

Główny Urząd Pomiarów Kraju
PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO
PUBLICATIONS OF THE POLISH GEODETIC INSTITUTE
General Survey Office

Nr 2

TRIANGULATION D'UN TYPE NOUVEAU

par

EDWARD WARCHAŁOWSKI



WARSZAWA 1948

TRIANGULATION D'UN TYPE NOUVEAU.

La détermination de la position relative des points de la surface terrestre s'effectuait jusqu'à nos jours par l'application d'une méthode dont le principe consistait à mesurer les angles des triangles adjacents. Les mesurages linéaires étaient limités au mesurage, avec une haute précision, d'un côté du triangle, ou plutôt d'un fragment plus court — d'une base — qui permettait de déterminer, en passant par une suite spéciale de triangles, réseau de base, le côté de départ du réseau propre de la triangulation.

C'est cette méthode qui constituait et constitue encore aujourd'hui la seule solution du problème de mesurage des grandes étendues de la surface terrestre, vu qu'elle réduit les mesurages linéaires directs de précision, très difficiles et très laborieux, au mesurage des angles beaucoup plus facile à effectuer. Il est nécessaire de rappeler cependant que la précision de la détermination des côtés dans le calcul des triangles diminue rapidement quand on s'éloigne du côté initial de la base.

Le grand développement de la radiotechnique a fait naître récemment une nouvelle conception permettant de mesurer la distance entre deux points en utilisant l'émission des ondes électromagnétiques très courtes. Jusqu'à présent cette méthode n'a pas encore acquis un haut degré de précision, néanmoins elle peut être appliquée avec succès dans les cas qui ne demandent pas de précision extrême. Le parcours d'une ligne à mesurer n'exigeant aucune préparation, la nouvelle méthode est absolument indépendante de tous les obstacles du terrain qui auraient rendu impossible un mesurage direct avec les instruments actuels.

On a créé en même temps une autre méthode de détermination de la longueur en appliquant les signaux lumineux d'une très grande fréquence. Cette méthode, expérimentée dernièrement en Suède, donne jusqu'à la distance

de 20 km. une précision remarquable, qui ne cède en rien à celle obtenue à l'aide des instruments de mesure de base les plus précis. Dans ce cas il est absolument nécessaire de réaliser la condition d'une visibilité réciproque des deux points, le tracé de la ligne à mesurer pouvant être impraticable au mesurage direct.

En tenant compte de ces découvertes on peut envisager la possibilité de mesurer en masse les côtés des triangles, c'est à dire la triangulation d'un type nouveau, dont le principe fondamental aurait consisté à mesurer uniquement les côtés des triangles, et où les méthodes d'orientation de l'ensemble sur la surface de l'ellipsoïde, c. à d. la détermination des azimuts et des coordonnées géographiques, seraient restées, les mêmes.

Afin de se rendre compte de l'utilité d'une telle méthode de triangulation, nous nous proposons d'analyser le problème dans ses lignes générales pour arriver à des conclusions rationnelles.

Pour simplifier le problème nous allons envisager d'abord le cas d'une triangulation sur le plan, et ensuite le cas d'une triangulation sur la surface de l'ellipsoïde.

I.

Au préalable considérons le problème de l'influence qu'exercent les erreurs de mesure des côtés sur la valeur des angles dans un triangle ainsi mesuré.

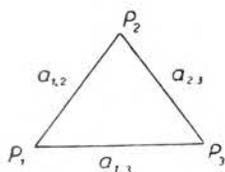


Fig. 1.

Supposons que dans un triangle $P_1P_2P_3$ on ait mesuré les trois côtés a_{12} , a_{13} , a_{23} (fig. 1).

En définissant le périmètre du triangle par

$$2p = a_{12} + a_{13} + a_{23}$$

nous aurons d'après les formules trigonométriques:

$$\sin \frac{P_1}{2} = \sqrt{\frac{(p - a_{12})(p - a_{13})}{a_{12} a_{13}}}$$

$$\cos \frac{P_1}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a_{23})}{a_{12} a_{13}}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{P_1}{2} = \sqrt{\frac{(p - a_{12})(p - a_{13})}{p(p - a_{23})}}$$

En posant pour abrégé

$$\pi^2 = \frac{(p - a_{12})(p - a_{13})(p - a_{23})}{p} \dots \dots \dots (\pi)$$

la troisième des formules ci-dessus deviendra:

$$\operatorname{tg} \frac{P_1}{2} = \frac{\pi}{p - a_{23}} \dots \dots \dots (1)$$

Remarquons que le côté droit de l'équation contient exclusivement des éléments mesurés, indépendants l'un de l'autre et qui sont soumis aux erreurs accidentelles inévitables. En conséquence les valeurs de cette fonction, (nommons son côté droit F par abréviation) calculée à base de ces éléments, contiendront de même une erreur moyenne qui d'après la théorie des erreurs aura la valeur suivante:

$$m^2_F = \left(\frac{\partial F}{\partial a_{12}} \right)^2 m^2_{a_{12}} + \left(\frac{\partial F}{\partial a_{13}} \right)^2 m^2_{a_{13}} + \left(\frac{\partial F}{\partial a_{23}} \right)^2 m^2_{a_{23}} \dots (2)$$

D'autre part en considérant la formule (1) directement, on obtient pour le membre gauche de cette formule l'expression suivante:

$$m^2_F = \frac{1}{\operatorname{Cos}^4 \frac{P_1}{2}} \cdot \frac{m^2_{P_1}}{4} \dots \dots \dots (3)$$

On obtiendra les dérivées partielles, qui entrent dans la formule (2), en présentant le côté droit de la formule (1) sous la forme générale

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ik}} = \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial a_{ik}} (p - a_{23}) - \frac{\partial (p - a_{23})}{\partial a_{ik}} \cdot \pi \right\} : (p - a_{23})^2 \dots (4)$$

Afin de développer le second membre de (4), nous formons successivement les dérivées de (π) par rapport aux a_{12} , a_{13} et a_{23} , d'où nous obtiendrons des dérivées partielles $\frac{\partial \pi}{\partial a_{ik}}$ dans cette forme définitive:

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_{12}} = \frac{\pi}{4} \left\{ -\frac{1}{p - a_{12}} + \frac{1}{p - a_{13}} - \frac{1}{p - a_{23}} - \frac{1}{p} \right\} \dots \dots (5)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_{13}} = \frac{\pi}{4} \left\{ +\frac{1}{p - a_{12}} - \frac{1}{p - a_{13}} - \frac{1}{p - a_{23}} - \frac{1}{p} \right\} \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_{23}} = \frac{\pi}{4} \left\{ +\frac{1}{p - a_{12}} + \frac{1}{p - a_{13}} + \frac{1}{p - a_{23}} - \frac{1}{p} \right\} \dots \dots (7)$$

Et les dérivées

$$\frac{\partial (p - a_{23})}{\partial a_{12}} = + \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial (p - a_{23})}{\partial a_{13}} = + \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial (p - a_{23})}{\partial a_{23}} = - \frac{1}{2}$$

En tenant compte de ceci et des formules (5), (6) et (7) nous obtiendrons les valeurs suivantes pour les dérivées (4):

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta a_{12}} &= \frac{\pi}{4(p-a_{23})} \left\{ -\frac{1}{p-a_{12}} + \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right\} \\ \frac{\delta F}{\delta a_{13}} &= \frac{\pi}{4(p-a_{23})} \left\{ +\frac{1}{p-a_{12}} - \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right\} \dots (8) \\ \frac{\delta F}{\delta a_{23}} &= \frac{\pi}{4(p-a_{23})} \left\{ +\frac{1}{p-a_{12}} + \frac{1}{p-a_{13}} + \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right\} \end{aligned}$$

En mettant ces dérivées dans la formule (2) en tenant compte en même temps de l'expression (3) et en se souvenant que

$$\cos^4 \frac{P_1}{2} = \frac{p^2(p-a_{23})^2}{(a_{12}a_{13})^2}$$

nous obtiendrons, chargée des erreurs de mesurage des côtés, la formule définitive suivante qui exprime l'erreur moyenne de l'angle du triangle $P_1P_2P_3$ calculée d'après la formule (1)

$$m^2_{P_1} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 p^2}{a_{12}^2 a_{13}^2} \left\{ \begin{aligned} &\left(-\frac{1}{p-a_{12}} + \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right)^2 m^2_{a_{12}} + \\ &+ \left(+\frac{1}{p-a_{12}} - \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right)^2 m^2_{a_{13}} + \\ &+ \left(+\frac{1}{p-a_{12}} + \frac{1}{p-a_{13}} + \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right)^2 m^2_{a_{23}} \end{aligned} \right\} (9)$$

Supposons maintenant que l'erreur de mesurage d'un côté soit directement proportionnelle à sa longueur, c. à d. qu'en général

$$m^2_a = \mu^2 a^2$$

et alors la formule (9) aura la forme suivante:

$$m^2_{P_1} = \frac{1}{4} \frac{p^2 \pi^2}{a_{12}^2 a_{13}^2} \mu^2 \left\{ \begin{aligned} &\left(-\frac{1}{p-a_{12}} + \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right)^2 a_{12}^2 + \\ &+ \left(+\frac{1}{p-a_{12}} - \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right)^2 a_{13}^2 + \\ &+ \left(+\frac{1}{p-a_{12}} + \frac{1}{p-a_{13}} + \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right)^2 a_{23}^2 \end{aligned} \right\}$$

En supposant que les erreurs des côtés soient proportionnelles aux racines carrées de longueur, c. à d. que

$$m^2_a = \mu_1^2 a$$

nous aurions obtenu une formule analogue mais différante en ce, que les expressions en paranthèses ordinaires seraient mutlipliées par les premières puissances de a .

Ayant l'intention d'aboutir à quelques conclusions générales nous allons supposer que notre triangle est équilatéral, c. à d. que

$$a_{12} = a_{13} = a_{23}$$

Avec cette supposition nous obtiendrons, indépendamment de ce que l'erreur d'un côté soit proportionnelle à la longueur ou à la racine carrée de la longueur, ce résultat définitif:

$$m_p = \pm \frac{ma}{a} \sqrt{2} \dots \dots \dots (10)$$

Si nous nous proposons de réduire l'erreur de l'angle calculé m_p à une certaine limite nous aurons la possibilité de définir, moyennant la formule (10), le degré d'exactitude relative, ou plutôt la grandeur de l'erreur correspondant à l'unité de longueur, admissible dans le mesurage des côtés a du triangle.

En admettant par exemple comme limites supérieures de l'erreur d'un angle $\pm 1''$ ou $\pm 0,5''$, nous aurons respectivement

$$\frac{ma}{a} = \frac{1}{206265} : \sqrt{2} = \frac{1}{290000}$$

$$\frac{m_1}{a} = \frac{0.5}{206265} : \sqrt{2} = \frac{1}{582000}$$

Nous arrivons alors à la conclusion que, dans une triangulation basée uniquement sur le mesurage des côtés, la détermination des côtés devrait être effectuée avec une très grande précision. Une telle exactitude, autant que nous pouvons en juger d'après les documents connus, est donnée par la méthode de mesurage à l'aide de signalisation lumineuse utilisant les signaux de haute fréquence.

Nous allons remarquer encore qu'en limitant dans cette nouvelle méthode de triangulation le mesurage uniquement aux côtés des triangles, nous n'avons aucun contrôle de l'exactitude des observations dans les triangles particuliers. Le seul contrôle possible aurait pu consister uniquement à observer chaque côté du triangle plusieurs fois, ce qui, semble-t-il ne serait pas trop pénible avec l'emploi des nouvelles méthodes de mesurage de la longueur.

II.

En passant à l'étude de la triangulation, basée uniquement sur le mesurage des côtés, nous nous proposerons d'examiner les différentes figures dont l'ensemble constitue un réseau de triangulation, et en même temps nous allons exiger que la constitution des figures rende possible le contrôle du mesurage. Dans la figure la plus simple, le triangle, cette condition ne

peut pas être réalisée, comme nous l'avons vu d'ailleurs. Une autre figure plus compliquée serait alors le quadrilatère géodésique ou le polygone avec un point central intérieur.

Nous nous arrêterons d'une façon plus détaillée sur ces deux figures d'un réseau élémentaire de triangulation.

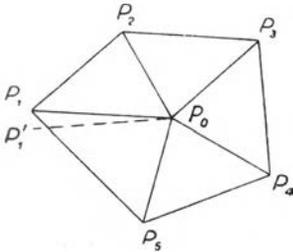


Fig. 2.

P_0P_5 le triangle suivant $P_5P_0P_1$, c. à d. si nous utilisons un nouvel élément unique non indispensable pour la solution univoque du problème de la détermination de la position réciproque de tous les sommets, nous devons obtenir le point P_1 identique, duquel nous sommes partis. Vu pourtant les inévitables erreurs d'observation, la position de la ligne P_0P_1 , obtenue du dernier triangle $P_5P_0P_1$ ne sera pas identique à P_0P_1' , quoique $P_0P_1 = P_0P_1'$. Il en résulte que les observations des côtés des triangles de notre système central devraient remplir dans ce cas une seule condition, consistant en ce que la somme des angles à point central P_0 , calculés dans les triangles particuliers moyennant la formule (1), devrait avoir une valeur connue, celle de 360° . Cette condition peut être présentée sous une forme symbolique

$$\Sigma P_{iok} = 360^\circ \quad \dots \dots \dots (11)$$

Afin de donner à cette équation une forme développée, pendant des éléments mesurés directement, nous nous basons sur la formule (1) et nous obtenons:

$$\frac{P_{iok}}{2} = \arctg \frac{\pi_{iok}}{P_{iok} - a_{ik}} = \arctg F(a_{oi}, a_{ok}, a_{ik}) \quad \dots \dots (12)$$

Vu que chaque côté a est chargé d'une erreur d'observation, les valeurs des angles obtenues de (12) ne réaliseront pas évidemment la condition (11). Il est nécessaire alors d'ajouter à chaque côté une certaine correction (\mathbf{a}) pour que la condition (11) soit remplie par les valeurs corrigées $\mathbf{a} + (\mathbf{a})$, c. à d. qu'on arrive à l'équation

$$\Sigma \arctg F(a_{oi} + (a_{oi}), a_{ok} + (a_{ok}), a_{ik} + (a_{ik})) = 180^\circ \quad (13)$$

En développant en série les fonctions de la formule (13) nous nous contenterons des premières puissances des correc-

tions (a) vu leur petitesse en comparaison avec les a. De cette façon l'équation (13) sera présentée sous la forme suivante:

$$\Sigma \left\{ (a_{oi}) \frac{\delta}{\delta a_{oi}} \arctg F + (a_{ok}) \frac{\delta}{\delta a_{ok}} \arctg F + (a_{ik}) \frac{\delta}{\delta a_{ik}} \arctg F \right\} + \left\{ \Sigma \arctg F (a_{oi}, a_{ok}, a_{ik}) - 180^\circ \right\} = 0 \dots \dots \dots (14)$$

Dans cette équation le second terme, c. à d. la différence

$$\Sigma \arctg \frac{\pi_{iok}}{p_{iok} - a_{ik}} - 180^\circ = w''$$

présente la discordance entre la somme des angles calculés à la base des côtés mesurés et la valeur connue d'avance.

Les dérivées partielles qui sont les coefficients des corrections (a) dans l'équation (14) se présentent comme suit:

$$\frac{\delta}{\delta a_{oi}} \arctg \frac{\pi_{iok}}{p_{iok} - a_{ik}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi_{iok}^2}{(p_{iok} - a_{ik})^2}} \cdot \frac{\delta}{\delta a_{oi}} \left(\frac{\pi_{iok}}{p_{iok} - a_{ik}} \right)$$

En se basant sur la formule (5) nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta a_{oi}} \left(\frac{\pi_{iok}}{p_{iok} - a_{ik}} \right) &= \frac{1}{4} \frac{\pi_{iok}}{p_{iok} - a_{ik}} \left\{ -\frac{1}{p_{iok} - a_{oi}} + \frac{1}{p_{iok} - a_{ok}} - \frac{1}{p_{iok} - a_{ik}} - \frac{1}{p_{iok}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{P_{iok}}{2} \left\{ -\frac{1}{p_{iok} - a_{oi}} + \frac{1}{p_{iok} - a_{ok}} - \frac{1}{p_{iok} - a_{ik}} - \frac{1}{p_{iok}} \right\} \end{aligned}$$

En outre nous avons

$$\frac{1}{1 + \frac{\pi_{iok}^2}{(p_{iok} - a_{ik})^2}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{P_{iok}}{2}} = \cos^2 \frac{P_{iok}}{2}.$$

En tenant compte de tout cela, nous pouvons présenter la dérivée partielle sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta a_{oi}} \arctg \frac{\pi_{iok}}{p_{iok} - a_{ik}} &= \frac{1}{4} \sin \frac{P_{iok}}{2} \cos \frac{P_{iok}}{2} \left\{ -\frac{1}{p_{iok} - a_{oi}} + \frac{1}{p_{iok} - a_{ok}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p_{iok} - a_{ik}} - \frac{1}{p_{iok}} \right\}. \end{aligned}$$

Si nous désignons par Δ_{iok} la surface du triangle $P_i P_o P_k$ nous avons l'expression

$$2 \sin \frac{P_{iok}}{2} \cos \frac{P_{iok}}{2} = \sin P_{iok} = \frac{2\Delta_{iok}}{a_{oi} \cdot a_{ok}}.$$

En tenant compte de cette expression, la dérivée partielle cherchée prendra cette forme définitive:

$$\frac{\delta}{\delta a_{oi}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{iok}}{p_{iok}-a_{ik}} = \frac{1}{4} \frac{\Delta_{iok}}{a_{oi} \cdot a_{ok}} \left\{ -\frac{1}{p_{iok}-a_{oi}} + \frac{1}{p_{iok}-a_{ok}} - \frac{1}{p_{iok}-a_{ik}} - \frac{1}{p_{iok}} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

De façon semblable nous trouverons la forme générale des dérivées partielles par rapport aux variables a_{ok} et a_{ik} . Elles auront la valeur suivante:

$$\frac{\delta}{\delta a_{ok}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{iok}}{p_{iok}-a_{ik}} = \frac{1}{4} \frac{\Delta_{iok}}{a_{oi} \cdot a_{ok}} \left\{ +\frac{1}{p_{iok}-a_{oi}} - \frac{1}{p_{iok}-a_{ok}} - \frac{1}{p_{iok}-a_{ik}} - \frac{1}{p} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$$\frac{\delta}{\delta a_{ik}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{iok}}{p_{iok}-a_{ik}} = \frac{1}{4} \frac{\Delta_{iok}}{a_{oi} \cdot a_{ok}} \left\{ +\frac{1}{p_{iok}-a_{oi}} + \frac{1}{p_{iok}-a_{ok}} + \frac{1}{p_{iok}-a_{ik}} - \frac{1}{p} \right\}$$

En utilisant les équations (15) et (16) nous pouvons donner à l'équation conditionnelle (14) une forme développée où pour simplifier nous désignerons la surface du triangle Δ et la moitié du périmètre p par un chiffre correspondant au triangle consécutif.

Voici ces équations pour le cas présenté sur la figure 2:

$$\begin{aligned} & (a_{12}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_1}{a_{01} a_{02}} \left\{ +\frac{1}{p_1-a_{01}} + \frac{1}{p_1-a_{02}} + \frac{1}{p_1-a_{12}} - \frac{1}{p_1} \right\} + \\ & + (a_{23}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_2}{a_{02} a_{03}} \left\{ +\frac{1}{p_2-a_{02}} + \frac{1}{p_2-a_{03}} + \frac{1}{p_2-a_{23}} - \frac{1}{p_2} \right\} + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + (a_{51}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{a_{05} a_{01}} \left\{ +\frac{1}{p_5-a_{05}} + \frac{1}{p_5-a_{01}} + \frac{1}{p_5-a_{51}} - \frac{1}{p_5} \right\} + \\ & + (a_{01}) \left\{ \frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{a_{05} a_{01}} \left(+\frac{1}{p_5-a_{05}} - \frac{1}{p_5-a_{01}} - \frac{1}{p_5-a_{51}} - \frac{1}{p_5} \right) + \frac{1}{4} \frac{\Delta_1}{a_{01} a_{02}} \right. \\ & \left. \left(-\frac{1}{p_1-a_{01}} + \frac{1}{p_1-a_{02}} - \frac{1}{p_1-a_{12}} - \frac{1}{p_1} \right) \right\} + (a_{02}) \left\{ \frac{1}{4} \frac{\Delta_1}{a_{01} a_{02}} \left(+\frac{1}{p_1-a_{01}} - \frac{1}{p_1-a_{02}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{p_1-a_{12}} - \frac{1}{p_5} \right) + \frac{1}{4} \frac{\Delta_2}{a_{02} a_{03}} \left(-\frac{1}{p_2-a_{02}} + \frac{1}{p_2-a_{03}} - \frac{1}{p_2-a_{23}} - \frac{1}{p_2} \right) \right\} + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + (a_{05}) \left\{ \frac{1}{4} \frac{\Delta_4}{a_{04} a_{05}} \left(+\frac{1}{p_4-a_{04}} - \frac{1}{p_4-a_{05}} - \frac{1}{p_4-a_{45}} - \frac{1}{p_4} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{a_{05} a_{01}} \left(-\frac{1}{p_5 - a_{05}} + \frac{1}{p_5 - a_{01}} - \frac{1}{p_5 - a_{51}} - \frac{1}{p_5} \right) \} + \omega = 0 \quad \dots \dots \dots (17)$$

où

$$\omega = (\Sigma \operatorname{arctg} \frac{\pi_{iok}}{p - a_{ik}} - 180^\circ) \sin I'' \quad \dots \dots \dots (17a)$$

Comme nous voyons de la formule (17), l'équation conditionnelle pour le système central des triangles observés uniquement par les longueurs de leurs côtés, a une forme très simple et schématique malgré son aspect apparemment compliqué. Tout le travail se concentre ici sur le calcul des coefficients de cette équation, et paraît être très simple avec l'aide d'une machine à calculer.

Le calcul suivant, ayant pour but d'obtenir les corrections (a) à la condition que $\Sigma (a)^2$ soit minimum, a l'avantage d'être à la fois court et simple. En écrivant alors en abrégé l'équation (17) sous la forme

$$s_{01} (a_{01}) + s_{02} (a_{02}) + s_{12} (a_{12}) + \dots \dots + \omega'' \sin I'' = 0 \quad \dots \dots (17 \text{ bis})$$

nous obtiendrons par la condition supplémentaire

$$\Sigma (a^2) = \text{minimum}$$

une telle expression pour les corrections cherchées:

$$(a_{ik}) = - s_{ik} \frac{\omega'' \sin I''}{\Sigma (s_{ik})^2}$$

Dans une chaîne de triangulation composée d'une série de tels systèmes centraux, se superposant mutuellement, le problème sera plus compliqué, puisque dans ce cas nous serons obligés de résoudre tous les systèmes conjointement.

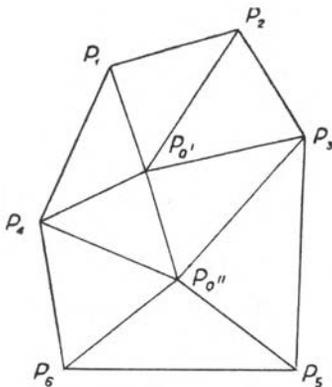


Fig. 3.

mutuel des deux systèmes et qui sera très utile dans le raisonnement qui va suivre.

Dans ce cas nous formons les équations (17 bis) pour chaque système central dont le nombre sera celui des points centraux. Comme exemple nous allons considérer une chaîne de triangulation composée de deux systèmes centraux élémentaires, jointifs représentés sur la fig. 3.

Les équations conditionnelles en nombre de deux seront présentées ici sous forme d'un tableau, qui donnera une image claire de l'engrènement

$(a_{0'1})$	$(a_{0'2})$	$(a_{1'2})$	(a_{23})	(a_{41})	$(a_{0'3})$	$(a_{0'0''})$	$(a_{0'4})$	$(a_{0'12})$	$(a_{0'14})$	$(a_{0'15})$	$(a_{0'16})$	(a_{35})	(a_{56})	(a_{34})		
$s'_{0'1}$	$s'_{0'2}$	s'_{12}	s'_{23}	s'_{41}	$s'_{0'3}$	$s'_{0'0''}$	$s'_{0'4}$	$s'_{0'13}$	$s'_{0'14}$	—	—	—	—	—	$+\omega'$	$= 0$
—	—	—	—	—	$s''_{0'3}$	$s''_{0'0''}$	$s''_{0'4}$	$s''_{0'13}$	$s''_{0'14}$	$s''_{0'15}$	$s''_{0'16}$	s''_{35}	s''_{56}	s''_{64}	$+\omega''$	$= 0$

A la base de ce tableau il est facile de composer les équations corrélatives, qui auront ici la forme suivante:

$$k_1 \Sigma (s'_{ik})^2 + k_2 \Sigma (s'_{ik} s''_{ik}) + \omega' = 0$$

$$k_1 \Sigma (s'_{ik} s''_{ik}) + k_2 \Sigma (s''_{ik})^2 + \omega'' = 0$$

Après avoir déterminé k_1 et k_2 de ces équations on calculera les corrections des côtés (a_{ik}) des formules:

$$(a_{ik}) = s'_{ik} \cdot k_1 + s''_{ik} \cdot k_2$$

B) Un système moins avantageux d'une triangulation basée uniquement sur le mesurage linéaire est présenté par l'enchaînement des quadrilatères géodésiques adjacents, puisque dans ce cas, malgré de grands efforts, nous n'obtenons qu'une étroite bande de surface couverte de points de triangulation et en outre le système entier est bien plus flexible qu'une double chaîne de triangles d'un système central.

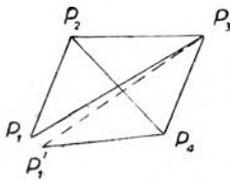


Fig.4.

Pourtant dans ce système élémentaire de triangulation nous aurons une condition qui devra être satisfaite au mesurage des côtés et des diagonales.

Supposons que la figure 4 présente un quadrilatère géodésique dont on a mesuré tous les côtés et les diagonales. Remarquons que 5 lignes auraient suffi pour déterminer d'une manière univoque la position réciproque des sommets du quadrilatère, et qu'alors une sixième ligne, par ex. $P_4P_1 = a_{41}$ nous fournira justement cette condition géométrique en liant directement le point P_4 au point P_1 . Vu que les mesures des côtés sont pourvues d'erreurs inévitables, en construisant successivement les triangles $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4$ et finalement sur le côté P_{34} déjà déterminé, le triangle $P_3P_4P'_1$, nous trouverons pour le point de départ une nouvelle position P'_1 . Pour que notre quadrilatère soit fermé il est nécessaire que les lignes $P_3P'_1 = P_3P_1 = a_{13}$ coïncident, c. à d. que l'angle $P_1P_3P'_1 = 0$, ce qui peut être présenté sous la forme d'équation

$$P_2P_3P_4 - P_2P_3P_1 - P'_1P_3P_4 = 0$$

Dans le but de prendre en considération l'influence des erreurs du mesurage direct, nous présentons, sous une forme analogue

à (14), cette équation qui dépend des côtés observés, respectivement corrigés.

$$\begin{aligned}
 & (a_{23}) \frac{\delta}{\delta a_{23}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{234}}{p-a_{24}} + (a_{34}) \frac{\delta}{\delta a_{34}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{234}}{p-a_{24}} + (a_{24}) \frac{\delta}{\delta a_{24}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{234}}{p-a_{24}} - \\
 & - (a_{23}) \frac{\delta}{\delta a_{23}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{123}}{p-a_{12}} - (a_{31}) \frac{\delta}{\delta a_{31}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{123}}{p-a_{12}} - (a_{12}) \frac{\delta}{\delta a_{12}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{123}}{p-a_{12}} - \\
 & - (a_{31}) \frac{\delta}{\delta a_{31}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{134}}{p-a_{41}} - (a_{34}) \frac{\delta}{\delta a_{34}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{134}}{p-a_{41}} - (a_{41}) \frac{\delta}{\delta a_{41}} \operatorname{arctg} \frac{\pi_{134}}{p-a_{41}} + \\
 & + \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\pi_{234}}{p-a_{24}} - \operatorname{arctg} \frac{\pi_{123}}{p-a_{12}} - \operatorname{arctg} \frac{\pi_{134}}{p-a_{41}} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

En tenant compte des formules (15) et (16) cette équation aura finalement la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 & - (a_{12}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_{123}}{a_{32} a_{31}} \left\{ + \frac{1}{p-a_{23}} + \frac{1}{p-a_{31}} + \frac{1}{p-a_{12}} - \frac{1}{p} \right\} - \\
 & - (a_{14}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_{134}}{a_{34} a_{31}} \left\{ + \frac{1}{p-a_{34}} + \frac{1}{p-a_{31}} + \frac{1}{p-a_{14}} - \frac{1}{p} \right\} + \\
 & + (a_{24}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_{234}}{a_{34} a_{32}} \left\{ + \frac{1}{p-a_{34}} + \frac{1}{p-a_{32}} + \frac{1}{p-a_{24}} - \frac{1}{p} \right\} - \\
 & - (a_{13}) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\Delta_{123}}{a_{32} a_{31}} \left(- \frac{1}{p-a_{13}} + \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p} \right) \\ & + \frac{1}{4} \frac{\Delta_{134}}{a_{31} a_{34}} \left(- \frac{1}{p-a_{34}} + \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{14}} - \frac{1}{p} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 & + (a_{23}) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\Delta_{234}}{a_{34} a_{32}} \left(- \frac{1}{p-a_{34}} + \frac{1}{p-a_{32}} - \frac{1}{p-a_{24}} - \frac{1}{p} \right) \\ & - \frac{1}{4} \frac{\Delta_{123}}{a_{31} a_{32}} \left(- \frac{1}{p-a_{31}} + \frac{1}{p-a_{32}} - \frac{1}{p-a_{12}} - \frac{1}{p} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 & + (a_{34}) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\Delta_{234}}{a_{34} a_{32}} \left(- \frac{1}{p-a_{34}} + \frac{1}{p-a_{32}} - \frac{1}{p-a_{24}} - \frac{1}{p} \right) \\ & - \frac{1}{4} \frac{\Delta_{134}}{a_{31} a_{34}} \left(- \frac{1}{p-a_{34}} + \frac{1}{p-a_{31}} - \frac{1}{p-a_{14}} - \frac{1}{p} \right) \end{aligned} \right\} + \omega = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

où

$$\omega = \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\pi_{234}}{p-a_{24}} - \operatorname{arctg} \frac{\pi_{231}}{p-a_{21}} - \operatorname{arctg} \frac{\pi_{134}}{p-a_{14}} \right\} \sin I'' \dots \dots \tag{18a}$$

Dans ces formules les indices de \mathbf{p} sont les mêmes que ceux de Δ

III.

En développant le problème des résultats obtenus par les observations linéaires dans le nouveau type de triangulation, nous avons à considérer encore le cas d'une chaîne fermée et celui de l'orientation multiple du réseau à l'aide des azimuts astronomiques.

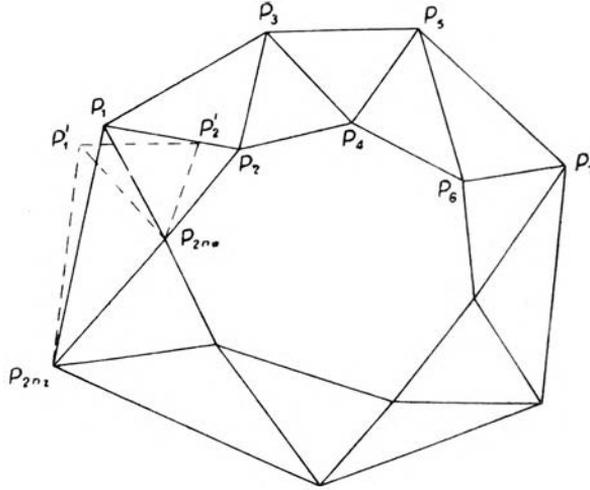


Fig. 5.

C) Supposons que sur un plan nous ayons une chaîne fermée composée de triangles adjacents (fig. 5). Si, en sortant du triangle $P_1P_2P_3$, nous avons construit successivement des triangles subséquents en mesurant directement leurs côtés, nous aurions en arrivant au côté $P_{2nw} P_{(2nz-1)}$ un système de points uniformément déterminés l'un par rapport à l'autre. Si tout en tenant compte de l'influence des erreurs d'observation, nous mesurons les trois côtés restants de la chaîne fermée à l'aide desquels nous sommes en état de déterminer encore une fois la situation du côté de départ P_1P_2 , alors, les points de départ ainsi déterminés par le calcul de ce trois lignes supplémentaires, viendront se poser dans les nouveaux emplacements P'_1 et P'_2 et notre chaîne fermée paraîtra en réalité ouverte.

Pour que la chaîne se ferme il faut changer la valeur des côtés observés, en leur ajoutant certaines corrections (a_{ik}) d'une telle manière, que le point P_1 coïncide avec P'_1 et P_2 avec P'_2 . Ceci n'aura lieu que lorsque les deux polygones de notre chaîne, intérieur et extérieur, vont se fermer en angles, c. à d. que les sommes des angles, obtenues par le calcul des triangles dans les deux polygones, seront des valeurs théoriques connues. Nous pouvons écrire ces équations sous la forme symbolique

$$\frac{1}{2} \Sigma P_w = 90^\circ (r_w - 2)$$

$$\frac{1}{2} \Sigma P_z = 90^\circ (n_z - 2) \quad (19)$$

Lorsque la chaîne fermée est composée de figures centrales ou de quadrilatères géodésiques ou de ces deux éléments en même temps, alors aux deux équations polygonales de ci-dessus viendront s'ajouter encore les équations conditionnelles, résultant de ces éléments composants et en nombre égal à celui des figures centrales ou des quadrilatères géodésiques. Dans ce cas le polygone intérieur restera sans changement, tandis que le polygone extérieur devrait être choisi de façon à avoir l'enchaînement des triangles simples, présentés sur la figure 5. Le moyen le plus simple d'arriver à ce but sera de prendre comme ligne polygonale extérieure la ligne joignant successivement les centres des figures polygonales élémentaires.

En marquant les sommets du polygone intérieur de notre enchaînement schématique (fig. 5) par les nombres pairs 2, 4, 2i, 2n_w et ceux du polygone extérieur par les nombres impairs 1, 3, (2i - 1), (2n_z - 1), nous obtiendrons pour le calcul des angles des polygones intérieurs et extérieurs les formules générales suivantes:

$$\begin{aligned}
 P_{2i} &= 360^\circ - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{-1,-2}} \right)_{2i(2i-1)(2i-2)} - \\
 &\quad - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{-1,+1}} \right)_{2i(2i-1)(2i+1)} - \\
 &\quad - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{+1,+2}} \right)_{2i(i+1)(2i+2)} \quad (p) \\
 P_{(2i+1)} &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{0,-1}} \right)_{(2i+1)2i(2i-1)} + \\
 &\quad + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{0,+1}} \right)_{(2i+1)2i(2i+2)} + \\
 &\quad + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{+2,+3}} \right)_{(2i+1)(2i+2)(2i+3)}
 \end{aligned}$$

L'indice général placé au delà des parenthèses indique les sommets des triangles qui nous servent à calculer les éléments composants de l'angle P_{2i} ou de P_(2i+1), les indices aux **a** définissent le côté opposé au sommet P_{2i} ou P_(2i+1), en outre pour la clarté on a admis 2i = 0.

Ces formules nous laissent voir que le problème est réduit aux équations du type (14) ou, dans sa forme développée au type (17).

Dans notre cas d'enchaînement des triangles nous n'avons pas à répéter ces formules en détail et nous nous bornerons à les présenter en forme abrégée. Désignons tous les angles des triangles aux sommets du polygone intérieur par P_w, où alors

$$\frac{P_w}{2} = \Sigma_1 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a} \right)_w$$

et où Σ_1 est la somme des angles composant le sommet en question.

Désignons de même pour le polygone extérieur

$$\frac{p_z}{2} = \Sigma_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a}_z \right)$$

En tenant compte de ces désignations nous allons obtenir les équations polygonales conditionnelles sous la forme analogue à (17 bis) de la façon suivante:

1) le polygone intérieur:

$$\Sigma S'_{ik} (a_{ik}) + \left\{ \Sigma_2^{2n_w} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a}_w \right) - 90^0 (n_w + 2) \right\} \sin 1'' = 0 \quad (20)$$

2) le polygone extérieur:

$$\Sigma S''_{ik} (a_{ik}) + \left\{ \Sigma_1^{2n_z-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a}_z \right) - 90^0 (n_z - 2) \right\} \sin 1'' = 0 \quad (21)$$

Dans une chaîne fermée moins uniforme que celle de la fig. 5 les équations (20) et (21) d'une façon générale seront en vigueur, malgré l'inévitable complication en numération des sommets du polygone extérieur, particulièrement aux endroits de jonction de plus de trois triangles, ce qui aura comme résultat d'augmenter le nombre des points du polygone extérieur par rapport à celui du polygone intérieur. En outre le nombre des composants à certains points des formules (P) ne sera pas trois, mais quatre et même cinq.

La transcription des coefficients S_{ik} à la base des formules (15) et (16) peut se faire presque automatiquement.

D) Pour orienter notre triangulation par rapport au méridien nous devons déterminer à l'aide des observations astronomiques l'azimut d'au moins d'un côté de la triangulation.

Si nous n'avons observé qu'un seul azimut, notre réseau sera orienté d'une façon univoque. Si par contre nous avons mesuré deux ou plusieurs azimuts il sera alors question de mettre en concordance les mesurages géodésiques et astronomiques.

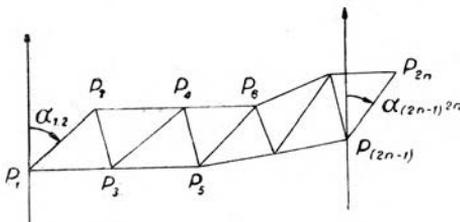


Fig. 6.

la fig. 6, même dans le cas d'un réseau de triangulation plus compliqué.

Supposons qu'on ait déterminé par les observations astronomiques les azimuts des deux côtés P_1P_2 et $P_{(2n-1)}P_{2n}$, unis par une chaîne de triangles adjacents. Nous pouvons choisir toujours une telle voie de passage d'un azimut à l'autre, comme dans

Pour calculer les azimuts des côtés successifs, en partant de l'azimut α_{12} , nous allons suivre un itinéraire en zigzags $P_1 P_2 P_3 \dots P_{(2n-1)} P_{2n}$.

Dans le cas précédent nous n'avons pas tenu compte de la courbure de la surface terrestre, mais dans ce nouveau problème cette condition ne peut être omise, même dans le cas d'une chaîne d'une petite étendue, puisque l'influence de la convergence des méridiens se fait sentir sensiblement surtout si notre chaîne s'étend dans la direction ouest-est.

Quant aux triangles mêmes nous allons les traiter comme figures planes. Nous pouvons calculer l'influence de la convergence des méridiens aux points P_1 et $P_{(2n-1)}$, en connaissant la différence entre les longitudes géographiques de ces points, ainsi que la latitude du point final, en appliquant la formule rapprochée

$$\gamma = (\lambda_{(2n-1)} - \lambda_1) \sin \varphi_{(2n-1)}$$

Un procédé plus exact serait le suivant. Si nous désignons les différences des azimuts réciproques d'un côté par $(180_0 + \Delta\alpha_{(i-1) i})$, c. à d. qu'en général

$$\Delta\alpha_{ik} = \alpha_{ki} - \alpha_{ik} \mp 180^0$$

alors, en admettant la longueur des côtés aproximativement égale à 20 km, la valeur $\Delta\alpha_{ik}$ peut être calculée par la formule

$$\Delta\alpha_{ik} = \frac{\alpha_{ik} \sin \alpha_{ik}}{N_k \sin 1''} \cdot \operatorname{tg} \varphi_k - \frac{\alpha_{ik} \cdot \sin \alpha_{ik} \cdot \cos \alpha_{ik}}{2 R^2 \sin 1''} = \gamma_{ik} - \varepsilon_{ik} \dots (22)$$

Nous pouvons également calculer les valeurs auxiliaires — la latitude φ et la différence de longitude $\Delta\lambda$, — moyennant des formules simplifiées, mais pour ce but suffisamment exactes

$$\varphi_k = \varphi_i + \frac{a_{ik} \cos \alpha_{ik}}{M_i \sin 1''}$$

$$\Delta\lambda_{ik} = \lambda_k - \lambda_i = \frac{a_{ik} \sin \alpha_{ik}}{N_k \sin 1''} \sec \varphi_k$$

Les rayons de courbure M, N et R seront donnés par les tables géodésiques correspondantes.

En passant maintenant au calcul des azimuts géodésiques successifs et en supposant que le point astronomique de départ équivaut à l'azimut géodésique, nous aurons:

$$\alpha_{23} = (\alpha_{12} + 180^0 + \Delta\alpha_{12}) - P_{123}$$

$$\alpha_{34} = (\alpha_{23} - 180^0 + \Delta\alpha_{23}) + P_{234}$$

.....

$$\alpha_{(2n-1) 2n} = \alpha_{12} + \Sigma \Delta\alpha \pm 180^0 - P_{123} + P_{234} - P_{345} + \dots \mp P_{(2n-2) (2n-1) \cdot 2n} \quad (23)$$

La condition (23) ne sera satisfaite par les valeurs des angles P, provenant du calcul des côtés mesurés, qu'après l'introduction de certaines corrections à ces angles, c. à d. que sous les angles P dans l'équation (23) nous avons à entendre les grandeurs

$$\frac{1}{2} P_{ik} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{ik}} \right)_{ikl} + (a_{ik}) s_{ik} + (a_{kl}) s_{kl} + (a_{il}) s_{il}$$

où les coefficients s sont extraits des formules (15) et (16).

De cette façon l'équation des azimuts sera de nouveau réduite à la forme des équations (17) ou (17 bis) et aura l'aspect suivant, où l'indice supérieur désignera le numéro consécutif du triangle

$$\begin{aligned} & -s'_{12}(a_{12}) - s'_{13}(a_{13}) - \{s'_{23} - s''_{23}\} (a_{23}) + s''_{24} (a_{24}) + \{s''_{34} - s'''_{34}\} (a_{34}) - \dots \\ & \pm s^{(2n-2)} (a_{(2n-1)2n}) + \left\{ -\operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{12}} \right)_{123} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{24}} \right)_{234} - \dots \right. \\ & \left. \pm \operatorname{arctg} \frac{\pi}{p-a_{(2n-2)2n}} + \frac{1}{2} (180^\circ + \Sigma \Delta \alpha + (\alpha_{12} - \alpha_{(2n-1)2n})) \right\} = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

Si le nombre des azimuts mesurés est considérable, le nombre des équations de condition de la forme (24) sera égale à celui des azimuts observés moins un.

IV.

Nous allons passer maintenant à la solution du problème de la compensation de la triangulation du type nouveau sur l'ellipsoïde. Nous nous limiterons aux triangles aux côtés de 20 km, puisque nous savons par l'étude des publications qui viennent de paraître, que la précision du mesurage de la longueur par les nouvelles méthodes est assurée à cette distance.

En limitant la longueur des côtés à 20 km, ce qui présente à peine 0,003 du rayon terrestre, nous pouvons considérer de tels triangles, ellipsoïdiques en principe, comme triangles sphériques, situés sur une sphère de rayon R, égale au rayon moyen de l'ellipsoïde en un des sommets, quoique pour avoir plus de précision nous aurions dû considérer une moyenne arithmétique de trois rayons de courbure aux trois sommets. Cette simplification admise causera une erreur beaucoup plus petite que celle d'observation.

Le point de départ pour la solution de notre problème sur le plan a été la formule (1) qui dans le cas d'un triangle sphérique situé sur une sphère de rayon R aura la forme

$$\operatorname{tg} \frac{P_1}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{p-a_{12}}{R} \cdot \sin \frac{p-a_{13}}{R}}{\sin \frac{p}{R} \cdot \sin \frac{p-a_{23}}{R}}} \quad (25)$$

Vu que les arguments des fonctions trigonométriques qui se trouvent sous le signe de racine présentent dans notre cas des arcs très petits, ne dépassant pas environ 0,005 du rayon, nous pouvons, en développant ces fonctions en séries ne tenir compte que des deux premiers termes. De telle façon la formule (25) aura l'aspect suivant:

$$\operatorname{tg} \frac{P_1}{2} = \sqrt{\frac{(p-a_{12})(p-a_{13})}{p(p-a_{23})}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{12 R^2} \left((p-a_{12})^2 + (p-a_{13})^2 - (p-a_{23})^2 - p^2 \right) \right\}$$

En mettant

$$(p-a_{12})^2 + (p-a_{13})^2 - (p-a_{23})^2 - p^2 = k^2$$

et en appliquant les désignations précédemment employées, la formule ci-dessus peut être présentée sous la forme simplifiée que voici:

$$\operatorname{tg} \frac{P_1}{2} = \frac{\pi}{p-a_{23}} \left\{ 1 - \frac{k^2}{12 R^2} \right\} \quad (25 \text{ bis})$$

La formule (25 bis) a une structure semblable à celle de (1), et c'est pourquoi le procédé à suivre, pour déterminer l'influence des erreurs de mesurage des côtés sur l'angle du triangle ellipsoïdique, calculé moyennant la formule (25 bis), pourra être en principe le même que dans le cas des triangles plans.

Il est évident que les formules à obtenir maintenant pour les dérivées partielles

$$\frac{\delta}{\delta a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi \left\{ 1 - \frac{k^2}{12 R^2} \right\}}{p-a_{23}}$$

seront plus compliquées par suite de l'introduction du facteur k^2 dépendant aussi de a_{12} , a_{13} , a_{23} . Pour nous en convaincre, nous citerons une de ces dérivées dans toute son étendue:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta a_{12}} \operatorname{arctg} \frac{\pi \left\{ 1 - \frac{k^2}{12 R^2} \right\}}{p-a_{23}} &= \frac{1}{4} \frac{\Delta_{123}}{a_{12} a_{13}} \left\{ \left(-\frac{1}{p-a_{12}} + \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12 R^2} \left(k^2 (p-a_{23} + 1) + 8a_{13} \right) \right\} \end{aligned}$$

Nous voyons donc que ce procédé n'est pas à recommander et que nous devons chercher une autre solution, plus simple.

La voie, que nous nous proposons de suivre, aura pour principe de garder les mêmes coefficients des équations conditionnelles comme dans la solution plane et de trouver alors quelles modifications devraient être apportées aux termes libres de ces équations,

pour que les équations ainsi modifiées de la triangulation plane correspondent aux conditions de l'ellipsoïde. Considérons par exemple une figure centrale, constituée par les lignes géodésiques, dont les longueurs respectives seront a_{ik} (fig. 7).

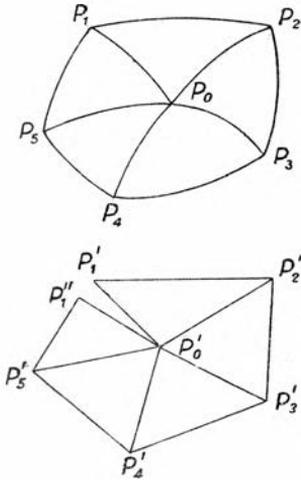


Fig. 7.

Nous savons du théorème de Legendre que les angles respectifs d'un triangle sphérique (ellipsoïdique) $P_0P_1P_2$ seront plus grands d'un tiers de l'excès sphérique que les angles respectifs d'un triangle plan $P'_0P'_1P'_2$ ayant les mêmes côtés que le triangle sphérique. Ainsi nous pouvons écrire:

$$P_{iok} = P'_{iok} + \frac{1}{3} \varepsilon_{iok} \quad (26)$$

L'excès sphérique ε , exprimé en mesure angulaire, sera donné par la formule

$$\varepsilon_{iok} = \frac{\Delta_{iok}}{R^2_0 \sin 1''} \quad (27)$$

Pour les triangles de notre triangulation, très petits en dimension par rapport au rayon, la surface du triangle ellipsoïdique pourra être substituée par celle du triangle plan $P'_iP'_oP'_k$ avec une erreur infiniment petite et sans aucune importance pour la détermination de ε , et alors

$$\Delta_{iok} = \sqrt{P_{iok}(P - a_{oi})(P - a_{ok})(P - a_{ik})} = (P \cdot \pi)_{iok} \quad (28)$$

Ainsi nous n'avons aucune difficulté pour calculer ε de la formule (27).

Imaginons maintenant de placer sur un plan l'un à côté de l'autre, tous les triangles plans correspondant aux triangles sphériques conformément au théorème de Legendre, alors nous allons voir que, puisque tous les angles au sommet P'_0 sont plus petits que les angles formés par les lignes géodésiques P_0 sur l'ellipsoïde, il se formera une fente entre la position initiale de la ligne droite $P'_0P'_1$ et la position $P'_0P''_1$ de la même ligne présentée par le côté du dernier triangle de notre figure centrale; la valeur angulaire de cette fente $P'_1P'_0P''_1$ est égale au tiers de la somme des excès sphériques de nos triangles.

Il en résulte que, si dans une figure centrale sur l'ellipsoïde la somme des angles au point central P_0 aurait dû être exactement 360° , dans la figure centrale plane remplaçant celle-ci, la somme des angles au sommet P'_0 sera égale à

$$360^\circ - \frac{1}{3} \Sigma \varepsilon_{iok}$$

Par conséquent l'équation conditionnelle pour la figure centrale sur l'ellipsoïde sera la même que (17) à la condition que le terme libre de l'équation (17a) sera substitué par

$$\omega = (\Sigma \operatorname{arctg} \frac{\pi_{iok}}{p-a_{ik}} + \frac{1}{6} \Sigma \varepsilon_{iok} - 180^{\circ}) \sin 1'' \quad (17b)$$

De cette façon le problème sur l'ellipsoïde peut être simplement résolu comme un problème plan.

De même pour le quadrilatère géodésique, qui est une figure élémentaire de triangulation et dont on fait un fréquent usage en pratique, le passage de l'ellipsoïde au plan ne présentera pas de grandes difficultés.

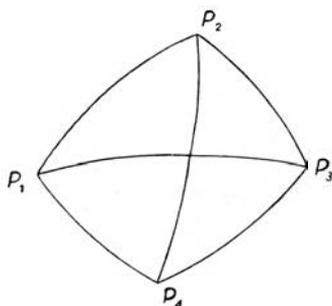


Fig. 8.

Supposons que la figure 8 présente un quadrilatère géodésique $P_1P_2P_3P_4$ sur l'ellipsoïde, où on a mesuré les longueurs des arcs a_{ik} , formant les côtés et les diagonales du quadrilatère.

Si, en partant de ces données, nous calculons les angles des triangles correspondants, nous devons comme dans le cas d'un quadrilatère sur le plan, remplir la condition p. ex. que

$$\angle P_2P_3P_4 = \angle P_2P_3P_1 + \angle P_1P_3P_4$$

En substituant les triangles sphériques par les triangles plans observons, d'après le théorème de Legendre, qu'il existe entre les angles sphériques et les angles plans la relation

$$P_{ikl} = P'_{ikl} + \frac{1}{3} \varepsilon_{ikl}$$

et qu'alors l'équation de condition dans notre quadrilatère sphéroïdal sera la même que l'équation (18), où le terme libre (18 a) aura la valeur

$$\omega = \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\pi_{234}}{p-a_{24}} - \operatorname{arctg} \frac{\pi_{132}}{p-a_{12}} - \operatorname{arctg} \frac{\pi_{134}}{p-a_{14}} - \frac{1}{6} \varepsilon_{124} \right\} \sin 1'' \quad (18 b)$$

Pour une chaîne fermée de triangulation sur l'ellipsoïde les équations de condition n'ont pas à subir une modification essentielle, c. à d. comme dans le cas sur le plan, les sommes des angles des polygones intérieur et extérieur devraient donner une valeur théorique, notamment d'une façon générale

$$\Sigma P = 180 \cdot (n - 2) + E$$

ou E est l'excès sphérique d'un polygone ellipsoïdal dont la grandeur sera calculée de la formule (27), en y remplaçant la surface du triangle par celle d'un polygone correspondant.

En ce qui concerne la figure 5, et en considérant les triangles qui y sont présentés comme ellipsoïdaux, nous allons appliquer au calcul de tels triangles le théorème de Legendre, et alors dans les équations de condition (20) et (21) les coefficients n'auront pas changé, mais les termes libres seront différents.

Marquons les angles des différents triangles plans qui ont été substitués, d'après le théorème Legendre, aux triangles sphéroïdaux, situés aux sommets du polygone intérieur avec un indice w , et ceux situés aux sommets du polygone extérieur avec l'indice z , et rappelons que d'après la figure 5 les indices w sont les nombres pairs, et les z — impairs. Désignons outre l'excès sphérique des triangles, ayant pour base le côté du polygone intérieur par ε_w , et celui des triangles, ayant pour base le côté du polygone extérieur par ε_z . Avec ces désignations les termes libres des équations de condition (20) et (21) pour une chaîne fermée sur l'ellipsoïde seront de la forme suivante:

$$\omega_w = \left\{ \sum_2^{2n_w} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a} \right)_w + \frac{1}{3} \sum \varepsilon_w + \frac{1}{6} \sum \varepsilon_z - (90^\circ (n_w + 2) + \frac{1}{2} E_w) \right\} \sin I'' \quad (20a)$$

$$\omega_z = \left\{ \sum_1^{2n_z-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a} \right)_z + \frac{1}{6} \sum \varepsilon_w + \frac{1}{3} \sum \varepsilon_z - (90^\circ (n_z - 2) + \frac{1}{2} E_z) \right\} \sin I'' \quad (20b)$$

Entre E_w et E_z il existe la relation

$$E_z = E_w + \frac{\sum \pi}{R^2 \sin I''} \quad (29)$$

où $\sum \pi$, en accord avec (28), indique la surface de notre chaîne de triangulation fermée.

Quand on aborde la solution de ce problème, il se présente une certaine difficulté ou plutôt un calcul supplémentaire, notamment celui de la surface renfermée par le polygone intérieur, ou extérieur, car quand on connaît une de ces grandeurs on obtient l'autre par la formule (29), où les grandeurs p et π sont connues, et R est le rayon de courbure pour la latitude du point central du réseau de triangulation. L'exactitude du calcul de la surface du polygone peut être d'un ordre pas trop élevé, puisque, comme il résulte de la formule (27), pour obtenir une exactitude de 0'',01 près, il nous suffit de connaître la surface du polygone à 2 km² près. On peut alors considérer le polygone curviligne comme un polygone plan ayant ses côtés égaux aux longueurs des arcs correspondants, et en connaissant les angles plans obtenus à l'aide de la formule (1) il suffira de calculer les coordonnées des sommets par rapport à un système rectangulaire quelconque et ensuite la surface même

du polygone. Le plus facile serait de choisir un des côtés comme axe des X, et un de ces points extrêmes comme origine du système.

La surface F sera obtenue par la formule comme:

$$2F = \sum y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) = \sum x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

Dans le cas des équations de conditions azimutales l'équation (23) est en même temps une équation de condition pour les triangles ellipsoïdaux, si nous considérons les angles P_{ikl} comme sphériques. Alors l'équation (24) conservera aussi sa valeur quand dans son terme libre les angles plans seront remplacés par des angles sphériques, c. à d. quand les excès sphériques correspondants γ seront introduits. De cette façon le terme libre de l'équation (24) sera:

$$\omega = \left\{ -\operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{13}} \right)_{123} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{p-a_{24}} \right)_{234} - \dots \pm \operatorname{arctg} \frac{\pi}{p-a_{(2n-2)2n}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (\varepsilon_{123} - \varepsilon_{234} + \dots) + \frac{1}{2} (180^\circ + \sum \Delta\alpha + (\alpha_{12} - \alpha_{(2n-1)2n})) \right\} \quad (24a)$$

V.

Les considérations précédentes ont une valeur plutôt théorique, en attendant que l'exactitude et la facilité de l'exécution du mesurage des distances supérieures à 20 km soient telles que la nouvelle méthode de triangulation puisse devenir universelle. Mais dès aujourd'hui il se pose un problème pratique, celui de l'application de la nouvelle méthode à la détermination de la position d'un point intersecté d'une ou de plusieurs bases (par ex. de deux), dont la situation est donnée dans un système déterminé des coordonnées planes.

Les distances sont mesurées ordinairement d'un point P_0 aux points donnés P_i à l'aide d'une méthode, nommée par abréviation celle du radar. Cette méthode ne donne pas encore une haute précision, pourtant elle paraît suffisante dans certains cas p. ex. pour les mesurages côtiers en mer.

L'analyse du problème et de la méthode d'observation laisse voir clairement qu'il n'y a ici aucune différence entre l'intersection et la résection,—les deux cas étant identiques.

Supposons donc que d'un point P_0 on ait mesuré les côtés a_{01} , a_{02} aux points P_1 et P_2 , dont les coordonnées rectangulaires planes sont

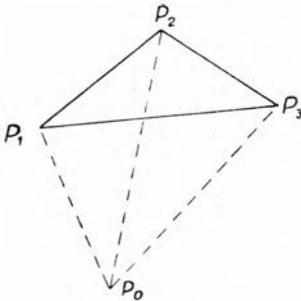


Fig. 9.

connues. (fig. 9). En utilisant ces coordonnées nous allons calculer le gisement et la longueur du côté P_1P_2 (base) par les formules connues

$$\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \beta_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \beta_{12}}$$

Ensuite nous pouvons calculer l'angle P_{012} du triangle $P_0P_1P_2$ par la formule

$$P_{012} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi_{012}}{P_{012} - a_{02}}$$

et le gisement

$$\beta_{10} = \beta_{12} + P_{012}$$

Et enfin nous obtenons les coordonnées du point cherché

$$x_0 = x_1 + a_{01} \cos \beta_{10}$$

$$y_0 = y_2 + a_{01} \sin \beta_{10}$$

Pour le contrôle nous pouvons encore calculer:

$$\beta_{20} = \beta_{21} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi_{021}}{P_{021} - a_{01}}$$

$$x_0 = x_2 + a_{02} \cos \beta_{20}$$

$$y_0 = y_2 + a_{02} \sin \beta_{20}$$

Dans le cas où nous avons d'autres points observés aux coordonnées connues et dans le même système de coordonnées, il sera question de compensation du point intersecté plusieurs fois.

Supposons que nous ayons trois points fixes (fig. 9). Dans ce cas il se formera une condition à laquelle les longueurs observées doivent satisfaire, notamment la condition connue du quadrilatère:

$$P_{102} + P_{203} = P_{103}$$

Dans sa forme dépendant des données observées a_{01} , a_{02} , a_{03} , cette équation sera analogue à (18) avec cette condition que les côtés joignant les points fixes, c. à d. a_{12} , a_{23} et a_{13} restent sans changement.

En tenant compte de ceci, l'équation de condition pour un point intersecté de deux bases (trois points) aura l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
& (a_{01}) \left\{ \frac{1}{4} \frac{\Delta_{102}}{a_{01} a_{02}} \left(-\frac{1}{p-a_{01}} + \frac{1}{p-a_{02}} - \frac{1}{p-a_{12}} - \frac{1}{p_{102}} \right) - \frac{1}{4} \frac{\Delta_{103}}{a_{01} a_{03}} \cdot \left(-\frac{1}{p-a_{01}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{p-a_{03}} - \frac{1}{p-a_{13}} - \frac{1}{p_{103}} \right) \right\} + (a_{02}) \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta_{203}}{a_{02} a_{03}} \left(-\frac{1}{p-a_{02}} + \frac{1}{p-a_{03}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{p_{203}} \right) + \frac{1}{4} \frac{\Delta_{102}}{a_{01} a_{02}} \left(+\frac{1}{p-a_{01}} - \frac{1}{p-a_{02}} - \frac{1}{p-a_{12}} - \frac{1}{p_{102}} \right) \right\} + (a_{03}) \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta_{203}}{a_{02} a_{03}} \right. \\
& \left(\frac{1}{p-a_{02}} - \frac{1}{p-a_{03}} - \frac{1}{p-a_{23}} - \frac{1}{p_{203}} \right) - \frac{1}{4} \frac{\Delta_{103}}{a_{01} a_{03}} \left(+\frac{1}{p-a_{01}} - \frac{1}{p-a_{03}} - \frac{1}{p-a_{13}} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{p_{103}} \right) \right\} + \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\pi_{102}}{p-a_{12}} + \operatorname{arctg} \frac{\pi_{203}}{p-a_{23}} - \operatorname{arctg} \frac{\pi_{103}}{p-a_{13}} \right\} = 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

Avec trois bases indépendantes nous aurions obtenu deux équations.

VI.

En résumant les résultats de l'étude analytique de notre problème, nous pouvons arriver aux conclusions suivantes.

La triangulation basée uniquement sur le mesurage des côtés des triangles, a cet avantage indiscutable qu'elle donne la même exactitude linéaire sur toute l'étendue de la triangulation, et elle peut former alors une base fondamentale des plus sûres pour les mesurages de détail, où les observations linéaires constituent l'élément primordial. Cette base serait d'une exactitude beaucoup supérieure à celle de la triangulation d'aujourd'hui. Ceci même dans le cas où l'exactitude de mesurage des côtés des triangles aurait baissé jusqu'à 1:200.000 près, ce qui fait $\pm 0,1$ m à 20 km.

Les angles nécessaires au calcul définitif d'une telle triangulation, obtenus par la voie du calcul, seront d'une exactitude uniforme dans tout le système et ne seront pas chargés des erreurs d'ordre systématique provenant de telles sources comme la réfraction latérale de lumière, les phases dans l'éclairage des signaux, le mouvement des signaux sous l'influence des rayons solaires et beaucoup d'autres.

Vu cela nous pouvons former la thèse que l'erreur de transfert des azimuts d'un côté à l'autre et des coordonnées géographiques sera de même plus petite que dans le cas de mesurage des angles.

Le calcul d'un tel réseau, et en particulier sa compensation serait beaucoup plus simple surtout par suite d'un nombre

plus petit des équations de condition et alors toutes ces équations seraient d'une structure uniforme.

Et quoique les calculs préparatoires paraissent ici être plus pénibles, ils ne sont pas en réalité ni plus nombreux ni plus compliqués et peuvent être aisément effectués par plusieurs personnes simultanément.

Le nouveau type de triangulation permet de raccourcir les longueurs des côtés du réseau primordial à 20 km sans aucune atteinte à la précision, et même avec un accroissement de l'exactitude qui dépasse les meilleurs résultats obtenus jusqu'à nos jours. De cette façon nous obtiendrons un des réseaux des points fondamentaux, uniforme pour une grande étendue du terrain, ce qui aura un grand effet au point de vue pratique.

Dans le domaine scientifique, la nouvelle méthode de triangulation combinée avec les observations de la force de pesanteur et les déterminations astronomiques, pourra sans doute susciter les nouvelles conceptions de beaucoup de problèmes concernant la forme du géoïde et le parcours des anomalies causées par l'emplacement non uniforme des masses dans l'écorce terrestre.

Une telle triangulation a pourtant son côté faible. C'est que les méthodes de mesurage direct des côtés des triangles ne sont pas encore tellement au point qu'elles puissent être appliquées pour le mesurage en masse. Il semble cependant que ces méthodes ne seront ni plus coûteuses ni plus compliquées que celles d'aujourd'hui.

En tous cas il sera nécessaire de procéder aux travaux d'essai à une vaste échelle pour arriver à des décisions définitives.

Une conclusion générale pourrait être exprimée de la façon suivante. Nous sommes au seuil de modifications profondes dans les méthodes de triangulation.

Et si, durant une certaine période de temps, le mesurage des angles conservera encore son rôle prépondérant, on peut déjà entrevoir le temps non éloigné où le mesurage des bases par les instruments de précision de construction actuelle et la fondation des réseaux basiques ayant pour but la détermination des côtés de départ pour la triangulation, seront totalement substitués par les nouvelles méthodes radio-optiques de mesurage de grandes distances.

Tout cela, grâce à la détermination plus fréquente des côtés des triangles, aura pour résultat un accroissement sensible de l'exactitude du réseau de triangulation, ayant désormais un caractère mixte, angulo-linéaire.

