilość powierzchni obrazowych o elementach liniowych formy dS^2 , ponieważ, bez zmiany czynnika $(U - V)$, można zamienić U na $(U + h)$ i V na $(V + h)$.

Powierzchnia Liouville'a¹⁾ może być geodezyjnie odwzorowana na skojarzoną z nią powierzchnię Liouville'a.

Równanie różniczkowe linii geodezyjnej na pierwszej powierzchni może być napisane w formie:

$$\bar{U}(U - a)^{-1/2} du - \bar{V}(a - V)^{-1/2} dv = 0.$$

Równanie to nie zmienia się, jeśli zamienimy U na $(-U-1)$, V na $(-V-1)$, $\bar{U}$ na $(\bar{U}U^{-1/2})$, $\bar{V}$ na $(\bar{V}V^{-1/2})$, a na $(-1/a')$. Zmiany te przemieniają pierwszą powierzchnię w drugą. W ten sposób bezpośrednio sprawdzamy, że dwie powierzchnie Liouville'a mogą być odwzorowane geodezyjnie jedna na drugą.

Odwzorowanie konforemne i jednocześnie geodezyjne może mieć miejsce tylko w przypadku podobieństwa dwóch powierzchni i, oczywiście, w izometrii. Przy deformacji powierzchni, to jest zmianie formy bez rozciągnień lub rozdarć, tak, że długość każdego elementu liniowego pozostaje niezmienniona, linie geodezyjne pozostaną liniami geodezyjnymi na zdeformowanej powierzchni. W szczególności, gdy rozważana powierzchnia jest rozwijalna na płaszczyźnie, linie geodezyjne powierzchni stają się liniami prostymi płaszczyzny. To zgadza się z faktem, że linia prosta jest najkrótszą drogą, czyli odległością, pomiędzy dwoma punktami płaszczyzny.

¹⁾ Powierzchnie te obejmują, jako specjalne przypadki, płaszczyzny, kule, centralne kwadrygi.

Istotne uogólnienie problemu *Dini*'ego podał *Fr. Busse*¹⁾ przez żądanie, aby każdej linii geodezyjnej powierzchni oryginału odpowiadała linia o stałej geodezyjnej krzywiznie²⁾ na powierzchni obrazu. Takie, jak i podobne inne uogólnienia zadania, wykraczające poza temat odwzorowań geodezyjnych, nie będą tu rozważane.

57. Krzywizna linii na powierzchni

Do dalszych rozważań odwzorowawczych będą potrzebne wzory analityczne na krzywiznę linii na powierzchni.

W tej sprawie wypadnie się odnieść do dzieł poświęconych geometrii różniczkowej, a w szczególności teorii powierzchni. Poniżej podane są potrzebne wzory, z pewnym komentarzem objaśniającym, pomijając wywody.

a) Krzywizna dowolnej linii na dowolnej powierzchni.

Założmy, że:

- dana jest powierzchnia: $x = f_1(u, v)$, $y = f_2(u, v)$, $z = f_3(u, v)$; zmienne niezależne u, v są jej współrzędnymi krzywoliniowymi;
- dana jest dowolna krzywa C leżąca na tej powierzchni;
- dany jest dowolny punkt P leżący na tej krzywej.

¹⁾ *Fr. Busse*, Über diejenige punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke auf einander, bei welcher jeder geodätischen Linie der einen eine Linie konstanter geodätischen Krümmung der andern entspricht, Berlin, Ber., 1896.

²⁾ *Darboux* linie o stałej geodezyjnej krzywiznie na dowolnej powierzchni nazywa *kołami geodezyjnymi*. *Minding*, J. f. Math. 6, 1830, linie te nazwał „krzywymi o najkrótszym obwodzie”. *Gauss* natomiast nadał pojęciu koła geodezyjnego nieco inny sens: miejsce geometryczne punktów na powierzchni, o stałej geodezyjnej odległości od obranego punktu, jako środka; dowiódł on również, że koła geodezyjne są ortogonalnymi trajektoriami rodziny linii geodezyjnych, przechodzących przez jeden punkt.

Termin koło geodezyjne może być użyty w kilku różnych znaczeniach. Pochodzi to stąd, że na powierzchni o zmiennej krzywiznie, krzywa posiadająca *wszystkie* własności koła płaskiego nie istnieje. Dogodnie jest jednak nadać tę samą nazwę koła, krzywym posiadającym jedną z własności charakterystycznych koła płaskiego. W ten sposób powstały dwie definicje koła geodezyjnego: definicja Gaussa i definicja Darboux. Te dwa rodzaje krzywych są różne od siebie, z wyjątkiem powierzchni o stałej krzywiznie. Jest więc pewna chwiejność w terminologii. Lepiej jest jednak z niej zrezygnować i, dla uniknięcia nieporozumień raczej, niż dla narzucania nowych definicji, przyjąć definicję Darboux.

Geometria różniczkowa podaje następujący wzór na krzywiznę krzywej C w jej punkcie P :

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2, \quad (57.1)$$

w którym k oznacza pierwszą krzywiznę, k_g — krzywiznę geodezyjną, k_n — krzywiznę normalną krzywej C na powierzchni w rozważanym punkcie. Krzywizna normalna k_n krzywej C w punkcie P jest krzywizną przekroju normalnego powierzchni za pomocą płaszczyzny przechodzącej przez prostą styczną do krzywej C w rozważanym punkcie i przez prostą normalną powierzchni w tym punkcie; jak wiadomo k_n jest także krzywizną linii geodezyjnej stycznej do krzywej C w punkcie P .

Ograniczmy się przy tym do pierwszej krzywizny, zwanej też kołową krzywizną, dowolnej linii krzywej, pomijając wzory na drugą krzywiznę, zwaną niekiedy skręceniem, lub też torsją. Stanowisko to usprawiedliwia fakt, że druga krzywizna dla dowolnej krzywej płaskiej jest zerem w każdym jej punkcie.

Krzywa C może być określona za pomocą dowolnego związku pomiędzy parametrami, np. $v = f(u)$, lub ogólniej $f(u, v) = 0$; albo też w formie parametrowej, np. $u = \varphi_1(s)$, $v = \varphi_2(s)$, gdzie s jest łukiem krzywej, lub t. p.

Wzór analityczny na krzywiznę dowolnej linii na powierzchni uzyskuje się ze wzoru (57.1), wprowadzając wyrażenia dla k_g i k_n w funkcji wielkości podstawowych 1. i 2. rzędu teorii powierzchni:

$$k^2 = \{T[u'v'' - v'u'' + \Gamma_{11}^2 u'^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)u'^2 v' - (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)u'v'^2 - \Gamma_{22}^1 v'^3]\}^2 + \{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2\}^2$$

lub też:

$$(57.2)$$

$$k^2 = \{Tu'(v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2) - Tv'(u'' + \Gamma_{11}^1 u'^3 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' - \Gamma_{22}^1 v'^2)\}^2 + \{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2\}^2$$

gdzie:

$$T = (EG - F^2)^{1/2},$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2T^2}(GE_u - 2FF_u + FE_v), & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2T^2}(2EF_u - EE_v - FE_u), \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2T^2}(GE_v - FG_u), & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2T^2}(EG_u - FE_v), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2T^2}(2GF_v - GG_u - FG_v), & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2T^2}(EG_v - 2FF_v + FG_u). \end{aligned} \right\} \quad (57.3)$$

E, F, G i L, M, N są wielkościami podstawowymi teorii powierzchni, 1. i 2. rzędu, odpowiednio; E_u, E_v , etc., oznaczają pochodne cząstkowe odnośnych funkcji względem zaznaczonych zmiennych parametrowych; u', v', u'', v'' oznaczają pochodne 1. i 2. rzędu zmiennych parametrowych u, v względem łuku s krzywej C , mierzonego od dowolnie obranego stałego punktu na krzywej. Gdyby przyjąć inny parametr, np. t , wtedy $u' = u_t \cdot t_s$, etc. Współczynniki Γ_{jk}^i , przy założeniu $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ ($i, j, k = 1, 2$) nazywane są niekiedy *trójwskaźnikowymi symbolami Christoffela*.

Po wprowadzeniu wyrażeń (57.3) do wzoru (57.2) uzyskuje się na koniec, dla krzywizny krzywej na powierzchni, następujący wzór analityczny:

$$\begin{aligned} k^2 = \{ & 1/T [(u' v'' - v' u'') T^2 + (-\frac{1}{2} E_u F + (F_u - \frac{1}{2} E_v) E) u'^3 + \\ & + (-\frac{3}{2} E_v F + G_u E - \frac{1}{2} E_u G + F F_u) u'^2 v' + (-E_v G + \\ & + \frac{3}{2} G_u F - F F_u + \frac{1}{2} G_v E) u' v'^2 + (- (F_v - \frac{1}{2} G_u) G + \\ & + \frac{1}{2} G_v F) v'^3] \}^2 + \{ L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2 \}^2, \end{aligned} \quad (57.4)$$

przy czym:

$$d s^2 = E d u^2 + 2 F d u d v + G d v^2,$$

zaś znaczki akcentu oznaczają pochodne odnośnych funkcji względem łuku s rozważanej krzywej na powierzchni.

b) Krzywizna linii parametrowych na dowolnej powierzchni.

Powyższe wzory dotyczyły *dowolnej* linii krzywej na powierzchni. W szczególności interesują nas *krzywe parametrowe* $u = \text{const.}$ oraz $v = \text{const.}$

Dla dowolnej krzywej parametrowej rodziny $u = \text{const.}$ wzór na krzywiznę tej linii znacznie się uprości, ponieważ pochodne 1. i 2. rzędu zmiennej u znikają:

$$\begin{aligned} (k^2)_{u=\text{const.}} &= (k_g^2)_{u=\text{const.}} + (k_n^2)_{u=\text{const.}} \\ &= T^2 (-\Gamma_{22}^1)^2 v'^6 + N^2 v'^4. \end{aligned}$$

Podobnie dla dowolnej krzywej parametrowej rodziny $v = \text{const.}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} (k^2)_{v=\text{const.}} &= (k_g^2)_{v=\text{const.}} + (k_n^2)_{v=\text{const.}} \\ &= T^2 (\Gamma_{11}^2)^2 u'^6 + L^2 u'^4. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że $(ds^2)_{u=const.} = G dv^2$, oraz $(ds^2)_{v=const.} = E du^2$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}(k^2)_{u=const.} &= T^2 (-\Gamma_{22}^1)^2 G^{-3} + N^2 G^{-2}, \\(k^2)_{v=const.} &= T^2 (\Gamma_{11}^2)^2 E^{-3} + L^2 E^{-2},\end{aligned}\tag{57.5}$$

gdzie T , Γ_{22}^1 , Γ_{11}^2 mają znaczenia podane w (57.3).

c) Krzywizna linii na powierzchni, gdy linie parametrowe są ortogonalne.

Uproszczenie wzoru na krzywiznę linii na powierzchni ma miejsce w przypadku, gdy współrzędne krzywoliniowe u, v są ortogonalne, a więc gdy $F = 0$.

1. *Dla dowolnej linii na powierzchni.*

Ze wzoru (57.4), przy założeniu $F = 0$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}k^2 &= \left\{ \frac{1}{(EG)^{1/2}} \left[(u'v'' - v'u'') EG - \frac{1}{2} E_v E u'^3 + \right. \right. \\&\quad \left. \left. + \left(G_u E - \frac{1}{2} E_u G \right) u'^2 v' + \left(-E_v G + \frac{1}{2} G_v E \right) u' v'^2 + \right. \right. \\&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} G_u G v'^3 \right] \right\}^2 + \{L u'^2 + 2M u' v' + N v'^2\}^2,\end{aligned}\tag{57.6}$$

przy czym:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

2. *Dla linii parametrowych powierzchni.*

Podobnie ze wzorów (57.5) na krzywiznę linii parametrowych, w przypadku ich ortogonalności, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}(k^2)_{u=const.} &= EG \left(\frac{1}{2EG} \right)^2 (+GG_u)^2 G^{-3} + N^2 G^{-2} = \left(+\frac{G_u}{2GE^{1/2}} \right)^2 + N^2 G^{-2}, \\(k^2)_{v=const.} &= EG \left(\frac{1}{2EG} \right)^2 (-EE_v)^2 E^{-3} + L^2 E^{-2} = \left(-\frac{E_v}{2EG^{1/2}} \right)^2 + L^2 E^{-2}.\end{aligned}\tag{57.7}$$

d) Krzywizna linii na płaszczyźnie.

Wszystkie powyższe wzory odnoszą się do *dowolnej* powierzchni, w szczególności też i do *płaszczyzny*. Równania parametrowe płaszczyzny x, y są:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = 0,$$

zaś u, v są jej współrzędnymi krzywoliniowymi.

Krzywizna normalna k_n jest zerem dla wszelkiej krzywej na płaszczyźnie, we wszystkich punktach tej krzywej, ponieważ każdy przekrój normalny płaszczyzny jest linią prostą. Wzór na krzywiznę dowolnej krzywej C na płaszczyźnie, w dowolnym punkcie P tej krzywej, będzie więc następujący:

$$k = \pm k_g. \quad (57.8)$$

Dla dowolnej krzywej na płaszczyźnie pierwsza krzywizna tej krzywej (i jedyna, bowiem druga krzywizna jest wszędzie zerem) jest równa, co do wartości bezwzględnej, krzywiznie geodezyjnej tej krzywej w rozważanym punkcie.

1. *Dla dowolnej krzywej na płaszczyźnie.*

Ze wzoru (57.4) uzyskuje się następujący wzór na krzywiznę dowolnej krzywej na płaszczyźnie, w współrzędnych krzywoliniowych płaskich u, v :

$$\begin{aligned} k = \pm \left\{ \frac{1}{T} \left[(u' v'' - v' u'') T^2 + \left(-\frac{1}{2} E_u F + \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right) E \right) u'^3 + \right. \right. \\ \left. + \left(-\frac{3}{2} E_v F + G_u E - \frac{1}{2} E_u G + F F_u \right) u'^2 v' + \left(-E_v G + \frac{3}{2} G_u F - \right. \right. \\ \left. \left. - F F_u + \frac{1}{2} G_v E \right) u' v'^2 + \left(-\left(F_v - \frac{1}{2} G_u \right) G + \frac{1}{2} G_v F \right) v'^3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (57.9)$$

przy czym

$$u' = du/ds, \quad u'' = d^2u/ds^2, \quad \text{etc., oraz} \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

2. *Dla linii parametrowych na płaszczyźnie.*

Ze wzoru (57.5), lub też z powyższego wzoru (57.9), przy założeniu, raz $u = \text{const.}$, drugi raz $v = \text{const.}$, otrzymuje się następujące wzory na krzywiznę linii współrzędnych na płaszczyźnie (przy uwzględnieniu znaku plus przed nawiasem):

$$\begin{aligned} k_{u=\text{const.}} &= -T \Gamma_{22}^1 G^{-3/2} = + \frac{1}{T} \left[-\left(F_v - \frac{1}{2} G_u \right) G + \frac{1}{2} G_v F \right] v'^3, \\ k_{v=\text{const.}} &= T \Gamma_{11}^2 E^{-3/2} = + \frac{1}{T} \left[-\frac{1}{2} E_u F + \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right) E \right] u'^3. \end{aligned} \quad (57.10)$$

3. *Krzywizna linii na płaszczyźnie we współrzędnych krzywo-
liniowych płaskich ortogonalnych.*

Należy wtedy uwzględnić warunek $F=0$. Uzyskuje się wówczas:

— dla krzywizny dowolnej linii:

$$k = \pm \left\{ \frac{1}{(EG)^{1/2}} \left[(u'v'' - v'u'')EG - \frac{1}{2} E_v E u'^3 + \left(G_u E - \frac{1}{2} E_u G \right) u'^2 v' + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(-E_v G + \frac{1}{2} G_v E \right) u' v'^2 + \frac{1}{2} G_u G v'^3 \right] \right\}, \quad (57.11)$$

przy czym

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2;$$

— dla krzywizny linii parametrowych:

$$k_{u=\text{const.}} = + \frac{1}{(EG)^{1/2}} \left(+ \frac{1}{2} G_u G \right) v'^3 = + \frac{G_u}{2 G E^{1/2}}, \\ k_{v=\text{const.}} = + \frac{1}{(EG)^{1/2}} \left(- \frac{1}{2} E_v E \right) u'^3 = - \frac{E_v}{2 E G^{1/2}}. \quad (57.12)$$

4. *Krzywizna linii na płaszczyźnie we współrzędnych prostoliniowych ortogonalnych.*

Równania parametrowe płaszczyzny we współrzędnych prostoliniowych ortogonalnych (a zarazem izometrycznych) są: $x=u$, $y=v$, $z=0$. Wtedy wielkości podstawowe 1. rzędu tej powierzchni będą: $E=1$, $F=0$, $G=1$; zaś element liniowy $ds^2 = du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2$.

Krzywizna dowolnej linii na płaszczyźnie, na podstawie (57.11), wyrazi się wówczas wzorem:

$$k = \pm (x' y'' - y' x''),$$

lub, uwzględniając że

$$x' = dx/ds, \quad x'' = d^2x/ds^2, \text{ etc.},$$

$$k = \pm \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}.$$

Jest to znany z geometrii analitycznej wzór na krzywiznę krzywej płaskiej we współrzędnych prostokątnych.

Krzywizna linii parametrowych $x = \text{const.}$ oraz $y = \text{const.}$, które są liniami prostymi, jest, zgodnie ze wzorem (57.12), wszędzie zerem.

58. Odwzorowania płaskie prostoliniowe

a) Teoria ogólna.

Odwzorowania płaskie *prostoliniowe* są to odwzorowania powierzchni na płaszczyznę, w których jedna z rodzin linii parametrowych: $u = \text{const.}$, albo $v = \text{const.}$ na powierzchni, albo też obie rodziny naraz, odtwarzają się jako *linie proste* na płaszczyźnie.

Łatwo można wyprowadzić ogólne warunki na prostoliniowość płaskiego obrazu linii parametrowych powierzchni.

Jeśli krzywe parametrowe $u = \text{const.}$ na powierzchni mają być odtworzone na płaszczyźnie w postaci rodziny linii prostych, to krzywizna linii przekształconych musi być równa zeru w każdym ich punkcie:

$$k_{u=\text{const.}} = 0,$$

co na mocy (57.10) prowadzi do równania różniczkowego:

$$\left(F_v' - \frac{1}{2} G_u'\right) G' - \frac{1}{2} G_v' F' = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F'}{G'^{1/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(G'^{1/2} \right) = 0,$$

w którym znaczki akcentowe przy wielkościach 1. rzędu oznaczają, że wielkości te odnoszą się do płaszczyzny obrazowej, wyrażonej za pomocą parametrów u, v .

Równanie powyższe wykazuje, że $F'/G'^{1/2}$ i $G'^{1/2}$ są pochodnymi cząstkowymi jakiejś funkcji U_1 dwóch zmiennych u, v ¹⁾, tak że

$$dU_1 = \frac{F'}{G'^{1/2}} du + G'^{1/2} dv,$$

¹⁾ Jeśli $\partial U_1 / \partial u = F'/G'^{1/2}$, $\partial U_1 / \partial v = G'^{1/2}$, wówczas:

$$\frac{\partial U_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (F'/G'^{1/2}), \quad \frac{\partial U_1}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (G'^{1/2}),$$

oraz $\partial U_1 / \partial u \partial v = \partial U_1 / \partial v \partial u$, gdyż porządek różniczkowania na ogół nie wpływa na pochodną.

skąd

$$U_1 = \int \left(\frac{F'}{G'^{1/2}} du + G'^{1/2} dv \right).$$

Element liniowy na płaszczyźnie będzie:

$$\begin{aligned} dS^2 &= E' du^2 + 2 F' du dv + G' dv^2 \\ &= E' du^2 + dU_1^2 - \frac{F'^2 du^2}{G'} \\ &= \frac{T'^2}{G'} du^2 + dU_1^2, \end{aligned}$$

gdzie, dzięki wyżej podanej zależności pomiędzy U_1, u, v , zmienna v może być wyeliminowana z wyrażenia T'^2/G' .

Jeśli obraz siatki parametrowej na powierzchni ma być nadto ortogonalny, to $F' = 0$ i

$$\frac{\partial}{\partial u} (G'^{1/2}) = 0,$$

to znaczy G' musi być funkcją niezależną od zmiennej u .

Podobne rozumowanie może być przeprowadzone dla krzywych parametrowych $v = \text{const.}$ Dla prostoliniowości obrazu płaskiego tych krzywych musi być $k_{v=\text{const.}} = 0$, co prowadzi do równania różniczkowego:

$$E_u' F' - (2 F_u' - E_v') E' = 0,$$

czyli:

$$\frac{\partial}{\partial v} (E'^{1/2}) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F'}{E'^{1/2}} \right) = 0,$$

tak że

$$U_2 = \int [E'^{1/2} du + (F'/E'^{1/2}) dv].$$

Jeśli obraz siatki parametrowej ma być nadto ortogonalny, wówczas:

$$\frac{\partial}{\partial v} (E'^{1/2}) = 0,$$

tak że E' musi być funkcją niezależną od zmiennej v .

b) Rozwiązanie zadania gdy jedna z rodzin linii parametrowych odtwarza się prostoliniowo i siatka parametrowa powierzchni odtwarza się ortogonalnie na płaszczyźnie.

Dana jest powierzchnia i płaszczyzna:

$$\text{I} \quad x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

$$\text{II} \quad X = X, \quad Y = Y, \quad Z = 0.$$

Poszukujemy funkcji odwzorowawczych:

$$X = \phi_1(u, v),$$

$$Y = \phi_2(u, v),$$

które by uskuteczniały odwzorowanie powierzchni na płaszczyznę, z zachowaniem *prostoliniowości* obrazu dla rodziny linii parametrowych $v = \text{const.}$, i *ortogonalności* obrazu siatki parametrowej. Z wywodów podanych pod a) wynika, że wówczas wielkość E' musi być niezależna od v , równa, powiedzmy, $[f'(u)]^2$:

$$X_u^2 + Y_u^2 = [f'(u)]^2.$$

Położmy $X_u = f'(u) \cos \psi$, $Y_u = f'(u) \sin \psi$. Wtedy, ponieważ

$$dY/dX = (\partial Y/\partial u)/(\partial X/\partial u) = \text{tg } \psi,$$

ψ jest kątem pod którym jeden z prostoliniowych obrazów linii parametrowych $v = \text{const.}$ spotyka oś X -ów, i musi on być niezależny od współrzędnej u punktu przecięcia. Stąd ψ musi być funkcją tylko zmiennej v . Całkując równania dla X_u i Y_u musimy mieć:

$$X = F(v) + f(u) \cos \psi, \quad Y = G(v) + f(u) \sin \psi. \quad (58.1)$$

Ale wskutek ortogonalności, musimy też mieć:

$$f'(u) \cos \psi [F'(v) - f(u) \sin \psi \cdot d\psi/dv] + \\ + f'(u) \sin \psi [G'(v) + f(u) \cos \psi \cdot d\psi/dv] = 0,$$

czyli:

$$\cos \psi \cdot F'(v) + \sin \psi \cdot G'(v) = 0.$$

Stąd możemy położyć:

$$F'(v) = \sin \psi \cdot \chi(v), \quad G'(v) = -\cos \psi \cdot \chi(v),$$

i równania dla X i Y stają się następujące:

$$\begin{aligned} X &= \int \sin \psi \cdot \chi(v) dv + f(u) \cos \psi, \\ Y &= - \int \cos \psi \cdot \chi(v) dv + f(u) \sin \psi. \end{aligned} \quad (58.2)$$

Jest to ogólne rozwiązanie dla ortogonalnej siatki obrazu siatki parametrowej, z prostoliniowymi obrazami dla rodziny linii parametrowych $v = \text{const.}$

Jeśli rodzina linii prostych będących obrazami dla $v = \text{const.}$, ma być rodziną prostych równoległych, wówczas ψ jest wielkością stałą, równą powiedzmy α , tak że:

$$\begin{aligned} X &= \sin \alpha \cdot \int \chi(v) dv + \cos \alpha \cdot f(u) = \Theta(v) \sin \alpha + f(u) \cos \alpha, \\ Y &= - \cos \alpha \cdot \int \chi(v) dv + \sin \alpha \cdot f(u) = -\Theta(v) \cos \alpha + f(u) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (58.3)$$

Jeśli za wspólny kierunek prostych równoległych obrać kierunek osi X -ów, wtedy $\alpha = 0$, i równania dla X i Y redukują się do postaci:

$$X = f(u), \quad Y = \Theta(v), \quad (58.4)$$

co zresztą jest oczywiste bezpośrednio z poczynionych założeń.

W rozwiązaniu ogólne (58.2), lub w nieco mniej ogólne (58.3) i (58.4), wchodzi funkcje dowolne, które można wyspecjalizować przez nałożenie dalszych warunków, np. konforemności, albo równopowierzchniowości odwzorowania.

c) Odwzorowania płaskie prostoliniowe dla elipsoidy obrotowej spłaszczonej.

Cała teoria podana w punkcie b) stosuje się w szczególności do elipsoidy obrotowej; wystarczy zamiast zmiennych u, v wprowadzić parametry φ, λ , odpowiednio, aby uzyskać wzory dla grupy odwzorowań z ortogonalną siatką geograficzną na płaszczyźnie i prostoliniowymi południkami.

Zainteresowanie budzi dalsze wyspecjalizowanie funkcji dowolnych, przez nałożenie warunków konforemności, albo równopowierzchniowości odwzorowania elipsoidy na płaszczyznę.

1. Konforemność.

Do równań odwzorowań prostoliniowych z ortogonalnym obrazem siatki geograficznej:

$$\begin{aligned} X &= \int \sin \psi \cdot \chi(\lambda) d\lambda + f(\varphi_i) \cos \psi, \\ Y &= - \int \cos \psi \cdot \chi(\lambda) d\lambda + f(\varphi_i) \sin \psi, \end{aligned} \quad (58.5)$$

dołączyć należy warunki konforemności:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial X}{\partial \lambda}.$$

Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} f'(\varphi_i) \cos \psi &= - \chi(\lambda) \cos \psi + f(\varphi_i) \cos \psi \cdot d\psi/d\lambda, \\ \text{czyli:} \quad f'(\varphi_i) &= - \chi(\lambda) + f(\varphi_i) \cdot d\psi/d\lambda; \end{aligned} \quad (58.6)$$

to samo równanie można by otrzymać przy zastosowaniu drugiego równania na konforemność.

Różniczkując ostatnie równanie względem szerokości izometrycznej φ_i , mamy:

$$\begin{aligned} f''(\varphi_i) &= f'(\varphi_i) \cdot d\psi/d\lambda, \\ f''(\varphi_i)/f'(\varphi_i) &= d\psi/d\lambda. \end{aligned}$$

Założmy, że zależność pomiędzy ψ i λ jest proporcjonalnością: $\psi = c\lambda$, gdzie c oznacza stałą; wtedy:

$$f''(\varphi_i)/f'(\varphi_i) = c,$$

skąd przez całkowanie,

$$\log f'(\varphi_i) = c\varphi_i + \log k,$$

$$\log f'(\varphi_i) = \log k e^{c\varphi_i}.$$

Stąd:

$$f'(\varphi_i) = k e^{c\varphi_i},$$

a przez ponowne całkowanie:

$$f(\varphi_i) = (1/c) k e^{c\varphi_i} + A,$$

gdzie A jest stałą dowolną, która może być zerem przez odpowiedni obiór początku układu.

Znając funkcję $f(\varphi_i)$, łatwo określić funkcję $\chi(\lambda)$ z równania (58.6) zaś X i Y z równań (58.5):

$$\begin{aligned} X &= \int \sin c\lambda \cdot A c \cdot d\lambda + [(k/c) e^{c\varphi_i} + A] \cos c\lambda \\ &= A c \left(-\frac{\cos c\lambda}{c} \right) + B_1 + \frac{k}{c} e^{c\varphi_i} \cos c\lambda + A \cos c\lambda \\ &= \frac{k}{c} e^{c\varphi_i} \cos c\lambda + B_1, \end{aligned}$$

$$X = k_1 e^{c\varphi_i} \cos c\lambda + B_1,$$

i podobnie:

$$Y = k_1 e^{c\varphi_i} \sin c\lambda + B_2.$$

Równanie południków, będących rodziną linii prostych na płaszczyźnie, zbieżnych w jednym punkcie, jest (gdy $B_1 = B_2 = 0$):

$$Y = X \cdot \operatorname{tg} c\lambda;$$

równanie równoleżników będących rodziną współśrodkowych kół, jest:

$$X^2 + Y^2 = k_1^2 e^{2c\varphi_i}.$$

Uzyskaliśmy zatem stożkowe normalne odwzorowanie konforemne.

Przy żądaniu, aby równoleżniki odtwarzały się za pomocą linii prostych i żeby odwzorowanie było konforemne, należałoby przeprowadzić od początku analogiczne rozumowanie względem linii parametrycznych $u = \text{const}$.

Powyższy wynik można również uzyskać bezpośrednio, wychodząc z teorii odwzorowania konforemnego:

$$X + iY = f(\varphi_i + i\lambda),$$

$$X - iY = f_1(\varphi_i - i\lambda),$$

$$X = 1/2 (f + f_1),$$

$$Y = 1/(2i) \cdot (f - f_1)^1).$$

¹⁾ Jeśli odwzorowanie ma być rzeczywiste obie funkcje f i f_1 muszą być jednakowe.

Wielkości podstawowe E' , F' , G' dla płaszczyzny będą następujące:

$$\begin{aligned} E' &= X_{\varphi_i}^2 + Y_{\varphi_i}^2 = \left[\frac{1}{2} (f' + f_1') \right]^2 + \left[-\frac{i}{2} (f' - f_1') \right]^2 = \\ &= f' (\varphi_i + i\lambda) \cdot f_1' (\varphi_i - i\lambda), \\ G' &= X_{\lambda}^2 + Y_{\lambda}^2 = \left[\frac{i}{2} (f' - f_1') \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (f' + f_1') \right]^2 = \\ &= f' (\varphi_i + i\lambda) \cdot f_1' (\varphi_i - i\lambda), \\ F' &= 0. \end{aligned}$$

Warunek prostoliniowości obrazów rodziny południków $\lambda = \text{const.}$ jest:

$$k_{\lambda = \text{const.}} = 0, \text{ czyli } -\frac{E_{\lambda}'}{2E'G'^{1/2}} = 0,$$

skąd $E_{\lambda}' = 0$; E' , czyli $f' \cdot f_1'$, nie zależy od λ . Różniczkując E' względem λ mamy:

$$f'' f_1' - f' f_1'' = 0, \text{ czyli } \frac{f'' (\varphi_i + i\lambda)}{f' (\varphi_i + i\lambda)} = \frac{f_1'' (\varphi_i - i\lambda)}{f_1' (\varphi_i - i\lambda)}.$$

Ponieważ pierwszy z tych ułamków jest funkcją tylko zmiennej zespolonej $(\varphi_i + i\lambda)$, zaś drugi funkcją tylko $(\varphi_i - i\lambda)$, równość obu ułamków może mieć miejsce tylko wtedy, gdy każdy z nich jest równy wielkości stałej, powiedzmy c :

$$f''/f' = c, \quad f_1''/f_1' = c;$$

skąd przez całkowanie:

$$\begin{aligned} \log f' &= c (\varphi_i - i\lambda) + \log k \\ &= \log k e^{c(\varphi_i + i\lambda)} \end{aligned}$$

i

$$f' (\varphi_i + i\lambda) = k e^{c(\varphi_i + i\lambda)}.$$

Przez ponowne całkowanie otrzymujemy:

$$f (\varphi_i + i\lambda) = k_1 e^{c(\varphi_i + i\lambda)} + A,$$

przy czym stałą całkowania A możemy uczynić zerem przez stosowny obiór początku układu.

Jeśli zarówno obrazy południków, jak i obrazy równoleżników mają być prostoliniowe, wówczas musi być jednocześnie $k_{\lambda} = \text{const.} = 0$ i $k_{\varphi_i} = \text{const.} = 0$, czyli E' musi być niezależne od λ , i jednocześnie G' niezależne od φ_i . Ponieważ w odwzorowaniu konforemnym $E' = G'$, wyrażenie:

$$f'(\varphi_i + i\lambda) \cdot f_1'(\varphi_i - i\lambda)$$

musi być niezależne i od λ i od φ_i , a więc musi być ono wielkością stałą. Stąd:

$$f'(\varphi_i + i\lambda) = A, \quad f_1'(\varphi_i - i\lambda) = B,$$

i jeśli współrzędne mają być wielkościami rzeczywistymi, stałe A i B muszą być sobie równe, jeśli są rzeczywiste. Wynika stąd:

$$f(\varphi_i + i\lambda) = A(\varphi_i + i\lambda),$$

$$f_1(\varphi_i - i\lambda) = B(\varphi_i - i\lambda),$$

albo

$$X + iY = A(\varphi_i + i\lambda);$$

jest to konforemne odwzorowanie walcowe.

Jeśli A i B są wielkościami zespolonymi, muszą one być sprzężone, np. $(k + i l)$ i $(k - i l)$. Te wartości stałych prowadzą do odwzorowania konforemnego walcowego z osiami współrzędnych skrzyżnymi o kąt $\alpha = \arctg(k/l)$.

2. Równopowierzchniowość¹⁾.

Do ogólnych równań odwzorowania elipsoidy na płaszczyznę z prostoliniowymi południkami:

$$\begin{aligned} X &= F(\lambda) + f(\varphi) \cos \psi, \\ Y &= G(\lambda) + f(\varphi) \sin \psi, \end{aligned} \tag{58.7}$$

dołączamy warunek równopowierzchniowości:

$$X_{\varphi} Y_{\lambda} - X_{\lambda} Y_{\varphi} = M N \cos \varphi.$$

W zastosowaniu do (58.7), warunek ten prowadzi do równania:

$$f'(\varphi) [G'(\lambda) \cos \psi - F'(\lambda) \sin \psi + f(\varphi) \cdot d\psi/d\lambda] = M N \cos \varphi,$$

¹⁾ J. I. Craig, M. A., F. R. S. E., The Theory of Map Projections, Cairo, 1910, § 47.

które może mieć miejsce tylko pod warunkiem, gdy

$$d\psi/d\lambda = \text{const.} = n, \quad (58.8)$$

$$G'(\lambda) \cos \psi - F'(\lambda) \sin \psi = \text{const.} = b.$$

Stąd mamy

$$\psi = n(\lambda + \alpha),$$

gdzie α jest stałą, i

$$f'(\varphi) [b + nf(\varphi)] = MN \cos \varphi.$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe, otrzymujemy:

$$(b + nf)^2 - C = \frac{na^2(1 - e^2)}{2e} \left(\log \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \frac{2e \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right).$$

Z równania (58.8) widzimy, że $G'(\lambda)$ musi być równe $b \cos \psi + \Gamma \sin \psi$, i $F'(\lambda)$ równe $-b \sin \psi + \Gamma \cos \psi$, gdzie Γ jest funkcją samego tylko λ .

Stąd

$$G(\lambda) = G_0 + (b/n) \cdot \sin [n(\lambda + \alpha)] + \int \Gamma(\lambda) \sin [n(\lambda + \alpha)] d\lambda,$$

$$F(\lambda) = F_0 + (b/n) \cdot \cos [n(\lambda + \alpha)] + \int \Gamma(\lambda) \cos [n(\lambda + \alpha)] d\lambda,$$

gdzie G_0 i F_0 są dowolnymi stałymi.

Następnie z (58.7) otrzymujemy:

$$X = F_0 + (b/n) \cos [n(\lambda + \alpha)] + f(\varphi) \cos [n(\lambda + \alpha)] + \int \Gamma(\lambda) \cos [n(\lambda + \alpha)] d\lambda,$$

$$= F_0 + (1/n)(b + nf) \cos [n(\lambda + \alpha)] + \int \Gamma(\lambda) \cos [n(\lambda + \alpha)] d\lambda,$$

$$Y = G_0 + (1/n)(b + nf) \sin [n(\lambda + \alpha)] + \int \Gamma(\lambda) \sin [n(\lambda + \alpha)] d\lambda,$$

gdzie

$$b + nf = \left\{ C + \frac{na^2(1 - e^2)}{2e} \left(\log \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \frac{2e \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right\}^{1/2}.$$

W szczególności, jeśli $\Gamma(\lambda) = 0$, południki są rodziną zbieżnych linii prostych, o równaniu

$$Y - Y_0 = (X - X_0) \operatorname{tg} [n(\lambda + \alpha)],$$

i równoleżniki rodziną współśrodkowych kół, o równaniu

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = (b + nf)^2 / n^2.$$

Jeśli promień łuku koła przedstawiającego równik na płaszczyźnie, ma być równy długości łuku południka ziemi (uważanego za koło o promieniu a) od równika do bieguna, wówczas:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} (b + n f)/n$$

musi być równe $\pi a/2$. Stąd $C_1^{1/2} = \pi a/2$ i rodzina kół staje się następująca:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = \frac{a^2}{4} \left[\pi + \frac{1 - e^2}{e} \left(\log \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \frac{2 e \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right].$$

Jeśli $\Gamma = \text{constans} = k$, można okazać, że równoleżniki są rodziną kół:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = n^{-2} (b + n f)^2 + n^{-2} k^2,$$

a południki rodziną prostych:

$$Y - Y_0 = (X - X_0) \operatorname{tg} [n (\lambda + \alpha)] - n^{-1} \cdot k \cdot \sec [n (\lambda + \alpha)],$$

których obwiednią jest elipsa:

$$n^2 (X - X_0)^2 + k n (Y - Y_0)^2 = k^2.$$

59. Odwzorowania płaskie kołowe

a) Teoria ogólna.

Odwzorowania płaskie kołowe są to odwzorowania dowolnej powierzchni na płaszczyznę, w których każda z dwóch rodzin linii parametrycznych $u = \text{const.}$ i $v = \text{const.}$ na powierzchni, odtwarza się jako rodzina linii o stałej krzywiznie, to jest rodzina łuków kół, lub linii prostych, na płaszczyźnie.

Łatwo wyprowadzić ogólne warunki na kołowość płaskiego obrazu rodziny linii parametrycznych powierzchni.

Jeśli krzywe parametryczne $u = \text{const.}$ na powierzchni, mają być odtworzone na płaszczyźnie w postaci łuków kół, to krzywizna linii przekształconych musi być równa wielkości stałej (innej dla poszczególnych linii), np. k , w każdym punkcie rozważanej linii:

$$k_{u=\text{const.}} = \text{const.} = k^1). \quad (59.1)$$

Na mocy (57.10), warunek powyższy prowadzi do równania różniczkowego:

$$(1/T') [1/2 G_v' F' - (F_v' - 1/2 G_u') G'] G'^{-1/2} = k. \quad (59.2)$$

¹⁾ W przypadku szczególnym stała k może być równa zeru, czyli obraz rozważanej linii może być linią prostą.

b) Odwzorowania kołowe ortogonalne.

Jeśli dołączymy nadto warunek ortogonalności: $F' = 0$ dla płaskiego obrazu siatki parametrowej powierzchni, kołowe obrazy dla przekształconych linii parametrowych $u = \text{const.}$ uzyskamy z następującego warunku:

$$\frac{G_u'}{2G'E'^{1/2}} = \text{const.} = k. \quad (59.3)$$

Przekształcone linie parametrowe $v = \text{const.}$ będą wtedy *trajektoriami ortogonalnymi* rodziny linii kołowych, przedstawiających na płaszczyźnie przekształcone linie parametrowe $u = \text{const.}$

W przypadku powierzchni obrotowej i przy warunku jednoznacznej odpowiedniości punktowej, jeśli południki odwzorują się w postaci linii kołowych, ich ortogonalne trajektorie, które mają przedstawiać równoleżniki, będą także liniami kołowymi.

c) Odwzorowania kołowe konforemne (Lagrange'a).

Najważniejszy dla zastosowań praktycznych przypadek powstaje z połączenia *kołowości* linii przekształconych dla jednej z dwóch rodzin linii parametrowych powierzchni z *konforemnością* odwzorowania. Ta grupa odwzorowań podpada pod poprzednią, ogólniejszą grupę odwzorowań kołowych ortogonalnych.

Jeśli użyć współrzędnych izometrycznych p, q na powierzchni oryginału, warunki konforemności odwzorowania wyrażą się związkami:

$$E' = G', \quad F' = 0.$$

Linie parametrowe $p = \text{const.}$ odtworzą się na płaszczyźnie w koła, gdy:

$$\frac{G'_p}{2G'^{1/2}} = \text{const.} = k, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial G'^{-1/2}}{\partial p} = k.$$

Różniczkując ostatnie wyrażenie względem zmiennej q , otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 G'^{-1/2}}{\partial p \partial q} = 0, \quad (59.4)$$

skąd wynika, że pochodna $\partial G'^{-1/2} / \partial q$ jest funkcją tylko zmiennej q . Lecz ten rezultat, wobec $E' = G'$, wyraża także fakt, że krzywizna linii przekształconych dla rodziny $q = \text{const.}$ jest również *stała*: to znaczy są one również kołami (lub, w szczególnym przypadku, liniami prostymi).

W odwzorowaniu konforemnym płaskim dowolnej powierzchni, jeśli linie przekształcone dla rodziny linii izometrycznych $p = \text{const.}$ są kołowe, to linie przekształcone dla rodziny linii izometrycznych $q = \text{const.}$ są również kołowe, i odwrotnie.

d) Konforemne odwzorowania kołowe powierzchni obrotowej na płaszczyznę¹⁾.

Obierzmy na powierzchni obrotowej współrzędne izometryczne południkowe ψ , λ za parametry. Wobec konforemności odwzorowania, obraz siatki geograficznej jest ortogonalny, $F' = 0$. Gdy obrazy równoleżników mają być kołami, $k_\psi = \text{const.} = k$. Stąd:

$$\partial G'^{-1/2} / \partial \psi = k \text{ i } \partial^2 G'^{-1/2} / \partial \psi \partial \lambda = 0. \quad (59.5)$$

Z tego wynika, że $\partial G'^{-1/2} / \partial \lambda$ jest funkcją samego tylko λ . Ponieważ $E' = G'$ z warunku konforemności, więc $\partial E'^{-1/2} / \partial \lambda$ jest funkcją samego tylko λ ; to zaś wyraża fakt, że krzywizna $k_\lambda = \text{const.}$ jest wielkością stałą: obrazy południków (dla których λ jest stałe) muszą być również kołami.

Według Nr. 58, c, 1, mamy:

$$E' = G' = f'(\psi + i\lambda) \cdot f'(\psi - i\lambda),$$

co można dla dogodności napisać w postaci:

$$= [\chi(\psi + i\lambda) \cdot \chi(\psi - i\lambda)]^{-2}.$$

Wtedy warunek (59.5) kołowości obrazu siatki geograficznej staje się następujący:

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \lambda} [\chi(\psi + i\lambda) \cdot \chi(\psi - i\lambda)] = 0,$$

czyli:

$$\chi''(\psi + i\lambda) \cdot \chi(\psi - i\lambda) - \chi''(\psi - i\lambda) \cdot \chi(\psi + i\lambda) = 0.$$

Stąd:

$$\frac{\chi''(\psi + i\lambda)}{\chi(\psi + i\lambda)} = \frac{\chi''(\psi - i\lambda)}{\chi(\psi - i\lambda)},$$

i każdy z tych ułamków musi być wielkością stałą. Oznaczmy tę stałą literą c^2 . Całkując powyższe równanie różniczkowe (zwykajne drugiego rzędu), otrzymujemy:

$$\chi = A e^{c(\psi + i\lambda)} + B e^{-c(\psi + i\lambda)},$$

czyli:

$$f'(\psi + i\lambda) = [A e^{c(\psi + i\lambda)} + B e^{-c(\psi + i\lambda)}]^{-2}.$$

¹⁾ Według J. I. Craig, M. A., The Theory of Map Projections, Cairo, 1910, § 46.

Przyjmijmy rozwiązanie tego równania różniczkowego w postaci:

$$f = \frac{L e^{c(\psi+i\lambda)} + M e^{-c(\psi+i\lambda)}}{A e^{c(\psi+i\lambda)} + B e^{-c(\psi+i\lambda)}};$$

łatwo znaleźć, że równanie różniczkowe spełnia się pod warunkiem

$$LB - AM = 1. \quad (59.6)$$

Można więc napisać:

$$X + iY = [L e^{c(\psi+i\lambda)} + M e^{-c(\psi+i\lambda)}] / [A e^{c(\psi+i\lambda)} + B e^{-c(\psi+i\lambda)}],$$

oraz analogiczne wyrażenie dla $X - iY$, zamieniając i na $-i$.

Jeśli zmienić znak przy stałej c , jedynym wynikiem tego będzie wzajemna zamiana stałych A i B , i jednoczesna wzajemna zamiana stałych L i M ; nic nowego z takiej zamiany nie wynika. Jeśli c jest liczbą zespoloną, np.

$$c = \alpha + i\beta, \text{ wtedy } c(\psi + i\lambda) = (\alpha\psi - \beta\lambda) + i(\alpha\lambda + \beta\psi),$$

i przez obiór nowych zmiennych $c'\psi' = \alpha\psi - \beta\lambda$ i $c'\lambda' = \alpha\lambda + \beta\psi$, gdzie c' jest rzeczywiste i dodatnie, dojdziemy do podobnego wyrażenia dla $X + iY$ w wielkościach c' i $\psi' + i\lambda'$.

Powracając do przypadku pierwotnego i mnożąc przez siebie wyrażenia dla $X + iY$ i $X - iY$, łatwo uzyskać:

$$X^2 + Y^2 = \frac{L^2 e^{2c\psi} + 2LM \cos 2c\lambda + M^2 e^{-2c\psi}}{A^2 e^{2c\psi} + 2AB \cos 2c\lambda + B^2 e^{-2c\psi}}. \quad (59.7)$$

Mamy również:

$$X = \frac{AL e^{2c\psi} + (AM + BL) \cos 2c\lambda + BM e^{-2c\psi}}{A^2 e^{2c\psi} + 2AB \cos 2c\lambda + B^2 e^{-2c\psi}},$$

$$Y = \frac{\sin 2c\lambda}{A^2 e^{2c\psi} + 2AB \cos 2c\lambda + B^2 e^{-2c\psi}}. \quad (59.8)$$

Po wyrugowaniu ψ z tych dwóch równań dochodzi się do równania rodziny południków na płaszczyźnie:

$$X^2 + Y^2 - \frac{LB + AM}{AB} X + \frac{Y}{AB} \cos 2c\lambda + \frac{ML}{AB} = 0, \quad (59.9)$$

które przedstawia rodzinę współosiowych kół, o środkach leżących na linii prostej $X = (LB + MA)/(2AB)$, i mających linię $Y = 0$ za oś pierwiastkową. W istocie, równanie kół może być sprowadzone do postaci:

$$\bar{X}^2 + Y^2 + Y \operatorname{ctg} 2c\lambda / AB - (2AB)^{-2} = 0,$$

gdzie $\bar{X} = X - (LB + MA)/(2AB)$. Stąd środki kół leżą na linii $\bar{X} = 0$, w zmiennych odstępach: $-\operatorname{ctg} 2c\lambda / (2AB)$ od punktu początkowego, i wszystkie koła spotykają linię $Y = 0$ w dwóch punktach: $\bar{X} = \pm 1/(2AB)$.

Przez rozwiązanie równań (59.7) i pierwszego z równań (59.8) względem $\cos 2c\lambda$, można wyeliminować $\cos 2c\lambda$, i po redukcji i uproszczeniu, dojść do równania rodziny równoleżników na płaszczyźnie:

$$(X^2 + Y^2)(A^2 e^{2c\psi} - B e^{-2c\psi}) - 2X(AL e^{2c\psi} - B M e^{-2c\psi}) + (L^2 e^{2c\psi} - M^2 e^{-2c\psi}) = 0. \quad (59.10)$$

Równanie to, jak widać, przedstawia drugą rodzinę kół, przechodzących przez punkty przecięcia się dwóch kół, danych za pomocą równań:

$$A^2 Y^2 + (AX - L)^2 = P \quad \text{ i } \quad B^2 Y^2 + (BX - M)^2 = Q,$$

gdzie

$$P e^{2c\psi} - Q e^{-2c\psi} = 0.$$

Ośią pierwiastkową tych dwóch kół jest linia $2X = L/A + M/B$, to jest linia środków pierwszej rodziny kół (południków); oraz środki kół rodziny równoleżników leżą na linii $Y = 0$, to jest na osi pierwiastkowej pierwszej rodziny kół.

Styczna do koła pierwszego systemu, w punkcie $(-1/(2AB), 0)$, ma równanie

$$Y = \bar{X} \operatorname{tg} 2c\lambda + \operatorname{tg} c\lambda / (2AB).$$

Tworzy więc ona kąt $2c\lambda$ z osią X ; i dwa koła tego systemu przecinają się pod kątem $2c(\lambda - \lambda')$, gdzie λ i λ' oznaczają długości geograficzne odpowiadające tym dwóm kołom. Jeśli $c = 1/2$, koła przecinają się pod tymi samymi kątami, jak odpowiadające im południki na powierzchni obrotowej w biegunie, i mamy:

$$\begin{aligned} X &= \frac{AL e^{\psi} + (AM + BL) \cos \lambda + BM e^{-\psi}}{A^2 e^{\psi} + 2AB \cos \lambda + B^2 e^{-\psi}}, \\ Y &= \frac{\sin \lambda}{A^2 e^{\psi} + 2AB \cos \lambda + B^2 e^{-\psi}}. \end{aligned} \quad (59.11)$$

W ogólne rozwiązanie zadania o konforemnym kołowym odwzorowaniu powierzchni obrotowej na płaszczyznę wchodzi pięć stałych dowolnych: A, B, L, M, c ; ponieważ cztery z nich podlegają warunkowi $LB - AM = 1$, więc tylko cztery stałe są niezależne. Stała c ma duże znaczenie klasyfikujące i zwie się *wykładnikiem odwzorowania*. Jeśli $c = 0$ (należy przejść do granicy przy $c \rightarrow 0$) otrzymuje się odwzorowanie konforemne *prostoliniowe*, czyli walcowe. Jeśli $c = 1/2$ otrzymuje się konforemne odwzorowanie *azymutalne*.

Teorię konforemnego odwzorowania kołowego powierzchni obrotowej na płaszczyznę podał *Lagrange*, w roku 1779, w pracy cytowanej w Nr. 48, b; oraz zastosował tę teorię do elipsoidy obrotowej spłaszczonej. *Lagrange* obszernie przedyskutował ten problem, i podał sposób wyznaczenia stałych tak, aby skala w pewnym obranym punkcie mapy była zachowana, i aby pierwsza i druga pochodna skali w tym punkcie znikaly, czyniąc w ten sposób zniekształcenie wielkością małą trzeciego rzędu, to jest zależną od trzeciej potęgi różnicy szerokości. *Lagrange* znalazł wartość $2c = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0}$, gdzie φ_0 oznacza szerokość centralnego równoleżnika; pominął on przy tym spłaszczenie ziemi, i dopiero niedawno *A. E. Young*¹⁾ i *G. T. McCaw*, prawie równocześnie, znaleźli wyrażenie poprawione $2c = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0 + 2e^2 \sin^4 \varphi_0 / (1 - e^2)}$.

Jeden ze szczególnych przypadków płaskiego konforemnego odwzorowania kołowego kuli (przedstawienie całej kuli w kole) podał *Lambert*, w r. 1772, lecz jego wywód był uzyskany na drodze bezpośrednich rozważań geometrycznych, nie zaś z teorii ogólnej, w którą *Lambert* nie wnika.

¹⁾ *A. E. Young*, Some Investigations in the Theory of Map Projections, Royal Geographical Society, London, 1920, p. 68.

ROZDZIAŁ XIV

WARUNKI DOTYCZĄCE SPOSOBU ODWZOROWANIA

60. Odwzorowanie sferyczne Gaussa

a) Teoria ogólna.

Wspomniano już w Nr. 1 o odwzorowaniu sferycznym Gaussa ¹⁾, które ma duże znaczenie teoretyczne w geometrii powierzchni, a także w geodezji przy odwzorowaniu elipsoidy na kulę.

Rozważmy odwzorowanie dowolnej (nierozwijalnej na płaszczyźnie) powierzchni na kulę, o promieniu 1, której środek leży dowolnie w przestrzeni, i jest wzięty za początek układu współrzędnych X, Y, Z , dla kuli. Sposób przyporządkowania sobie punktów powierzchni i kuli definiowany jest w tym odwzorowaniu geometrycznie, jak następuje. Punktowi p na powierzchni ma odpowiadać punkt P na kuli, określony za pomocą promienia tej kuli, równoległego do *dodatniego* kierunku prostej normalnej do powierzchni w punkcie p ; punkt P , w którym ten promień przecina powierzchnię kuli, jest obrazem sferycznym rozważanego punktu ²⁾. W ten sposób każdemu punktowi, albo konfiguracji, na powierzchni odpowiada punkt, albo konfiguracja, na kuli, jako obraz. Obraz ten nazywany jest niekiedy *sferyczną wskaźnicą* (indicatrix). Odwzorowanie daje przy tym — gdy patrzeć na powierzchnię od jej strony dodatniej, a na kulę od zewnątrz — obraz prosty, albo odwrotny,

¹⁾ C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, Gött. Comm. rec. 6, 1828. Ostwalds Klassiker Nr 5.

²⁾ Punkty p i P mają przez to, przy każdym oświetleniu wiązką promieni równoległych, równe natężenie światła. Ze sposobu przyporządkowania punktów, wynika, że w odwzorowaniu rozważamy częściowo płaszczyznę styczną do powierzchni.

odnośnie punktów P i p , zależnie od tego, czy krzywizna powierzchni w rozważanym punkcie jest eliptyczna, czy hiperboliczna¹⁾. Dla punktów eliptycznych i hiperbolicznych powierzchni odwzorowanie jest zawsze jedno-jednoznaczne; wieloznaczność zachodzi w otoczeniu punktu parabolicznego powierzchni; ten przypadek był wyczerpująco zbadany najpierw przez *Hilberta*, a następnie przez *W. Boy'a*²⁾ co do różnych gatunków tej wieloznaczności. Współrzędne sferycznego obrazu punktu powierzchni, w którym cosinusy kierunkowe normalnej są X, Y, Z , są same X, Y, Z , i podlegają warunkowi $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Element liniowy kuli wyrazi się wzorem:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2,$$

w którym:

$$\begin{aligned} E' &= X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2 = T^{-2}(EM^2 - 2FLM + GL^2) = HL - KE, \\ F' &= X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v = T^{-2}(EMN - F(LN - M^2) + GLM) = HM - KF, \\ G' &= X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 = T^{-2}(EN^2 - 2FMN + GM^2) = HN - KG, \end{aligned} \quad (60.1)$$

po podstawieniu wartości na pochodne cosinusów kierunkowych X, Y, Z prostej normalnej, znanych z geometrii różniczkowej. H jest pierwszą, zaś K drugą krzywizną powierzchni w rozważanym punkcie³⁾; $E, F, G; L, M, N$ są wielkościami podstawowymi 1. i 2. rzędu, zaś $T^2 = EG - F^2$.

Z powyższych związków jest również:

$$T'^2 = E'G' - F'^2 = T^2 K^2, \quad (60.2)$$

¹⁾ To rozróżnianie znaków spotyka się już u Gaussa, Werke 8, p. 425.

²⁾ W. Boy, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Diss. Göttingen, 1901.

³⁾ Pierwsza krzywizna powierzchni w punkcie:

$$H = 1/R_1 + 1/R_2 = k_1 + k_2 = T^{-2}(EN - 2FM + GL);$$

jest ona często nazywana średnią krzywizną. Druga krzywizna:

$$K = 1/R_1 R_2 = k_1 k_2 = T^{-2}(LN - M^2),$$

zwana jest często krzywizną Gaussowską, albo wprost krzywizną powierzchni w punkcie. R_1 i R_2 oznaczają główne promienie krzywizny, zaś k_1 i k_2 główne krzywizny powierzchni, i dotyczą głównych przekrojów normalnych w punkcie powierzchni.

stąd, ponieważ $E'G' - F'^2 > 0$, powierzchnia która ma być odwzorowana na kulę nie może być powierzchnią rozwijalną na płaszczyznę, gdyż K nie może być zerem we wszystkich punktach powierzchni.

Na mocy (60.1) można napisać kwadrat elementu liniowego na powierzchni obrazu:

$$dS^2 = H(Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2) - K(Ed u^2 + 2Fdu dv + Gdv^2),$$

albo, jeśli przez k_n oznaczymy krzywiznę przekroju normalnego danej powierzchni w rozważanym punkcie, w kierunku rozważanego elementu liniowego,

$$dS^2 = (Hk_n - K) ds^2. \quad (60.3)$$

Jeśli k_1 i k_2 oznaczają główne krzywizny powierzchni w rozważanym punkcie, można napisać na mocy twierdzenia Eulera:

$$\begin{aligned} dS^2 &= [(k_1 + k_2)(k_1 \cos^2 \psi + k_2 \sin^2 \psi) - k_1 k_2] ds^2 \\ &= (k_1^2 \cos^2 \psi + k_2^2 \sin^2 \psi) ds^2, \end{aligned}$$

i stąd skala:

$$m^2 = (dS/ds)^2 = k_1^2 \cos^2 \psi + k_2^2 \sin^2 \psi, \quad (60.4)$$

gdzie ψ oznacza kąt pomiędzy styczną do krzywej i styczną do linii krzywiznowej.

Ze wzoru (60.4) wnioskujemy, że skala zależy od kierunku elementu liniowego, i na ogół odwzorowanie sferyczne powierzchni za pomocą równoległych normalnych nie jest odwzorowaniem konforemnym. Jednak dla dwóch grup powierzchni, dla których $k_1 = \pm k_2$ w każdym punkcie, odwzorowanie będzie konforemne. Pierwsza równość $k_1 = -k_2$ spełnia się tylko dla kuli. Gdy $k_1 = -k_2$, pierwsza krzywizna H znika identycznie i powierzchnia jest minimalną. Odwzorowanie sferyczne Gaussa dla powierzchni minimalnej jest konforemne. Wielkości podstawowe, według wzorów (60.1), przy $H=0$, stają się następujące: $E' = -KE$, $F' = -KF$, $G' = -KG$, skąd $dS^2 = -Kds^2$; skala $m = dS/ds = \sqrt{-K}$, jest więc niezależna od kierunku, i jest rzeczywista tylko dla powierzchni rzeczywistych o ujemnej krzywiznie K .

Ze wzoru (60.4) wnioskujemy również, że ekstrema skali, a i b , dane są przez kierunki dla których $\sin \psi = 0$ oraz $\cos \psi = 0$. A więc maksimum i minimum skali są liczbowo równe odpowiednim krzywiznom głównym w punkcie powierzchni.

Elementy powierzchniowe dp i dP , odpowiadające sobie na powierzchni i na kuli w korespondujących punktach, są następujące:

$$dp = \sqrt{EG - F^2} du dv = T du dv,$$

$$dP = \sqrt{E'G' - F'^2} du dv = T' du dv = \varepsilon T K du dv,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, zależnie od tego czy powierzchnia jest synklynalna czy antyklynalna w rozważanym punkcie. Skala pól

$$f = dP/dp = \varepsilon K, \quad (60.5)$$

jest liczbowo równa drugiej krzywiznie powierzchni w punkcie. Ta własność odwzorowania sferycznego Gaussa jest niekiedy używana do definiowania „specyficznej krzywizny” K , przez analogię do miary krzywizny linii krzywej. Pierwszy Gauss tak właśnie postąpił, i zdefiniował wielkość K , za pośrednictwem odwzorowania sferycznego, jako granicę stosunku odpowiadających sobie odcinków pól ΔP i Δp , na obrazie sferycznym i na powierzchni, gdy pole Δp dąży do zera:

$$K = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta P}{\Delta p} \right) = \frac{dP}{dp},$$

a wielkość:

$$P = \int K dp = \iint K T du dv,$$

wyrażającą pole sferycznego obrazu rozważanego odcinka powierzchni, nazwał *krzywizną całkowitą* (Curvatura integra).

b) Własności odwzorowania.

1. Łatwo dowieść, że *siatka linii krzywiznowych powierzchni odwzorowuje się na kuli w siatkę ortogonalną*.

Obierzmy linie krzywiznowe powierzchni za krzywe parametrowe; wówczas $F=0$ i $M=0$. Warunki te, na mocy równań (60.1), dają $F'=0$, bez względu na to, czy H znika, czy nie, co dowodzi twierdzenia. Odwrotnie, jeśli krzywe parametrowe na powierzchni i na kuli, odpowiadające sobie w odwzorowaniu, są ortogonalne, $F=0$ i $F'=0$, to musi być $M=0$, chyba że H znika. A więc, jeśli powierzchnia nie jest minimalną, linie krzywiznowe powierzchni są jedyną siatką ortogonalną, której obraz sferyczny jest również siatką ortogonalną.

Linie krzywiznowe powierzchni oryginału (nie minimalnej) i ich obraz sferyczny stanowią krzywe główne odwzorowania.

W przypadku powierzchni minimalnej odwzorowanie sferyczne jest konforemne, i każda siatka ortogonalna (nie tylko linii krzywiznowych) pozostaje również ortogonalna na obrazie.

2. *Styczna do linii krzywiznowej powierzchni jest równoległa do stycznej do jej sferycznego obrazu w korespondującym punkcie, i odwrotnie, jeśli taka relacja ma miejsce dla jakiejś krzywej na powierzchni, wtedy krzywa ta musi być linią krzywiznową.*

Dla dowodu twierdzenia prostego, weźmy linie krzywiznowe za krzywe parametrowe, tak że $F=0$ i $M=0$. Wtedy mamy dla odpowiednich linii:

$$\frac{X_u}{x_u} = \frac{Y_u}{y_u} = \frac{Z_u}{z_u} = -\frac{L}{E}, \quad \frac{X_v}{x_v} = \frac{Y_v}{y_v} = \frac{Z_v}{z_v} = -\frac{N}{G},$$

co dowodzi twierdzenia.

Dla dowodu twierdzenia odwrotnego, zachowajmy ogólne krzywe parametrowe i przypuśćmy, że sferyczny obraz dX, dY, dZ krzywej przy dx, dy, dz jest równoległy do niej. Wtedy:

$$\frac{X_u du + X_v dv}{x_u du + x_v dv} = \frac{Y_u du + Y_v dv}{y_u du + y_v dv} = \frac{Z_u du + Z_v dv}{z_u du + z_v dv}.$$

Niech wspólna wartość tych ułamków będzie μ ; wtedy:

$$X_u du + X_v dv = \mu (x_u du + x_v dv),$$

$$Y_u du + Y_v dv = \mu (y_u du + y_v dv),$$

$$Z_u du + Z_v dv = \mu (z_u du + z_v dv).$$

Pomnóżmy te równania przez x_u, y_u, z_u odpowiednio, i dodajmy; oraz przez x_v, y_v, z_v odpowiednio, i dodajmy. Otrzymamy:

$$-L du - M dv = \mu (E du + F dv),$$

$$-M du - N dv = \mu (F du + G dv);$$

skąd

$$(EM - FL) du^2 + (EN - GL) du dv + (FN - GM) dv^2 = 0,$$

co daje równanie różniczkowe siatki linii krzywiznowych powierzchni.

3. Jeśli dwa kierunki są sprzężone w jakimś punkcie na danej powierzchni, każdy z nich jest prostopadły do sferycznego obrazu drugiego, w korespondującym punkcie.

Kierunek dx', dy', dz' na powierzchni oryginału, który jest sprzężony z danym kierunkiem du, dv jest taki, że

$$dx'dX + dy'dY + dz'dZ = 0,$$

gdzie dX, dY, dZ są określone przez du, dv , to jest są sferycznym obrazem danego kierunku. Równanie to dowodzi prostopadłości tych dwóch kierunków.

Linia asymptotyczna na powierzchni jest sama ze sobą sprzężona; wynika stąd, że linia asymptotyczna na powierzchni jest prostopadła do jej sferycznego obrazu, w odpowiadających sobie punktach.

4. Poprzedni wynik, dotyczący linii sprzężonych, może być wypowiedziany w innej formie, mianowicie: kąt dwóch linii sprzężonych w jakimś punkcie powierzchni jest równy kątowi (albo spełniający się z kątem) ich sferycznych obrazów.

Twierdzenie to może być dowiedzione niezależnie od 3. jak następuje. Obierzmy linie sprzężone powierzchni za krzywe parametrowe, tak że $M = 0$, a ich obrazy za krzywe parametrowe kuli. Wówczas równania (60.1) uproszczą się do postaci:

$$E' = T^{-2} GL^2, \quad F' = T^{-2} (-FLN) = -FK, \quad G' = T^{-2} EN^2.$$

Oznaczmy, jak zwykle, przez Θ kąt linii parametrowych (które teraz są liniami sprzężonymi) w dowolnym punkcie powierzchni oryginału, i przez Θ' kąt parametrowy ich sferycznego obrazu. Wówczas mamy:

$$\cos \Theta' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}} = \mp \frac{F}{\sqrt{EG}} = \mp \cos \Theta,$$

skąd:

$$\text{albo } \Theta = \pi - \Theta' \text{ dla znaku minus,}$$

$$\text{albo } \Theta = \Theta' \quad \text{dla znaku plus;}$$

bierzemy ujemny albo dodatni znak, stosownie do tego, czy powierzchnia jest synklinalna, czy antyklinalna w rozważanym punkcie.

c) Wielkości podstawowe drugiego rzędu.

Wielkości L' , M' , N' dla odwzorowania sferycznego mogą być łatwo obliczone. Oznaczając cosinusy kierunkowe dodatniego kierunku normalnej do kuli przez X' , Y' , Z' , mamy:

$$X' = (1/T') (Y_u Z_v - Y_v Z_u) = (1/T') K T X = \pm X,$$

zależnie od tego, czy powierzchnia jest synklinalna, czy antyklinalna; i podobnie $Y' = \pm Y$, $Z' = \pm Z$, biorąc łącznie bądź górne, bądź dolne znaki we wszystkich wyrażeniach. W ten sposób:

$$\begin{aligned} L' &= X' X_{uu} + Y' Y_{uu} + Z' Z_{uu} = \pm (X X_{uu} + Y Y_{uu} + Z Z_{uu}) \\ &= \pm \frac{\partial}{\partial u} [(X X_u + Y Y_u + Z Z_u) - (X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2)] = \mp E'; \end{aligned}$$

i podobnie $M' = \mp F'$, $N' = \mp G'$.

Wielkości drugiego rzędu są więc, co do wartości bezwzględnych, takie same jak odpowiednie wielkości pierwszego rzędu.

Również promień krzywizny dowolnego przekroju normalnego kuli, dany wzorem ogólnym:

$$R_n = 1/k_n = \frac{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2}{L' du^2 + 2M' du dv + N' dv^2},$$

jest liczbowo równy jedności, jak zresztą należało oczekiwać; jest on dodatni albo ujemny, zależnie od tego, czy normalna do dodatniej strony kuli ma być poprowadzona ku wewnątrz, czy też na zewnątrz kuli.

d) Sferyczne odwzorowanie Gaussa dla elipsoidy obrotowej spłaszczonej

Będzie pożytecznie przytoczyć odwzorowanie elipsoidy na kulę, w którym sferyczne szerokości i długości są równe elipsoidalnym. Jest to zastosowanie ogólnej teorii sferycznego odwzorowania Gaussa do szczególnej powierzchni. Odwzorowanie to znane jest w geodezji popularnie jako „zaniedbanie spłaszczenia ziemi”.

Niechaj będą dane dwie powierzchnie, I elipsoida i II kula:

$$\begin{array}{l|l} x = \frac{r}{W} \cos \lambda = \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda, & X = r_k \cos \lambda_k = R \cos \varphi_k \cos \lambda_k, \\ y = \frac{r}{W} \sin \lambda = \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \lambda, & Y = r_k \sin \lambda_k = R \cos \varphi_k \sin \lambda_k, \\ z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{a(1-e^2)}{W} \sin \varphi; & Z = \pm \sqrt{R^2 - r_k^2} = R \sin \varphi_k; \end{array}$$

$$E = M^2, \quad F = 0,$$

$$G = r^2 = (N \cos \varphi)^2,$$

$$T = +\sqrt{EG - F^2} = MN \cos \varphi,$$

$$ds^2 = (M \cdot d\varphi)^2 + (N \cos \varphi \cdot d\lambda)^2,$$

$$dp = T d\varphi d\lambda =$$

$$= MN \cos \varphi d\varphi d\lambda,$$

$$k_1 = 1/M, \quad k_2 = 1/N,$$

$$K = k_1 k_2 = 1/MN.$$

$$\bar{E} = R^2, \quad \bar{F} = 0,$$

$$\bar{G} = r_k^2 = (R \cos \varphi_k)^2,$$

$$\bar{T} = +\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = R^2 \cos \varphi_k,$$

$$\bar{dS}^2 = (R \cdot d\varphi_k)^2 + (R \cos \varphi_k \cdot d\lambda_k)^2,$$

$$\bar{dP} = \bar{T} d\varphi_k d\lambda_k =$$

$$= R^2 \cos \varphi_k d\varphi_k d\lambda_k,$$

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 1/R,$$

$$\bar{K} = \bar{k}_1 \bar{k}_2 = 1/R^2.$$

Wiążemy obie powierzchnie odpowiedniością punktową według równoległych normalnych. Funkcje odwzorowawcze są więc następujące:

$$\lambda_k = \lambda,$$

$$\varphi_k = \varphi.$$

Wskutek tego wielkości $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$; $\bar{T}$, $\bar{dS}^2$, $\bar{dP}$ są równe odpowiednio wielkościom E , F , G ; T , dS^2 , dP i odpowiadają wielkościom powierzchni oryginału; mogą więc być z nimi porównywane.

Siatka parametrowa $\lambda = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ na elipsoidzie przechodzi w siatkę parametrową $\lambda_k = \text{const.}$, $\varphi_k = \text{const.}$ na kuli. Obie są siatkami ortogonalnymi; są to więc, w myśl twierdzenia Tissota, *krzywe główne* odwzorowania. Wynika to również stąd, że siatka geograficzna na elipsoidzie stanowi siatkę linii krzywiznowych; nadto przechodzi ona w siatkę linii krzywiznowych na kuli.

Skala

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi \cdot d\lambda^2)}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \\ &= R^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{M^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{N^2} \right) \\ &= R^2 (k_1^2 \cos^2 \alpha + k_2^2 \sin^2 \alpha), \end{aligned}$$

gdzie α oznacza azymut rozważanego elementu liniowego w punkcie (φ, λ) na elipsoidzie, liczony od północnego kierunku południka w kierunku ruchu wskazówek zegara. Jak wiadomo

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = M d\varphi / N \cos \varphi d\lambda.$$

Wzdłuż kierunków głównych, a więc wzdłuż południków i równoleżników, skala osiąga swe wartości ekstremalne, maksymalną — wzdłuż południka, minimalną — wzdłuż równoleżnika:

$$a = R/M \text{ (po południku, a więc dla } d\lambda = 0, \text{ albo } \alpha = 0^\circ),$$

$$b = R/N \text{ (po równoleżniku, a więc dla } d\varphi = 0, \text{ albo } \alpha = 90^\circ).$$

Można też powiedzieć, że skala maksymalna jest równa stosunkowi krzywizny głównej k_1 (maksymalnej) elipsoidy do krzywizny głównej $\bar{k}_1 = 1/R$ kuli, w rozważanym punkcie; oraz że skala minimalna jest równa stosunkowi krzywizny głównej k_2 (minimalnej) elipsoidy do krzywizny głównej $\bar{k}_2 = \bar{k}_1 = 1/R$ kuli.

Skala pół:

$$\begin{aligned} f &= \frac{dP}{dp} = \frac{R^2}{MN} \\ &= K_{el}/K_{kul}, \end{aligned}$$

jest więc równa stosunkowi krzywizn powierzchni elipsoidy i kuli w rozważanym punkcie.

Maksymalne zniekształcenie kąta kierunkowego:

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \frac{a - b}{a + b} = \frac{(a/b - 1)}{(a/b + 1)} \\ &= \frac{(N/M - 1)}{(N/M + 1)} \\ &= \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{2 - e^2 (1 + \sin^2 \varphi)}. \end{aligned}$$

Stosunek a/b , a wskutek tego i zniekształcenie kątów, nie zależy od promienia kuli R , co zresztą jest jasne z geometrycznego sposobu przyporządkowania punktów. Największe zniekształcenie kąta wynosi 2ω ; wobec małości $e^2 \sim 1/150$, możemy przyjąć w przybliżeniu $\sin 2\omega = e^2 \cos^2 \varphi$, czyli

$$2\omega = e^2 \cos^2 \varphi : \sin 1' = 22,9' \cos^2 \varphi.$$

Promień kuli R jest stałą do dyspozycji. Można go określić z jakiegoś warunku nałożonego na zniekształcenie liniowe; np. żeby na odpowiednio wybranym średnim równoleżniku φ_0 obszaru było: $a_0 - 1 = 1 - b_0$; albo też, co jest prawie to samo, żeby na tym równoleżniku $a_0 : 1 = 1 : b_0$, czyli $a_0 b_0 = 1$. W pierwszym założeniu uzyskuje się $R_0 = 2 M_0 N_0 / (M_0 + N_0)$; w drugim $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$.

Przy zaniedbaniu spłaszczenia ziemi, zaleca się ziemię uważać za kulę o promieniu $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$, równemu średniemu promieniowi krzywizny elipsoidy dla średniego równoleżnika odtwarzanego obszaru. Jeszcze mniejsze zniekształcenia liniowe uzyskać można, jeśli przyjąć $R = \sqrt{R_1 R_2}$, gdzie R_1 i R_2 są średnimi promieniami krzywizny elipsoidy dla skrajnych równoleżników φ_1 i φ_2 obszaru.

61. Odwzorowanie rzutowe

Temat odwzorowania rzutowego stanowi treść oddzielnej nauki matematycznej — *geometrii rzutowej*, zwanej niekiedy geometrią położenia. Można ją traktować syntetycznie albo analitycznie, i mieć do czynienia z geometrią rzutową syntetyczną albo też analityczną.

Najbardziej istotną cechą geometrii rzutowej jest idea *geometrycznej ciągłości*, wprowadzająca do nauki geometrii pojęcie *elementów niewłaściwych*, które nadają tej nauce większą ogólność. Każda prosta składa się zatem z nieskończenie wielu uporządkowanych punktów właściwych i z jednego punktu niewłaściwego, który z prostej czyni jak gdyby linię zamkniętą. Każda płaszczyzna składa się z nieskończenie wielu prostych oraz z jednej prostej niewłaściwej, która z płaszczyzny czyni jak gdyby powierzchnię zamkniętą. Wreszcie przestrzeń trójwymiarowa składa się z nieskończenie wielu płaszczyzn oraz z jednej płaszczyzny niewłaściwej, która obejmuje wszystkie niewłaściwe punkty i wszystkie niewłaściwe proste w przestrzeni, czyniąc jak gdyby z przestrzeni utwór geometryczny zamknięty.

Ograniczymy się tutaj tylko do paru ogólnych uwag, wprowadzających w naukę o odwzorowaniu rzutowym.

Odwzorowanie rzutowe płaszczyzny (x, y) na płaszczyznę (X, Y) charakteryzuje się analitycznie wzorami postaci:

$$\begin{aligned} X &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \\ Y &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \end{aligned} \quad J = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (x, y)} \neq 0, \quad (61.1)$$

zawierającymi na ogół 9 współczynników, z których jeden, np. c_3 , może być sprowadzony do liczby 1 przez podzielenie licznika i mianownika obu ułamków przez c_3 . W ten sposób rzutowość dwóch płaszczyzn jest określona przez cztery pary punktów, odpowiadających sobie na obu płaszczyznach, co daje osiem równań, pozwalających wyznaczyć wszystkie współczynniki odwzorowania rzutowego.

Przy odwzorowaniu rzutowym płaszczyzny na płaszczyznę, siatka krzywych głównych Tissota składa się ze współogniskowych krzywych stożkowych¹⁾, które, jak wiadomo, są ortogonalne; zaś krzywe równodługościowe, to jest linie odtwarzające się bez zniekształceń, są krzywymi przestępnymi.

Z analitycznego punktu widzenia wzory (61.1) stanowią grupę przekształceń rzutowych płaszczyzny. Wiąże się to z poglądem na geometrię, jako na naukę o badaniu takich własności figur, które pozostają niezmienione przy danej grupie przekształceń. Z tego punktu widzenia, zapoczątkowanego przez F. Kleina, geometria jest funkcją grupy przekształceń i przedmiotu. Tak więc geometria euklidesowska jest niczym innym, jak tylko badaniem niezmienniczych własności figur przy grupie przekształceń przez *ruch* (przesunięcie, obrót) i *podobieństwo* (ruch wraz z powiększeniem albo zmniejszeniem):

$$\begin{aligned} X &= k(a_1 x + b_1 y + c_1), \\ Y &= k(a_2 x + b_2 y + c_2), \end{aligned} \quad J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = k^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (61.2)$$

przy czym współczynniki muszą spełniać następujące trzy warunki:

$$a_1^2 + a_2^2 = 1,$$

$$b_1^2 + b_2^2 = 1,$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Grupa ruchów na płaszczyźnie zależy więc od trzech niezależnych parametrów, grupa podobieństwa — od czterech. Zasadniczym niezmiennikiem grupy przekształceń przez ruch jest *metryka* figur.

Geometria rzutowa bada własności niezmiennicze figur przy grupie przekształceń rzutowych (61.1), która stanowi silniejsze przekształcenie, niż grupa (61.2). Pojęcie wielkości metrycznych (długość, miara kąta, pole, objętość) nie jest istotne dla tej geometrii, własności metryczne figur nie zachowują się, lecz doznają

¹⁾ J. Liouville, J. de mat. 9 (1846), p. 346.

zmiany. Istnieje jednak cały szereg własności, zwanych rzutowymi, które pozostają niezmiennione, pomimo poddania figury temu silniejszemu przekształceniu; własności rzutowe figur są więc bardziej trwałe, niż własności metryczne. Najbardziej charakterystyczne własności rzutowe figur są następujące:

1. *Kolineacja*, czyli współliniowość.

Odwzorowania rzutowe, na mocy twierdzenia *Möbiusa*, są jedynymi, ciągłymi i jedno-jednoznaczными przekształceniami punktowymi płaszczyzny (albo ogólniej przestrzeni), które mają tę własność, że linie proste przekształcają w linie proste. Tę ważną własność nazwał Möbius kolineacją, czyli współliniowością; nazywana też jest homografią, czyli jednokreślnością.

2. *Incydentność*, czyli przynależność elementów.

Pojęcie to dotyczy wzajemnej relacji punktów, prostych i płaszczyzn, i w mowie potocznej wyraża się słowami: „leży na”, „przechodzi przez”, „zawiera”, itp. W rzutowości incydentnym elementom na oryginale odpowiadają incydentne elementy na obrazie.

3. *Zachowanie dwustosunku*.

Stosunek *czterech punktów* współliniowych (albo czterech promieni współpunktowych), zwany dwustosunkiem lub stosunkiem podwójnego podziału, jest zachowany w rzutowości. Ta ważna i zasadnicza własność jest często używana za definicję rzutowości.

Szczególnym przypadkiem rzutowości jest *powinowactwo*, czyli *afinizm* płaszczyzn:

$$\begin{aligned} X &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ Y &= a_2 x + b_2 y + c_2, \end{aligned} \quad J = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (61.3)$$

Jest to rzutowość, w której elementy niewłaściwe odpowiadają sobie. Środkiem rzutu jest wówczas punkt niewłaściwy, rzut środkowy przechodzi w rzut równoległy.

W odwzorowaniu rzutowym afinicznym, oprócz wyżej przytoczonych własności rzutowych, zachodzą trzy dalsze charakterystyczne własności:

4. *Równoległość* prostych zostaje zachowana.

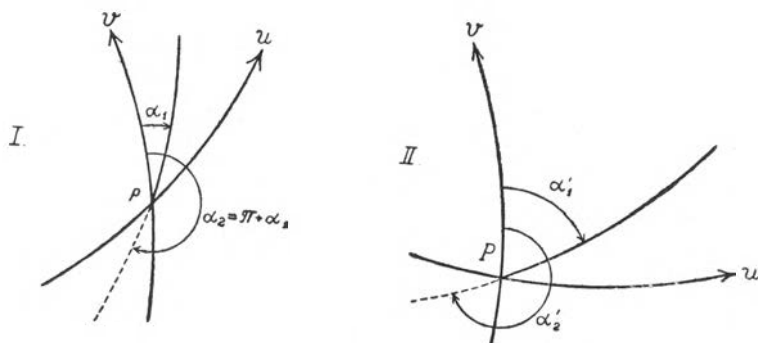
5. *Stosunek odcinków* równoległych lub współliniowych na płaszczyźnie obrazu zostaje zachowany.

6. *Stosunek pól* odpowiadających sobie obszarów płaskich jest stały, i równy stosunkowi powinowactwa. Powinowactwo jest odwzorowaniem wiernopowierzchniowym.

P R Z Y P I S Y

Przypis 1 (do Nr. 4)

Dwukierunek jest niezmiennikiem odwzorowania regularnego jednej powierzchni na drugą. Twierdzenie to można dowieść posługując się kątami kierunkowymi obu kierunków.



Rys. 10

Przypuśćmy że na powierzchni I, w pewnym jej punkcie p , dane są dwa kierunki, określone za pomocą kątów kierunkowych α_1 i α_2 , tworzące jeden dwukierunek, to znaczy $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi$. Na powierzchni II, w odpowiadającym punktowi p punkcie P , tym dwóm kierunkom niechaj odpowiadają jakieś dwa inne kierunki α'_1 i α'_2 ; okażemy że te dwa kierunki tworzą również dwukierunek.

Na podstawie wzoru z teorii powierzchni, określającego kąt kierunkowy, możemy napisać:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{(\partial v / \partial u) \sqrt{EG - F^2}}{E + (\partial v / \partial u) F}$$

dla powierzchni I,

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{(dv/du) \sqrt{E'G' - F'^2}}{E' + (dv/du) F'}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{(\partial v/\partial u) \sqrt{E'G' - F'^2}}{E' + (\partial v/\partial u) F'}$$

dla powierzchni II.

Ponieważ założyliśmy, że na powierzchni I oba kierunki α_1 i α_2 tworzą jeden dwukierunek, $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi$, to $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1$, i z równości prawych stron obu równań dla pierwszej powierzchni otrzymujemy:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\partial v}{\partial u}.$$

Uwzględnivszy powyższy warunek w obu równaniach dla drugiej powierzchni, widzimy, że ich prawe strony są sobie równe, i wskutek tego

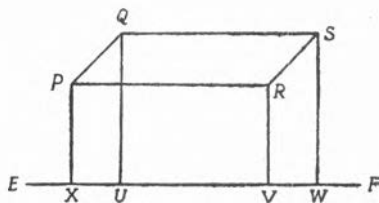
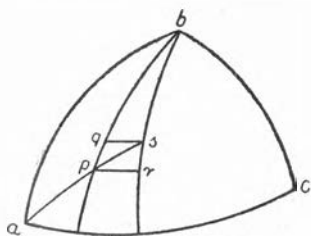
$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \operatorname{tg} \alpha_2',$$

skąd albo $\alpha_2' = \alpha_1'$, albo $\alpha_2' = \alpha_1' \pm \pi$.

Oba kierunki α_1' i α_2' na powierzchni II tworzą więc również dwukierunek.

Przypis 2 (do Nr. 22)

Dowód Eulera nierozwijalności kuli na płaszczyznę.



Rys. 11

§ 7. Jeśli teraz żądamy, aby figura $PQSR$ na płaszczyźnie była kongruentna z figurą $pqsr$ na kuli, to muszą być spełnione trzy następujące warunki:

- 1) musi być $PQ = pq$,
- 2) musi być $PR = pr$,
- 3) musi być kąt $QPR = qpr = 90^\circ$.

Muszą przeto zachodzić trzy następujące równania:

- I. $\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = 1$, czyli $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$,
- II. $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \cos u$, czyli $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \cos^2 u$,
- III. $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = - \left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right)$.

[Pozostawiamy tu bez zmiany Eulerowski sposób pisania pochodnej cząstkowej, za pomocą prostej litery d , oraz zamknięcia symbolu pochodnej w nawiasy; u , t są zmiennymi parametrowymi kuli (szer. i dł. geogr.); promień kuli przyjęty jest za jednostkę].

Położmy jeszcze:

$$\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = \operatorname{tg} \varphi,$$

to, według równania III, musi być:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = - \operatorname{ctg} \varphi,$$

a podstawienie tych wartości w oba początkowe równania da nam:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \cos^2 \varphi \quad \text{ i } \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2 \varphi \cos^2 u.$$

Jednakowoż powyższe trzy warunki nie będą mogły być spełnione równocześnie w żadnych okolicznościach, ponieważ powierzchnia kuli, jak wiadomo, w żaden sposób nie da się dokładnie na płaszczyznę rozwinąć¹⁾.

§ 8. Aby usunąć z rachunku wyrażenia różniczkowe, uczynimy teraz następujące podstawienia:

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = p, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right) = q, \quad \left(\frac{dy}{du}\right) = r, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = s,$$

tak że $dx = p du + q dt$, $dy = r du + s dt$.

¹⁾ Nota A. Wangerin'a do § 7. Euler zakłada tu z góry jako fakt znany, że powierzchnia kuli nie może być rozwinięta na płaszczyźnie, i wnioskuje stąd, że jest niemożliwością uczynić zadość równocześnie równaniom I — III, § 7. W dalszym ciągu, w § 9 rozprawy, dowodzi on tej niemożliwości bezpośrednio.

Wtedy przede wszystkim wymagamy, aby oba ostatnie wyrażenia były różniczkami zupełnymi¹⁾; będzie tak wówczas, gdy p, q, r, s są takimi funkcjami zmiennych t i u , że:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right) \text{ i } \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right).$$

Poza tym, wyżej znalezione wyrażenia dla elementów liniowych, przyjmą następującą formę:

$$PQ = du\sqrt{p^2 + r^2}, \quad PR = dt\sqrt{q^2 + s^2}.$$

Dalej tg kąta pochylenia elementu liniowego PQ względem osi EF równa się r/p i tangens kąta, jaki tworzy PR z tą osią, $= s/q$; na koniec tangens kąta QPR

$$= \frac{qr - ps}{pq + rs}.$$

§ 9. Po wprowadzeniu tych oznaczeń, warunki które musi spełniać doskonale dokładne odwzorowanie, będą następujące:

$$\text{I. } p^2 + r^2 = 1; \quad \text{II. } q^2 + s^2 = \cos^2 u; \quad \text{III. } r/p = -q/s.$$

Położmy tu $r/p = \operatorname{tg} \varphi$, to $s/q = -\operatorname{ctg} \varphi$; to znaczy $r = p \operatorname{tg} \varphi$, $s = -q \operatorname{ctg} \varphi$, i oba początkowe warunki dają:

$$p^2 = \cos^2 \varphi, \quad q^2 = \sin^2 \varphi \cos^2 u,$$

skąd:

$$p = \cos \varphi, \quad q = -\sin \varphi \cos u,$$

i dalej

$$r = \sin \varphi, \quad s = \cos \varphi \cos u.$$

Po podstawieniu tych wartości, wyrażenia które muszą być różniczkami zupełnymi, będą następujące:

$$dx = du \cos \varphi - dt \sin \varphi \cos u,$$

$$dy = du \sin \varphi + dt \cos \varphi \cos u;$$

¹⁾ Nota A. Wangerin'a do § 8. Eulerowi nie było jeszcze znane określenie „różniczka zupełna”. W przekładzie użyto tego wyrażenia wszędzie tam, gdzie Euler, jak np. w niniejszym miejscu, mówi: „ut istae binal formulae integrabiles evadant”.

i ponieważ do tego potrzeba, aby:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right), \quad \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right),$$

to otrzymujemy następujące dwa równania:

$$\text{I. } -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \sin \varphi = + \sin u \sin \varphi - \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u \cos \varphi,$$

$$\text{II. } \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \cos \varphi = - \sin u \cos \varphi - \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u \sin \varphi.$$

Dodajmy te dwa równania, po uprzednim pomnożeniu I przez $\cos \varphi$ i II przez $\sin \varphi$, to otrzymamy:

$$0 = \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u, \quad \text{to znaczy} \quad \left(\frac{d\varphi}{du}\right) = 0;$$

φ może więc zależeć tylko od zmiennej t . Skombinujmy zaś równania w inny jeszcze sposób, mianowicie pomnożmy I przez $(-\sin \varphi)$ i II przez $\cos \varphi$, i dodajmy, to otrzymamy:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\sin u;$$

a przeto pochodna $(d\varphi/dt)$ musi zależeć od u , co jest sprzeczne z poprzednim rezultatem. Tym samym udowodniliśmy również przez rachunek, że doskonale dokładne odwzorowanie kuli na płaszczyznę nie jest możliwe.

Przypis 3 (do Nr. 24 b)

Równanie różniczkowe siatki krzywych głównych możemy też uzyskać w następujący sposób.

1. *Na powierzchni oryginału.*

Związek:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(dv/du) \sqrt{EG-F^2}}{E + (dv/du) F}.$$

przedstawia równanie różniczkowe dowolnej linii na powierzchni oryginału. Dla krzywych głównych musimy uwzględnić warunek (Nr 27 a):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2Q}{P-R} = \frac{2(F'E - FE') \sqrt{EG-F^2}}{E'(EG-F^2) - E'F^2 + 2FF'E - G'E^2}.$$

W tym celu z równania pierwszego obliczymy $\operatorname{tg} 2\alpha_e$ i podstawimy w równanie drugie. Otrzymamy:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_e}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_e} = \frac{2 \frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F}}{1 - \left(\frac{(dv/du) \sqrt{EG - F^2}}{E + (dv/du) F} \right)^2} = \frac{2 (dv/du) \sqrt{EG - F^2} (E + dv/du \cdot F)}{(E + dv/du \cdot F)^2 - (dv/du \cdot \sqrt{EG - F^2})^2},$$

oraz

$$\frac{2 (dv/du) \sqrt{EG - F^2} (E + (dv/du) F)}{(E + dv/du \cdot F)^2 - (dv/du \cdot \sqrt{EG - F^2})^2} = \frac{2 (F'E - FE') \sqrt{EG - F^2}}{E' (EG - F^2) - E' F'^2 + 2 F F' E - G' E'^2},$$

skąd po wykonaniu rachunku algebraicznego, otrzymamy:

$$(F G' - F' G) dv^2 - (E' G - E G') dv du + (E F' - E' F) du^2 = 0;$$

jest to poszukiwane równanie różniczkowe siatki krzywych głównych.

2. Na powierzchni obrazu.

W podobny sposób, związek

$$\operatorname{tg} \alpha_e = \frac{(dv/du) \sqrt{E' G' - F'^2}}{E' + (dv/du) F'}$$

przedstawia równanie różniczkowe dowolnej linii na powierzchni obrazu. Dla krzywych głównych na tej powierzchni musimy uwzględnić warunek (Nr 27 a):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e' = \frac{2 Q'}{P' - R'} = \frac{2 (F E' - E F') \sqrt{E' G' - F'^2}}{E (E' G' - F'^2) - E F'^2 + 2 F F' E' - G E'^2},$$

co da nam *to samo* równanie różniczkowe dla siatki krzywych głównych na powierzchni obrazu, jak poprzednio na powierzchni oryginału.

Przypis 4 (do Nr 27 b)

Inny, nieco prostszy i krótszy, dowód twierdzenia o prostopadłości do siebie dwukierunków na powierzchni obrazu, odpowiadających *tym* prostopadłym do siebie dwukierunkom na powierzchni oryginału, dla których zachodzą ekstremalne skale, polega na wykorzystaniu związku pomiędzy kątem kierunkowym naoryginale i odpowiadającym mu kątem kierunkowym na obrazie (Nr 31 b).

Przypuśćmy że mamy dane dwa prostopadłe do siebie dwukierunki α_1 i $\alpha_2 = \pi/2 + \alpha_1$ na powierzchni oryginału, dla których zachodzą ekstrema skali.

Niechaj ich obrazami, na skutek odwzorowania, będą odpowiednio dwa kierunki α_1' i α_2' . Wykażemy że są one również prostopadłe do siebie na powierzchni obrazu.

Istotnie, na mocy związku (31.2) pomiędzy kątem kierunkowym naoryginale i odpowiadającym mu kątem kierunkowym na obrazie, możemy napisać:

$$P \operatorname{ctg} \alpha_1 = \sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha_1' - Q,$$

dla 1. dwukierunku,

$$P \operatorname{ctg} \alpha_2 = P \operatorname{ctg} (\pi/2 + \alpha_1) = -P \operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{PR - Q^2} \operatorname{ctg} \alpha_2' - Q,$$

dla 2. dwukierunku.

Stąd:

$$\operatorname{ctg} \alpha_1' = \frac{P \operatorname{ctg} \alpha_1 + Q}{\sqrt{PR - Q^2}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha_2' = \frac{-P \operatorname{tg} \alpha_1 + Q}{\sqrt{PR - Q^2}}.$$

Mnożąc przez siebie stronami oba te równania, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_1' \operatorname{ctg} \alpha_2' &= \frac{(P \operatorname{ctg} \alpha_1 + Q)(-P \operatorname{tg} \alpha_1 + Q)}{PR - Q^2} \\ &= \frac{-P^2 - PR(-2/\operatorname{tg} 2\alpha_1) + Q^2}{PR - Q^2}, \end{aligned}$$

po uwzględnieniu związku $\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_1 = -2/\operatorname{tg} 2\alpha_1$.

Wprowadźmy teraz warunek naszego założenia, że rozważana prostopadła para dwukierunków na powierzchni oryginału nie jest dowolną parą prostopadłą, lecz tą, dla której zachodzą ekstrema skali:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2Q}{P - R}.$$

Wówczas otrzymamy:

$$\operatorname{ctg} \alpha_1' \operatorname{ctg} \alpha_2' = \frac{-P^2 - PR \left(-\frac{2}{2Q/(P-R)} \right) + Q^2}{PR - Q^2},$$

i w końcu po wykonaniu rachunku,

$$\operatorname{ctg} \alpha_1' \operatorname{ctg} \alpha_2' = -1.$$

To dowodzi, że dwukierunki α_1' i α_2' na powierzchni obrazu są również prostopadłe.

Możemy też dowieść twierdzenia odwrotnego: jeśli α_1 i α_2 są parą dwukierunków prostopadłych do siebie na powierzchni oryginału, i jeśli α_1' i α_2' są odpowiadającą im parą dwukierunków również prostopadłych do siebie na powierzchni obrazu, to są to dwukierunki o ekstremalnych wartościach skali (w odwzorowaniu niekonforemnym).

Zakładamy więc, że:

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 = -1,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_1' \operatorname{ctg} \alpha_2' = -1.$$

Na mocy związków pomiędzy kątami kierunkowymi na oryginale i obrazie, mamy

$$\operatorname{ctg} \alpha_1' = \frac{P \operatorname{ctg} \alpha_1 + Q}{\sqrt{PR - Q^2}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha_2' = \frac{P \operatorname{ctg} \alpha_2 + Q}{\sqrt{PR - Q^2}}.$$

Mnożąc przez siebie stronami oba te równania i uwzględniając założenia otrzymamy:

$$-1 = \frac{-P^2 + PQ(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) + Q^2}{PR - Q^2}$$

$$-PR + Q^2 = -P^2 + Q^2 + PQ(\operatorname{ctg} \alpha_1 - 1/\operatorname{ctg} \alpha_1),$$

a po uwzględnieniu wzoru trygonometrycznego $\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_1 = 2/\operatorname{tg} 2\alpha_1$ i po redukcji,

$$-PR + Q^2 = PQ(2/\operatorname{tg} 2\alpha_1),$$

skąd, ostatecznie

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2Q}{P - R}.$$

To dowodzi, że para prostopadłych dwukierunków, odtwarzająca się na parę również prostopadłych dwukierunków (w odwzorowaniu niekonforemnym) daje dwukierunki o ekstremalnych skalach.

Przypis 5 (do Nr. 28 a)

1) Inna, bezpośrednia i prostsza metoda obliczenia ekstremalnych skal jest następująca.

Wzór na skalę

$$m^2(u, v, \alpha) =$$

$$= P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha$$

możemy napisać w postaci

$$m^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha,$$

skąd

$$(P - m^2) \cos^2 \alpha + 2Q \sin \alpha \cos \alpha + (R - m^2) \sin^2 \alpha = 0.$$

Sprowadzając wszystkie funkcje trygonometryczne do funkcji tangens otrzymamy:

$$(P - m^2) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} +$$

$$+ 2Q \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} + (R - m^2) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 0,$$

$$(P - m^2) \pm 2Q \operatorname{tg} \alpha + (R - m^2) \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,$$

równanie kwadratowe względem funkcji tangens. Wiadomo że trójmian kwadratowy osiąga wartość ekstremalną wówczas, gdy jego wyróżnik jest równy zeru, wówczas bowiem oba pierwiastki równania kwadratowego są sobie równe. Przyrównując wyróżnik powyższego trójmianu do zera, otrzymamy:

$$(P - m^2)(R - m^2) - Q^2 = 0,$$

skąd

$$m^4 - (P + R)m^2 + (PR - Q^2) = 0.$$

Wzór na skalę

$$1/m^2(u, v, \alpha') =$$

$$= P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha'$$

możemy napisać w postaci

$$(1/m^2)(\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha') =$$

$$= P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha',$$

skąd

$$(P' - 1/m^2) \cos^2 \alpha' + 2Q' \sin \alpha' \cos \alpha' + (R' - 1/m^2) \sin^2 \alpha' = 0.$$

$$\left(P' - \frac{1}{m^2}\right) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'} +$$

$$+ 2Q' \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha'}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} + \left(R' - \frac{1}{m^2}\right) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha'}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'} = 0,$$

$$\left(P' - \frac{1}{m^2}\right) \pm 2Q' \operatorname{tg} \alpha' + \left(R' - \frac{1}{m^2}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha' = 0,$$

$$(P' - 1/m^2)(R' - 1/m^2) - Q'^2 = 0,$$

skąd

$$(1/m)^4 - (P' + R')(1/m)^2 + (P'R' - Q'^2) = 0.$$

Jest to znowu równanie kwadratowe względem m^2 . Wypisując wzory na sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego w funkcji jego współczynników, otrzymamy:

$$m_1^2 + m_2^2 = a^2 + b^2 = P + R,$$

$$m_1^2 m_2^2 = a^2 b^2 = P R - Q^2.$$

Rozwiązując zaś te dwa równania osiągamy:

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(P+R) + 2\sqrt{PR-Q^2}} + \sqrt{(P+R) - 2\sqrt{PR-Q^2}} \right),$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(P+R) + 2\sqrt{PR-Q^2}} - \sqrt{(P+R) - 2\sqrt{PR-Q^2}} \right),$$

zgodnie z poprzednio uzyskanymi wynikami.

2) Jeszcze inna metoda obliczenia skal ekstremalnych jest następująca.

Ze wzoru na skalę:

$$m^2 = P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha$$

otrzywać łatwo:

$$m^2 / \cos^2 \alpha = P + 2Q \operatorname{tg} \alpha + R \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

czyli:

$$m^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = P + 2Q \operatorname{tg} \alpha + R \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1)$$

Jest to znowu równanie kwadratowe względem $1/m^2$. Wypisując wzory na sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego w funkcji jego współczynników otrzymamy:

$$(1/m_1)^2 + (1/m_2)^2 = (1/a)^2 + (1/b)^2 = P' + R',$$

$$(1/m_1 \cdot 1/m_2)^2 = (1/a \cdot 1/b)^2 = P' R' - Q'^2.$$

Rozwiązując zaś te dwa równania łatwo osiągamy:

$$1/a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} - \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} \right),$$

$$1/b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(P'+R') + 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} + \sqrt{(P'+R') - 2\sqrt{P'R'-Q'^2}} \right),$$

zgodnie z poprzednio uzyskanymi wynikami.

Ze wzoru na skalę:

$$1/m^2 = P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha'$$

otrzywać łatwo:

$$1/(m^2 \cos^2 \alpha') = P' + 2Q' \operatorname{tg} \alpha' + R' \operatorname{tg}^2 \alpha',$$

czyli:

$$(1/m^2) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha') = P' + 2Q' \operatorname{tg} \alpha' + R' \operatorname{tg}^2 \alpha'. \quad (1')$$

Oznaczając $\operatorname{tg} \alpha$ przez t , i różniczkując powyższe równanie względem t , otrzymamy:

$$2tm^2 + 2m(1+t^2) \frac{\partial m}{\partial t} = \\ = 2Q + 2Rt.$$

Dla ekstremum musi być

$$\partial m / \partial t = 0,$$

wobec czego:

$$tm^2 = Q + Rt, \quad (2)$$

skąd:

$$t = \frac{Q}{m^2 - R}. \quad (3)$$

Dla obliczenia wartości ekstremalnych skali, podstawimy wartość (3) do równania (1), które przedtem przedstawimy w formie:

$$m^2(1+t^2) = P + Qt + (Q + Rt)t,$$

lub, uwzględniając (2), w formie:

$$m^2(1+t^2) = P + Qt + m^2t^2,$$

czyli:

$$m^2 = P + Qt.$$

Po podstawieniu zamiast t wartości (3), otrzymamy równanie dla skal ekstremalnych:

Oznaczając $\operatorname{tg} \alpha'$ przez t' , i różniczkując powyższe równanie względem t' , otrzymamy:

$$2t' \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{m} (1+t'^2) \frac{\partial (1/m)}{\partial t'} = \\ = 2Q' + 2R't'.$$

Dla ekstremum musi być

$$\partial m / \partial t' = 0,$$

a więc tym samym i

$$\partial (1/m) / \partial t' = 0,$$

wobec czego:

$$t'(1/m^2) = Q' + R't', \quad (2')$$

skąd:

$$t' = \frac{Q'}{1/m^2 - R'}. \quad (3')$$

Dla obliczenia wartości ekstremalnych skali, podstawimy wartość (3') do równania (1'), które przedtem przedstawimy w formie:

$$(1/m^2)(1+t'^2) = P' + Q't' + (Q' + R't')t',$$

lub uwzględniając (2'), w formie:

$$(1/m^2)(1+t'^2) = P' + Q't' + (1/m^2)t'^2,$$

czyli:

$$1/m^2 = P' + Q't'.$$

Po podstawieniu zamiast t' wartości (3'), otrzymamy równanie dla skal ekstremalnych:

$$m^4 - (P + R)m^2 + \\ + (PR - Q^2) = 0. \quad (4)$$

Jest to to samo równanie, do którego doszliśmy już uprzednio.

Rozwiązanie tego równania względem m^2 , daje dwa pierwiastki: m_1^2 i m_2^2 ; oznaczając większy z nich literą a^2 , mniejszy — literą b^2 , otrzymujemy:

$$a^2 = \frac{1}{2} [(P+R) + \sqrt{(P+R)^2 - 4(PR - Q^2)}] \\ = \frac{1}{2} [(P+R) + \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2}], \\ b^2 = \frac{1}{2} [(P+R) - \sqrt{(P+R)^2 - 4(PR - Q^2)}] \\ = \frac{1}{2} [(P+R) - \sqrt{(P-R)^2 + 4Q^2}].$$

Wreszcie z tych równań uzyskamy wartości dla skal ekstremalnych a i b , w sposób analogiczny jak wyżej.

$$1/m^4 - (P' + R')(1/m^2) + \\ + (P'R' - Q'^2) = 0. \quad (4')$$

Jest to to samo równanie, do którego doszliśmy już uprzednio.

Rozwiązanie tego równania względem $1/m^2$, daje dwa pierwiastki: $1/m_1^2$ i $1/m_2^2$; oznaczając mniejszy z nich przez $1/a^2$, zaś większy przez $1/b^2$, otrzymujemy:

$$1/a^2 = \frac{1}{2} [(P'+R') - \sqrt{(P'+R')^2 - 4(P'R' - Q'^2)}] \\ = \frac{1}{2} [(P'+R') - \sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2}], \\ 1/b^2 = \frac{1}{2} [(P'+R') + \sqrt{(P'+R')^2 - 4(P'R' - Q'^2)}] \\ = \frac{1}{2} [(P'+R') + \sqrt{(P'-R')^2 + 4Q'^2}].$$

Wreszcie z tych równań uzyskamy wartości dla skal ekstremalnych $1/a$ i $1/b$, w sposób analogiczny jak wyżej.

Przypis 6 (do Nr. 36)

Druga, ogólniejsza metoda rozwinięcia teorii zniekształceń odwzorowawczych polega na oparciu się na wielkościach parametrowych m_u , m_v , θ , θ' , to znaczy na skalach parametrowych i kątach parametrowych, w punkcie powierzchni.

Wiemy (Nr 26 d), że skale i kąty parametrowe łatwo obliczyć za pomocą wielkości podstawowych teorii powierzchni, a mianowicie:

$$m_v^2 = \frac{E'}{E}, \quad m_u^2 = \frac{G'}{G},$$

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

$$\frac{1}{m_v^2} = \frac{E}{E'}, \quad \frac{1}{m_u^2} = \frac{G}{G'},$$

$$\cos \theta' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}.$$

a) Wyrażenie wielkości P , Q , R i P' , Q' , R' za pomocą skal i kątów parametrycznych.

$$P = \frac{E'}{E} = m_v^2;$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{F'E - FE'}{E\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{E'G'}{EG}} \frac{F'}{\sqrt{E'G'}} - \frac{F}{\sqrt{EG}} \frac{E'}{E}}{\sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}}} \\ &= \frac{m_v m_u \cos \Theta' - m_v^2 \cos \Theta}{\sin \Theta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{E'F^2 - 2F'FE' + G'E^2}{E(EG - F^2)} \\ &= \frac{\frac{E'}{E} \frac{F^2}{EG} - 2 \frac{F'}{\sqrt{E'G'}} \frac{F}{\sqrt{EG}} \sqrt{\frac{E'G'}{EG}} + \frac{G'}{EG}}{1 - F^2/EG} \\ &= \frac{m_v^2 \cos^2 \Theta - 2m_u m_v \cos \Theta' \cos \Theta + m_u^2}{\sin^2 \Theta}; \end{aligned}$$

$$\sqrt{PR - Q^2} = m_u m_v \frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta}.$$

$$P' = \frac{E}{E'} = \frac{1}{m_v^2};$$

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{FE' - F'E}{E'\sqrt{E'G' - F'^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{m_u m_v} \cos \Theta - \frac{1}{m_v^2} \cos \Theta'}{\sin \Theta'}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R' &= \frac{EF'^2 - 2FF'E' + GE'^2}{E'(E'G' - F'^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{m_v^2} \cos^2 \Theta' - \frac{2}{m_u m_v} \cos \Theta \cos \Theta' + \frac{1}{m_u^2}}{\sin^2 \Theta'} \end{aligned}$$

$$\sqrt{P'R' - Q'^2} = \frac{1}{m_u m_v} \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta'}.$$

b) Wyrażenie skali za pomocą skal i kątów parametrycznych.

Skala w kierunku α na powierzchni oryginału,

$$m^2 = P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha,$$

przez podstawienie wartości na P , Q , R , może być wyrażona jak następuje:

Skala w kierunku α' na powierzchni obrazu,

$$1/m^2 = P' \cos^2 \alpha' + Q' \sin 2\alpha' + R' \sin^2 \alpha',$$

przez podstawienie wartości na P' , Q' , R' , może być wyrażona jak następuje:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= m_v^2 \cos^2 \alpha + \\
 &+ \frac{m_v m_u \cos \Theta' - m_v^2 \cos \Theta}{\sin \Theta} \sin 2 \alpha + \\
 &+ \frac{(m_v^2 \cos^2 \Theta - 2 m_u m_v \cos \Theta' \cos \Theta + m_u^2) \sin^2 \alpha}{\sin^2 \Theta}.
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \begin{aligned}
 \frac{1}{m^2} &= \frac{1}{m_v^2} \cos^2 \alpha' + \\
 &+ \frac{\frac{1}{m_u m_v} \cos \Theta - \frac{1}{m_v^2} \cos \Theta'}{\sin \Theta'} \sin 2 \alpha' + \\
 &+ \frac{\left(\frac{\cos^2 \Theta'}{m_v^2} - \frac{2 \cos \Theta \cos \Theta'}{m_u m_v} + \frac{1}{m_u^2} \right) \sin^2 \alpha'}{\sin^2 \Theta'}.
 \end{aligned}$$

Jeśli, w szczególnym przypadku, siatka parametrowa jest ortogonalna na powierzchni oryginału, wówczas $\Theta = \pi/2$, oraz:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= m_v^2 \cos^2 \alpha + m_u m_v \cos \Theta' \sin 2 \alpha + \\
 &+ m_u^2 \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \begin{aligned}
 \frac{1}{m^2} &= \frac{\cos^2 \alpha'}{m_v^2} - \frac{1}{m_v^2} \frac{\cos \Theta'}{\sin \Theta'} \sin 2 \alpha' + \\
 &+ \frac{\frac{1}{m_v^2} \cos^2 \Theta' + \frac{1}{m_u^2} \sin^2 \alpha'}{\sin^2 \Theta'}.
 \end{aligned}$$

Jeśli, w innym szczególnym przypadku, siatka parametrowa jest ortogonalna na powierzchni obrazu, wówczas $\Theta' = \pi/2$, oraz:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= m_v^2 \cos^2 \alpha - m_v^2 \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \sin 2 \alpha + \\
 &+ \frac{m_v^2 \cos^2 \Theta + m_u^2}{\sin^2 \Theta} \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \begin{aligned}
 \frac{1}{m^2} &= \frac{1}{m_v^2} \cos^2 \alpha' + \\
 &+ \frac{1}{m_u m_v} \cos \Theta \sin 2 \alpha' + \frac{1}{m_u^2} \sin^2 \alpha'.
 \end{aligned}$$

Jeśli wreszcie mamy taki szczególny przypadek, gdy jednocześnie obie siatki parametrowe, odpowiadające sobie, są ortogonalne, wówczas $\Theta = \pi/2$ i $\Theta' = \pi/2$ oraz:

$$m^2 = m_v^2 \cos^2 \alpha + m_u^2 \sin^2 \alpha; \quad \left| \quad 1/m^2 = (1/m_v^2) \cos^2 \alpha' + (1/m_u^2) \sin^2 \alpha'; \right.$$

mamy wówczas do czynienia z siatką krzywych głównych, która jest zarazem siatką parametrową; skale parametrowe m_u , m_v są wtedy skalami ekstremalnymi, mianowicie większa z nich jest skalą maksymalną a , zaś pozostała — skalą minimalną b , w rozważanym punkcie powierzchni.

c) Wyrażenie kąta kierunkowego α_e (α_e') krzywych głównych, za pomocą skal i kątów parametrowych.

Wzór

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_e = \frac{2 Q}{P - R},$$

przekształci się w następujący:

$$= \frac{2 m_v m_u \cos \theta' \sin \theta - m_v^2 \sin 2 \theta}{m_v^2 - m_u^2 - 2 m_v \cos \theta (m_v \cos \theta - m_u \cos \theta')}.$$

Wzór

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_e' = \frac{2 Q'}{P' - R'},$$

przekształci się w następujący:

$$= \frac{\frac{2}{m_v m_u} \cos \theta \sin \theta' - \frac{1}{m_v^2} \sin 2 \theta'}{\frac{1}{m_v^2} - \frac{1}{m_u^2} - \frac{2}{m_v} \cos \theta' \left(\frac{\cos \theta'}{m_v} - \frac{\sin \theta'}{m_u} \right)}.$$

Jeśli siatka na powierzchni oryginału jest ortogonalna, wówczas $\theta = \pi/2$, i

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_e = \frac{2 m_u m_v \cos \theta'}{m_v^2 - m_u^2}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2 \alpha_e' &= \frac{-\frac{1}{m_v^2} \sin 2 \theta'}{\frac{1}{m_v^2} - \frac{1}{m_u^2} - \frac{2 \cos^2 \theta'}{m_v^2}} \\ &= \frac{m_u^2 \sin 2 \theta'}{m_v^2 + m_u^2 \cos 2 \theta'}. \end{aligned}$$

Jeśli siatka parametrowa na powierzchni obrazu jest ortogonalna, wówczas $\theta' = \pi/2$, i

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2 \alpha_e &= \frac{-m_v^2 \sin 2 \theta}{m_v^2 - m_u^2 - 2 m_v^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{m_v^2 \sin 2 \theta}{m_u^2 - m_v^2 \cos 2 \theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2 \alpha_e' &= \frac{2 \frac{1}{m_v m_u} \cos \theta}{\frac{1}{m_v^2} - \frac{1}{m_u^2}} \\ &= \frac{2 m_u m_v \cos \theta}{m_u^2 - m_v^2}. \end{aligned}$$

Jeśli obie siatki parametrowe, odpowiadające sobie, są jednocześnie ortogonalne, $\theta = \theta' = \pi/2$, oraz

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_e = 0; \alpha_e = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2; \quad | \quad \operatorname{tg} 2 \alpha_e' = 0; \alpha_e' = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2;$$

mamy wówczas siatki krzywych głównych, które są zarazem siatkami parametrowymi.

d) Wyrażenie skal ekstremalnych a i b przez skale parametrowe i kąty parametrowe.

Wzory Nr. 30 podają żądane wyrażenia.

Na podstawie Nr. 35 d możemy także napisać:

$$a = \sqrt{m_u m_v} \frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2} \right),$$

$$b = \sqrt{m_u m_v} \frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega_{\max} - \omega_e}{2} \right).$$

e) Związek pomiędzy kątem kierunkowym α na powierzchni oryginału i odpowiadającym mu kątem α' na powierzchni obrazu.

Wzory Nr. 31 b, wniosek 2 i 3, podają odnośne związki.

f) Zniekształcenie kąta kierunkowego.

1. Wzór tangensowy,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}}{P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{PR - Q^2}},$$

przekształci się w następujący:

$$= \frac{[m_v \sin \Theta + (m_u \cos \Theta' - m_v \cos \Theta) \operatorname{tg} \alpha - m_v \sin \Theta + (m_u \cos \Theta' - m_v \cos \Theta) \operatorname{tg} \alpha + - m_u \sin \Theta'] \operatorname{tg} \alpha}{+ \operatorname{tg}^2 \alpha m_u \sin \Theta'}.$$

2. Wzór sinusowy,

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{P + Q \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{PR - Q^2}}{P + Q \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{PR - Q^2}},$$

przekształci się w następujący:

$$= \frac{m_v \sin \Theta + (m_u \cos \Theta' - m_v \cos \Theta) - m_v \sin \Theta + (m_u \cos \Theta' - m_v \cos \Theta) + - m_u \sin \Theta'}{+ m_u \sin \Theta'}.$$

1. Wzór tangensowy,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = - \frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' \operatorname{ctg} \alpha' + Q' + \operatorname{tg} \alpha' \sqrt{P'R' - Q'^2}},$$

$$= - \frac{\left[\frac{1}{m_v} \sin \Theta' + \left(\frac{1}{m_u} \cos \Theta - \frac{1}{m_v} \cos \Theta' \right) \operatorname{tg} \alpha' - \frac{1}{m_v} \sin \Theta' + \left(\frac{1}{m_u} \cos \Theta - \frac{1}{m_v} \cos \Theta' \right) \operatorname{tg} \alpha' + - \frac{1}{m_u} \sin \Theta \right] \operatorname{tg} \alpha'}{+ \operatorname{tg}^2 \alpha' \frac{1}{m_u} \sin \Theta}.$$

2. Wzór sinusowy,

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = - \frac{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' - \sqrt{P'R' - Q'^2}}{P' + Q' \operatorname{tg} \alpha' + \sqrt{P'R' - Q'^2}},$$

$$= - \frac{1/m_v \sin \Theta' + (1/m_u \cos \Theta - 1/m_v \cos \Theta') - 1/m_v \sin \Theta' + (1/m_u \cos \Theta - 1/m_v \cos \Theta') + - 1/m_u \sin \Theta}{+ 1/m_u \sin \Theta}.$$

g) Maksymalne zniekształcenie kąta kierunkowego.

Skala dla kierunku, którego kąt kierunkowy doznaje maksymalnego zniekształcenia, wyrazi się wzorem:

$$m^2(u, v, \alpha_{\max}) = ab = m_u m_v \frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta} \quad \left| \quad \frac{1}{m^2(u, v, \alpha'_{\max})} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{m_u m_v} \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta'} \right.$$

Maksymalne zniekształcenie kąta kierunkowego:

$$\sin(\omega_{\max} - \omega_e) = \frac{a - b}{a + b} = \sqrt{\frac{m_u^2 + m_v^2 - 2 m_u m_v \cos(\Theta - \Theta')}{m_u^2 + m_v^2 + 2 m_u m_v \cos(\Theta + \Theta')}}.$$

h) Skala pól,

$$f = ab = m_u m_v \frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta}.$$

Wszystkie te wzory uproszczą się znacznie gdy:

— albo siatka parametrowa na powierzchni oryginału jest ortogonalna: $\Theta = \pi/2$,

— albo siatka parametrowa na powierzchni obrazu jest ortogonalna: $\Theta' = \pi/2$,

— albo obie siatki parametrowe, odpowiadające sobie na obu powierzchniach, są jednocześnie ortogonalne: $\Theta = \Theta' = \pi/2$.

Przypis 7 (do Nr. 45, b, 1)

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (\cos \lambda dr - r \sin \lambda d\lambda)^2 + (\sin \lambda dr + r \cos \lambda d\lambda)^2 + dz^2 \\ &= (dr^2 + dz^2) + r^2 d\lambda^2 \\ &= d\sigma^2 + r^2 d\lambda^2 \\ &= r^2 \left[\frac{d\sigma^2}{r^2} + d\lambda^2 \right]. \end{aligned}$$

Przypis 8 (do Nr. 45, c, 1)

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \\ &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sin(90^\circ \pm \varphi)} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{2 \sin(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varphi) \cos(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varphi)}; \end{aligned}$$

dzieląc licznik i mianownik przez $2 \cos^2 (45^\circ \pm \frac{1}{2}\varphi)$ otrzymujemy

$$= \int_0^\varphi \left\{ \pm \frac{d[\operatorname{tg}(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varphi)]}{\operatorname{tg}(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varphi)} \right\}.$$

Stąd:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \pm \ln \operatorname{tg}(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varphi) = \pm \frac{1}{2} \ln \frac{1 \pm \sin \varphi}{1 \mp \sin \varphi}.$$

Przypis 9 (do Nr. 45, c, 3)

$$\begin{aligned} m &= \frac{kc}{r} e^{c\varphi_{ik}} \\ &= \frac{kc}{R \cos \varphi} \operatorname{tg}^c \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \right) \\ &= \frac{kc}{R} \frac{[\operatorname{tg}^{2c}(\pi/4 + \frac{1}{2}\varphi)]^{1/2}}{[(1 + \sin \varphi)(1 - \sin \varphi)]^{1/2}} \\ &= \frac{kc}{R} \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^{1/2 c} \cdot \frac{1}{(1 + \sin \varphi)^{1/2} \cdot (1 - \sin \varphi)^{1/2}} \\ &= \frac{kc}{R} \frac{(1 + \sin \varphi)^{1/2(c-1)}}{(1 - \sin \varphi)^{1/2(c+1)}}. \end{aligned}$$

Przypis 10 (do Nr. 45, d, 1)

$$\begin{aligned} \varphi_{ie} &= \int_0^\varphi \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \\ &= \int_0^\varphi \frac{1 - e^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \\ &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \int_0^\varphi \frac{e^2 \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{e}{2} \int_0^\varphi \frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} d\varphi - \frac{e}{2} \int_0^\varphi \frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \frac{e}{2} \int_0^\varphi \frac{d(1 - e \sin \varphi)}{1 - e \sin \varphi} - \frac{e}{2} \int_0^\varphi \frac{d(1 + e \sin \varphi)}{1 + e \sin \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) + \frac{e}{2} \ln (1 - e \sin \varphi) - \frac{e}{2} \ln (1 + e \sin \varphi) \\
&= \pm \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) + \ln \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \\
&= \pm \ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \varphi \right) \cdot \left[\frac{1 \mp e \sin \varphi}{1 \pm e \sin \varphi} \right]^{e/2} \right\}.
\end{aligned}$$

Przypis 11 (do Nr. 46, a)

$$\begin{aligned}
dS^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\
&= (dr_k \cos \lambda_k - r_k \sin \lambda_k d\lambda_k)^2 + (dr_k \sin \lambda_k + r_k \cos \lambda_k d\lambda_k)^2 + \\
&\quad + [1/2 (R^2 - r_k^2)^{-1/2} \cdot (-2r_k dr_k)]^2 \\
&= dr_k^2 + r_k^2 d\lambda_k^2 + (R^2 - r_k^2)^{-1} \cdot r_k^2 dr_k^2 \\
&= r_k^2 \left\{ \frac{1 + (R^2 - r_k^2)^{-1} \cdot r_k^2}{r_k^2} \cdot dr_k^2 + d\lambda_k^2 \right\} \\
&= r_k^2 \left\{ \frac{d\sigma_k^2}{r_k^2} + d\lambda_k^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Przypis 12 (do Nr. 47, d)

$$u = N \cdot \cos \varphi \cdot \lambda;$$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\varphi} &= \lambda (N' \cos \varphi - N \sin \varphi) \\
&= \lambda [a(-1/2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} \cdot (-e^2 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi) \cos \varphi - N \sin \varphi] \\
&= \lambda [a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} \cdot e^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - N \sin \varphi] \\
&= -\lambda \cdot M \sin \varphi \left[-\frac{1}{1 - e^2} \cdot e^2 \cos^2 \varphi + \frac{N}{M} \right] \\
&= -\lambda \cdot M \sin \varphi \left[-\frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} + \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{1 - e^2} \right] \\
&= -\lambda \cdot M \cdot \sin \varphi \\
&= -u \frac{M}{N \cos \varphi} \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Przypis 13 (do Nr. 49, a)

$$\begin{aligned}
 T^2 = E G - F^2 &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 \\
 &= x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2 + x_u^2 (y_v^2 + z_v^2) + y_u^2 (x_v^2 + z_v^2) + z_u^2 (x_v^2 + y_v^2) - x_u^2 x_v^2 - y_u^2 y_v^2 - z_u^2 z_v^2 - \\
 &\quad - 2 x_u x_v y_u y_v - 2 x_u x_v z_u z_v - 2 y_u y_v z_u z_v \\
 &= (x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2 \\
 &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2 \\
 &= \left[\frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (X, Z)}{\partial (u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (Y, Z)}{\partial (u, v)} \right]^2. \\
 \bar{T}^2 = \bar{E} \bar{G} - \bar{F}^2 &= \left[\frac{\partial (X, Y)}{\partial (U, V)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (X, Z)}{\partial (U, V)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (Y, Z)}{\partial (U, V)} \right]^2. \\
 T'^2 = E' G' - F'^2 &= \left[\frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (X, Z)}{\partial (u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (Y, Z)}{\partial (u, v)} \right]^2.
 \end{aligned}$$

Dzięki funkcjom odwzorowawczym:

$$\begin{aligned}
 U &= \psi_1(u, v) \\
 V &= \psi_2(u, v), \quad J = \frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)} \neq 0,
 \end{aligned}$$

oraz dzięki własności wyznacznika funkcyjnego, mamy:

$$\begin{aligned}
 T'^2 = E' G' - F'^2 &= \left[\frac{\partial (X, Y)}{\partial (U, V)} \frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (X, Z)}{\partial (U, V)} \frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)} \right]^2 + \\
 &\quad + \left[\frac{\partial (Y, Z)}{\partial (U, V)} \frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)} \right]^2,
 \end{aligned}$$

czyli

$$T'^2 = \bar{T}^2 \cdot J^2.$$

Jeśli powierzchnia obrazu jest płaszczyzną, to:

$$X = U$$

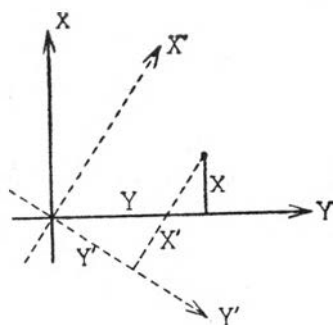
$$Y = V$$

$$Z = 0,$$

wówczas $\bar{T}^2 = 1$, i mamy: $T'^2 = J^2$.

Przypis 14 (do Nr. 51)

$$\begin{aligned}
\int MN \cos \varphi d\varphi &= \int \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi d\varphi \\
&= \int \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} \cos \varphi d\varphi \\
&= a^2(1-e^2) \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} \\
&= a^2(1-e^2) \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{[(1-e \sin \varphi)(1+e \sin \varphi)]^2} \\
&= a^2(1-e^2) \left\{ \frac{1}{4} \int \left[\frac{\cos \varphi}{(1-e \sin \varphi)^2} + \frac{\cos \varphi}{(1+e \sin \varphi)^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\cos \varphi}{1+e \sin \varphi} - \frac{-\cos \varphi}{1-e \sin \varphi} \right] d\varphi \right\} \\
&= \frac{a^2(1-e^2)}{4e} \left\{ \frac{1}{1-e \sin \varphi} - \frac{1}{1+e \sin \varphi} + \ln(1+e \sin \varphi) - \right. \\
&\quad \left. - \ln(1-e \sin \varphi) \right\} + C \\
&= \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left\{ \frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right\} + C \\
&= a^2(1-e^2) \sin \varphi \left(1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^4 \varphi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{7} e^6 \sin^6 \varphi + \dots \right) + C.
\end{aligned}$$

Przypis 15 (do Nr. 54, d, 4)

Rys. 12

$$\varepsilon = A s^2 - 2 B s t + \left(\frac{1}{2} - A \right) t^2;$$

przyjmujemy $X = s$, $Y = t$,

$$\varepsilon = A X^2 - 2 B X Y + \left(\frac{1}{2} - A \right) Y^2.$$

Czynimy transformację układu za pomocą wzorów:

$$X = X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha$$

$$Y = X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha;$$

wobec czego otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & A[X'^2 \cos^2 \alpha - 2 X' Y' \sin \alpha \cos \alpha + Y'^2 \sin^2 \alpha] - \\
& - 2 B[X'^2 \sin \alpha \cos \alpha - Y'^2 \sin \alpha \cos \alpha + X' Y' \cos^2 \alpha - X' Y' \sin^2 \alpha] + \\
& + (\tfrac{1}{2} - A)[X'^2 \sin^2 \alpha + 2 X' Y' \sin \alpha \cos \alpha + Y'^2 \cos^2 \alpha]; \\
\varepsilon = & X'^2 [A \cos^2 \alpha - 2 B \sin \alpha \cos \alpha + (\tfrac{1}{2} - A) \sin^2 \alpha] + \\
& + X' Y' [-2 A \sin \alpha \cos \alpha - 2 B \cos^2 \alpha + 2 B \sin^2 \alpha + (\tfrac{1}{2} - A) 2 \sin \alpha \cos \alpha] + \\
& + Y' [A \sin^2 \alpha + 2 B \sin \alpha \cos \alpha + (\tfrac{1}{2} - A) \cos^2 \alpha].
\end{aligned}$$

Aby znaleźć kąt skręcenia α , należy przyrównać do zera współczynnik przy $X' Y'$, ponieważ wyraz ten znika przy odniesieniu krzywej stożkowej do jej osi.

$$-2 A \sin \alpha \cos \alpha - 2 B \cos^2 \alpha + 2 B \sin^2 \alpha + (\tfrac{1}{2} - A) 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$-A \sin 2\alpha - 2 B \cos 2\alpha + (\tfrac{1}{2} - A) \sin 2\alpha = 0,$$

$$[-A + (\tfrac{1}{2} - A)] \sin 2\alpha = 2 B \cos 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{B}{A - \tfrac{1}{4}}.$$

Uwzględniając ten wynik, współczynniki przy X'^2 i przy Y'^2 , po obliczeniu, będą:

$$A \cos^2 \alpha - 2 B \sin \alpha \cos \alpha + (\tfrac{1}{2} - A) \sin^2 \alpha = \tfrac{1}{4} [1 - 4 B \operatorname{cosec} 2\alpha]$$

$$A \sin^2 \alpha + 2 B \sin \alpha \cos \alpha + (\tfrac{1}{2} - A) \cos^2 \alpha = \tfrac{1}{4} [1 - 4 (A - \tfrac{1}{4}) \sec 2\alpha].$$

Przypis 16 (do Nr. 54 e)

$$\lambda_1 = \Phi(p, q) = \Phi[\Psi_1(P, Q), \Psi_2(P, Q)];$$

$$\frac{\partial}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial P^2} = & \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial P} \right) \frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial^2 p}{\partial P^2} + \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial^2}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial P} \right) \frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial^2 q}{\partial P^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial Q^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial Q} + \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} \right) \frac{\partial p}{\partial Q} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial^2 p}{\partial Q^2} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial^2}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} \right) \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} ; \\
\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q^2} &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} (p^2 + p^2_Q) + \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} (q_P p_P + q_Q p_Q) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial p} (p_{PP} + p_{QQ}) + \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial q^2} (q^2 + q^2_Q) + \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} (q_P p_P + q_Q p_Q) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial q} (q_{PP} + q_{QQ}) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \frac{1}{J},
\end{aligned}$$

ponieważ:

$$p^2 + p^2_Q = 1/J,$$

$$q_P p_P + q_Q p_Q = 0$$

(gdyż na mocy równań Cauchy-Riemanna $q_Q = p_P$ i $p_Q = -q_P$),

$$p_{PP} + p_{QQ} = 0,$$

$$q^2 + q^2_Q = 1/J,$$

$$q_P p_P + q_Q p_Q = 0,$$

$$q_{PP} + q_{QQ} = 0.$$

Uwaga: znaczki literowe oznaczają różniczkowanie.

SKOROWIDZ ZNAKÓW

$x, y, z; X, Y, Z$	Współrzędne kartezjańskie prostokątne w przestrzeni dla powierzchni oryginału oraz dla powierzchni obrazu.
$u, v; U, V$	Współrzędne krzywoliniowe (parametry) na powierzchni oryginału oraz na powierzchni obrazu.
$U = \phi_1(u, v) \}$ $V = \phi_2(u, v) \}$	Funkcje odwzorowawcze.
$J = \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} U_u & U_v \\ V_u & V_v \end{vmatrix}$	Wyznacznik odwzorowania, czyli jakobian.
$E, F, G; E', F', G'$	Wielkości podstawowe 1. rzędu teorii powierzchni dla powierzchni oryginału i dla powierzchni obrazu, wyrażone w funkcji parametrów u, v .
L, M, N	Wielkości podstawowe 2. rzędu.
$T^2 = EG - F^2$	Wyróżnik pierwszej kwadratowej formy różniczkowej teorii powierzchni.
β, β'	Dowolny kąt na powierzchni oryginału i obraz tego kąta na drugiej powierzchni.
s, S	Długość łuku linii na powierzchni oryginału i długość odpowiadającego mu łuku na powierzchni obrazu.
ds, dS	Element liniowy na powierzchni oryginału i obrazu.
dp, dP	Element pola na powierzchni oryginału i obrazu.
k_1, k_2	Główne krzywizny (normalne) powierzchni w punkcie.
H, K	Średnia (czyli pierwsza), oraz Gaussowska (czyli druga) krzywizna powierzchni w punkcie.
k, k_g, k_n	Krzywizna linii na powierzchni, krzywizna geodezyjna tej linii oraz jej krzywizna normalna, w punkcie tej linii.
$M, N; R$	Główne promienie krzywizny elipsoidy obrotowej w punkcie powierzchni. Promień kuli.
$1/N$	Skala główna odwzorowania.
$m = dS/ds$	Skala (poszczególna) odwzorowania.
m_u, m_v	Skale parametrowe.
φ, λ	Współrzędne geograficzne na powierzchni obrotowej.

$\varphi_{ik}, \varphi_{ie}$	Szerokość izometryczna dla kuli i dla elipsoidy.
φ_k	(Sferyczna) szerokość konforemna.
$\beta(\varphi)$	(Sferyczna) szerokość równopowierzchniowa.
$X_\varphi, X_\lambda, X_{\varphi\varphi}, X_{\varphi\lambda}, \text{ect.}$	Pochodne cząstkowe funkcji X .
α, α'	Kąt kierunkowy na powierzchni oryginału i obrazu.
$P, Q, R; P', Q', R'$	Funkcje punktu powierzchni, utworzone z wielkości podstawowych 1. rzędu E, F, G i E', F', G' .
θ, θ'	Kąt linii parametrycznych w punkcie powierzchni oryginału i obrazu.
α_e, α'_e	Kąt kierunkowy krzywej głównej (o ekstremalnej skali) na powierzchni oryginału i obrazu, w punkcie powierzchni.
a, b	Ekstremalne wartości skali w punkcie powierzchni: a — maksymalna, b — minimalna.
$\delta = \beta - \beta'$	Zniekształcenie dowolnego kąta β' na powierzchni obrazu.
$\omega = \alpha - \alpha'$	Zniekształcenie kąta kierunkowego α' .
$\alpha_{\max}, \alpha'_{\max}$	Kąt kierunkowy, który doznaje największego zniekształcenia; na powierzchni oryginału oraz jego obraz na powierzchni odwzorowania.
$f = dP/dp$	Skala pól (elementarna).
$m - 1, f - 1$	Zniekształcenie liniowe oraz zniekształcenie pola.
$p, q; P, Q$	Współrzędne izometryczne powierzchni oryginału i obrazu.
r	Promień równoleżnika powierzchni obrotowej.
$W = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$	Funkcja W dla elipsoidy.
$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$	Mimośród (ekscentryczność) elipsy południkowej.
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Średnie kwadratowe zniekształcenie liniowe w danym punkcie; w kierunkach głównych oraz we wszystkich kierunkach.
E_1, E_2	Średnie kwadratowe zniekształcenie liniowe dla obszaru odtworzonego; typu Airy i Jordana.
$\Gamma_{jk}^i (i, j, k = 1, 2)$	Symbole Christoffela, zależne od wielkości E, F, G i ich pochodnych.
e	Podstawa logarytmów naturalnych.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę

Afinizm 342.

Cząsteczkowe prostokąty 73, — pokrewieństwo 146, — podobieństwo 146.

Deformacja powierzchni 25, 32,

dwukierunek 9, 433,

dwustosunek 342,

dualizmu zasada 4, 96,

drugie zadanie podstawowe teorii odwzorowań 22, 49, 54, 167,

drugie twierdzenie Tissota 146.

Ekstrema skali 89 — 96, pierwsze twierdzenie o ekstremach 89 — 92, drugie twierdzenie 92 — 95, maksimum skali 92, 351, minimum skali 92, trzecie twierdzenie 96, elementy niewłaściwe 340.

Funkcje, — analityczne 172, 223, — odwzorowawcze 4, 5, 21, — zmiennej zespolonej 219, sprzężone 224.

Gausa odwzorowanie, — sferyczne 2, 41, 168, 331 i nast., — konforemne 213, 217,

geodezyjne odwzorowanie 307,

gięcie powierzchni 32, 33.

Izogonalność 50, 51,

izogony odwzorowawcze 121,

izokole 103, 121, 132,

izometria 25, 31, 52, 55,

izometryczne współrzędne 172, 177, 180, 190, 197, 204,

izoskale 103, — pół 132.

Jakobian 6.

Kartografia matematyczna 41, — elipsoidalna 41, — sferyczna 41,

kąt kierunkowy 76,

kierunek 21,

kierunki główne 75, 76,

klasyfikacja odwzorowań 39, 40,

kolineacja 342,

koło geodezyjne 310,

konforemność 1, 2, 44 — 52, 55, 87, 101, 228, 320,

kryterium, — równodługościowości 26, 28, — konforemności 47, — równopowierzchniowości 53, 101, 323, — oceny dobroci odwzorowania 291, — Airy 297, — De l'Isle 299, — Eulera 300, — Gaussa 302, — Czebyszewa 303, — Eisenlohra 305, — Jordana 298, — Krasowskiego 306, — Lagrange'a

302, — Murdocha 300, — Ptolemeusza 299, — Tissota 296, — Webera 305, krzywe główne odwzorowania 73, 93, 97, krzywizna 28, 33, 34, — geodezyjna 311, — normalna 311, — linii parametrycznych 312, 315, — powierzchni 331, 332, — linii na powierzchni 310, — pierwsza 331, — druga 332, krzywoliniowe równanie różniczkowe siatki 14.

Linie, — parametryczne 152, — równodługościowe 103, — parametryczne kierunkowe 152, — krzywiznowe 334, loksodroma 165, 192.

Metryka 8, 33, 40, 42,

miary zniekształcenia 291.

Najkorzystniejsze odwzorowanie dla danego obszaru 269,

niezależność skali od kierunku 8, 87, 228, 320,

nierozwijalność na płaszczyznę, — kuli 60, 65, 344, — elipsoidy 65,

niezmiennik skali 83,

niezmienniki 8, — bezwzględne i względne 18, — różniczkowe Beltramiiego 18, — odwzorowania równodługościowego 30, — gięcia powierzchni 33, — odwzorowania konforemne 50, — odwzorowania równopowierzchniowego 54.

Odpowiedniość punktowa 1, — konforemna 1, — geodezyjna 1, 2, — sferyczna 1, 2, 41, — jedno-jednoznaczna 4,

odwzorowanie, definicja 3, — regularne 7, 42, — bezpośrednie i pośrednie 23, 56, 210, — podwójne 23, 210, — rzutowe 24, 168, 340, — izometryczne 25, 31, 34, 43, — równodługościowe 25, — wiernodługościowe 25, 45, — równoodległościowe 57, — równokątne 31, 43, 50, 51, — równopowierzchniowe 31, 43, 52, 243, — sferyczne Gaussa 2, 41, 168, 331 i nast., — geodezyjne 1, 2, 43, 160, 168, 307, — nieizometryczne 34, 42, 43, — dowolne 43, 44, — płaskie prostoliniowe 43, 168, 316, — stożkowe 43, — konforemne 44, 171, — ortomorficzne 44, — autogo-

- nalne 44, — cząsteczkowo-podobne 44, — wiernokątne 44, — izogonalne 44, — płaskie kołowe 168, 325, — azymutalne 195, — quasi-stereograficzne Wojsk. Inst. Geogr. 232, — Ptolemeusza 262, — Bonne'a 263, — Stab-Wernera 263, — Sanson-Flamsteeda 264, — Lamberta 268, — Albersa 265, — Mollweidego 266, — Lagrange'a 213, 215, — Gaussa 213, 217, — najkorzystniejsze dla danego obszaru 269,
- odzworowanie konforemne 171, — ogólna teoria 171, — współrzędne izometryczne 172, 177, 180, 190, 197, 204, — skala 184, — skala pół 186, — płaskie walcowe 191, 205, 323, 330, — stożkowe 193, 201, 206, — kuli na płaszczyznę 197, — elipsoidy na płaszczyznę 207, — płaszczyzny na płaszczyznę 207, — powierzchni obrotowej na kulę 210, — Lagrange'a 213, 215, — Gaussa 213, 217, rozwiązania poszczególne 209, 240, — notatka historyczna 233,
- odzworowanie równopowierzchniowe 243, — ogólna teoria 243, — płaskie dla płaszczyzny i elipsoidy 248, — azymutalne, stożkowe, walcowe 249, — elipsoidy na kulę 253, — rozwiązania szczególne 256, 266, — notatka historyczna 261,
- ortogonalność 48, 59, 85, 96, — siatki parametrowej 109, 144, 157, 169, 313, 318,
- ogólne prawo odzworowawcze 146,
- ortodroma 165.
- Pierwsze twierdzenie Tissota 67, 87, 96,
- podobieństwo 46, — cząsteczkowe 51, — skończone 52, 341, — odwrotne 177,
- podstawowe zadania teorii odzworowań 21, — pierwsze 21, 48, 53, — drugie 22, 49, 54, 167,
- podziałka 77, 80, podstawa podziałki 80,
- krzywoliniowa podziałka złożona 81,
- pokrewieństwo cząsteczkowe 146,
- porównanie obrazu z oryginałem 8,
- powierzchnie, — izometryczne 31, — rozwijalne 33, — o stałej krzywiznie 308, — Liouville'a 309,
- powinowactwo 342,
- projekcje czyli rzuty 24,
- przekształcenie, — parametrów 13, 15, 16, — liniowe 149, — przez ruch 341, — przez podobieństwo 341.
- Redukcje odzworowawcze 157, 160,
- rozwijalność powierzchni 33,
- równanie, — charakterystyczne Gaussa 29, — krzywoliniowe siatki 14, — różniczkowe Cauchy-Riemanna 222 — różniczkowe Laplace'a 225, — różniczkowe odzworowania konforemnego elipsoidy na płaszczyznę 231,
- równodługościowość 25, 28, 103,
- równokątność 1, 2, 31, 44 — 52, 55, 87, 101, 228, 320,
- równoodległościowość 57,
- równopolewość 243,
- równopowierzchniowość 31, 52, 53, 244, — cząsteczkowa 55, — skończona 55, kryterium 53, 101, 323, notatka historyczna 261,
- rzutowość, — cząsteczkowa 11, 12, 138, 146, — lokalna 12, — integralna 12,
- rzuty 24, 340.
- Siatka, — parametrowa 13, 110, 142, — ortogonalna 48, — krzywych głównych 59, 73, 74, 75, 85, 87, 96, 110, 142, 347, — geograficzna 73, 87,
- stała, — stożka 194, — skali 194,
- styczne główne 75, 97,
- szerokość, — izometryczna 197, 204, — konforemna 216, — geocentryczna 216, — równopowierzchniowa 255,
- średnie zniekształcenie obszaru 294.
- Teoria odzworowań 1, 21,
- teoria zniekształceń 8, 12, 59, 354,
- twierdzenie, — Riemanna 240, — Tissota 67, 87, 96, 146, 331, 332.
- Wielkości podstawowe teorii powierzchni 17, wielkości P, Q, R, P', Q', R' 88,
- wiernodługościowość 25, 45,
- wiernokątność 44,
- wiernopowierzchniowość 25, 45, 46, 52, 53, 244,
- wskaźnica Tissota 147,
- współmienniki 13, 18.
- Zadanie podstawowe teorii odzworowań, — pierwsze 21, — drugie 146,
- zaniedbanie spłaszczenia ziemi 337,
- zmiana parametrów, 14, 15,
- zniekształcenie, — liniowe 79, 156, — kątów 114, — kąta kierunkowego 114, 118, 141, 158, — maksymalne kąta 123, — kątowe jako funkcja kierunku 126, — pola 130, — skończone 157, 158, — metryczne jako funkcja skali kierunków ekstremalnych 317.

SKOROWIDZ NAZWISK

Liczby oznaczają strony

- Adams 217, 256
 Aguilon 233
 Airy 295, 296, 297, 298
 Albers 264, 265, 266, 301
 Apianus 262
 Apolloniusz 156
- B**
 Babinet 266
 Baeschlin 373
 Beltrami 2, 18, 65, 283, 308
 Benewitz 262
 Bennett 65
 Bianchi 260
 Biernacki 80, 157, 232, 263
 Bludau 374
 Bond 201
 Bonne 261, 262, 263, 299
 Bonnet 25
 Bour 25
 Bourgeois 264
 Boy 332
 Breusing 44
 Busse 310
- C**
 Carathéodory 51
 Cassini 163, 262
 Cauchy 181, 187, 222, 224, 225, 226, 227, 230, 231, 232
 Cayley 44
 Christoffel 312
 Clarke 217, 256, 297, 298
 Collignon 267
 Commandino 233
 Craig 65, 323, 327
 Czebyszew 293, 303, 304
- d**
 d'Anville 262
 d'Avezac 263
 Darboux 2, 25, 238, 260, 308, 310, 373
 De l'Isle 237, 262, 299, 300, 303
 Dini 2, 308
 Dirichlet 241
 Driencourt 113, 163, 164, 217, 269, 274, 286, 373
- E**
 Eckert 373
 Eisenlohr 305
 Euler 65, 234, 236, 237, 238, 265, 266, 300, 301, 303, 304, 344
- F**
 Fasching 291
 Fiorini 52, 65, 297, 301, 373
 Flamsteed 264
 Furtwängler 264
- G**
 Gauss 2, 25, 28, 33, 44, 164, 184, 195, 202, 206, 213, 217, 218, 219, 234, 235, 238, 239, 240, 282, 286, 287, 291, 302, 303, 310, 331, 334
 Germain 44, 373
 Grabowski 204, 217
 Grawe 248, 267, 268, 304
 Gregory 201, 234
 Gröson 238
- H**
 Hammer 268
 Hartl 266
 Hausbrandt 375
 Hayford 256
 Herz 373
 Hilbert 241, 332
 Hinks 217, 373
 Hipparch 203, 233
 Holländer 260, 267
- J**
 Jordan 295, 296, 298
- K**
 Kawrajskij 303, 373
 Kępiński 375
 Klein 341
 Kochmański 375
 Kolanowski 373
 Korkine 260, 267
 Krasowskij 306
 Krüger 291
- L**
 Laborde 113, 163, 164, 184, 217, 269, 274, 286, 373
 Lagrange 2, 184, 188, 213, 214, 215, 216, 219, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 267, 302, 326, 330

- Lambert 81, 194, 195, 202, 203, 204, 205,
 234—237, 238, 264, 265, 266, 299, 330
 Laplace 225, 226, 260, 262
 Le Testu 262
 Lie 308
 Liouville 44, 282, 286, 309, 341
 Łomnicki 65, 72, 80, 204, 217, 221, 256,
 262, 270, 373
 McCaw 330
 Melluish 261, 286, 287, 374
 Mercator 7, 81, 197, 200, 203, 205, 233,
 234, 237, 262, 287, 299
 Minding 25, 310
 Mollweide 216, 219, 256, 264, 266
 Möbius 308, 342
 Murdoch 300
 Neumann 241
 Nordenskjöld 299
 Olszewicz 263
 Pawłowski 375
 Ptolemeusz 233, 261, 299, 303
 Riemann 181, 187, 222, 224, 225, 226,
 227, 230, 231, 232, 240, 241
 Romer 373
 Sanson 261, 264
 Scheffers 374
 Schellhammer 267, 268
 Schumacher 2, 239
 Schwarz 241
 Serret 238
 Siebeck 44
 Silvanus 262
 Simon 192
 Słomczyński 232
 Sołowejew 303
 Stabius 263
 Szaflarski 270
 Szpunar 375
 Szumański 373
 Tissot 13, 44, 59, 67, 72, 73, 87, 96, 97,
 103, 144, 146, 147, 150, 153, 165, 170,
 184, 257, 260, 261, 262, 267, 268, 269,
 270, 275, 280, 281, 282, 287, 291, 296,
 298, 301, 374
 Urmajew 374
 Voss 260
 Wangerin 2, 65, 234, 236, 238, 239, 345
 Warchałowski 375
 Weber 305
 Weierstrass 224, 241
 Weingarten 25
 Werner 261, 263
 Witkowskij 301, 303, 374
 Wright 200, 234
 Young 286, 298, 330, 374
 Zach 265, 266
 Zöppritz 268, 374



L I T E R A T U R A

- Inż. Włodzimierz Kolanowski*, Rzuty kartograficzne. Biblioteka Przeglądu Mierniczego Nr 3. Warszawa 1925 — 1926. Str. VIII + 304, rys. 74.
- Teofil Szumański*, Zasady kartografii (Siatki geograficzne). Podręcznik dla nauczycieli i studentów geografii. Książnica Atlas, Lwów — Warszawa 1926. Str. VIII + 195, rys. 82.
- Prof. dr Antoni Łomnicki*, Kartografia matematyczna. Książnica Atlas, Lwów — Warszawa 1927. Str. VIII + 191, rys. 67.
- Polski Przegląd Kartograficzny*, Kwartalnik pod redakcją prof. F. Romera. Książnica Atlas, Lwów — Warszawa, roczniki od 1923 r.
- Czasopismo Techniczne*, Lwów 1883 — 1939.
- Przegląd Mierniczy*, Miesięcznik, Warszawa 1924 — 1939.
- Przegląd Geodezyjny*, Miesięcznik, Warszawa, od 1945 r.
- Wiadomości Służby Geograficznej*, Kwartalnik, Warszawa 1927 — 1939.
- Prof. dr C. F. Baeschlin*, Einführung in die Kurven-und Flächentheorie auf vektorieller Grundlage. Orell Füssli, Zürich 1947, S. 147.
- J. I. Craig, M. A.*, The theory of map projections. Egyptian Survey Department Paper No. 13. Cairo 1910.
- J. G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris, t. 1, 1914; t. 2, 1915; t. 3, 1894; t. 4, 1925.
- L. Driencourt et J. Laborde*, Traité des projections des cartes géographiques. Paris 1932. 4 fascicules.
- M. Eckert*, Die Kartenwissenschaft. Band 1, Berlin 1921. S. XVI + 640 + 10 Abbild. + Karte.
- M. Fiorini*, Le proiezioni delle carte geografiche. Bologna 1881.
- A. Germain*, Traité des projections des cartes géographiques. Paris 1865.
- N. Herz*, Lehrbuch der Landkartenprojektionen. Leipzig 1885.
- A. R. Hinks*, Map Projections. Cambridge 1921.
- W. W. Kawrajskij*, Matematyčeskaja kartografija. Moskwa — Leningrad 1934.

- J. Mainwaring, M. A.*, An introduction to the study of map projection, London 1942.
- R. K. Melluish, M. A.*, An introduction to the mathematics of map projections. Cambridge 1931.
- G. Scheffers*, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Leipzig Bd. 1, 1901, Bd. 2, 1902.
- Prof. M. D. Sołowjew*, Kartograficzeskije projekcji. Moskwa 1946.
- A. Tissot*, Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Paris 1881.
- Prof. N. A. Urmajew*, Matematyčeskaja kartografija. Moskwa 1941.
- Prof. W. W. Witkowskij*, Kartografija. St. Peters. 1907.
- A. E. Young*, Some investigations in the theory of map projections, London 1920.
- K. Zöppritz, A. Bludau*, Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Leipzig 1912.
- Petermanns geographische Mitteilungen*. Gotha.
- Zeitschrift für Vermessungswesen*. Stuttgart 1872 — 1939.
- Travaux de l'Association de Géodésie de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale*. (Rapports Généraux). Paris 1922 — 1939.
- Wartościowe rozdziały o odwzorowaniu elipsoidy lub kuli na płaszczyznę znaleźć można w wielu traktatach geodezji wyższej.

**WYDAWNICTWA
GŁÓWNEGO URZĘDU POMIARÓW KRAJU
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
PUBLICATIONS OF THE POLISH GEODETIC INSTITUTE**

1. *Stefan Hausbrandt*, Tablice do rachunków trygonometrycznych na elipsoidzie Bessela. Warszawa 1948. Str. 49.
— Tables for trigonometrical computations on Bessel's spheroid.
 2. *Edward Warchałowski*, Triangulation d'un type nouveau. Warszawa 1948, p. 26.
 3. *Stanisław Pawłowski*, Problem właściwej i zorientowanej elipsoidy w Polsce. Warszawa 1948. Str. 19 + 1 mapa.
— The problem of the deviation of the vertical and of the spheroid of reference in Poland.
- Rocznik Astronomiczny* w opracowaniu prof. dr. F. Kępińskiego i inż. W. Szpunara. Wydawany corocznie, począwszy od 1946 r.
- Rocznik Astronomiczny, Efemerydy Nautyczne*, w opracowaniu prof. dr. F. Kępińskiego i inż. W. Szpunara. Wydawany corocznie, począwszy od 1949 r.

I N N E P R A C E

- Mały Atlas Polski*. Warszawa 1947. 28 kart i 14 str. objaśnienia.
- Dr Inż. Tadeusz Kochmański*, Zarys rachunku krakowianowego. Warszawa 1948. Str. 46.
- Tablice* naturalnych wartości funkcji trygonometrycznych w podziale dziesiętnym od 0^g do 100^g . Warszawa 1949. Str. 175.
- Tablice* naturalnych wartości funkcji trygonometrycznych w podziale stopniowym od 0^0 do 90^0 . Warszawa 1949. Str. 128.
- Powszechne Przepisy o Pomiarach Kraju*. Dział B — Pomiar Szczegółowe. Instrukcja B — I. Zasady ogólne i przepisy porządkowe. Warszawa 1948. Str. 12.
- Przepisy o Pomiarach Kraju*. Dział B — Pomiar Szczegółowe. Instrukcja B — II. Triangulacja szczegółowa. Warszawa 1949. Str. 14.
- Przepisy o Pomiarach Kraju*. Dział B — Pomiar Szczegółowe. Instrukcja B — VI. Niwelacja Techniczna. Warszawa 1949. Str. 9.
- Przepisy o Pomiarach Kraju*. Dział B — Pomiar Szczegółowe. Instrukcja B — VII. Pomiar rzeźby terenu. Warszawa 1949. Str. 13.
- Inż. Stefan Hausbrandt*. Tablice do interpolacyjnego określania wartości funkcji jednej i dwóch zmiennych do zamiany współrzędnych geograficznych na współrzędne prostokątne odwzorowania południkowego-wiernokątnego. Warszawa 1949.

